

OTDK-DOLGOZAT

Plank Péter

2013

Affin pontfolyamatok és a hitelderivatívák modellezése

Affine Point Processes and Credit Derivatives Modeling

Plank Péter

Kézirat lezárva: 2011. március 28.

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	1
2	Pont- és számláló folyamatok	4
2.1	Bevezető fogalmak és összefüggések	4
2.2	Általános elmélet	6
2.3	Mértékcseré	12
2.4	Duplán sztochasztikus folyamatok	16
3	Az intenzitás modellezése	19
3.1	Motiváció	19
3.2	Az általánosított Laplace-transzformált	21
3.3	Affin pontfolyamatok	24
3.4	A transzformált invertálása	29
4	Hitelderivatívák árazása és fedezése	32
4.1	Portfólió hitelderivatívák	32
4.2	Az árazás alapelve	34
4.2.1	Index swap	34
4.2.2	Tranche swap	35
4.2.3	Credit swap	36
4.3	A valós és a martingál mérték	37
4.4	A portfólióelemek intenzitása	38
4.4.1	Véletlen ritkítás	39
4.4.2	A ritkító folyamat simítása	42
4.5	A modell kalibrálása	45
4.6	A fedezési stratégia kialakítása	46
5	Összefoglalás	48
	Irodalomjegyzék	49

1

Bevezetés

A pénzügyi válság 2007-es kezdete óta cikkek sorozata jelent meg a matematikai pénzügyek bírálatáról, sokszor kizárólagos bűnbakként nevezve meg a terület művelőit. A válság kirobbanásáért felelősnek tartott hitelderivatívák modellezése valóban nem volt problémamentes, az iparági sztenderd Gauss-kopula modell túlzottan leegyszerűsítő, feltevéseinek többsége nem indokolható, következtetései sokszor tévesek, mégis – bizonyos módosításokkal élve – a mai napig használatban van. A dolgozat célja, hogy egy elméletileg jobban indokolható modellezési filozófia alapján válaszolni próbáljon a banki működés alapvető kérdésére: hogyan árazzuk, illetve ez alapján hogyan fedezzük egy portfólió hitelderivatívában (nevezetesen egy szintetikus, azaz CDS-ekből álló portfólióval rendelkező CDO-ban) fennálló pozíciónkat? A válasz keresése során talán jobban érthető válik, miért is okozott nehézséget e termékek modellezése, s miért nem terjedtek el a helytállóbb módszerek.

Egy portfólió hitelderivatíva értéke végső soron a portfóliót alkotó, hitelkockázattal terhelt termékek csődidejeinek és a csődök során realizálódó veszteség eloszlásától függ. A strukturális modellek (melyek közé a Gauss-kopula is tartozik) e csődöket közvetlen, pl. a vállalati kötvényekre vonatkozó CDS-ekből álló portfólió esetében a vállalatok értékének alakulásából próbálják visszakövetkeztetni, amihez viszont jelentős számú, a legtöbbször megkérdőjelezhető feltételezéssel kell élnünk. A dolgozatban épp ezért egy másik utat, a redukált formájú modellek filozófiáját követjük, amikor a portfóliót érő csődök közvetlen modellezése a célunk. A csődidők vizsgálata ekvivalens a csődök számát az adott időpillanatban megadó ugrófolyamat tanulmányozásával. Egy csőd esetén azonban nem feltétlenül vész el a teljes befektetés, hiszen számítani lehet bizonyos megtérülésre. Ennek figyelembevételére meg kell engednünk, hogy a korábbi ugrófolyamatunk egységni helyett véletlen nagyságban növekedjen a csőd bekövetkezésekor. Vegyük észre, hogy a helyzet nagyon hasonló ahhoz, amivel az operációs kockázat meghatározásakor szembesülünk. E terület alapmodellje szerint a hibák bekövetkezését Poisson-folyamattal, míg

a kár nagyságát lognormális eloszlású valószínűségi változóval szokás modellezni, melyek együtt egy összetett Poisson-folyamatot határoznak meg. A hitelderivatívák esetéhez hasonlóan végső soron itt is az egyes időpontokban fennálló kumulatív kárnagyság (tehát az összetett Poisson-folyamat adott időpontbeli értékének) eloszlását szeretnénk megadni. A feladat megoldása azonban már ezen az egyszerű szinten is komoly kihívást jelent, hiszen a keresett eloszlást közvetlenül nem tudjuk kiszámolni. A két közismert technika a Laplace-transzformált sorbafejtésére, illetve a Fourier-transzformált invertálására épül. Nem meglepő tehát, hogy a hitelderivatívák veszteségfolyamatának specifikálása után is e két transzformált meghatározása a célunk.

Míg egy összetett Poisson-folyamat esetén e transzformáltak kiszámítása nem okoz gondot, addig általánosabb, a valóságot jobban leíró veszteségfolyamatoknál ez már komoly nehézséget jelent. A továbblépés szükségessé teszi a számláló folyamatok általános tanulmányozását, az előrejelezhető kompenzátor és a vele szoros kapcsolatban lévő intenzitás fogalmának megismerését, mely a sztochasztikus folyamatok kevésbé közismert definícióinak és összefüggéseinek területére vezet bennünket. Elsőre talán meglepő módon kiderül, hogy kapcsolat található a veszteségfolyamatok Laplace-transzformáltja és a kamatlábmodellek között, lehetővé téve ez utóbbi témakör széleskörű irodalmának felhasználását. Sajnálatos módon csak a legritkább esetben vagyunk képesek analitikus formulákat adni a transzformáltak kifejezésére, ám bizonyos megkötések mellett elkerülhetjük a költséges szimulációs technikákat. A folyamatosztályunk a korlátozások után is viszonylag bő marad, magában foglalja a közismert CIR- és Vasicek-modelleket, melyek így bekerülnek a hitelderivatívák modelljei közé is. E két specifikáció előnye, hogy a Laplace-transzformált analitikusan kifejezhető, hátrányuk viszont, hogy nem képesek reprodukálni a csődök klasztereződésének jelenségét, a veszteségek öngerjesztő voltát. Az e tulajdonságot figyelembe vevő modellek esetén azonban a transzformáltakhoz már csak differenciálegyenletek numerikus megoldásával juthatunk, melyek viszont még mindig hatékonyabb eszközök a szimulációs eljárásoknál.

A portfóliót érő veszteségek eloszlásának meghatározása után térhetünk csak rá a fedezés kérdésre. Ehhez szükséges, hogy meghatározzuk a portfóliót alkotó termékek (egy ugrást tartalmazó) veszteségfolyamatát. A megoldás keresése során ismét a sztochasztikus folyamatok elméletének kevésbé ismert területére kell kitérőt tennünk, hogy a portfólióra vonatkozó becslésünk alapján a piaci adatok felhasználásával következtetni tudjunk az alkotóelemek viselkedésére.

A modell kidolgozása után a piaci adatokból egy kétlépéses optimalizációs eljárás során határozhatjuk meg a fedezési stratégiánkat: elsőként egy nemlináris optimalizációval meghatározzuk a portfóliót érő veszteségfolyamatot specifikáló paramétereket, majd egy kvadratikus programozási feladat megoldásával (kihasználva, hogy a portfóliót kereske-

dett termékek – nevezetesen CDS-ek – alkotják) visszaszámíthatjuk az egyes alkotóelemek csődidejének eloszlását.

Láthatjuk tehát, hogy egy bank napi szintű működésében alapvető jelentőségű kérdés megválaszolása is a matematika különböző, önmagukban is rendkívül kiterjedt területeinek összekapcsolódását vonja maga után: sztochasztikus folyamatok, Laplace- és Fourier-transzformáció, illetve invertálásuk, valamint a kamatlábak elmélete, míg a gyakorlati megvalósítás során ezeken felül szükségünk van a numerikus módszerek és az operációkutatás egyes területeinek ismeretére. Így talán már nem olyan meglepő, hogy miért vált a Gauss-kopula egyszerű, könnyen megérthető, és az analitikus formula miatt könnyen számolható modellje a hitelderivatívák sztenderd modelljévé.

A dolgozat felépítése

A dolgozat első részében definiáljuk a pont- és számláló folyamatokat, illetve az intenzitás fogalmát, valamint áttekintjük a hozzájuk kapcsolódó legfontosabb összefüggéseket. Megismerkedünk a Girszanov-tétel egy analóg változatával, illetve belátjuk, hogy egy ekvivalens mértékcseré esetén is létezni fog az intenzitás. Definiáljuk a duplán sztochasztikus folyamatok numerikusan kedvező tulajdonságú, ám egy komoly elméleti hátránnyal rendelkező családját. A második részben egy ekvivalens mértékcseré segítségével összekapcsoljuk a számláló folyamatok és az intenzitásuk Laplace-transzformáltját, lehetővé téve a kamatlábmodellek alkalmazását, mely alapján bemutatunk egy számítási szempontból hatékony modellspecifikációt. Ezt követően áttekintjük a CDO-k és CDS-ek árazási alapelvét, majd a dolgozat zárásaként bemutatjuk az alkotóelemek veszteségfolyamatának visszaszámítására szolgáló technikát, illetve a fedezési stratégia kialakításának módszerét.

A dolgozatnak nem célja a létező matematikai modellek általános tárgyalása, egy részletes technikai áttekintés található többek között Brigo és szerzőtársai [2010] könyvében. A CDO-kkal kapcsolatos problémák empirikus vizsgálata iránt érdeklődő Olvasó számára pedig Barnett-Hart [2009] szakdolgozata ajánlható.

Pont- és számláló folyamatok

2.1 Bevezető fogalmak és összefüggések

A dolgozat hátralévő részében feltételezzük, hogy adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ teljes valószínűségi mező (azaz ha $A \in \mathcal{A}$, melyre $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor $\forall B \subseteq A$ esetén $B \in \mathcal{A}$), amelyen a vizsgált véletlen eseményeket és folyamatokat modellezzük. A dolgozatban vizsgált sztochasztikus folyamatok időtartományát (melyet Θ -val szokás jelölni) a nemnegatív valós számok alkotják, azaz $\Theta = \mathbb{R}_+$. Az esetek jelentős részében szintén feltesszük, hogy adott a téren egy $\mathcal{F} \doteq (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtráció is, mely teljesíti a szokásos feltételeket, azaz:

- $\mathcal{F}$ teljes, azaz $\mathcal{F}_0$ tartalmaz minden nullmértékű halmazt, továbbá
- $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, azaz $\mathcal{F}_{t+} \doteq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$.

Ha a valószínűségi mezőn esetleg több filtráció is adott, és hangsúlyozni szeretnénk, hogy egy adott X egy adott $\mathcal{F}$ filtrációra adaptált, akkor az $(X, \mathcal{F})$ jelöléssel hivatkozunk a folyamatra. A trajektóriák jellemzésére bevezetjük a következő két fogalmat.

2.1 Definíció

Egy folyamatot jobbról regulárisnak nevezünk, ha trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel (a tulajdonság francia rövidítésével élve használatos a càdlàg megnevezés is). Ha folyamat trajektóriái balról folytonosak és rendelkeznek jobb oldali határértékkel, akkor balról reguláris (vagy làdcàg) folyamatról beszélünk.

A következőkben csak olyan folyamatokkal foglalkozunk, melyek a fenti két típus valamelyikébe tartoznak.

A dolgozatban kiemelt szerepet játszanak az előrejelezhető folyamatok, így áttekintjük a hozzájuk kapcsolódó alapvető definíciókat és összefüggéseket.

2.2 Definíció

Legyen adott az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ struktúra. Jelölje $\mathcal{P}$ a $\Theta \times \Omega$ részhalmazából álló, a balról

reguláris adaptált folyamatok által generált σ -algebrát. Ekkor $\mathcal{P}$ elemeit előrejelezhető halmazoknak nevezzük. Egy X folyamatot előrejelezhetőnek (predictable) mondunk, ha mérhető $\mathcal{P}$ -re nézve.

Az előrejelezhetőséget szokás az előrejelezhető téglák által generált σ -algebrára való mérhetőséggel is jellemezni (ld. következő definíció), ám megmutatható, hogy esetünkben (mivel az időtartomány a $[0, \infty)$ intervallum) a két definíció ekvivalens.

2.3 Definíció

Legyen adott az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ struktúra. Jelölje $\mathcal{T}$ a $\{0\} \times F, F \in \mathcal{F}_0$ és $\{(s, t] \times F, F \in \mathcal{F}_s\}$ alakú téglák halmazát. Ekkor $\mathcal{T}$ elemeit előrejelezhető tégláknak nevezzük.

2.4 Állítás

Ha $\Theta = \mathbb{R}_+$, akkor az előrejelezhető téglák generálják az előrejelezhető halmazok σ -algebráját.

Az előrejelezhetőség fogalma tehát szemléletesen olyan folyamatokat jellemez, ahol a folyamat értéke infinitizimálisan előre látható, tehát amelyek esetében X_t értéke ismert a t -t tetszőlegesen megközelítő, ám el nem érő időpillanatokig elérhető információk alapján, melyek a filtrációk által reprezentáltak. Nemcsak folyamatok esetén beszélhetünk azonban előrejelezhetőségről, hanem megállási idők esetén is.

2.5 Definíció

Azt mondjuk, hogy a σ megállási idő előrejelzi a τ megállási időt, ha $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$, továbbá $\forall \omega$ esetén $\sigma(\omega) < \tau(\omega)$ valahányszor $\tau(\omega) > 0$. Azt mondjuk, hogy a τ megállási idő előrejelezhető, ha létezik megállási idők egy (σ_n) sorozata, hogy $\sigma_n \nearrow \tau$, és σ_n előrejelzi τ -t $\forall n$ esetén.

Az előrejelezhetőséggel szemben álló másik kiemelt mérhetőségi osztályt a kockázatos folyamatok alkotják. Ezek esetében még infinitezimálisan sem láthatjuk előre a folyamat alakulását.

2.6 Definíció

Legyen adott az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ struktúra. Jelölje $\mathcal{O}$ a $\Theta \times \Omega$ részhalmazaiból álló, a jobbról reguláris adaptált folyamatok által generált σ -algebrát. Ekkor $\mathcal{O}$ elemeit kockázatos halmazoknak nevezzük. Egy X folyamatot kockázatosnak (optional) mondunk, ha mérhető $\mathcal{O}$ -re nézve.

A későbbiekben szükségünk lesz arra, hogy a kiindulásul választott $\mathcal{F}$ filtrációnál szűkebb $\mathcal{G}$ filtráció mellett vizsgáljunk bizonyos sztochasztikus folyamatokat, melyektől azt is megköveteljük, hogy az előzőleg definiált két mérhetőségi osztályba essenek. Egy tet-

szőleges $(X, \mathcal{F})$ folyamat természetesen nem feltétlenül $\mathcal{G}$ -mérhető, vagy nem előrejelezhető/kockázatos. A célunk ekkor, hogy megadjunk egy valamilyen szempontból „közel” eső folyamatot, mely már teljesíti e feltételeket. A közelséget a feltételes várható értéken keresztül fogjuk megragadni.

2.7 Állítás

Legyen adott egy X korlátos vagy nemnegatív sztochasztikus folyamat és $\mathcal{F}$ filtráció. Ekkor létezik egy kockázatos vetületnek nevezett oX $\mathcal{F}$ -kockázatos folyamat, hogy tetszőleges τ megállási idő esetén

$${}^oX_\tau = \mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\tau)$$

teljesül. oX megkülönböztethetlenség¹ erejéig egyértelmű.

2.8 Állítás

Legyen adott egy X korlátos vagy nemnegatív sztochasztikus folyamat és $\mathcal{F}$ filtráció. Ekkor létezik egy előrejelezhető vetületnek nevezett pX $\mathcal{F}$ -előrejelezhető folyamat, hogy tetszőleges előrejelezhető τ megállási idő esetén

$${}^pX_\tau = \mathbf{E}(X_\tau | \mathcal{F}_{\tau-})$$

teljesül. pX megkülönböztethetlenség erejéig egyértelmű.

2.2 Általános elmélet

2.9 Definíció

A megállási idők $\tau_0, \tau_1, \dots$ sorozatát pontfolyamatnak nevezzük, ha teljesítik a következő feltételeket:

- (1) $\tau_0 = 0$ m.m.
- (2) $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ m.m.
- (3) $\tau_n(\omega) < \tau_{n+1}(\omega)$, ha $\tau_n(\omega) < \infty$, m.m. ω esetén

A pontfolyamatok vizsgálata ekvivalens az

$$N_t \stackrel{\circ}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{\tau_n \leq t\}} \tag{2.1}$$

¹Az X és Y sztochasztikus folyamat megkülönböztethetetlen, ha $\mathbf{P}(\{\omega | \forall t \in \Theta \text{ esetén } X(t, \omega) = Y(t, \omega)\}) = 1$.

számláló folyamat vizsgálatával. Az ekvivalencia miatt gyakran a számláló folyamatokra is pontfolyamatok elnevezéssel hivatkoznak (különösen gyakori ez a szokás a pénzügyi irodalomban). Legyen $\tau_\infty \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Ekkor N véges a $[0, \tau_\infty)$ véletlen intervallumon. A továbbiakban feltesszük, hogy N *nemfelrobbanó*, azaz $\tau_\infty = \infty$. Ekkor N_t véges $\forall t$ esetén.

A definíció alapján látható, hogy N trajektóriái jobbról folytonosak, balról határértékkel rendelkeznek, azaz a folyamat jobbról reguláris. A τ_n függvények megállási idő voltából következően a folyamat adaptált is, hiszen tetszőleges $a \geq 0$ esetén

$$\{N_t \leq a\} = \{\tau_{[a]+1} > t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2.10 Definíció

Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat, λ pedig egy nemnegatív előrejelezhető folyamat, melyre teljesül továbbá, hogy $\forall t$ esetén

$$\int_0^t \lambda_s \, ds < \infty \text{ m.m.}$$

Azt mondjuk, hogy λ az N folyamat intenzitása, ha az $M_t \doteq N_t - \int_0^t \lambda_s \, ds$ folyamat lokális martingál.

A gyakorlati alkalmazások során a számláló folyamatokat az intenzitásfolyamatok keretén belül modellezzük (ennek az intuitív tartalom mellett technikai előnyei is vannak, mint majd látni fogjuk), így e fogalom központi szerepet foglal el a dolgozatban. A definíciónak azonban létezik egy alternatív és ekvivalens változata is, bár ez első látásra talán nem nyilvánvaló. A dolgozat keretei azonban sajnos nem teszik lehetővé az ekvivalencia bizonyítását, az érdeklődő Olvasó megtalálhatja azt Brémaud [1981] könyvében (Chapter II §3, T8 és T9, pp. 27.). Az alternatív definíció elsősorban a bizonyítások során fog hasznos szerepet játszani.

2.11 Definíció

Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat, λ pedig egy nemnegatív előrejelezhető folyamat, melyre teljesül továbbá, hogy $\forall t$ esetén

$$\int_0^t \lambda_s \, ds < \infty \text{ m.m.}$$

Azt mondjuk, hogy λ az N folyamat intenzitása, ha tetszőleges nemnegatív és előrejelez-

hető C folyamat esetén teljesül, hogy

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right),$$

ahol az N szerinti integrál értelmezése:

$$\int_0^t C_s dN_s = \sum_{i \geq 1} C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq t\}}, \text{ illetve } \int_0^\infty C_s dN_s = \sum_{i \geq 1} C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}}.$$

A definícióban szereplő lokális martingál egy további feltétel megkövetelése esetén valódi (négyzetesen integrálható) martingál lesz.

2.12 Állítás

Legyen N integrálható (azaz $\mathbf{E}(N_t) < \infty \forall t$ esetén). Ekkor M négyzetesen integrálható martingál (azaz $\mathbf{E}(M_t^2) < \infty \forall t$ esetén).

BIZONYÍTÁS. Ismert, hogy M akkor és csak akkor négyzetesen integrálható martingál, ha $\mathbf{E}([M]_t) < \infty \forall t$ esetén (ld. pl. Protter [2004], Corollary 3, pp. 73.). Esetünkben $\mathbf{E}([M]_t) = \mathbf{E}(N_t) < \infty$, hiszen N véges variációjú, míg $\int_0^t \lambda_s ds$ folytonos, így kvadratis keresztkorrelációjuk nulla, továbbá $\int_0^t \lambda_s ds$ korlátos variációjú, így kvadratis variációja zérus. $\square$

Interpretáció

Az intuitív tartalom érzékeltetéséhez idézzük fel, hogy ha N egy Poisson folyamat, akkor $\mathbf{E}(N_t) = \lambda t$, és mivel a Poisson-folyamat növekményei függetlenek, így $\forall s > t \geq 0$ esetén $\mathbf{E}(N_s - \lambda s - (N_t - \lambda t) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(N_s - N_t - \lambda(s - t))$, azaz $N_t - \lambda t$ martingál, így az N Poisson-folyamat intenzitása a $\lambda(t, \omega) \equiv \lambda$ konstans determinisztikus folyamat. A Poisson-folyamat esetén pedig tudjuk, hogy a λ paraméter az ugrások bekövetkezésének gyakoriságaként értelmezhető, azaz szemléletesen annak az esélye, hogy egy infinitezimálisan kicsi dt időpillanatban bekövetkezzon az ugrás λdt . Ehhez elég észrevennünk, hogy $\mathbf{P}(N_t - N_{t-h} = 1 | \mathcal{F}_{t-h}) = e^{-\lambda h} \lambda h = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!}$, így h infinitezimálisan kicsivé válásával ($h \rightarrow dt$) a sorfejtés magasabb rendű tagjai elhanyagolhatóvá válnak, tehát heurisztikus formulával élve $\mathbf{E}(dN_t | \mathcal{F}_{t-}) = \mathbf{P}(dN_t = 1 | \mathcal{F}_{t-}) = \lambda dt$, ahol $\mathcal{F}_{t-} \doteq \sigma(\cup_{s < t} \mathcal{F}_s)$.

Hasonló – matemaikailag ugyan nem korrekt, ám a fogalmak intuitív értelmezéséhez hasznos – megfontolások alapján vegyük észre, hogy ha N egy számláló folyamat λ intenzitással, akkor $dN_t - \lambda dt$ martingálnövekmény, így $\mathbf{E}(dN_t - \lambda dt | \mathcal{F}_{t-}) = 0$, és mivel λ előrejelezhető, így λ_t mérhető $\mathcal{F}_{t-}$ -ra nézve, így kiemelhető a várható értékből, így $\mathbf{E}(dN_t | \mathcal{F}_{t-}) = \lambda_t dt$. Láthatjuk tehát, hogy az előrejelezhető λ intenzitásfolyamat heurisztikus

tikusan az időegységre jutó ugrások feltételes várható értékeként értelmezhető.

Egzisztencia és unicitás

Természetes kérdésként adódik, hogy vajon minden számláló folyamat esetén létezik-e a definiált intenzitás, és ha létezik, akkor vajon egyértelmű-e? Az első kérdés megválaszolásához először figyeljük meg, hogy a definíciónk alapján a számláló folyamat növekvő tarjektóriájú és lokálisan integrálható variációjú² (azaz a szokásos jelöléssel $N \in \mathcal{A}_{loc}^+$), hiszen a definícióban szereplő megállási idők egy triviális megfelelő lokalizációs sorozatot biztosítanak, továbbá a feltételezésünk szerint a valószínűségi mező teljes, a filtráció pedig teljesíti a szokásos feltételeket, így alkalmazható a Doob–Meyer-felbontás egyik speciális változata (ld. Medvegyev [2007], Theorem 3.52, pp. 213.):

2.13 Tétel

Ha $A \in \mathcal{A}_{loc}^+$, akkor létezik egy olyan előrejelezhető $A^p \in \mathcal{A}_{loc}^+$ folyamat, mely megkülönböztethetetlen erejéig egyértelmű, hogy $A - A^p$ 0-ból induló lokális martingál.

Így létezik tehát egy 0-ból induló, előrejelezhető és növekvő N^p folyamat, hogy $M \doteq N - N^p$ lokális martingál. Ezt az N^p folyamatot *előrejelezhető kompenzátor*nak nevezzük. Az N^p folytonosságának biztosításához (mely nyilván az intenzitás létezésének szükséges, de messze nem elégséges feltétele) egy újabb fogalommal kell megismernednünk. A fogalmat követő állítás bizonyítását ld. Medvegyev [2007], Proposition C.20, pp. 593.

2.14 Definíció

Azt mondjuk, hogy a τ megállási idő teljesen előrejelezhetetlen (totally inaccessible), ha minden előrejelezhető σ megállási idő esetén $\mathbf{P}(\tau = \sigma < \infty) = 0$ teljesül.

2.15 Állítás

Egy N számláló folyamat N^p előrejelezhető kompenzátora akkor és csak akkor m.m. folytonos, ha N ugrási idejei teljesen előrejelezhetetlenek.

A továbbiakban tehát a számláló folyamatainktól megköveteljük az ugrások előrejelezhetetlenségét, mely közgazdasági szempontból jól interpretálható feltevés, hiszen az előrejelezhető megállási idő heurisztikusan olyan eseményt jellemez, melynek bekövetkezése infinitezimálisan előre látható. Megfelelően működő piacot feltételezve, arbitrázsmentességi megfontolásokból egy csődeseményről feltehetjük, hogy az teljesen váratlanul kö-

²Egy A folyamat integrálható variációjú, ha $\mathbf{E}(\text{Var}(A)(\infty)) < \infty$, ahol $\text{Var}(A)(\infty) \doteq \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(A)(t)$, $\text{Var}(A)(t)$ pedig az A folyamat variációját jelöli a $[0, t]$ intervallumon. A tulajdonság lokálisan teljesül, ha létezik megállási idők egy (τ_n) lokalizáló sorozata, hogy $\forall n$ esetén A^{τ_n} integrálható variációjú.

vetkezik be.

Az előrejelzhető kompenzátor folytonos voltából azonban még nem következik a definícióban szereplő integrálfolyamatként történő előállíthatóság (más szóval a kompenzátor nem feltétlenül abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve³). Egy tetszőleges számláló folyamatról viszont meglehetősen nehézkes bizonyítani, hogy rendelkezik e tulajdonsággal. Talán a legismertebb a feltétel a következő:

2.16 Állítás (Ethier–Kurtz-feltétel)

Legyen N egy integrálható számláló folyamat (azaz $\mathbf{E}(N_t) < \infty \forall t$ esetén), N^p pedig legyen e folyamat előrejelezhető kompenzátora. Ha létezik egy K konstans, hogy $\forall 0 \leq s \leq t$ esetén

$$\mathbf{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s) \leq K(t - s) \text{ m.m.},$$

akkor N^p m.m. abszolút folytonos trajektóriákkal rendelkezik, azaz előáll $N_t^p = \int_0^t \lambda_s ds$ alakban.

A fenti feltétel csak elégséges, ám az állításnak létezik egy módosítása is, mely szükséges, s egyben elégséges feltételt is jelent az intenzitásfolyamat létezésére. A módosított verzió feltétele azonban kevésbé teszi lehetővé a gyakorlati alkalmazását.

2.17 Állítás (Yan Zeng-feltétel)

Legyen N egy integrálható számláló folyamat (azaz $\mathbf{E}(N_t) < \infty \forall t$ esetén), N^p pedig legyen e folyamat előrejelezhető kompenzátora. A kompenzátor akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha létezik egy 0-ból induló növekvő és integrálható D folyamat, mely abszolút folytonos, továbbá $\forall t \geq 0, h \geq 0$ esetén

$$\mathbf{E}(N_{t+h} - N_t | \mathcal{F}_s) \leq \mathbf{E}(D_{t+h} - D_t | \mathcal{F}_s).$$

Ha továbbá egyenlőség áll fenn, akkor $N^p = D^p$.

A gyakorlatban a modellezhetőség érdekében fel szokás tenni, hogy a számláló folyamat rendelkezik a definícióban szereplő intenzitással, így a továbbiakban mi is élünk e feltételezéssel. A témakörhöz kapcsolódóan Janson és szerzőtársai [2010] nyomán a filtrációk szerkezetére mondható ki egy – az ekvivalens mértékekkel kapcsolatos – érdekes állítás.

³Az elnevezés mögött az az észrevétel húzódik meg, hogy a kompenzátor korlátos (sőt, integrálható) variációjú, így minden trajektóriája egy σ -véges mértéket generál a $[0, \infty)$ intervallumon. Ha létezik a definícióban szereplő intenzitásfolyamat, akkor a generált mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, míg λ a megfelelő (természetesen ω -tól függő) Radon–Nikodym-derivált.

2.18 Állítás

Legyen adott a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ struktúra. Létezzen továbbá egy olyan $\mathbf{P}$ -vel ekvivalens $\mathbf{Q}^*$ valószínűségi mérték (mely speciálisan maga $\mathbf{P}$ is lehet), hogy minden folytonos előrejelezhető kompenzátorral rendelkező számláló folyamat esetében létezzen intenzitás (röviden azt mondjuk, hogy $\mathbf{Q}^*$ AC tulajdonságú). Legyen $\mathcal{Q}$ a $\mathbf{P}$ -vel ekvivalens valószínűségi mértékek halmaza. Ekkor $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$ AC tulajdonságú.

Végezetül meg kell jegyeznünk, hogy az intenzitásfolyamat előrejelezhetőségének megkövetelése csak az egyértelműség szempontjából fontos. Ha eltekintünk az egyértelműség követelményétől, akkor elég a progresszív mérhetőséget feltennünk, hiszen ekkor $\int_0^t \lambda_s ds$ adaptált folyamat lesz, a folytonossága miatt pedig természetesen előrejelezhető is.

A filtráció szűkítése

Az intenzitás nem csak a valószínűségi mező mértékéhez kötődik, hanem a kiindulásként választott $\mathcal{F}$ filtrációhoz is. Persze előfordulhat, hogy N adaptált valamilyen szűkebb filtrációra nézve is, mely jobban szolgálja a céljainkat, s kíváncsiak lehetünk, hogy vajon ekkor is létezik-e az intenzitásfolyamat, illetve milyen kapcsolat fűzi az eredetihez. A következő állítás e kérdésekre adja meg a választ.

2.19 Állítás

Legyen $(N, \mathcal{F})$ egy számláló folyamat $(\lambda, \mathcal{F})$ intenzitással. Jelölje $\mathcal{F}^N$ az N által generált (belső) filtrációt. Legyen $\mathcal{G}$ egy harmadik filtráció, melyre

$$\mathcal{F}_t^N \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0$$

teljesül. Ekkor az $(N, \mathcal{G})$ számláló folyamat is rendelkezik intenzitással, melyet jelöljön $(\mu, \mathcal{G})$.

BIZONYÍTÁS. Legyen μ a λ folyamat $\mathcal{G}$ filtrációra vonatkozó előrejelezhető vetülete. Ekkor tudjuk, hogy μ előrejelezhető és $\mu_t = \mathbf{E}(\lambda_t | \mathcal{G}_t)$. Az intenzitás második definíciója alapján látnunk kell, hogy tetszőleges nemnegatív és $\mathcal{G}$ -előrejelezhető C folyamat esetén

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \mu_s ds \right)$$

teljesül. Mivel ha C $\mathcal{G}$ -előrejelezhető, akkor $\mathcal{F}$ -előrejelezhető is, így $\mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right)$, λ $\mathcal{F}$ -intenzitás voltából következően. Elég látnunk tehát, hogy

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \mu_s ds \right).$$

Ez viszont következik a Fubini-tétel és C_s $\mathcal{G}_s$ -mérhetőségének felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right) &= \int_0^\infty \mathbf{E}(C_s \lambda_s) ds = \int_0^\infty \mathbf{E}(C_s \mathbf{E}(\lambda_s | \mathcal{G}_s)) ds = \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \mathbf{E}(\lambda_s | \mathcal{G}_s) ds \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^\infty C_s \mu_s ds \right). \end{aligned}$$

□

2.3 Mértékcseré

Az eddigiek során vizsgálódásunkat egy rögzített $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékkel ellátott valószínűségi mező alatt végeztük. A pénzügyi eszközárak során viszont a célunk mindig egy ekvivalens mértékre való áttérés (nem véletlen, hogy az ezzel kapcsolatos állításokra első és második alaptételként hivatkozunk). A következőkben elsőként ismertetjük a klasszikus Black–Scholes-modellből jól ismert Girszanov-tétel egy számláló folyamatokra vonatkozó analóg változatát.

A tétel kimondás előtt érdemes néhány észrevételt tennünk. Ha $\mathbf{Q}$ abszolút folytonos $\mathbf{P}$ -re nézve ($\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$), akkor létezik a Radon–Nikodym-derivált, melyet jelöljön Z . Ekkor $Z_t \doteq \mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_t)$ nyilván martingál, továbbá mivel

$$\int_F Z_t d\mathbf{P} = \int_F Z d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F), \quad F \in \mathcal{F}_t,$$

így Z_t nem más, mint $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-deriváltja a leszűkített $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn.

A másik irányból kiindulva legyen $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ két mérték, jelölje továbbá $\mathbf{Q}_t$ és $\mathbf{P}_t$ ezek $\mathcal{F}_t$ -re való leszűkítését. Tegyük fel, hogy $\mathbf{Q}_t \ll \mathbf{P}_t \forall t$ -re, és jelölje $Z_t \doteq d\mathbf{Q}_t/d\mathbf{P}_t$ a megfelelő Radon–Nikodym-deriváltak folyamatát. Ekkor ha $s \leq t$ és $F \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, teljesül, hogy

$$\int_F Z_t d\mathbf{P} = \int_F \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}_t} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}_s}{d\mathbf{P}_s} d\mathbf{P} = \int_F Z_s d\mathbf{P},$$

azaz Z martingál. Természetesen Z nem feltétlenül konvergens, azaz nem biztos, hogy

létezik ξ melyre $Z_t = \mathbf{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$. Más szóval elképzelhető, hogy $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ az $\mathcal{F}_t$ -n $\forall t$ esetén, ám $\mathbf{Q}$ nem abszolút folytonos $\mathbf{P}$ -re nézve az $\mathcal{F}_\infty \doteq \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$ σ -algebrán, így a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-derivált nem feltétlenül létezik. Ez motiválja a következő definíció bevezetését:

2.20 Definíció

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{Q}$ lokálisan abszolút folytonos $\mathbf{P}$ -re nézve ($\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$), ha $\mathbf{Q}_t \ll \mathbf{P}_t \forall t$ esetén, ahol $\mathbf{Q}_t$ és $\mathbf{P}_t$ a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ mértékek leszűkítései az $\mathcal{F}_t$ σ -algebrákra. $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ lokálisan ekvivalens ($\mathbf{P} \overset{\text{loc}}{\sim} \mathbf{Q}$), ha $\mathbf{P} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$.

2.21 Állítás

Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat λ intenzitással, jelölje továbbá $\tau_i \doteq \inf\{t \mid N_t = i\}$ az i -edik ugrás megállási idejét. Legyen φ egy tetszőleges pozitív előrejelezhető folyamat, melyre teljesül, hogy $\forall t$ esetén

$$\int_0^t \varphi_s \lambda_s ds < \infty \text{ m.m.}$$

Ekkor a

$$\xi_t \doteq \exp \left(\int_0^t (1 - \varphi_s) \lambda_s ds \right) \prod_{i \geq 1} \varphi_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq t\}} \quad (2.2)$$

folyamat lokális martingál.

BIZONYÍTÁS. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$X_t \doteq \exp \left(\int_0^t (1 - \varphi_s) \lambda_s ds \right), \quad Y_t \doteq \prod_{i \geq 1} \varphi_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} d\xi_t &= X_t Y_t \\ dX_t &= (1 - \varphi_t) \lambda_t \exp \left(\int_0^t (1 - \varphi_s) \lambda_s ds \right) dt = (1 - \varphi_t) \lambda_t X_t dt \\ dY_t &= \left(\prod_{i \geq 1} \varphi_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < t\}} \right) (\varphi_t - 1) dN_t = Y_{t-} (\varphi_t - 1) dN_t. \end{aligned}$$

A parciális integrálás formulájának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
d\xi_t &= Y_{t-} dX_t + X_{t-} dY_t + d[X, Y]_t = \\
&= (1 - \varphi_t) \lambda_t X_t Y_{t-} dt + X_{t-} Y_{t-} (\varphi_t - 1) dN_t = \\
&= (1 - \varphi_t) \lambda_t \xi_{t-} dt + \xi_{t-} (\varphi_t - 1) dN_t = \\
&= (1 - \varphi_t) \lambda_t \xi_{t-} dt + \xi_{t-} (\varphi_t - 1) (dM_t + \lambda_t dt) = \\
&= (\varphi_t - 1) \xi_{t-} dM_t
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy X trajektóriái folytonosak, míg Y trajektóriái véges variációjúak, így $[X, Y]_a^b = 0$ m.m. tetszőleges $[a, b]$ intervallumon. A számítások alapján tehát ξ előáll, mint egy M szerinti integrál, ahol az integrandus előrejelezhető, míg M lokális martingál, így tehát ξ maga is lokális martingál lesz. $\square$

2.22 Tétel (Girszanov)

Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat λ^P intenzitással a P mérték alatt. Tegyük fel, hogy a (2.2) alapján definiált ξ lokális martingál valódi martingál. Ekkor létezik egy lokálisan ekvivalens Q valószínűségi mérték ($Q \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$), mely alatt N intenzitása $\lambda^Q \doteq \lambda^P \varphi$.

BIZONYÍTÁS. A keresett mértéket definiálja a Radon–Nikodym-deriváltak $dQ_t/dP_t = \xi_t$ folyamata. Mivel ξ martingál, így $\forall t$ esetén $E(\xi_t) = E(\xi_0) = 1$, azaz Q valóban valószínűségi mérték.

Ahhoz, hogy az N számláló folyamat intenzitása λ^Q legyen Q alatt, azt kell látnunk, hogy $A_t \doteq N_t - \int_0^t \lambda_s \varphi_s ds$ lokális martingál Q alatt, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $Z_t \doteq \xi_t A_t$ lokális martingál P alatt. Az előzőek alapján

$$d\xi_t = (\varphi_t - 1) \xi_{t-} dM_t, \quad \text{továbbá} \quad dA_t = dN_t - \lambda_t \varphi_t dt.$$

A parciális integrálás formulájának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
dZ_t &= A_{t-} d\xi_t + \xi_{t-} dA_t + d[\xi, A]_t = \\
&= (\varphi_t - 1) \xi_{t-} A_{t-} dM_t + \xi_{t-} (dN_t - \lambda_t \varphi_t dt) + (\varphi_t - 1) \xi_{t-} dN_t = \\
&= (\varphi_t - 1) \xi_{t-} A_{t-} dM_t - \xi_{t-} \lambda_t \varphi_t dt + \varphi_t \xi_{t-} dN_t = \\
&= (\varphi_t - 1) \xi_{t-} A_{t-} dM_t - \xi_{t-} \lambda_t \varphi_t dt + \varphi_t \xi_{t-} (dM_t + \lambda_t dt) = \\
&= ((\varphi_t - 1) \xi_{t-} A_{t-} + \varphi_t \xi_{t-}) dM_t.
\end{aligned}$$

A fentiek alapján tehát Z megkapható, mint egy lokális martingál szerinti integrál, ahol

az integrandus előrejelezhető, így Z maga is lokális martingál $\mathbf{P}$ alatt. Ebből következően A lokális martingál $\mathbf{Q}$ alatt, így tehát N számláló folyamat $\lambda^{\mathbf{Q}}$ intenzitással $\mathbf{Q}$ alatt. $\square$

De mi a helyzet a fordított irányban? Tekintsünk egy $\mathbf{P}$ -vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mértéket. Természetesen mivel a számláló folyamatok definíciójában csak mérhetőségi feltételek játszanak szerepet⁴, így ha N számláló folyamat $\mathbf{P}$ alatt, akkor az marad $\mathbf{Q}$ alatt is. Kevésbé triviális kérdés viszont, hogy ha N -nek létezik intenzitásfolyamata $\mathbf{P}$ alatt, akkor vajon $\mathbf{Q}$ alatt is létezik-e intenzitásfolyamata? A kérdésre a következő tétel ad pozitív választ, mely az Artzner és Delbaen [1995] cikkében megjelent állítás általánosítása.

2.23 Tétel (Artzner–Delbaen)

Tegyük fel, hogy N egy tetszőleges számláló folyamat $\lambda^{\mathbf{P}}$ intenzitással $\mathbf{P}$ alatt. Legyen $\mathbf{Q}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték ($\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$). Ekkor az N számláló folyamat $\mathbf{Q}$ alatt is rendelkezik $\lambda^{\mathbf{Q}}$ intenzitással.

BIZONYÍTÁS. Legyen $Z \doteq d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ a megfelelő Radon–Nikodym-derivált. Ekkor $Z_t \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z|\mathcal{F}_t)$ martingál, mely nem más, mint a Z Radon–Nikodym-derivált $\mathcal{F}_t$ σ -algebrára való leszűkítése ($d\mathbf{Q}_t/d\mathbf{P}_t = Z_t$). Az alternatív definíció alapján N intenzitása $\lambda^{\mathbf{P}}$ a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték alatt, ha tetszőleges nemnegatív és előrejelezhető C folyamat esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s^{\mathbf{P}} ds \right).$$

A célunk tehát megtalálni azt a $\lambda^{\mathbf{Q}}$ nemnegatív és előrejelezhető folyamatot, melyre a fentit egyenlőség $\mathbf{Q}$ szerinti várható értékkel teljesül. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(Z \int_0^\infty C_s dN_s \right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(Z \sum_{i \geq 1} C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}} \right) = \\ &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} (Z C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}}) = \sum_{i \geq 1} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} (C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z|\mathcal{F}_{\tau_i-})) , \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy Z és C nemnegatív volta miatt alkalmazható a sorokra vonatkozó monoton konvergencia tétel, továbbá C előrejelezhető, így $C_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}}$ $\mathcal{F}_{\tau_i-}$ -mérhető.

Ismert, hogy létezik egy nemnegatív és előrejelezhető K folyamat, melyre $K_\sigma = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z|\mathcal{F}_{\sigma-})$ teljesül tetszőleges σ megállási idő esetén. Mivel $\lambda^{\mathbf{P}}$ az N folyamat intenzi-

⁴Mivel $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$, azaz a nullmértékű halmazok azonosak a két mérték alatt, így a valószínűségi mező és $\mathcal{F}$ $\mathbf{Q}$ alatt is teljes marad.

tása $\mathbf{P}$ alatt, így a fenti egyenlőséget folytatva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} (C_{\tau_i} K_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}}) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\sum_{i \geq 1} C_{\tau_i} K_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i < \infty\}} \right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\int_0^\infty C_s K_s dN_s \right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\int_0^\infty C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} ds \right) = \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}} (C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}}) ds = \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} \frac{1}{Z_s} \right) ds, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a $C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}}$ nemnegatív, így alkalmazható a Fubini-tétel.

Mivel m.m. ω esetén a Z folyamat $t \mapsto Z_t(\omega)$ trajektóriái csak megszámlálható sok szakadási hellyel rendelkeznek a jobbról regularitás következtében, így $1/Z_t(\omega) = 1/Z_{t-}(\omega)$ dt d $\mathbf{Q}$ -m.m. a $[0, \infty) \times \Omega$ téren. Ebből következően:

$$\int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} \frac{1}{Z_s} \right) ds = \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} \frac{1}{Z_{s-}} \right) ds = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\int_0^\infty C_s K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} \frac{1}{Z_{s-}} \right) ds.$$

Így tehát $\lambda^{\mathbf{Q}} \doteq K_s \lambda_s^{\mathbf{P}} / Z_{s-}$ az N számláló folyamat $\mathbf{Q}$ alatti intenzitása, hiszen nemnegatív és előrejelezhető, továbbá teljesíti a definíció feltételeit. $\square$

2.4 Duplán sztochasztikus folyamatok

A hitelkockázatok modellezésének egyik közkedvelt eszközét a duplán sztochasztikus (vagy más néven Cox-) folyamatok családja alkotja, melyek az általánosított Poisson-folyamatok általánosításának tekinthetők, így első lépésként célszerű megismerkedünk e folyamatokkal.

2.24 Definíció

Egy N számláló folyamatot általánosított Poisson-folyamatnak nevezünk, ha a növekményei függetlenek, továbbá N_t Poisson-eloszlású $\forall t$ -re.

A legegyszerűbb eseteket az olyan számláló folyamat alkotják, ahol az előrejelezhető kompenzátor determinisztikus. A következő tétel ezeket karakterizálja (a bizonyítást ld. pl. Medvegyev [2007], Proposition C.17, pp. 591.).

2.25 Állítás

Ha egy N számláló folyamat N^p előrejelezhető kompenzátora determinisztikus és folytonos, akkor N független növekményű és N_t Poisson-eloszlást követ N_t^p paraméterrel, következésképpen N általánosított Poisson-folyamat.

Mivel a dolgozatban csak az intenzitásfolyamattal rendelkező N számláló folyamatokat vizsgáljuk, így megállapíthatjuk, hogy ha egy intenzitásfolyamat determinisztikus, akkor N_t Poisson-eloszlást követ $\int_0^t \lambda_s ds$ paraméterrel.

A fentiek természetes kiterjesztésének tekinthető, ha megtartjuk a Poisson-eloszlást, ám a determinisztikusról áttérünk a sztochasztikus intenzitás esetére. A duplán sztochasztikus folyamatok konstrukciója mögött húzódó elgondolás heurisztikusan a következő:

- (1) Tekintsünk egy tetszőleges λ sztochasztikus folyamatot.
- (2) Rögzítsünk egy tetszőleges $\omega \in \Omega$ kimenethez tartozó $\lambda(\omega) : t \mapsto \lambda(t, \omega)$ trajektóriát, mely nyilván egy determinisztikus függvény.
- (3) Ehhez a rögzített ω kimenethez alkossunk egy N általánosított Poisson-folyamatot $\lambda(\omega)$ determinisztikus intenzitással.
- (4) Ismételjük meg e lépéseket $\forall \omega \in \Omega$ esetére.

A fenti elgondolásnak megfelelő matematikai definíciót a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

2.26 Definíció

Legyen N egy nem felrobbanó számláló folyamat λ intenzitással, és legyen $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ -ra egy részfiltráció, mely teljesíti a szokásos feltételeket. Azt mondjuk, hogy N duplán sztochasztikus folyamat, ha λ $\mathcal{G}$ -előrejelezhető, továbbá $\forall t > s \geq 0$ esetén az $N_t - N_s$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t \triangleq \sigma(\mathcal{F}_s \cup \mathcal{G}_t)$ σ -algebrára vonatkozó feltételes valószínűsége Poisson eloszlású $\int_s^t \lambda_u du$ paraméterrel, azaz

$$\mathbf{P}(N_t - N_s = k | \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t) = \frac{(\int_s^t \lambda_u du)^k}{k!} e^{-\int_s^t \lambda_u du}.$$

A definíció mögött meghúzódó intuíció tehát, hogy a duplán sztochasztikus folyamatokat az információáramlás két különböző csatornája jellemzni, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$, ahol $\mathcal{G}$ szűkebb $\mathcal{F}$ -nél. $\mathcal{G}_t$ elég információt tartalmaz ahhoz, hogy felfedje a λ_t intenzitást, ahhoz azonban nem elégséges, hogy felfedje az N folyamat t -beli realizációját.

A duplán sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatos gyakorlati alkalmazások során a szűkebb filtrációra adaptált nemnegatív és előrejelezhető $(\lambda, \mathcal{G})$ folyamat ismert, melyre teljesül, hogy $\forall t$ esetén $\int_0^t \lambda_s ds < \infty$. A célunk pedig, hogy ebből konstruáljuk meg a megfelelő számláló folyamatot. Ehhez elsőként vegyük a független és azonos eloszlású (Z_n) valószínűségi változók sorozatát, melyek egységnyi paraméterű exponenciális eloszlást követnek ($\mathbf{P}(Z_i \leq x) = 1 - e^{-x}$), továbbá függetlenek a $\mathcal{G}_t$ σ -algebráktól

is $\forall t$ -re. Definiáljuk a következő megállási időket:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0 \\ \tau_n &= \inf \left\{ t \geq \tau_{n-1} \mid \int_{\tau_{n-1}}^t \lambda_s \, ds \geq Z_n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ekkor a fenti megállási időkhöz kapcsolódó N számláló folyamat duplán sztochasztikus $(\lambda, \mathcal{G})$ intenzitással. Ezt az eljárást használhatjuk pl. a Monte Carlo szimulációk során is.

A duplán sztochasztikus folyamatok legfontosabb jellemzője, hogy az intenzitást nem befolyásolhatja a számláló folyamat korábbi realizációja, azaz a folyamat nem lehet öngerjesztő (így nem fordulhat elő például az ugrások klasztereződése). Ennek oka, hogy az $\{N_t = k\}$ esemény sohasem lehet eleme a $\mathcal{G}_t$ σ -algebrának, hiszen ellenkező esetben az $N_t - N_s$ növekmény feltételes eloszlása $(\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t)$ -re nézve Poisson helyett konstans lenne.

3

Az intenzitás modellezése

3.1 Motiváció

A következőkben valamelyest általánosítjuk az előző fejezet számláló folyamatait. Megengedjük ugyanis, hogy egységnyi növekedések helyett (az összetett Poisson-folyamat mintájára) egy tetszőleges (ám rögzített) eloszlásból származó véletlen nagyságú ugrások következzenek be, melyek a pénzügyekben a csőd esetén bekövetkező veszteségekként értelmezhetők. Ehhez legyen (ℓ_i) szigorúan pozitív, független és azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, melyek eloszlását jelölje ν . Tegyük fel továbbá, hogy e változók N -től is függetlenek, továbbá integrálhatóak ($\mathbf{E}(\ell_1) < \infty$). A veszteség-folyamat ekkor

$$L_t \stackrel{\circ}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \ell_i \chi_{\{\tau_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{N_t} \ell_i. \quad (3.1)$$

Kiindulásul gondoljuk meg a következőket. Legyen egy t -ben egységnyi összeget fizető kockázatos elemi kötvényünk, melynek értéke csőd esetén nulla, és legyen a kockázatmentes kamatláb zérus. Természetes kérdés, hogy mennyit vagyunk hajlandóak e termékért fizetni az $s \leq t$ időpontban. Az eszközárak alapgondolata szerint létezik egy ekvivalens martingálmérték, mely alatt az ár megkapható a kifizetés feltételes várható értékeként. Jelölje τ a csőd megállási idejét, legyen $(N, \mathcal{F})$ a megállási időhöz kapcsolódó egyetlen ugrást tartalmazó számláló folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy e számláló folyamat duplán sztochasztikus $(\lambda^{\mathbf{Q}}, \mathcal{G})$ intenzitással ($\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$). Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1_{\chi_{\{\tau > t\}}} | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1 - N_t | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1 - N_t | \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}(N_t - N_s = 0 | \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(e^{-\int_s^t \lambda_u^{\mathbf{Q}} du} | \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

A problémát így visszavezettük a zérókupon kötvények sztochasztikus kamatlábak melletti árazására, alkalmazhatóvá téve az e kérdéskörre kifejlesztett módszerek széles tárhá-

zát. Jogosan vetődik tehát fel a kérdés, hogy a hitelkockázattal terhelt termékek és derivatívák szélesebb körére is kiterjeszthetjük-e ezeket a technikákat. Egy általános számláló folyamattól függő feltételes követelés (*contingent claim*) esetén az adott N folyamat realizációjától jóval bonyolultabban függő kifizetések is elképzelhetők. Végző soron viszont mindig N feltételes eloszlására van szükségünk, melyet meg tudnánk határozni, ha ismer-nénk a növekmények feltételes Laplace-transzformáltját:

$$\varphi(u, t, T) = \mathbf{E}(e^{-u(N_T - N_t)} | \mathcal{F}_t), \quad u \geq 0,$$

hiszen ennek sorba fejtésével az alábbi formula alapján visszaszámíthatók a keresett fel-tételes valószínűségek:

$$\mathbf{P}(N_T - N_t = k | \mathcal{F}_t) = \lim_{v \searrow 0} \frac{1}{k!} \partial_v^k \varphi(-\ln v, t, T), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vagy alternatív módon kiterjeszthetjük a Laplace-transzformáltat a komplex síkra, majd az inverz Fourier-transzformáció alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(N_T - N_t = k | \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-iv, t, T) \exp(-ikv) dv, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A bevezető példához hasonlóan a duplán sztochasztikus folyamatok alkalmazása meg-könnyíti a dolgunkat, hiszen az előzőekkel analóg módon

$$\mathbf{E}(e^{-u(N_T - N_t)} | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{-u(N_T - N_t)} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(e^{-(1 - \exp(-u)) \int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{F}_t).$$

De mi a helyzet általános esetben? Először is, figyeljük meg, hogy erősen kihasznál-tuk a duplán sztochasztikus jelleget. Egy tetszőleges számláló folyamat esetén nem tudjuk közvetlenül felírni a Laplace-transzformáltat az intenzitásfolyamat segítségével. A gya-korlatban viszont előfordulhat, hogy reprodukálni szeretnénk az ugrások klasztereződését (mint láttuk, ezt a duplán sztochasztikus folyamatok nem teszik lehetővé), vagy model-lezni szeretnénk a bekövetkezett csődök esetén realizálódó veszteségek véletlen voltát is, más szóval N helyett L képezheti a vizsgálódásunk tárgyát. Továbbá szükségessé válhat, hogy a kamatlábat is sztochasztikus folyamattá tegyük, mely esetleg kapcsolatban áll a csődök addigi számával (pl. hogy reprodukáljuk a flight-to-quality jelenségét). A kérdés tanulmányozásához az L pontfolyamat általánosított Laplace-transzformáltjának beveze-tése nyújt segítséget, melynek vizsgálata a fejezet első részének fő célja. Az itt ismertetett eljárások és modellek Giesecke [2009], Giesecke és Zhu [2010], illetve Errais és szerző-társai [2010] munkáin alapulnak.

A fejezetben nem lesz szükségünk a valós (statisztikai) és a martingál mérték megkü-

lönböztetésére, így mostantól számításainkat egy tetszőleges $\mathbf{P}$ referencia valószínűségi mérték alatt végezzük. Az veszteségfolyamatot L , a veszteségfolyamat ugrásait számláló folyamatot N , míg ez utóbbi előrejelezhető kompenzátorát a korábbiakhoz hasonlóan N^p jelöli. A dolgozat hátralévő részében feltesszük, hogy adott egy rögzített T időhorizont, és

$$\mathbf{E}(\exp(N_T^p)) < \infty.$$

3.2 Az általánosított Laplace-transzformált

A következőkben bevezetünk egy ekvivalens mértékcserét, hogy az L folyamat általánosított Laplace-transzformáltját az előrejelezhető kompenzátor (N^p) általánosított Laplace-transzformáltjaként tudjuk kifejezni, s így az intenzitásfolyamat létéből következően alkalmazni tudjuk a kamatlábmodellek irodalmának eredményeit.

3.1 Állítás

Legyen tetszőleges $u \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$Z_t(u) \doteq \exp(\psi(u) \cdot N_t^p - u \cdot L_t), \text{ ahol} \quad (3.2)$$

$$\psi(u) \doteq 1 - \int_0^\infty e^{-uz} d\nu(z). \quad (3.3)$$

Ekkor a megállított Z^T folyamat martingál.

BIZONYÍTÁS. A Girszanov-tétel bizonyításában látottakkal analóg módon a parciális integrálás formulájának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$Z_t(u) = 1 - \psi(u) \int_0^t Z_{s-}(u) dM_s,$$

ahol $M = N - N^p$. Így tehát $Z(u)$ az átskálázott $-\psi(u)M$ lokális martingál sztochasztikus exponense, így maga is lokális martingál. Ismert, hogy egy lokális martingál (esetünkben $Z^T(u)$) pontosan akkor tartozik a DL osztályhoz⁵, ha martingál. Szintén köztudott, hogy ha létezik egy $Y \in L_1(\Omega)$ valószínűségi változó, akkor $\{X \in L_1(\Omega) \mid |X| \leq Y\}$ egyenletesen integrálható. Mivel N^p nemcsökkenő, így

$$\sup_{t \geq 0} |Z_{t \wedge T}(u)| \leq \sup_{t \geq 0} \exp(\psi(u) N_{t \wedge T}^p) \leq \exp(N_T^p) < \infty.$$

⁵Egy M folyamat a DL osztályhoz tartozik, ha $\forall t$ esetén az $\{M_{\tau \wedge t} \mid \tau \text{ megállási idő}\}$ valószínűségi változók családja egyenletesen integrálható.

□

$Z^T(u)$ tehát értelmezhető a Radon–Nikodym-deriváltak folyamataként, mely így egy ekvivalens mértéket határoz meg. Ezt a mértéket a továbbiakban $\mathbf{P}^u$ -val, az alatta vett várható értéket pedig $\mathbf{E}^u$ -val jelöljük.

3.2 Definíció

Legyen L egy veszteségfolyamat, r a kockázatmentes kamatláb adaptált, nemnegatív és korlátos sztochasztikus folyamata, Y egy nemnegatív $\mathcal{F}_T$ -adaptált valószínűségi változó, mely az időszak végi kifizetésként értelmezhető. Ekkor a veszteségfolyamat, illetve a kompenzátor általánosított feltételes Laplace-transzformáltján (röviden transzformáltján) a következő két kifejezést értjük:

$$\varphi_t(u, z, w, T) \doteq \mathbf{E} \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - u(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t \right), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_t^u(v, z, w, T) \doteq \mathbf{E}^u \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - v(N_T^p - N_t^p)} | \mathcal{F}_t \right), \quad (3.5)$$

ahol $z, w \in \mathbb{R}_+$, $u, v \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq t \leq T$.

3.3 Állítás

Legyen L egy tetszőleges veszteségfolyamat. Ekkor a transzformáltjaira teljesül, hogy

$$\varphi_t(u, z, w, T) = \mathcal{L}_t^u(\psi(u), z, w, T), \quad (3.6)$$

ahol $z, w \in \mathbb{R}_+$, $u, v \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq t \leq T$.

BIZONYÍTÁS. $Z(u)$ definíciója alapján

$$\begin{aligned} \varphi_t(u, z, w, T) &= \mathbf{E} \left(\frac{Z_T(u)}{Z_t(u)} \exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - \psi(u)(N_T^p - N_t^p)} | \mathcal{F}_t \right) = \\ &= \mathbf{E}^u \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - \psi(u)(N_T^p - N_t^p)} | \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

□

A (3.6) egyenlőség alapján tehát egy L veszteségfolyamat Laplace-transzformáltját megkaphatjuk az ugrásokat számláló N folyamat N^p előrejelezhető kompenzátorának $\mathbf{P}^u$ mérték alatt, a $\psi(u)$ helyen vett Laplace-transzformáltjaként. Mivel feltételezésünk szerint N intenzitása λ , így (3.5) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{L}_t^u(v, z, w, T) \doteq \mathbf{E}^u \left(\exp \left(- \int_t^T (wr_s + v\lambda_s) \, ds \right) e^{-zY} | \mathcal{F}_t \right). \quad (3.7)$$

Megkaptuk tehát a pénzügyekből ismerős alakú formulát, mely analóg a T időpontbeli e^{-zY} végső kifizetés $(wr + v\lambda)$ sztochasztikus kamatláb mellett kapott jelenbeli árával. Ez teszi lehetővé, hogy a kamatlábmodellek (szemi)analitikusan kezelhető formuláinak széles körét a pontfolyamatokra is alkalmazni tudjuk, mint arra majd a következőkben látunk is példát.

Hogy a (3.5) transzformálttal számolni tudjunk, szükséges feltárnunk a mértékcseré hatását az N^p és r folyamatokra, illetve az Y valószínűségi változóra. Ehhez a következő tétel nyújt segítséget (a bizonyítást ld. Giesecke és Zhu [2010]).

3.4 Állítás

Legyen V egy $\mathbf{P}$ -lokális martingál, melynek az L -l vett $[V, L]$ kvadratikus kovariációja lokálisan integrálható variációjú. Jelölje $\langle V, L \rangle$ a kvadratikus kovariáció előrejelezhető kompenzátorát. Ekkor a $[0, T]$ intervallumon $\forall u \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$V + \frac{\psi(u)}{\psi'(0)} \langle V, L \rangle$$

$\mathbf{P}^u$ -lokális martingál, ahol $\psi'(0) = \mathbf{E}(\ell_1)$. Speciálisan V $\mathbf{P}^u$ -lokális martingál, ha nincs L -l közös ugrása.

Az állításból következően, ha W Wiener-folyamat $\mathbf{P}$ alatt, akkor Wiener-folyamat marad $\mathbf{P}^u$ alatt is. Mivel az $M = N - N^p$ folyamat ugrásai a definíciójából adódóan egybeesnek az L ugrásaival, így M már nem marad lokális martingál $\mathbf{P}^u$ alatt. Ebből következően N előrejelezhető kompenzátorát módosítanunk kell a mértékcseré során, a változást azonban egy egyszerű, u -tól függő determinisztikus átskálázás jelenti.

3.5 Állítás

A $[0, T]$ intervallumon N előrejelezhető kompenzátora $\mathbf{P}^u$ alatt $(1 - \psi(u))N^p$.

BIZONYÍTÁS. Mivel $[M, L] = L$, így $\langle M, L \rangle = \psi'(0)N^p$. A 3.4. állítás alapján tudjuk, hogy $M + \psi(u)\langle M, L \rangle / \psi'(0) = N - N^p + \psi(u)N^p = N - (1 - \psi(u))N^p$ lokális martingál $\mathbf{P}^u$ alatt a $[0, T]$ intervallumon. $\square$

Az állítás alapján tehát a $\mathbf{P}^u$ mértékre való áttérés során a kompenzátor $1 - \psi(u) = \mathbf{E}(\exp(-u\ell_1))$ nagyságban skálázódik át, és mivel $\mathbf{E}(\exp(-u\ell_1)) \leq 1$, így N ugrásainak gyakorisága kisebb $\mathbf{P}^u$ alatt, mint $\mathbf{P}$ alatt. A határértékként adódó, $\mathbf{P}$ -re abszolút folytonos $\mathbf{P}^\infty \doteq \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}^u$ mérték alatt a kompenzátor eltűnik, ekkor tehát $\mathbf{P}^\infty(N_T = 0) = 1$.

Mint a bevezető példában is láthattuk, a duplán sztochasztikus folyamatok speciális szerkezetéből adódóan N Laplace-transzformáltja közvetlenül, mértékcseré nélkül számolható az intenzitás alapján. E tulajdonság megmarad az általános transzformáció estén

is.

3.6 Állítás

Legyen $(N, \mathcal{F})$ duplán sztochasztikus számláló folyamat $(\lambda, \mathcal{G})$ intenzitással $(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F})$. Tegyük fel továbbá, hogy r $\mathcal{G}$ -adaptál, Y pedig $\mathcal{G}_T$ -mérhető. Ekkor

$$\mathcal{L}_t^u(v, z, w, T) = \mathcal{L}_t^0(v, z, w, T) \quad (3.8)$$

ahol $z, w \in \mathbb{R}_+, u, v \in \mathbb{R}_+, 0 \leq t \leq T$.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{P}^u$ és a duplán sztochasztikus folyamatok definícióját, továbbá a mérhetőségi feltételeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^u(v, z, w, T) &= \mathbf{E} \left(\frac{Z_T(u)}{Z_t(u)} \exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - v(N_T^p - N_t^p)} | \mathcal{F}_t \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - (v - \psi(u))(N_T^p - N_t^p)} \mathbf{E}(e^{-u(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) | \mathcal{F}_t \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s \, ds \right) e^{-zY - v(N_T^p - N_t^p)} | \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-u(L_T - L_t)} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) &= \mathbf{E}(e^{\ln(1 - \psi(u))(N_T - N_t)} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) = \\ &= e^{(\exp(\ln(1 - \psi(u))) - 1)(N_T^p - N_t^p)} = e^{-\psi(u)(N_T^p - N_t^p)}, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy az ℓ_i változók azonos eloszlásúak és függetlenek N -től, illetve egymástól is, továbbá hogy az $N_T - N_t$ növekmény $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T)$ -re vonatkozóan Poisson-eloszlást követ⁶. $\square$

A fentiek alapján tehát úgy is gondolhatunk a mértécszerére, mint amely felveszi az L folyamat által az intenzitásra gyakorolt visszacsatolást, s visszaállítja a duplán sztochasztikus jelleget. Ez alapján $\mathbf{P}^u$ -t szokás *korrelációsemleges* valószínűségi mértéknek is nevezni.

3.3 Affin pontfolyamatok

A következőkben bemutatjuk az affin ugró-diffúziók és affin pontfolyamatok modelljeit – melyekről Duffie [2005] nyújt egy áttekintő ismertetést –, továbbá beillesztjük eze-

⁶Mint ismert, ha egy valószínűségi változó Poisson eloszlást követ λ paraméterrel, akkor a momentum-generáló függvényének értéke a t helyen $\exp(\lambda(e^t - 1))$.

ket a korábban megkezdett elemzési keretünkbe, s így egy számítási igény szempontjából hatékony modellezési környezetet adunk a hitelderivatívák vizsgálatához. A fejezetben csak egy viszonylag egyszerű modellt tárgyalunk, a kérdések általánosítása és matematikailag mély tárgyalása megtalálható Duffie és szerzőtársai [2003] cikkében.

A modellezési probléma kezelhetőségének megőzése céljából a továbbiakban a

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t + \delta dL_t, \quad X_0 \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet erős X megoldása szolgál kiindulási alapul. Az egyenletben W sztenderd Wiener-folyamat, $\mu(X)$ a drift, $\sigma(X)$ a volatilitás, $\delta \geq 0$ egy érzékenységi paraméter, míg L a korábbiakban már megismert veszteségfolyamat. Az egyszerűség kedvéért mellőzzük az együtthatók időtől való explicit függőségét.

X -et a gazdaság állapotát leíró kockázati folyamatként értelmezzük, melyet befolyásol a csődök bekövetkezése, hiszen X ugrik minden egyes eseménykor. Feltételezzük, hogy az L ugrásait számláló N intenzitása $\lambda = \Lambda(X)$ formában adott, ahol Λ egy nem-negatív függvény. Ebben az esetben L korábbi realizációja befolyásolja az intenzitást, a veszteségfolyamat tehát öngerjesztő.

Hogy a (3.5) transzformációt explicit alakban tudjuk kifejezni, szükséges, hogy az X és λ struktúrájára vonatkozóan további megkötésekkel éljünk. Feltesszük tehát, hogy a paraméterek kielégítik a

$$\mu(x) = K_0 + K_1 x, \quad \sigma^2(x) = H_0 + H_1 x, \quad \Lambda(x) = \Lambda_0 + \Lambda_1 x$$

feltételeket konstans együtthatók mellett. Ekkor X -et *affin ugró-diffúzió*nak, míg L -et *affin pontfolyamat*nak nevezzük. Legye θ az ugrások komplex momentumgeneráló függvénye:

$$\theta(u) \triangleq \int_0^\infty e^{uz} d\nu(z), \quad u \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Ekkor a paraméterek (K, H, Λ, θ) négyesére az X folyamat *affin karakterisztikájaként* hivatkozunk. Az Olvasónak feltűnhet, hogy a karakterisztika nem tartalmazza a δ értékét. Ennek oka, hogy az affin ugró-diffúziókkal foglalkozó általános irodalomban nem szokás külön feltüntetni e paramétert. E kettősség azonban nem okoz gondot, hiszen ha szerepel δ a modellben, akkor $\theta(u)$ helyett $\theta(\delta u)$ tekintendő.

Az alfejezet központi elemeként szolgáló – Duffie és szerzőtársai [2000] által bizonyított (ld. Proposition 1) – állítás megfogalmazása előtt egy újabb fogalmat kell bevezetnünk, melyre az irodalom szintén transzformáltként hivatkoznak (mely immár a harmadik ilyen megnevezés alatt szereplő formula lesz a dolgozatban).

3.7 Definíció

Legyen X egy affin ugró-diffúzió (K, H, Λ, θ) karakterisztikával. Legyen továbbá R egy tetszőleges nemnegatív függvény, mely $R(x) = \varrho_0 + \varrho_1 x$ alakban áll elő, ahol $\varrho_0, \varrho_1 \in \mathbb{R}_+$. Ekkor a

$$\psi(u, X_t, t, T) \doteq \mathbf{E}(e^{-\int_t^T R(X_s) ds} e^{uX_T} | \mathcal{F}_t), \quad u \in \mathbb{C} \quad (3.11)$$

függvényt az X folyamat transzformáltjának nevezzük.

3.8 Definíció

A (K, H, Λ, θ) karakterisztika jólviselkedő az $(u, T) \in \mathbb{C} \times [0, \infty)$ pontban, ha α és β kielégíti a következő közönséges differenciálegyenlet-rendszert⁷:

$$\begin{aligned} \partial_t \beta(t) &= \varrho_1 - K_1 \beta(t) - \frac{1}{2} H_1 \beta^2(t) - \Lambda_1(\theta(\beta(t)) - 1) \\ \partial_t \alpha(t) &= \varrho_0 - K_1 \beta(t) - \frac{1}{2} H_0 \beta^2(t) - \Lambda_0(\theta(\beta(t)) - 1) \\ \beta(T) &= u, \quad \alpha(T) = 0 \end{aligned}$$

továbbá

- (1) $\mathbf{E}(\int_0^T |\gamma_t| dt) < \infty$, ahol $\gamma_t \doteq \Psi_t(\theta(\beta(t)) - 1)\lambda(X_t)$,
- (2) $\mathbf{E}((\int_0^T \eta_t^2 dt)^{1/2}) < \infty$, ahol $\eta_t \doteq \Psi_t \beta(t) \sigma(X_t)$,
- (3) $\mathbf{E}(|\Psi_T|) < \infty$,

ahol $\Psi_t = e^{-\int_0^t R(X_s) ds} e^{\alpha(t) + \beta(t)X_t}$.

3.9 Tétel

Legyen a (K, H, Λ, θ) karakterisztika jólviselkedő az $(u, T) \in \mathbb{C} \times [0, \infty)$ pontban. Ekkor

$$\psi(u, X_t, t, T) = e^{\alpha(t) + \beta(t)X_t}. \quad (3.12)$$

A 3.9. tétel eredményeit felhasználhatjuk a feltételes Laplace-transzformált (3.5) alakjának szemianalitikus meghatározására. Mindössze arra kell figyelni, hogy ekkor a $\mathbf{P}$ referencia mérték helyett az ekvivalens $\mathbf{P}^u$ alatt alkalmazzuk a tételt. A mértékcseré viszont a (3.9) egyenlet dinamikáját – a korábbiakban megállapítottak szerint – egyedül az L intenzitásán keresztül befolyásolja, mely az

$$(1 - \psi(u))\Lambda(X) = (1 - \psi(u))\Lambda_0 + (1 - \psi(u))\Lambda_1 X$$

⁷Vegyük észre, hogy valójában csak az első egyenlet ODE, a második β ismeretében egy határozott integrál.

kifejezésre módosul. A kifejezések egyszerűsítése végett tegyük fel, hogy a kockázatmentes kamatláb konstans r , így w és r szerepeltetése elhagyható a transzformáltból, továbbá a 3.9. tétel alkalmazhatósága érdekében legyen $Y = X_T$ ⁸. Ekkor a Laplace-transzformált

$$\mathcal{L}_t^u(v, z, t) = \mathbf{E}^u(e^{-v \int_t^T \Lambda(X_s) ds} e^{-z X_T} | \mathcal{F}_t) = e^{\alpha(t) + \beta(t) X_t} \quad (3.13)$$

formában áll elő, ahol a $\beta(t) \doteq \beta(u, z, v, t, T)$ és $\alpha(t) \doteq \alpha(u, z, v, t, T)$ és együtthatók kielégíti a következő közönséges differenciálegyenlet-rendszert:

$$\partial_t \beta(t) = v \Lambda_1 - K_1 \beta(t) - \frac{1}{2} H_1 \beta^2(t) - (1 - \psi(u)) \Lambda_1 (\theta(\delta \beta(t)) - 1) \quad (3.14)$$

$$\partial_t \alpha(t) = v \Lambda_0 - K_0 \beta(t) - \frac{1}{2} H_0 \beta^2(t) - (1 - \psi(u)) \Lambda_0 (\theta(\delta \beta(t)) - 1) \quad (3.15)$$

$$\beta(T) = -z, \quad \alpha(T) = 0 \quad (3.16)$$

Ebből következően tehát a keresett kifejezés

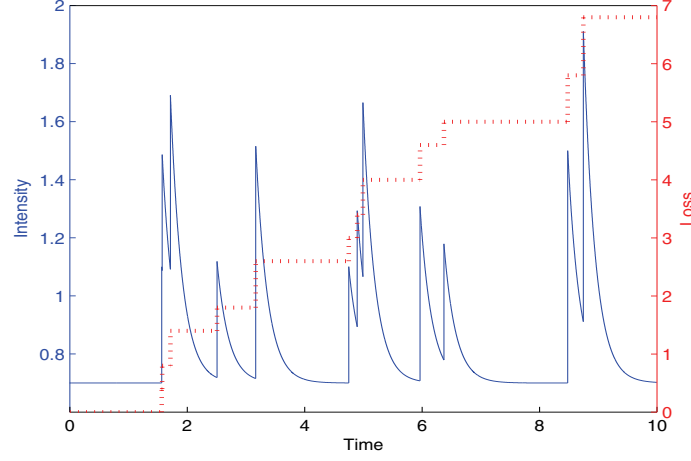
$$\varphi_t(u, z, T) = \mathcal{L}_t^u(\psi(u), z, T) = \exp(\alpha(u, \psi(u), t, T) + \beta(u, \psi(u), t, T) X_t). \quad (3.17)$$

Mint láthatjuk, a modellspecifikáció megáiban foglalja a kamatlábirodalomból jól ismert Vasicek-, illetve Cox–Ingersoll–Ross- (CIR-) modellt:

$$\begin{aligned} dX_t &= \kappa(c - X_t) dt + \sigma dW_t, \\ dX_t &= \kappa(c - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t. \end{aligned}$$

Ezek előnye, hogy a hozzájuk kapcsolódó differenciálegyenltek megoldása analitikus formában megadható (hiszen (3.14) egy Riccati-differenciálegyenletre egyszerűsödik). Sajnos azonban e modellek is a duplán sztochasztikus folyamatok családjába tartoznak, így az öngerjesztés hatását nem tudják figyelembe venni. Az általánosabb modellspecifikáció esetében (ahol $\delta \neq 0$) viszont a differenciálegyenletek megoldásához numerikus technikákat kell igénybe vennünk, melyekről egy részletes áttekintés található pl. Ferrazzano [2008] szakdolgozatában.

⁸A kamatlábra és w -re tett feltevések nem befolyásolják a következő levezetések érvényességét. Más a helyzet Y esetében. A gyakorlatban azonban a $\lambda = X$ feltevéssel szokás élni, s a fedezési stratégia kialakításakor kitüntetett szerepet fog betölteni az $\mathbf{E}(e^{iuN_t - z\lambda_t})$ kifejezés. A feltételes eloszlás meghatározása (és ebből következően az árazási alapprobléma) viszont Y specifikálást sem igényli, így ekkor az általánosság csorbítása nélkül élhetnénk a $z = 0$ kikötéssel is.



3.1. ábra. A Hawkes-folyamat és a hozzá tartozó intenzitás trajektóriájának egy realizációja $\kappa = 5$, $\lambda_0 = c = 0.7$, $\delta = 1$ paraméterek mellett. Forrás: Errais és szerzőtársai [2010].

Egy takarékos specifikáció: a Hawkes-folyamat

A Hawkes-folyamat az egyik legegyszerűbb modell, melyet a fentiek alapján vizsgálhatunk, mégis több publikáció pozitív eredményről számolt be a hitelderivatívák árazásában való használatukor. A folyamat dinamikája a

$$d\lambda_t = \kappa(c - \lambda_t) dt + \delta dL_t, \quad \lambda_0 > 0 \quad (3.18)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet által adott, ahol $c > 0$ a csődintenzitás hosszútávú átlagos szintjének tekinthető, $\kappa \geq 0$ az átlaghoz való visszahúzás sebessége, míg $\delta \geq 0$ a korábbi érzékenységi paraméter. Könnyen belátható, hogy az egyenlet megoldása:

$$\lambda_t = c + e^{-\kappa t}(\lambda_0 - c) + \delta \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dL_s, \quad \lambda_0 > 0.$$

A csőd esetén bekövetkező egységnyi névértékre vetített (ℓ_i) veszteségek származzanak az $[a, b]$ intervallumú egyenletes eloszlásból, ahol $0 \leq a < b \leq 1$. Mivel a piaci gyakorlat szerint a veszteségek várható értéke 0.60, így a modell becslése során elég egy paraméter (mondjuk a) értékét meghatároznunk (ekkor $b = 1.2 - a$).

A Hawkes-folyamatok képesek modellezni a csődök klasztereződését és a csődök esetén fennálló megtérülés (*Rate-of-Recovery*) csökkenésének negatív hatását. A folyamat, illetve a hozzá tartozó intenzitás trajektóriájának egy realizációja a 3.3. ábrán látható.

Legyen $X = \lambda$ (azaz $\Lambda_0 = 0$, $\Lambda_1 = 1$). A Laplace-transzformált (3.13) formuláját, illetve ezen keresztül a (3.17) kifejezést meghatározó differenciálegyenletek a következő

alakúra egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned}\partial_t \beta(t) &= v + \kappa \beta(t) - (1 - \psi(u))(\theta(\delta \beta(t)) - 1) \\ \partial_t \alpha(t) &= -\kappa c \beta(t) \\ \beta(T) &= -z, \quad \alpha(T) = 0\end{aligned}$$

3.4 A transzformált invertálása

Az elsődleges célunkat természetesen nem értük el az általánosított Laplace-transzformált meghatározásával, hiszen végső soron L , illetve N feltételes eloszlására vagyunk kíváncsiak. Mint az első alfejezetben már utaltunk rá, erre két lehetőségünk van. Vagy a transzformált $-\ln(v)$ helyen vett sorba fejtésével és a v -vel való nullába tartással, vagy pedig az inverz Fourier-transzformálttal. Mi a második utat fogjuk követni, hiszen ekkor használhatóvá válik a hatékony FFT algoritmus (*Fast Fourier Transform*). Ám elsőként még tisztáznunk kell, hogy milyen eljárást kell követnünk, ha L helyett N feltételes eloszlására vagyunk kíváncsiak.

Az N folyamat transzformáltja

A korábbi fejezet minden levezetése érvényben marad, ha az általánosított Laplace-transzformált (3.4) egyenlete helyett a következő kifejezésből indulunk ki:

$$\hat{\varphi}_t(u, z, w, T) \doteq \mathbf{E} \left(\exp \left(-w \int_t^T r_s ds \right) e^{-zY - u(N_T - N_t)} | \mathcal{F}_t \right), \quad (3.19)$$

Ekkor a korrelációsemleges mértékre való áttérés a

$$\frac{d\mathbf{P}_t^u}{d\mathbf{P}_t} = \exp(\psi(u)A_t - uN_t), \quad \psi(u) = 1 - \exp(-u) \quad (3.20)$$

Radon–Nikodym-deriváltak folyamata alapján történik. Továbbra is érvényben marad, hogy

$$\hat{\varphi}_t(u, z, w, T) = \mathcal{L}_t^u(\psi(u), z, w, T). \quad (3.21)$$

Vegyük észre, hogy formálisan e kifejezéseket megkaphatjuk, ha a ν eloszlását egyre koncentrálnak választjuk, hiszen ekkor minden ugrás egységnyi, továbbá $1 - \int_0^\infty e^{-uz} d\nu(z) = 1 - \exp(-u \cdot 1)$. De hangsúlyoznunk kell, hogy ez valóban csak formális összefüggés, hiszen N intenzitására továbbra is egy nemdegenerált ν eloszlású ugrásukkal rendelkező L folyamat hat. A korábbi levezetések viszont minimális módosítással alkalmazhatóak maradnak erre az esetre is. Ha N eloszlását már meghatároztuk, akkor nem

szükséges L növekményeinek Laplace-transzformáltjára is külön megoldanunk a differenciálegyenletek. Az ugrások független és azonos eloszlású volta miatt ugyanis:

$$\mathbf{E}(e^{-u(L_T-L_t)}|\mathcal{F}_t) = \sum_{k \geq 0} f^k(u) \mathbf{P}(N_T - N_t = k | \mathcal{F}_t) \quad (3.22)$$

ahol $f(u)$ az ugrások Laplace-transzformáltja.

Fourier-módszer

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$G_t(x, z, T) \doteq \mathbf{E}(e^{-z\lambda_T} \chi_{\{L_T-L_t \leq x\}} | \mathcal{F}_t), \quad (3.23)$$

$$\widehat{G}_t(x, z, T) \doteq \mathbf{E}(e^{-z\lambda_T} \chi_{\{N_T-N_t \leq x\}} | \mathcal{F}_t). \quad (3.24)$$

A Fourier–Stieltjes-transzformáció alapján:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dG_t(x, z, T) = \mathbf{E}(e^{iu(L_T-L_t)-z\lambda_T} | \mathcal{F}_t) = \varphi_t(-iu, z, T),$$

illetve hasonló összefüggés látható be $\widehat{G}$ és $\widehat{\varphi}$ között. Érdekes megemlítenünk, hogy $\widehat{G}$ szakaszonként konstans, így a $\widehat{G}_t(x, z, T)$ értékeket elég x egész értékeire visszaszámítanunk. A későbbiek során szükségünk lesz a következő G -ből származó kifejezésre is:

$$\mathbf{E}(\lambda_T \chi_{\{L_T-L_t \leq x\}} | \mathcal{F}_t) = -\partial_z G_t(x, z, T)|_{z=0},$$

melyet az előzőekhez hasonlóan az

$$\mathbf{E}(\lambda_T e^{iu(L_T-L_t)} | \mathcal{F}_t) = -\partial_z \varphi_t(-iu, z, T)|_{z=0}$$

kifejezésből kaphatunk Fourier-inverzióval. Vegyük észre, hogy a korábbiak alapján $-\partial_z \varphi_t(-iu, z, T)|_{z=0}$ is megkaptó, mint közönséges differenciálegyenletek megoldása:

$$\partial_z \varphi_t(-iu, z, T)|_{z=0} = \varphi_t(-iu, 0, T)(\alpha_z(u, t) + \beta_z(u, t)\lambda_t),$$

$$\text{ahol } \alpha_z(u, t) \doteq \partial_z \alpha(-iu, z, \psi(-iu), t, T)|_{z=0}$$

$$\text{és } \beta_z(u, t) \doteq \partial_z \beta(-iu, z, \psi(-iu), t, T)|_{z=0}.$$

A későbbiek során nem magára a $\widehat{G}$ függvényre lesz szükségünk, hanem a $\widehat{G}_t(x, z, T)$

egész x értékek mellett vett ugrásaira:

$$\hat{H}_t(x, z, T) \doteq \mathbf{E}(e^{-z\lambda_T} \chi_{\{N_T - N_t = x\}} | \mathcal{F}_t)$$

(vö. a későbbi (4.10) függvényvel). A gyakorlati alkalmazás során egy további apróbb kellemetlenség adódik, nevezetesen, hogy a portfólió mérete korlátozott és N helyett az $N \wedge n$ folyamat lesz a vizsgálódásunk tárgya. Ekkor azonban annyit kell figyelembe vennünk, hogy a $\hat{H}_t(n, z, T)$ értéket a $\hat{G}_t(m, z, T)$ minden $m \geq n$ ugrásást összeadva kapjuk. $\hat{H}$ parciális deriváltja ismét csak $\hat{G}$ parciális deriváltjának ugrásaiból adódik az előbbi – véges portfóliónagyságról szóló – megjegyzés figyelembevételével.

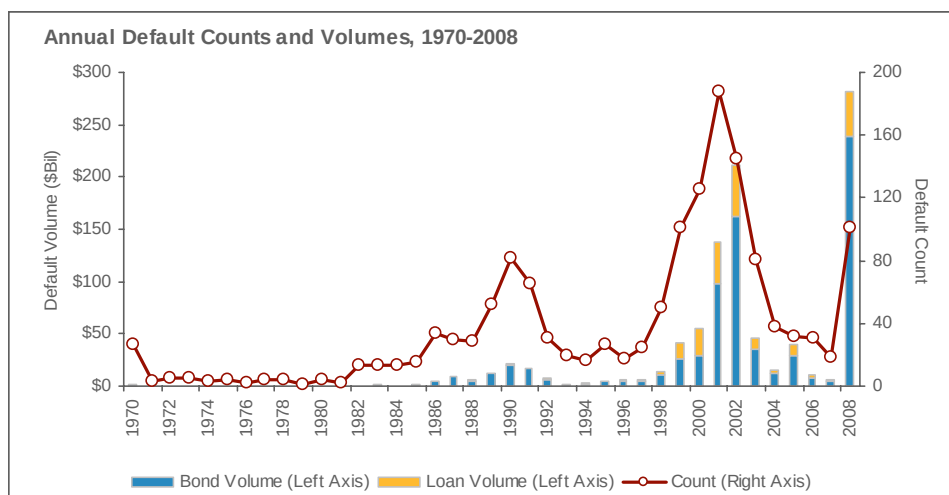
Hitelderivatívák árazása és fedezése

4.1 Portfólió hitelderivatívák

Az pénzügyi válság utóbbi néhány éve rávilágított arra, hogy a világ cégei ezer szálal kötődnek egymáshoz, hiszen közös gazdasági faktorok mozgatják teljesítményüket, miközben maguk is alakítói e gazdasági környezetnek. A Lehman Brothers bukása fájdalmasan érzékeltette a visszacsatolás hatásának jelenlétét a pénzügyi rendszerben. E befektetései bank ugyanis központi helyet foglalt el a pénzügyi közvetítőrendszer komplex hálójában, hatalmas mennyiségben vett és adott el különböző cégekre vonatkozó hiteltermékeket, miközben maga is számtalan biztosítási megállapodás referenciájául szolgált. Bukása kifizetési kötelezettségek sorát váltotta ki, csődbe taszítva védelem eladóként szereplő vállalatok sorát, akik így nem tudták teljesíteni kötelezettségeiket a szerződéseik másik oldalán álló – védelmet vásárló – partnereik felé.

A jelenség azonban nem csak az utóbbi néhány évre jellemző, ahogy erről a 4.1. ábrára tekintve megbizonyosodhatunk, mely a Moody's által minősített amerikai cégek között bekövetkező csődök alakulását mutatja 1970 és 2008 között. Egy portfólió hitelderivatíva redukált formájú modellezése során a nehézséget tehát a klasztereződés jelenségének reprodukálása jelenti, miközben fenntartjuk a számítások hatékonyságát (többek között épp az alternatív modellek túlzott számításigénye és problémás implementálhatósága indokolta a kopula modell iparági sztenderdként való rögzülését). A modellezési filozófia alapján a redukált modellek két csoportra oszthatók.

A *alulról felfelé* építkező (*bottom-up*) megközelítés esetén a portfólió elemei képezik a modellezés alapegységeit. Ekkor minden egyes i alkotórészre specifikálunk egy $N(i)$ számláló folyamatot $\lambda(i)$ intenzitással, ahol az első ugrás reprezentálja a csőd bekövetkezését. A nehézséget a köztük szereplő kapcsolat hatékony modellezése jelenti, miközben a paraméterek szempontjából takarékos specifikációk esetén is a dimenzionalitás átkával szembesülünk (hiszen a paraméterbecslés pl. a sztenderidizált termékek esetén egy több



4.1. ábra. A Moody's által minősített amerikai cégek között bekövetkező csődök száma és volumene 1970 és 2008 között. Forrás: Moody's [2009].

száz változós nemlineáris optimalizációs feladat megoldását jelenti). Előnyként említhető meg azonban, hogy a fedezési stratégia könnyen meghatározható egy ilyen modell alapján.

A másik lehetőség a *fentről lefelé* építhető (*top-down*) megközelítés, ahol a portfólió veszteségfolyamata a kiindulási alapunk. Mint a korábbi fejezetek alapján sejthető, a továbbiakban ezt az utat követjük. E filozófiával szemben gyakori ellenvetés, hogy nem ad nyilvánvaló választ a fedezés kérdésére. A későbbiekben azonban ismertetünk egy eljárást, mely lehetővé teszi, hogy a portfólió veszteségfolyamatának λ intenzitása alapján hatékonyan visszaszámítsuk az alkotóelemek $\lambda(i)$ intenzitásait, lehetővé téve ezzel a fedezésen keresztüli megfelelő kockázatkezelési stratégiát.

A következőkben a két legnépszerűbb portfólió hitelderivatíva, az index, illetve tranche swap árazási alapelvét ismertetjük. A szokásos terminológia szerint az azonos portfólióra vonatkozó (csatlakozási pontokban különböző) tranche swap-ok összességét CDO-nak (*Collateralized Debt Obligation*) nevezzük. A dolgozatban csak a szintetikus CDO-k árazásával foglalkozunk, melyek jellemzője, hogy a portfóliót alkotó termékek már maguk is hitelderivatívák, nevezetesen CDS-ek. Ezzel a szemben szokás cash CDO-król is beszélni, melyek közvetlen hitelkockázattal rendelkező termékekre (pl. kötvényekre, jelzáloghitelekre) épülnek. Működési elvük ugyan hasonló a szintetikus CDO-kéhoz, az alapul szolgáló portfólióba kerülő termékek azonban sok modellezést megnehezítő tulajdonsággal rendelkeznek, hiszen pl. a jelzáloghitelek esetén számolnunk kell a lejárat előtti törlesztés lehetőségével is. Ebből adódóan e termékek esetén szinte mindig számításigényes szimulációs technikákat vagyunk kénytelenek igénybe venni.

4.2 Az árazás alapelve

4.2.1. Index swap

Az index swap-ok a leglikvidebb portfólió hitelderivatívák. Jellemzőjük, hogy egy n elemű, azonos (1-re normált) névértékkel, azonos T lejáráttal és azonos t_m prémiumfizetési dátumokkal rendelkező CDS-ekből álló portfólió képezi az alapjukat. A portfólióban bekövetkező csődeseemények N száma és csődök során bekövetkező veszteségek kumulált L nagysága⁹ közvetlen kapcsolatban áll a szerződésből származó pénzáramlással:

- A védelem eladója fedezi a portfólióban bekövetkező veszteségeket (azaz L növekményeit) a bekövetkezés pillanatában mindaddig, amíg a lejárat be nem következik, vagy az összes CDS csődbe nem jut. E kifizetéseket nevezzük az index swap csődágának (*Default Leg, DL*).
- A védelem vevője a csődeseemények átvállalásáért cserébe a prémiumfizetések t_m időpontjaiban az adott időpontban fennálló névértékkel arányos (az éves szintre vetített S nagyságú spread által kifejezett) díjat fizet a védelem eladójának: $SC_m(n - N_{t_m})$, ahol C_m a két prémiumfizetés között eltelt idő (a gyakorlatban erre negyedévente kerül sor, így $C_m \approx 1/4$). E kifizetéseket nevezzük az index swap prémium ágának (*Premium Leg, PL*).

Vegyük észre, hogy a védelem eladója a tényleges veszteségeket téríti, míg a prémiumfizetések alapjául a csődeseemények száma szolgál. A szerződéskötéskor a felek célja egy igazságos S spread meghatározása, amihez különböző időpontokban adott veszteségértékek és a csődszámok (mint speciális termékek) igazságos árát kellene ismernünk. A szokásos gyakorlat a martingálmértékre épülő árazás technikájának felhasználása. Azaz tegyük fel, hogy fennálnak a $\mathbf{P}$ -vel ekvivalens (de nem feltétlenül egyértelmű) $\mathbf{Q}$ martingálmérték létezésének feltételei (a piac teljesíti az arbitrázsmentesség bizonyos fogalmát). Ekkor mind a csődág, mind a prémium ág t -beli értéke megkapható a kifizetések diszkon-

⁹Mint említettük az egyes termékek névértéke 1-re normált, csőd esetén pedig a névérték jelenti a veszteség felső határát, így jelen esetben az ugrások nagyságát jellemző ℓ_i valószínűségi változók értéke 0 és 1 közé esik, tehát a ν eloszlás a $[0, 1]$ intervallumra koncentrált.

tált értékének várható értékeként:

$$\begin{aligned} DL_t &= \mathbf{E}^Q \left(\int_t^T B(t, s) dL_s | \mathcal{F}_t \right) = \\ &= B(t, T) \mathbf{E}^Q(L_T | \mathcal{F}_t) - L_t + r \int_t^T B(t, s) \mathbf{E}^Q(L_s | \mathcal{F}_t) ds \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$PL_t(S) = S \sum_{t_m \geq t} B(t, t_m) C_m(n - \mathbf{E}^Q(N_{t_m} | \mathcal{F}_t)), \quad (4.2)$$

ahol az első egyenletben felhasználtuk a parciális integrálás formuláját és a Fubini-tételt. A kifejezésekben $B(t, s) \doteq \exp(-r(s - t))$ a diszkontfaktor. A t időpontbeli igazságos $S \doteq S_t(T)$ spread a $DL_t = PL_t(S)$ egyenlet megoldásaként kapható.

4.2.2. Tranche swap

Az index swap esetében a védelem eladója az egész portfóliót érintő kockázattal szembe-
besül. Az alacsonyabb kockázatú termékeket kereső befektetők számára a tranche swap
nyújthat megoldás, mivel ebben az esetben a portfóliót érintő veszteségeknek csak egy
bizonyos részét vállalják át.

A tranche swap-okat az alsó $\underline{K} \in [0, 1)$ és felső $\overline{K} \in (\underline{K}, 1]$ csatlakozási pontok
(*attachment & detachment points*) határozzák meg, a termék névértéke pedig Kn , ahol
 $K \doteq \underline{K} - \overline{K}$. A védelem eladója a rendszeres S nagyságú spread-fizetések mellett a
prémium egy részét a szerződéskötéskor előleg formjában is megkaphatja, ezt nevezzük
upfront fee-nek, mely korábban elsősorban a legalsó (jellemzően 0 és 3% közé eső equity-
nek nevezett) tranche-ot érintette. Az upfront fee-t G -vel jelöljük, s a spread-hez hason-
lóan a névértékre vetítve éves szinten adjuk meg. A termék pénzáramlása a résztvevő
felek szerint:

- A védelem eladója fedezi a portfólióban bekövetkező veszteségeket a bekövetkezés
pillanatában, de csak abban az esetben, ha a kumulatív veszteség (L) az alsó és felső
csatlakozási pontok által meghatározott intervallumba esik. A védelem eladójának
szemszögéből tehát az $U_t \doteq (L_t - \underline{K}n)^+ - (L_t - \overline{K}n)^+$ veszteségfolyamat ugrásai
a mérvadóak.
- A védelem vevője a szerződéskötéskor kifizeti a GKn nagyságú upfront fee-t, majd
a prémiumfizetések t_m időpontjaiban a tranche fennálló névértére vonatkozó spread
összegét: $SC_m(Kn - U_{t_m})$.

Az index swap-tól eltérő módon tehát ebben az esetben a védelem eladója csak a bekö-
vetkező veszteségek egy szeletét vállalja át. Minél magasabb az alsó $\underline{K}$ csatlakozási pont,
az eladó annál kisebb kockázatot vállal, s ebből következően annál kisebb prémiumra

számíthat. Ennek oka, hogy elsőként az alsóbb tranche-ok fogják fel a veszteségeket, biztonsági hálót nyújtva a magasabb csatlakozási ponton beszálló eladónak. A legalsó, equity-nek nevezett $\underline{K} = 0$ csatlakozási pontú tranche a legkockázatosabb, hiszen minden felmerülő veszteséget téríteni köteles, amíg névértéke teljesen fel nem emésztődik. Épp e kockázatos voltából fakad, hogy a sztenderdizált kereskedése az upfront-ja alapján történik rögzített spread mellett, miközben a magasabb sávok esetében a spreadeket jegyezték rögzített $G = 0$ upfront mellett. A válság hatására az utóbbi években a kockázatosság megugrása miatt már a magasabb tranche-ok jegyzése is az upfront alapján történt.

A korábbiakkal analóg módon a csőd- és prémium ág értéke a t időpontban:

$$DL_t(\underline{K}, \overline{K}) = B(t, T) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_T | \mathcal{F}_t) - U_t + r \int_t^T B(t, s) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s | \mathcal{F}_t) ds \quad (4.3)$$

$$PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S) = GK_n + S \sum_{t_m \geq t} B(t, t_m) C_m(Kn - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_{t_m} | \mathcal{F}_t)). \quad (4.4)$$

Rögzített G upfront fee mellett a t időpontbeli igazságos $S \doteq S_t(\underline{K}, \overline{K}, G, T)$ spread a $DL_t(\underline{K}, \overline{K}) = PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S)$ egyenlet megoldásaként kapható. Hasonló megfontolások alapján rögzített S spread mellett a t időpontbeli igazságos $G \doteq G_t(\underline{K}, \overline{K}, S, T)$ upfront fee-t a $DL_t(\underline{K}, \overline{K}) = PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S)$ egyenlet megoldása adja.

Figyeljük meg, hogy az igazságos spread és upfront fee meghatározásakor valójában *call spread*-ek értékét kell megállapítanunk, ahol alaptermékül most nem egy részvény, hanem az L veszteségfolyamat szolgál:

$$B(t, s) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s | \mathcal{F}_t) = B(t, s) (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((L_t - \underline{K}n)^+ | \mathcal{F}_t) - (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((L_t - \overline{K}n)^+ | \mathcal{F}_t)).$$

4.2.3. Credit swap

A credit swap, vagy közismert nevén CDS ugyan egy kibocsátóra vonatkozó (*single-name*), s nem portfólió hitelderivatíva, mégis szükséges áttekintenünk az árazási alapelvét. Ennek oka, hogy a szintetikus CDO-k építőelemeként fedezési stratégiát csak akkor vagyunk képesek kialakítani, ha ismerjük a paraméterekben bekövetkező változások hatását az alkotóelemül szolgáló CDS-ek értékére.

Az előzőektől eltérően itt a védelem eladója egy adott vállalat csődje esetén vállalja a veszteség térítését. A védelem vevője ezért a csőd bekövetkezéséig a prémiumfizetések előre meghatározott t_m időpontjaiban a swap névértékre vetített S nagyságú spread-et fizet. Ha feltesszük, hogy a swap névértéke egységnyi, a τ megállási idő során bekövetkező csődeseménykor keletkező veszteség az ℓ valószínűségi változó által adott, akkor a csőd-

és prémium ág értéke a t időpontban:

$$DL_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\ell | \mathcal{F}_t) \sum_{t_m \geq t} B(t, t_m) \mathbf{Q}(t_{m-1} < \tau \leq t_m | \mathcal{F}_t) \quad (4.5)$$

$$PL_t(S) = S \sum_{t_m \geq t} B(t, t_m) C_m \mathbf{Q}(\tau > t_m | \mathcal{F}_t). \quad (4.6)$$

A csődág meghatározásakor azzal az egyszerűsítő feltevessel élünk, hogy a veszteség kifizetésére a csőd bekövetkezését követő első prémiumfizetési időpontban kerül sor. Erre a 4.5. alfejezet kalibrációs eljárása szorán lesz szükségünk.

A t időpontbeli igazságos $S \doteq S_t(T)$ spread a $DL_t = PL_t(S)$ egyenlet megoldásaként kapható.

4.3 A valós és a martingál mérték

Egy bank kockázatkezelési osztályának, a szabályozói hatóságnak, vagy a gazdaságpolitikai döntéshozónak az elsődleges célja a portfóliót (mely a sztenderdizált termékek esetén a gazdaság bizonyos szegmenseit reprezentálják) érő csődök valós $\mathbf{P}$ mérték alatti intenzitásának feltárása. A modellválasztás ebben az esetben a historikus adatok alapján indokolható, mint arról az előző bevezető részben is volt szó. A probléma viszont, hogy a modellünk paramétereinek becslésére egyedül épp e múltbeli csődök szolgálnak kiindulási alapul. A csődök viszont természetükből adódóan ritka események, a sztenderdizált portfóliók (mindenek előtt az iTraxx és a CDX) csak néhány éves múltat tekint vissza, így pl. a CDX IG (azaz befektetésre ajánlott cégek CDS-ei alkotta portfólió) esetében 2004 és 2008 között összesen 4 csőd bekövetkezéséből kellene visszaszámítanunk az intenzitásmodellünk paramétereit.

A probléma egyik lehetséges megoldása a hitelminősítők évtizedekre visszamenőleg rendelkezésre álló csőadatainak felhasználása, mely a minősítő cégek kiterjedt működésének köszönhetően jó közelítéssel tekinthető a teljes gazdaság reprezentánsának. A szabványosított portfóliók összetétele természetesen ettől eltér, amire pl. Azizpour és szerzőtársai [2010] ismertetnek egy lehetséges megoldási módot. Ők a 4.4.1. alfejezetben általunk is ismertetett véletlen ritkításnak nevezett módszerrel generálnak mesterséges csődmintákat, majd ezek alapján becslik statisztikai eszközökkel a Hawkes-folyamat formájában felírt intenzitásmodelljüket.

Egy alternatív lehetőséget ismertet Berndt és szerzőtársainak [2004] cikke, mely a Moody's EDF adatait tekintik a valós csődintenzitás kiindulási alapjául. Az EDF mutatószám az egyes cég feltételes csődvalószínűségét adják meg különböző időtávokra vetítve. Értékét nemparamterikus illesztéssel állapítják meg a vizsgált céghez hasonló Distance-

to-Default (DD) értékkel rendelkező historikus csődadataiból.

Alapjaiban más a probléma, ha árazási és fedezési kérdések megválaszolása a célunk. A nagy mennyiségben rendelkezésre álló piaci adatok alapján az előzőleg ismertett árazási el alapján, a 4.5. alfejezetben ismertetendő módon becsülhetjük a modell paramétereit. A piac azonban nem teljes, a Q marintál mérték így nem egyértelmű. Az árakban realizálódó mérték egyaránt tükrözi a valós csődvalószínűséget és a piaci szereplők preferenciáit (bővebben ld. Medvegyev [2009, 2010]), s ez utóbbiak állandóságát semmi sem garantálja. Mi alapján specifikálhatjuk a modellünket, ha a napról napra visszaszámított λ^Q értékek egyaránt lehetnek egy adott – bizonyos időintervallumon fix – mérték mellett adódó trajektória pontjai, vagy mértékváltás következtében különböző mértékekhez tartozó trajektóriák időben egymást követő pontjai. Cont és Minca [2008] nemparametrikus algoritmusuk alapján a kockázatsemleges mérték alatt is a visszacsatolás megjelenését találták, ez előzőek alapján viszont nem nyilvánvaló, hogy e jelenség kialakításában mekkora szerep jut a λ^Q intenzitásnak és mekkora a változó preferenciának. Sajnos a kérdés megnyugtató megválaszolására nincs módunk. Ugyan követhetnénk Cont és Minca [2009] példáját, és a nemparametrikus algoritmusuk használatával elkerülhetnénk a hibás modellválasztásból adódó tévedés lehetőségét, ekkor azonban nem tudnánk válaszolni a fedezés kérdésre. Reményeink szerint az affin pontfolyamatok kellő flexibilitással rendelkeznek a dinamika reprodukálásához, s az alkalmazásukból eredő kockázatot felülmúlja a fedezés általi kockázatkezelés előnye.

Az árazás és a fedezés kérdése napi feladat, a fedezési stratégia kialakítása mindössze a mérték következő napra vonatkozó viszonylagos állandóságát tételezi fel. Ebből következően bár a preferenciák változnak, a paraméterek napról napra történő becslése alapján stratégiánkat hozzáigazíthatjuk a változó piaci környezethez, feltéve természetesen, hogy nem szembesülünk olyan extrém helyzettel, mint az elmúlt évek legsötétebb napjaiban.

4.4 A portfólióelemek intenzitása

Mint korábban említettük a fentről lefelé építkező, a portfólió intenzitását vizsgáló modellek számításigény szempontjából hatékonyak, paramétereik közgazdasági jelentéssel bírnak és képesek reprodukálni az empirikus tényeket (ciklikusság, visszacsatolás, átlaghoz való visszahúzás, stb.). E modellek viszont közvetlenül nem alkalmazhatóak, ha a portfólió hitelderivatíva árának érzékenysége vagyunk kíváncsiak az őt felépítő kereskedett derivatív termékek árára vonatkozóan. Jellemzően ez a helyzet, ha fedezni kívánjuk kitétségünket, pl. szintetikus CDO esetén a (pozíciónkkal ellentétes irányú) alkotóelemként szolgáló CDS-ek vételével/eladásával.

E fejezet középpontjában a véletlen ritkításnak (*random thinning*) nevezett technika

ismertetése áll, mellyel a portfólió szintű intenzitást felbontjuk az alkotóelemek intenzitására. A modell kidolgozása Giesecke és szerzőtársai [2010] nevéhez fűződik, tárgyalásunk elsősorban az ő munkájukon alapul. A korábbi fejezetek affin modelljei esetében megismert formulákkal való kapcsolat lehetővé teszi majd, hogy a számítási hatékonyságot az alkotóelemek szintjére is kiterjeszthessük.

Jelölések és feltevések

Az eddigiek során a számláló folyamat τ_i ugrásai a bekövetkező csődök rendezett számát jelentették, azaz nem azonosították a csődöt elszenvedő alkotóelemet. Az elemzés folytatásához így be kell vezetnünk megállási idők egy újabb halmazát. Jelölje ezért ϑ_k a k -adik alkotóelem csődjét, míg legyen $N_t^k \doteq \chi_{\{\vartheta_k \leq t\}}$ a hozzá tartozó egy ugrást tartalmazó számláló folyamat λ^k intenzitással. A csőd esetén bekövetkező veszteségeket továbbra is azonos ν eloszlású és független, $\mathcal{F}_{\vartheta_k}$ -mérhető ℓ^k valószínűségi változók szolgáltatják. Ekkor a portfólióra vonatkozó veszteségfolyamat $L = \sum_{k=1}^n \ell^k N^k$, míg a csődöket számláló folyamat $N = \sum_{k=1}^n N^k$. Ha N intenzitását továbbra is λ -val jelöljük, akkor könnyen látható, hogy $\lambda = \lambda^1 + \dots + \lambda^n$.

4.4.1. Véletlen ritkítás

A korábbiakhoz hasonlóan e fejezetben sincs szükségünk a valószínűségi mérték specifikálására – hiszen a technika mind a valós, mind a kockázatsemleges mérték alatt használható –, így a számításokat egy adott $\mathbf{P}$ referencia valószínűségi mérték alatt végezzük. Legyen továbbra is N a csődöket számláló folyamat λ intenzitással, a portfólió pedig álljon n elemből. Kiindulásként a lehető legbővebb $\mathcal{F}$ filtrációt tekintjük, melyre nézve az alkotóelemek csődidejei is megállási idők. Defináljuk a

$$Z_t^k(\omega) \doteq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathbf{P}(t < \vartheta_k \leq t + \varepsilon | \mathcal{F}_t)}{\mathbf{E}(N_{t+\varepsilon} - N_t | \mathcal{F}_t)}(\omega) \quad (4.7)$$

folyamatot azon $(\omega, t) \in \Omega \times (0, \infty]$ pontokban, ahol a határérték létezik, azzal a feltevéssel, hogy a jobb oldali kifejezés zérus, ha a nevező nulla. A Z^k folyamatot *ritkító folyamatnak* nevezzük, és a definícióból adódóan értéke annak a feltételes valószínűségként értelmezhető, hogy a következő csődesemény a k -adik alkotóelemet érinti, ha tudjuk, hogy a portfólióban t és $t + \varepsilon$ között csőd következik be.

A fenti folyamat tulajdonságainak feltárásához egy újabb mértéket kell bevezetnünk. Vegyük ugyanis észre, hogy adott t -re az azonnali csőd bekövetkezésének esélye nulla (a következőkben definiálandó μ mérték alatt ez egy pozitív mértékű esemény), így a folyamat rosszul definiált lenne, ha $\forall t$ -re $\mathbf{P}$ -m.m. létezését állítanánk. Legyen ezért a μ

mérték az $\Omega \times (0, \infty]$ tér előrejelezhető halmazai által generált σ -algebrán $\mu(B \times (t, \infty]) \triangleq \mathbf{E}((n - N_t)\chi_B)$, $B \in \mathcal{F}_t$ alapján meghatározott. Ekkor belátható a következő tétel.

4.1 Állítás

Tetszőleges k alkotóelem esetén a Z^k ritkító folyamat egyértelműen létezik μ -m.m., előrejelezhető, továbbá μ -m.m. fennál, hogy

$$\lambda^k = Z^k \lambda. \quad (4.8)$$

A ritkító folyamat szerepe intuitívan a következő. Az események λ intenzitással következnek be a portfólióban, egy csőd τ_i időpontú előfordulásakor pedig véletlenszerűen, $Z_{\tau_i}^k$ feltételes valószínűséggel kiválasztódik egy k alkotóelem a még csődbe nem ment alkotóelemek közül. E feltételes valószínűség – Z^k előrejelezhető voltaival összhangban – a τ_i időpontot tetszőlegesen megközelítő, de el nem érhető időpontig fegyülemlett információ által meghatározott.

A modellezés során a ritkító folyamat specifikálása az alkalmazó feladata, a lehetőségeket azonban a következő állítás könnyen belátható korlátai szűkítik.

4.2 Állítás

A Z^k ritkító folyamat μ -m.m rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- (1) $Z^k \geq 0$,
- (2) $\sum_{k=1}^n Z^k = 1$ a $\{(\omega, t) \mid t \leq \tau_n(\omega)\}$ halmazon,
- (3) $Z^k = 0$ a $\{(\omega, t) \mid t > \vartheta_k(\omega)\}$ halmazon.

Az 1. tulajdonság alapján nemnegatív intenzitásokat kapunk, a 2. tulajdonság garantálja, hogy a kapott λ^k intenzitások összege megegyezik a portfólió λ intenzitásával, míg a 3. tulajdonság biztosítja, hogy λ^k nullává válik, ha a k -adik alkotóelem csődbe jut.

A ritkító folyamat ismeretében jogos elvárás, hogy kapcsolatot tudjunk teremteni az egyes alkotóelemek csődvalószínűsége, illetve Z^k és λ között, hiszen ha az alkotóelemek kereskedett derivatívák, akkor a piaci áruk (mely mint láttuk a csődvalószínűség által meghatározott) lehetőséget nyújthat a Z^k folyamatok becslésére. Ebben a következő állítás lesz segítségünkre.

4.3 Állítás

Az alkotóelemek feltételes csődvalószínűsége a következő összefüggés által meghatározott:

$$\mathbf{P}(t < \vartheta_k \leq T | \mathcal{F}_t) = \int_t^T \mathbf{E}(\lambda_s Z_s^k | \mathcal{F}_t) ds. \quad (4.9)$$

A (4.9) egyenlet egyenes következménye a 4.1. állításnak, felhasználva $N_t^k - \int_0^t \lambda_s^k ds$ martingáltulajdonságát és a Fubini-tételt. A technika illusztrálására tekintsünk egy egyszerű példát.

4.1 Példa

Legyen egy két termékből álló portfóliónk, ahol a csődöket számláló N folyamat egy τ_2 -ben (a második csőd bekövetkezésekor) megállított sztenderd Poisson-folyamat. Ekkor N intenzitása $\lambda_{\{t \leq \tau_2\}}$, eloszlása pedig a következőképp alakul:

$$\mathbf{P}(N_T = n) = \begin{cases} e^{-T}, & \text{ha } n = 0 \\ Te^{-T}, & \text{ha } n = 1 \\ 1 - (1 + T)e^{-T}, & \text{ha } n = 2. \end{cases}$$

Nemnegatív q^{k1} konstansok ($k = 1, 2$) mellett a ritkító folyamat legyen

$$Z_t^k \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} q^{k1}, & \text{ha } t \leq \tau_1 \\ \chi_{\Omega^{k2}}, & \text{ha } \tau_1 < t \leq \tau_2 \\ 0, & \text{ha } \tau_2 < t, \end{cases}$$

ahol $\Omega^{kn} \stackrel{\circ}{=} \{\vartheta_k = \tau_n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. A q^{k1} paraméterek annak a feltételes valószínűségét adják meg, hogy a $t \leq \tau_1$ időpontban a következő csőd a k terméket fogja érni. τ_1 -ben bekövetkezik a csőd, felfedve a csődöt elszenvedő termék azonosságát, a 4.2. állítás 3. pontja alapján pedig ekkor a csődbe ment termékhez tartozó ritkító folyamat nullává válik, s ezzel egy időben a túlélő termék ritkító folyamata egyre változik. Az egyes alkotóelemek intenzitása tehát megkapható $\lambda_t^k = Z_t^k \lambda$ alapján. A (4.9) kifejezés következtében – felhasználva, hogy a csődesemények között eltelt idő sztenderd exponenciális eloszlású – kapjuk, hogy:

$$\mathbf{P}(\vartheta_k \leq T) = \int_0^T \mathbf{E}(\lambda_s Z_s^k) ds = 1 - e^{-T} - (1 - q^{k1})Te^{-T}.$$

A fenti egyenlőség mutatja, hogy az egyes ϑ_k megállási idők független exponenciális eloszlású valószínűségi változók keverékei. Ha $q^{k1} = 1$, akkor $\vartheta_k = \tau_1$ m.m., tehát ϑ_k exponenciális eloszlású, ha pedig $q^{k1} = 0$, akkor $\vartheta_k = \tau_2$ m.m., azaz ϑ_k gamma eloszlású. A ϑ_k megállási idők függőségi struktúrája a q^{k1} paraméterek által meghatározott. $\square$

A számítási hatékonyság megőrzése céljából célszerű a fenti egyenlet és a korábban

már $Y = \lambda_s$ választás mellett elemezett

$$H_t(k, z, s, Y) = \mathbf{E}(e^{-zY} \chi_{\{N_s - N_t = k\}}) \quad (4.10)$$

kifejezés közötti kapcsolatot feltárnunk, így ugyanis felhasználhatóvá válnak a korábbi fejezetek formulái.

4.4 Állítás

Tegyük fel (a korábbi példa által motiválva), hogy a ritkító folyamat

$$Z_t^k = \sum_{i=1}^n M_t^{ki} \chi_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}} \quad (4.11)$$

alakban adott, ahol $k = 1, \dots, n$ és M^{ki} olyan nemnegatív, előrejelezhető folyamatok, melyekre teljesül, hogy $M_t^{1i} + \dots + M_t^{ni} = 1$ m.m. $\tau_{i-1} < t \leq \tau_i$ és $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor a csődvalószínűségekre teljesül, hogy

$$\mathbf{P}(t < \vartheta_k \leq T | \mathcal{F}_t) = - \sum_{i=N_t+1}^n \int_t^T \partial_z H_t(i-1-N_t, z, s, M_s^{ki} \lambda_s) |_{z=0} ds.$$

Az állítás M_t^{ki} valószínűségi változókra vonatkozó összegzési feltétele a 4.2. állítás 2. pontjának közvetlen következménye. E tétel 3. pontja viszont megköveteli, hogy $M^{ki} = Q^{ki}(1 - N_-^k)$ alakban álljon elő $i = 2, \dots, n$ esetén, valamilyen előrejelezhető Q^{ki} folyamat mellett. E feltétel miatt tehát M^{ki} függ N^k -től, megnehezítve ezzel a $H_t(k, z, s, M_s^{ki} \lambda_s)$ kifejezések számítását (mint láttuk, a $H_t(k, z, s, Y)$ kifejezésre csak $Y = \lambda_s$ esetén adható szemianalitikus formula). A következő alfejezet e kérdés megoldását ismerteti.

4.4.2. A ritkító folyamat simítása

Az előzőekben feltettük, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció elég bő ahhoz, hogy a ϑ_k változók megállási idők lehessenek. Egy másik szélső eset, ha $\mathcal{F}$ az N folyamat által generált. E filtráció alapján a csőd megfigyelhető, τ_i $\mathcal{F}$ -megállási idő, ám a csőd bekövetkezésekor nem válik ismertté a csődöt elszenvető alkotóelem identitása. Ebben az esetben a ritkító folyamat sem válhat nullává a csőd esetén, mivel a csődbe jutott termék nem azonosítható. E fejezetben a korábbi vizsgálódásunkat általánosítjuk erre az esetre, mely lehetővé teszi a ritkító folyamat flexibilisebb specifikálást és egy számításokat megkönnyítő következmény kihasználását.

Legyen $\mathcal{F}$ a kiindulási filtráció és legyen $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ egy részfiltráció, melyre nézve a

ϑ_k változók nem feltétlenül megállási idők (de $\tilde{\mathcal{F}}$ nem is feltétlenül az N által generált filtráció), ahhoz viszont elég bő, hogy N $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptált maradjon. Legyen N intenzitása $\mathcal{F}$ alatt λ . Mint láttuk, ekkor létezik egy $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mathcal{F}})$ intenzitásfolyamat, melyre $\tilde{\lambda}_t = \mathbf{E}(\lambda_t | \tilde{\mathcal{F}}_t)$ m.m., továbbá $\tilde{\lambda} = \lambda$ teljesül, ha λ $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptált, azaz ha λ dinamikája figyelmen kívül hagyja a csődöt elszenvedő termék identitását. Érdeemes megjegyeznünk, hogy a jelenleg használatos intenzitásmodellek kivétel nélkül ilyenek.

E feltételek mellett az alkotóelemek intenzitása természetesen nem feltétlenül létezik (hiszen N^k $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptáltsága nem garantált), így tisztáznunk kell, hogy mit értünk az alkotóelemek $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptált intenzitásán. Ehhez legyen $\tilde{N}^k$ az N^k folyamat $\tilde{\mathcal{F}}$ filtrációra vonatkozó *kockázatos vetülete*. A vetület tulajdonságai alapján ekkor $\tilde{N}_t^k = \mathbf{E}(N_t^k | \tilde{\mathcal{F}}_t) = \mathbf{P}(\vartheta_k \leq t | \tilde{\mathcal{F}}_t)$ m.m. Ha ϑ_k $\tilde{\mathcal{F}}$ -megállási idő, akkor $\tilde{N}^k = N^k$ és az előző fejezet levezetései maradnak érvényben. $\tilde{N}^k$ továbbra is teljesíti a Doob–Meyer-felbontás korábban ismerttetett speciális változatának feltételeit, így létezik az $(\tilde{N}^k)^p$ előrejelezhető kompenzátor, hogy $\tilde{N}^k - (\tilde{N}^k)^p$ martingál. $(N^k)^p$ abszolút folytonos voltából (tehát a λ^k intenzitás létéből) következően létezik egy nemnegatív, előrejelezhető $\tilde{\lambda}^k$ folyamat, hogy $(\tilde{N}_t^k)^p = \int_0^t \tilde{\lambda}_s^k ds$.

A korábbiakhoz hasonlóan most is megmutatható, hogy $\tilde{\lambda}$ felbontható a $\tilde{\lambda}^k$ folyamatok összegére. Ehhez legyen

$$\tilde{Z}_t^k(\omega) \doteq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathbf{P}(t < \vartheta_k \leq t + \varepsilon | \tilde{\mathcal{F}}_t)}{\mathbf{E}(N_{t+\varepsilon} - N_t | \tilde{\mathcal{F}}_t)}(\omega). \quad (4.12)$$

A 4.1. állítás általánosításaként megmutatható, hogy $\tilde{Z}^k$ $\tilde{\mu}$ -m.m. egyértelműen létezik és előrejelezhető (ahol $\tilde{\mu}$ a korábban definiált μ mérték analóg változata), továbbá $\tilde{\mu}$ -m.m.

$$\tilde{\lambda}^k = \tilde{Z}^k \tilde{\lambda}. \quad (4.13)$$

E $\tilde{Z}^k$ ritkító folyamat nem más, mint a Z^k $\mathcal{F}$ -ritkító folyamat $\tilde{\mathcal{F}}$ filtrációra vonatkozó *előrejelezhető vetülete*. A $\tilde{Z}^k$ folyamat $\tilde{\mu}$ -m.m. kielégíti a következő tulajdonságokat:

- (a) $\tilde{Z}^k \geq 0$,
- (b) $\sum_{k=1}^n \tilde{Z}^k = 1$ a $\{(\omega, t) \mid t \leq \tau_n(\omega)\}$ halmazon,
- (c) $\tilde{Z}^k = 0$ a $\{(\omega, t) \mid t > \tau_n(\omega)\}$ halmazon.

Vessük össze a fenti tulajdonságokat a 4.2. állítás eredményével. Az (a) és (b) pontok az eredeti 1. és 2. tulajdonság tükérképei. A (c) pont viszont elér a 4.2. állítás 3. megállapításától. A (c) feltétel szerint egy $\tilde{\mathcal{F}}$ -ritkító folyamat akkor válik nullává, ha a portfólió minden alkotóeleme csődbe jutott. Ezzel szemben a 4.2. állítás 3. pontja alapján egy $\mathcal{F}$ -ritkító folyamat nullává válik, ha a neki megfelelő alkotóelem csődbe jut. Ebből a szempontból tehát az $\tilde{\mathcal{F}}$ -ritkító folyamatok *simábbak*, mint az $\mathcal{F}$ -ritkító folyamatok.

A (4.9) egyenlet szintén általánosítható, hogy meghatározhassuk a csőd feltételes valószínűségét az $\tilde{\mathcal{F}}$ filtrációra vonatkozóan:

$$\mathbf{P}(t < \vartheta_k \leq T | \tilde{\mathcal{F}}_t) = \int_t^T \mathbf{E}(\tilde{\lambda}_s \tilde{Z}_s^k | \tilde{\mathcal{F}}_t) ds. \quad (4.14)$$

Mivel $\mathcal{F}_0 = \tilde{\mathcal{F}}_0$, így $\mathbf{E}(\tilde{\lambda}_s \tilde{Z}_s^k) = \mathbf{E}(\lambda_s Z_s^k)$, tehát a $\mathbf{P}(\vartheta_k \leq T)$ feltétel nélküli valószínűség $(\lambda, \mathcal{F})$ intenzitásból történő meghatározására két módszer is rendelkezésünkre áll. A gyakorlatban pedig csak e feltétel nélküli valószínűség megadása szükséges a modellezés szempontjából. Ha Z^k $\tilde{\mathcal{F}}$ -mérhető, azaz ϑ_k $\tilde{\mathcal{F}}$ -megállási idő, akkor mint már korábban említettük, az előző fejezet összefüggései is érvényben maradnak, így a (c) tulajdonságnál szigorúbb, a 4.2. állítás 3. pontjában szereplő tulajdonságnak is teljesülnie kell. Azonban λ dinamikáját a jelenleg elterjedt modellek alapján nem befolyásolja a csődöt elszenvedő termék identitása, ebből következően a számítások során becsülhetjük közvetlenül a $\tilde{Z}^k$ előrejelezhető vetületet (impliciten egy megfelelően szűk $\tilde{\mathcal{F}}$ filtrációt használva, hogy a modellspecifikációnak csak a gyengébb (a)-(c) feltételeknek kelljen megfelelnie, miközben λ $\tilde{\mathcal{F}}$ -adaptált marad), majd (4.14) alapján kiszámíthatjuk a $\mathbf{P}(\vartheta_k \leq T)$ értékeket. Ekkor természetesen adósak maradunk a λ^k intenzitásokkal, ám modellezési szempontból ezekre nincs is szükségünk.

A fejezetben ismertetett eljárás jelentette előnyök kiaknázása érdekében tekintsük a

$$\tilde{Z}_t^k = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_t^{ki} \chi_{\{\tau_{i-1} < t \leq \tau_i\}}, \quad (4.15)$$

specifikációt, mely analóg a (4.11) formulával. Az $\tilde{M}_t^{ki}$ folyamatok jelen esetben is nem-negatívak és előrejelezhetőek. A (b) tulajdonság alapján szükséges, hogy $\tilde{M}_t^{1i} + \dots + \tilde{M}_t^{ni} = 1$ m.m. $\tau_{i-1} < t \leq \tau_i$ és $i = 1, \dots, n$ esetén teljesüljön. A (c) tulajdonság azonnal adódik a (4.15) meghatározásból. Láthatjuk tehát, hogy a ritkító folyamat paraméterezése ekkor sokkal szabadabb, mint amit az eredeti 4.4. állítás feltételrendszere megkövetel. Megmutatható, hogy

$$\mathbf{P}(\vartheta_k \leq T) = - \sum_{i=1}^n \int_0^T \partial_z H(i-1, z, s, \tilde{M}_s^{ki} \lambda_s) |_{z=0} ds, \quad (4.16)$$

ahol $H(i, z, s, \tilde{M}_s^{ki} \lambda_s)$ a (4.10) kifejezés H_t függvényének értéke a $t = 0$ helyen, elhagyva az alsó indexet. $H(i-1, z, s, \tilde{M}_s^{ki} \lambda_s)$ értékének meghatározása jóval egyszerűbb, mint az analóg $H(i-1, z, s, M_s^{ki} \lambda_s)$ kifejezésé, hiszen M_s^{ki} az $\tilde{M}_s^{ki}$ -vel szemben nem lehet N^k -től független. Ebben az esetben megtehetjük, hogy az $\tilde{M}_s^{ki}$ értékeket konstansnak tekintsük,

miközben M_s^{ki} mellett erre nem lenne lehetőségünk. Ekkor

$$\partial_z H(i, z, s, \widetilde{M}_s^{ki} \lambda_s)|_{z=0} = \widetilde{M}_s^{ki} \partial_z H(i, z, s, \lambda_s)|_{z=0}. \quad (4.17)$$

Következésképp a ritkító folyamat számításához egyedül a $H(i, z, s, \lambda_s)$ kifejezést szükséges ismernünk, amelyet a korábbi fejezetek alapján hatékonyan tudunk meghatározni.

4.5 A modell kalibrálása

A matematikai eszközök áttekintése után immár lehetőségünk van egy kétlépéses eljárás során a portfólió λ intenzitásának, illetve az egyes alkotóelemekhez tartozó Z^k ritkító folyamatok piaci adatokból történő becslésére.

Jelölje θ a modellünk paramétervektorát, míg $\text{Mid}(j)$ és $\text{Model}(j, \theta)$ legyen rendre a j index vagy tranche swap piacon jegyzett spread-jének középértéke (a bid és ask spread-ek számtani közepe), és a θ paraméterek mellett a modellből számított spread-je. A λ intenzitás becslése egy nemlineáris optimalizálási feladat megoldását igényli, ahol a cél-függvényünk

$$\min_{\theta \in \Theta} \sum_j \frac{(\text{Mid}(j) - \text{Model}(j, \theta))^2}{\text{Mid}(j)}, \quad (4.18)$$

ahol Θ a lehetséges paraméterek tere, j pedig befutja a piacon elérhető index, illetve tranche swap-okat.

Az optimalizáció nemlináris voltából következően célszerű néhány száz vagy ezer – a paraméterteréből véletlenszerűen választott – kiindulási pontból lefuttatni a keresést, majd ezek közül kiválasztani a legkisebb hibával járó megoldást. A közönséges differenciálegyenletek megoldására rendelkezésre álló hatékony algoritmusok miatt a kalibráció időigénye is elfogadható szintű.

A ritkító folyamatot a (4.15) egyenlet alapján specifikáljuk, az $\widetilde{M}^{ki}$ folyamatokat konstansnak választjuk (legyen tehát $\widetilde{M}^{ki} \equiv q^{ki}$), az általuk felépített $n \times n$ -es méretű mátrixot (ahol n továbbra is a portfóliót alkotó termékek száma) pedig jelölje $\widetilde{M}$. A CDS árazás alapelveinek következtében a portfólió k termékének modellből származó $t = 0$ időpontbeli S^k spread-je az

$$S^k W = \sum_{i=1}^n q^{ki} (V_\theta^i S^k + X_\theta^i \mathbf{E}^Q(\ell^k)) \quad (4.19)$$

egyenlet alapján számolható, ahol

$$W = \sum_m e^{-rt_m} C_m \quad (4.20)$$

$$V_\theta^i = - \sum_m e^{-rt_m} C_m \int_0^{t_m} \partial_z H(i-1, z, s, \lambda_s) \big|_{z=0} ds \quad (4.21)$$

$$X_\theta^i = - \sum_m e^{-rt_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \partial_z H(i-1, z, s, \lambda_s) \big|_{z=0} ds. \quad (4.22)$$

A (4.19) egyenlet alapján a kalibrációt a következő (regularizált) kvadratikus programozási feladat megoldásával végezhetjük el:

$$\min_{(q^{ki}) \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q^{ki} (V_{\theta^*}^i \text{Mid}(k) + X_{\theta^*}^i \mathbf{E}^Q(\ell^k)) - W \text{Mid}(k) \right)^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (q^{ki})^2, \quad (4.23)$$

ahol $\mathcal{D}$ a duplán sztochasztikus mátrixok halmaza (azaz mind soraik, mind oszlopaik összege egységnyi), θ^* pedig az előzőek során kapott optimális θ paramétervektor. A cél-függvény második $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (q^{ki})^2$ tagja a megoldás egyértelműségét és a kisebb normájú mátrixok iránti igényt szolgálja.

4.6 A fedezési stratégia kialakítása

A kitettségünk fedezéséhez szükséges megállapítanunk, hogy az alkotóelemek értékében bekövetkező kis változás milyen mértékben változtatja meg az index vagy tranche swap értékét. Az így kapott mennyiségben kell ugyanis a kitettségünk névértékre vetítve vásárolni vagy eladni a megfelelő alkotóelemet, semlegesítve ezáltal az értékében bekövetkező kismértékű ingadozás hatását a portfólió hitelderivatívánkra.

Tegyük fel, hogy a k alkotóelem spread-je egy rögzített, kismértékű elmozdulást szenved el. Jelölje ekkor az elmozdulás hatására bekövetkező értékváltozást a j index vagy tranche swap esetében ΔC^{jk} , míg legyen ΔC^k ugyanezen elmozdulás hatására bekövetkező értékváltozás a k alaptermék esetében. Ekkor a j index vagy tranche swap k termékre vonatkozó érzékenységet a következőképp számíthatjuk:

$$\Delta^{jk} = \frac{\Delta C^{jk}}{\Delta C^k}. \quad (4.24)$$

A megfelelő értékváltozások becslésére a következő algoritmust használhatjuk:

- (1) Kalibráljuk a modellünket λ és Z^k becslésére a θ és $\widetilde{M}$ paramétervektor, illetve -mátrix megfelelő megválasztásával.

- (2) Módosítsuk a k alkotóelem $\text{Mid}(k)$ spread-jét 0.1 százalékponttal. Becsüljük újra a θ paramétervektort valamilyen közgazdaságilag indokolható megkötéssel. A korábbi Hawkes-folyamat esetén pl. legyen $\theta^\varepsilon = (\lambda_0, \kappa, \varepsilon c, \delta, a)$ alakban adott, ahol csak ε szabad paraméter, $(\lambda_0, \kappa, c, \delta, a)$ és $\widetilde{M}$ az 1. pont alapján rögzített. A célfüggvényünk ekkor:

$$\min_{\varepsilon > 0} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q^{ki} (V_{\theta^\varepsilon}^i \text{Mid}(k) + X_{\theta^\varepsilon}^i \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\ell^k)) - W \text{Mid}(k) \right)^2. \quad (4.25)$$

- (3) Mind az alkotóelemek, mind a tranche és index swapok esetén számítsuk ki az új $(\theta^\varepsilon, \widetilde{M})$ paraméterek és az eredeti spread-ek használatával a prémiumok és kifizetések jelenértékének különbségét. Mivel a szerződéskötéskor mindhárom típusú termék esetén a kifizetések és prémiumok jelenértéke megegyezik (a swap ráták igazságosak), így a különbségek adják rendre a keresett ΔC^k és ΔC^{jk} értékeket.

Láthatjuk, hogy becslési eljárásunk feltételezi az $\widetilde{M}$ paramétermátrix állandóságát, mely az egyes alkotóelemek egymáshoz viszonyított relatív kockázatosságát reprezentálja. Ezzel szemben feltesszük, hogy egy alkotóelem spread-jének növekedése a portfólió intenzitásának dinamikáját befolyásolja, mégpedig megnövelve a hosszútávú egyensúly c értékét. A választás közgazdaságilag indokolható, számítási szempontból hatékony, de természetesen nem kizárólagos lehetőség. Egy adott modell esetén más paramétermegkötésekkel is élhetünk, melyek természetesen más fedezési stratégiához vezetnek. A különböző modellek teljesítményének összehasonlítása még várat magára, a fenti választás azonban Giesecke és szerzőtársai [2010] munkája nyomán jóval kedvezőbb eredményre vezet, mint az iparági sztenderd Gauss-kopula használatával kapott stratégia.

5

Összefoglalás

A dolgozatban áttekintettük a hitelderivatívák redukált formájú modelljeiben központi szerepet játszó pont- és számláló folyamatok, illetve a hozzájuk kapcsolódó intenzitás legfontosabb jellemzőit. Megvizsgáltuk az ekvivalens mértékcsere néhány kérdését és kapcsolatot teremtettünk a veszteségfolyamatok Laplace-transzformáltja és intenzitásuk Laplace-transzformáltja között. Ez lehetőséget teremtett számunkra, hogy felhasználhasuk a kamatlábmodellek széleskörű irodalmát. Egy példaként bemutattuk az affín ugró-diffúziók modelljét, amikor a kérdéses transzformált meghatározása közönséges differenciálegyenletek megoldására vezethető vissza. Végül foglalkoztunk az árazás és a fedezés kérdésével. Rövid áttekintésünk alapján is látható, hogy egy alapvető, gyakorlati kérdés megválaszolása a matematika több, önmagában is mély területének felhasználását igényli, megnehezítve ezen modellek elterjedését, illetve megfelelő használatát.

Mialatt a válság hatására a hitelderivatívák értéke drasztikus csökkenésen ment keresztül, s piacaik likviditása minden korábban elképzelhető szint alá süllyedt, a termékek mögött meghúzódó közgazdasági racionalitás továbbra is érvényben marad. A hiteleket folyósító bankok például továbbra is kénytelenek lesznek fedezni kitettségeiket. Ebből következően a hitelderivatívák piaca várhatóan tovább fog élni egy tisztább, átláthatóbb, jobban szabályozottabb formában. Egy ilyen piacon a kereskedés során minden valószínűség szerint az eddigieknél nagyobb szerep jut majd a kockázatkezelésnek. A minősítő cégeket is tévedéseik valószínűleg modelljeik felülvizsgálatára készítetik majd. Összefoglalva, habár egyes korábban elképzelhetetlen méretű összegben kereskedett termékek (mint pl. a CDO-k) valószínűleg a feledés homályába merülnek, a hitelderivatívák működési mechanizmusainak feltárása a későbbiekben is fontos (sőt, az eddigieknél talán fontosabb) feladatává válik a kvantitatív pénzügyes közösségnek.

Irodalomjegyzék

- [1] Artzner, P. – Delbaen, F. [1995]: Default Risk Insurance and Incomplete Markets. *Mathematical Finance* **5**, pp. 187-195.
- [2] Barnett-Hart, A. K. [2009]: The Story of the CDO Market Meltdown: An Empirical Analysis. *Bachelor's Thesis*. <http://www.hks.harvard.edu/m-rcbg/students/dunlop/2009-CDOMeltdown.pdf>
- [3] Berndt, A. – Douglas, R. – Duffie, D. – Ferguson, M. – Schranz, D. [2004]: Measuring Default Risk Premia from Default Swap Rates and EDFs. *BIS Working Paper No. 173*. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=556080
- [4] Björk, T. [2011]: An Introduction to Point Processes from a Martingale Point of View. *Lecture Notes, KTH Royal Institute of Technology*. www.math.kth.se/matstat/fofu/PointProc3.pdf
- [5] Brémaud, P. [1981]: Point Processes and Queues – Martingale Dynamics, Springer-Verlag, New York.
- [6] Brigo, D. – Pallavicini, A. – Torresetti, R. [2010]: Credit Models and the Crisis: A Journey into CDOs, Copulas, Correlations and Dynamic Models. Wiley, New York.
- [7] Duffie, D. – Pan, J. – Singleton, K. [2000]: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusion. *Econometrica* **68**, pp. 1343-1376.
- [8] Duffie, D. – Filipović, D. – Schachermayer, W. [2003]: Affine Process and Applications in Finance. *Annals of Applied Probability* **13**, pp. 984-1053.
- [9] Duffie, D. [2005]: Credit Risk Modeling with Affine Processes. *Journal of Banking & Finance* **29**, pp. 2751-2802.
- [10] Errais, E. – Giesecke, K. – Goldberg, L. [2010]: Affine Point Processes and Portfolio Credit Risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics* **1**, pp. 642-665.

- [11] Ferrazzano, V. [2008]: Affne Models in Credit Risk. *Master's Thesis*. <http://www.uniroma2.it/ppg/im/tesi/ferrazzano-tesi.pdf>
- [12] Giesecke, K. [2009]: An Overview of Credit Derivatives. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **111**.
- [13] Giesecke, K. – Zhu, S. [2010]: Transform Analysis for Point Processes and Applications in Credit Risk. *Working Paper, Stanford University*. <http://www.stanford.edu/dept/MSandE/cgi-bin/people/faculty/giesecke/pdfs/neutral.pdf>
- [14] Giesecke, K. – Goldberg, L. – Ding, X. [2010]: A Top-Down Approach to Multi-Name Credit. *Operations Research*, forthcoming. <http://www.stanford.edu/dept/MSandE/cgi-bin/people/faculty/giesecke/pdfs/topdown.pdf>
- [15] Janson, S. – M'Baye, S. – Protter, P. [2010]: Absolutely Continuous Compensators. *Working Paper, Uppsala University*. <http://arxiv.org/abs/1005.3053>
- [16] Medvegyev P. [2007]: Stochastic Integration Theory. Oxford University Press, New York.
- [17] Medvegyev P. [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. *Közgazdasági Szemle* **56**, pp. 769-789.
- [18] Medvegyev P. [2010]: A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték. *Hitelintézeti Szemle* **9**, pp. 487-796.
- [19] Moody's [2009]: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2008. *Global and Regional Corporate Default Studies*. <http://v2.moodys.com/cust/content/content.ashx?source=StaticContent/Free%20Pages/Credit%20Policy%20Research/documents/current/2007400000578875.pdf>
- [20] Protter, P. [2004]: Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, New York.