

# **OTDK-DOLGOZAT**

**Csató László**

**MSc**

**2013**

**DÖNTÉSI MÓDSZEREK ÉS ALTERNATÍV SAKKEREDMÉNYEK**

**DECISION METHODS AND ALTERNATIVE CHESS RESULTS**

**Csató László**

Kézirat lezárva: 2011. március 29.

# TARTALOMJEGYZÉK

|                                                                                                   |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. BEVEZETÉS.....</b>                                                                          | <b>1</b>  |
| <b>2. DÖNTÉSELMÉLETI ALAPFOGALMAK .....</b>                                                       | <b>3</b>  |
| 2.1. EGYSZERŰ DÖNTÉSI ELVEK .....                                                                 | 3         |
| 2.1.1. <i>Preferencia relációk</i> .....                                                          | 3         |
| 2.1.2. <i>Dominancia vizsgálat</i> .....                                                          | 4         |
| 2.1.3. <i>Lexikografikus rendezés</i> .....                                                       | 4         |
| 2.2. PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁS MÁTRIXOK .....                                                        | 5         |
| 2.3. SAJÁTVEKTOR MÓDSZER .....                                                                    | 7         |
| 2.4. LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE .....                                              | 8         |
| 2.4.1. <i>Rangsorfordulás és aszimmetria inkonzisztenciája</i> .....                              | 10        |
| <b>3. KITERJESZTÉS A NEM TELJESEN KITÖLTÖTT PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁS<br/>MÁTRIXOK ESETÉRE .....</b> | <b>13</b> |
| 3.1. GRÁF REPREZENTÁCIÓ .....                                                                     | 14        |
| 3.2. SAJÁTVEKTOR MÓDSZER .....                                                                    | 15        |
| 3.3. LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE .....                                              | 16        |
| <b>4. A MÓDSZERTAN ALKALMAZÁSA A 2010-ES FÉRFI SAKKOLIMPIA EREDMÉNYEIRE..<br/>.....</b>           | <b>20</b> |
| 4.1. FELÍRÁS NEM TELJESEN KITÖLTÖTT PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁS MÁTRIXKÉNT .....                       | 21        |
| 4.2. A KAPOTT EREDMÉNYEK ELEMZÉSE .....                                                           | 25        |
| 4.3. VIZUÁLIS MEGJELENÍTÉS.....                                                                   | 32        |
| <b>5. TOVÁBBI FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK .....</b>                                                   | <b>37</b> |
| 5.1. EGYÉB SPORTVERSENYEK .....                                                                   | 37        |
| 5.2. KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSOK.....                                                               | 40        |
| 5.2.1. <i>Több időszakra vonatkozó indexszámítás</i> .....                                        | 40        |
| 5.2.2. <i>Nemzetközi összehasonlítás</i> .....                                                    | 43        |
| 5.2.3. <i>Egyéni kockázatfelmérés</i> .....                                                       | 45        |
| <b>6. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBFEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK.....</b>                                     | <b>47</b> |
| <b>IRODALOMJEGYZÉK.....</b>                                                                       | <b>51</b> |
| <b>MELLÉKLETEK.....</b>                                                                           | <b>I</b>  |
| 1. FÜGGELÉK: TÁBLÁZATOK .....                                                                     | II        |
| 2. FÜGGELÉK: ÁBRÁK.....                                                                           | XVI       |
| 3. FÜGGELÉK: A FIDE HIVATALOS OLIMPIAI SZABÁLYZATA .....                                          | XXI       |
| 4. FÜGGELÉK: INTERJÚ ALMÁSI ZOLTÁN SAKKOZÓVAL.....                                                | XXVII     |
| 5. FÜGGELÉK: FELHASZNÁLT PROGRAMCSOMAGOK .....                                                    | XXX       |

## TÁBLÁZAT- ÉS ÁBRAJEGYZÉK

|                                                                                                                                  |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. táblázat. A sakkolimpia köreinek főbb jellemzői és rendhagyó esetei .....                                                     | 22    |
| 2. táblázat. A mérkőzések eredményeinek kódolása .....                                                                           | 25    |
| 3. táblázat. A rangsorok közötti páros rangkorrelációk .....                                                                     | 27    |
| 4. táblázat. A rangsorok közötti páros $\tau$ -távolságok.....                                                                   | 29    |
| 5. táblázat. Az első négy ország helyezései.....                                                                                 | 31    |
| 6. táblázat. A sajátvektorokból kapott normalizált súlyok hányadosai.....                                                        | 31    |
| 7. táblázat. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból származó optimális súlyvektorok .....                      | II    |
| 8. táblázat. A csapatok sorrendje a különböző módszerek szerint.....                                                             | V     |
| 9. táblázat. A torna hivatalos végeredménye.....                                                                                 | VIII  |
| 10. táblázat. A csapatok helyezése a különböző rangsorokban.....                                                                 | XI    |
| 11. táblázat. Az első négy ország mérkőzései .....                                                                               | XIV   |
| 12. táblázat. Euklideszi távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták.....                                                   | XIV   |
| 13. táblázat. Manhattan távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták .....                                                   | XV    |
| 14. táblázat. $\tau$ -távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták.....                                                      | XV    |
| 1. ábra. A mérkőzések eredményeinek eloszlása.....                                                                               | XVI   |
| 2. ábra. A hivatalos végső rangsor és az A mátrixból LLSM módszerrel számolt közötti előjeles $\tau$ -távolság komponensei ..... | XVI   |
| 3. ábra. A hivatalos rangsor és az A mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata .....                                          | XVII  |
| 4. ábra. A hivatalos rangsor és a B mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata ..                                              | XVII  |
| 5. ábra. A hivatalos rangsor és a C mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata ..                                              | XVIII |
| 6. ábra. A hivatalos rangsor és a D mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata ..                                              | XVIII |
| 7. ábra. A hivatalos rangsor és a C mátrixból EM módszerrel számolt kapcsolata.....                                              | XIX   |
| 8. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren euklideszi távolság mellett.....                                                    | XIX   |
| 9. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren Manhattan távolság mellett.....                                                     | XX    |
| 10. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren $\tau$ -távolság mellett .....                                                     | XX    |

## 1. BEVEZETÉS

*„Nap mint nap alkalmam van meggyőződni, hogy milyen nehéz feladatok oldhatók meg a matematika segítségével. Ezernyi körülménytől és feltételtől függő, az emberi értelem számára felfoghatatlannak tűnő tényeket... ragad ki labirintusukból, és tár világosan és érthetően szemünk elé.”<sup>1</sup>*

(Carl von Clausewitz levele feleségének)

A tág értelemben vett közgazdaságtan számtalan területén találkozhatunk döntési problémákkal: ilyen lehet egy közbeszerzési pályázat győztesének kiválasztása vagy a legjobb életfeltételeket kínáló ország meghatározása. Ezek egy részének megoldása során elegendő az egyéni preferenciákat figyelembe venni, míg másoknál egy egész közösség, esetleg az egymással versenyző alternatívákhoz kötődők érdekeit kell szem előtt tartani. Miután a legtöbb esetben nincs egyértelműen győztes alternatíva, a végső döntés csak eltérő, akár egymásnak gyökeresen ellentmondó szempontok alapján hozható meg. Biztosan nincs például minden szempontból optimális befektetés, hiszen jól ismert a pénzpiaci kockázathozam átváltás jelensége.

Az ilyen feladatok megoldása minden esetben operacionalizálható, számszerűsítésre alkalmas értékelési tényezők meglétét igényli. Emellett gyakran nem elegendő az összeségében legkedvezőbb lehetőség kiválasztása, meg kell határozni az alternatívák teljes rangsorát vagy az ezekhez rendelhető számszerű értékeléseket, pontszámokat is. Ez értelemszerűen bonyolítja a problémát, hiszen a végső sorrend eredményeként a legjobb választási lehetőség azonnal kapható. Ugyanakkor az emberi emlékezetet ismerve ez néha teljesen felesleges: egy, a közelmúltban lezajlott tanulmányi versenynél esetleg még nyilvántartják az első 10, 20 helyezett nevét, de idővel biztosan csak a győztes kerül be az évkönyvekbe, így különös hangsúlyt kell fektetni utóbbi kiválasztására.

Bár a hasonló feladatok szinte mindennaposak, ezek utólagos elemzése, esetleges felülvizsgálata viszonylag nehéz. Egyéni döntéseknél ez nem igazán meglepő, gyakran a döntéshozó maga sem fogalmazza meg pontosan az elérendő célokat, a választható alternatívák halmazát. Ellenben egy transzparens társadalmi, szakértői döntésnél elvileg minden tényező számszerűsíthető. Itt is gondot okozhat azonban a mérés, értékelés közgazdaságtanban általánosan meglevő nehézsége; egy atomerőmű megépítésekor nagyrészt isme-

---

<sup>1</sup> Idézi: Perjés G., 1999. *Seregszemle. Hadtörténeti és művelődéstörténeti tanulmányok*. Budapest: Balassi Kiadó – Zrínyi Kiadó. 213. o.

retlen a jövőbeli balesetek kockázata, ezért kevésbé objektív, pillanatnyi benyomások befolyásolhatják a döntéshozókat, háttérbe szorítva a szigorúan szakmai szempontokat.

Ugyanakkor a döntéselméleti módszerek vizsgálatára kiváló terepet kínálnak a különböző sportesemények. A sport talán napjaink egyik leginkább globalizálódott iparága, ahol nagy tétek forognak kockán, így a résztvevők érdekeltsége, motivációja tagadhatatlan. A szabályok többnyire világosak és egyszerűek, jól nyomon követhetők, ráadásul adatokban sincs hiány. A versenyek kimenetele szintén egyértelmű, a legtöbb esetben semmilyen kétely sem merül fel a győztes kilétével kapcsolatban. További előny, hogy mint közérdeklődésre számot tartó terület, az itt végzett elemzések megkönnyíthetik a használt módszerek népszerűsítését, nemzetközi elterjedését. Nem véletlenül fordul egyre több közgazdász figyelme a sport vizsgálata felé.<sup>2</sup>

\* \* \*

A dolgozat első két fejezetében bemutatom a döntési modellek alapfogalmait, a páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságait, majd ennek kiterjesztését a nem teljesen kitöltött esetre. A mátrixok ismerete lehetővé teszi az alternatívák teljes rangsorának meghatározását, amelyre különböző eljárások ismertek, ezek közül a sajátvektor és a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét részletesen tárgyalom. A feladat érdekessége nem tranzitív preferenciáknál mutatkozik meg, alkalmazása ilyen esetekben indokolt.

A harmadik rész témája a módszertan felhasználása a 2010. évi férfi sakkolimpia eredményeinek vizsgálatára, ami jól illusztrálja a többtényezős feladatok megoldásának nehézségeit. Egyben hasznos kiegészítéseket nyújt a bemutatott módszerek tulajdonságaihoz, miközben felveti az információtömörítés egyre aktuálisabb problémáit is. A következő fejezet a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok más területeken történő felhasználására ad ötleteket. Bemutatja, hogy a nemzetközi árszínvonal összehasonlításokban – bár teljesen eltérő megközelítésből indulva – lényegében ugyanezek a nehézségek merülnek fel. Végül összefoglalom a kapott eredményeket, és felvázolom a lehetséges továbbfejlesztési irányokat.

A sakkolimpia eredményeivel kapcsolatban fontos információkat kaptam Verőci Zsuzsától, a Magyar Sakkszövetség kommunikációs igazgatójától és Heinz Herzog úrtól, a lebonyolításhoz használt program fejlesztőjétől, segítségüket ezúton is köszönöm.

---

<sup>2</sup> Például 2000 óta jelenik meg a negyedéves Journal of Sport Economics című folyóirat (<http://jse.sagepub.com/>), míg 2009 szeptemberében a párizsi Sorbonne egyetemen került megrendezésre az 1. Európai konferencia a sportközgazdaságtanban (1st European Conference in Sports Economics).

## 2. DÖNTÉSELMÉLETI ALAPFOGALMAK<sup>3</sup>

„A módszer, amelyet alkalmazni fogok, még nem elterjedt. Ahelyett, hogy összehasonlításokat tennék minduntalanul, vagy éppenséggel szuperlatívuszokban szólnék, tehát ahelyett, hogy az ész érveit hoznám föl, én inkább a számok, súlyok, mértékek segítségével fejezem ki magamat, a józan értelem érveit hívom segítségül.”<sup>4</sup>

(William Petty: *Politikai aritmetika*, 1690)

### 2.1. EGYSZERŰ DÖNTÉSI ELVEK

#### 2.1.1. Preferencia relációk

A döntéselméleti modell felírásának első lépése az értékelésre váró választási lehetőségek megadása. Jelölje  $H$  ezek véges vagy végtelen halmazát! Ennek két elemét összehasonlítva, bevezethető a  $\succeq: H \times H \rightarrow \{0,1\}$  bináris függvény (reláció), melynek értelmezési tartománya a rendezett alternatívapárok halmaza. Tetszőleges  $(A_k, A_l) \in H \times H$  esetén legyen  $A_k \succeq A_l$  pontosan akkor, ha a döntéshozó véleménye szerint „ $A_k$  legalább olyan jó, mint  $A_l$ ”. Ebből két újabb bináris reláció származtatható:

**1. Definíció:** Legyen  $\succeq$  egy bináris reláció a  $H$  halmazon. Ekkor  $\succ$  aszimmetrikus magja a  $\succ$  reláció, amire

$$A_1 \succ A_2 \Leftrightarrow A_1 \succeq A_2 \text{ és nem } A_1 \preceq A_2$$

$A \succeq$  szimmetrikus magja a  $\approx$  reláció, amire

$$A_1 \approx A_2 \Leftrightarrow A_1 \succeq A_2 \text{ és } A_1 \preceq A_2$$

**2. Definíció:** Egy  $H$  halmazon értelmezett  $\succeq$  bináris reláció

- reflexív, ha  $A \succeq A$  minden  $A \in H$  esetén;
- irreflexív, ha  $A \succeq A$  nem áll fenn egyetlen  $A \in H$ -ra sem;
- tranzitív, ha  $A_1 \succeq A_2, A_2 \succeq A_3 \Rightarrow A_1 \succeq A_3$  minden  $A_1, A_2, A_3 \in H$  mellett;

---

<sup>3</sup> A fejezet főként Rapcsák (2007) és Temesi (2002) könyvén alapul, ezekre a továbbiakban csak a fontosabb megállapítások esetében hivatkozom. Ezek ismeretében az olvasó nyugodt szívvel átugorhatja a fejezetet.

<sup>4</sup> Idézi: Bekker Zs. (szerk.), 2000. *Alapművek, alapirányzatok. Gazdaságelméleti olvasmányok I.* Budapest: Aula Kiadó. 67. o.

- teljes, ha  $A_1 \succeq A_2$  vagy  $A_1 \preceq A_2$  minden  $A_1, A_2 \in H$ -ra.

**3. Definíció:** Egy reflexív, tranzitív és teljes bináris reláció gyenge rendezés a halmaz elemein.

A döntéshozó racionalitásának egy lehetséges megfogalmazása, hogy az alternatívák páronkénti összehasonlításaiból kialakuló  $\succeq$  bináris reláció gyenge rendezés legyen.

### 2.1.2. Dominancia vizsgálat

A közgazdaságtanban jól ismert Pareto-hatékonyság fogalma alapján egy alternatíva gyengén dominált, amennyiben értékelése egyetlen szempont szerint sem haladja meg egy másikat és közülük valamelyikben egyértelműen rosszabb. A gyenge dominancia mint reláció alapján kapott részleges rendezés tranzitív és irreflexív. A döntéshozó nem tekinthető racionálisnak, ha egy dominált lehetőség az alternatívák rangsorában megelőzi az őt dominálót, illetve a hozzájuk tartozó névleges értékelések kiszámításakor nem kap alacsonyabb értéket. Amennyiben a Pareto-optimalitás vizsgálata mégis teljes rendezést eredményez az alternatívák halmazán, a végső sorrend felállítása sem jelent problémát.

Legyen  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  három alternatíva, melyekre a táblázatban megadott, páronkénti összevetésből adódó relációk állnak fenn. Mivel az indexelés tetszőleges, ez az összes lehetséges esetet tartalmazza (Kéri, 2005).

| 1. eset     | 2. eset     | 3. eset           | 4. eset           | 5. eset           | 6. eset           | 7. eset           |
|-------------|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $A_1 > A_2$ | $A_1 > A_2$ | $A_1 > A_2$       | $A_1 \approx A_2$ | $A_1 \approx A_2$ | $A_1 \approx A_2$ | $A_1 \approx A_2$ |
| $A_1 > A_3$ | $A_1 > A_3$ | $A_1 > A_3$       | $A_1 > A_3$       | $A_1 > A_3$       | $A_1 > A_3$       | $A_1 \approx A_3$ |
| $A_2 > A_3$ | $A_2 < A_3$ | $A_2 \approx A_3$ | $A_2 > A_3$       | $A_2 < A_3$       | $A_2 \approx A_3$ | $A_2 \approx A_3$ |

Az 1. esetben a Pareto-rendezés szigorúan egyértelmű eredményt ad, miután nem fordul elő „holtverseny” az alternatívák összehasonlításakor. Ez a 2. esetben sem következik be, ott mégsem állítható fel nyilvánvaló rangsor, hiszen a döntéshozó preferenciái nem tranzitívak. A 3., 4. és 7. esetben nincs ilyen probléma, ellenben bizonyos alternatívák azonos értékelést kapnak. Végül az 5. és 6. esetben ismét előfordul az indifferencia-reláció, ráadásul a tranzitivitás sem teljesül.

### 2.1.3. Lexikografikus rendezés

Ez talán a legegyszerűbb, több szempont szerinti értékelésen alapuló választási eljárás, illetve rangsorolási elv. Bár megkívánja a tényezők fontosságának szigorú sorba rendezését, nem feltétlenül szükséges hozzá a döntési táblázat teljes kitöltése és az eltérő mérési ská-

lából adódó problémák sem merülnek fel. Nem véletlen, hogy számos helyen alkalmazzák a lexikografikus rendezést: kooperatív játékelméletben a (pre)nukleolusz definiálására, lexikonok és szótárak összeállításakor vagy különböző pályázatok elbírálásánál.

A rangsorolás során először kiválasztjuk az értékelési szempontokat, majd a legfontosabb szerint sorba rendezzük az alternatívákat. Amennyiben ennek alapján nem dönthető el egyértelműen két lehetőség viszonya, áttérünk a második legfontosabb tényező szerinti vizsgálatra, ellenkező esetben marad az eredeti sorrend. Az eljárást addig kell folytatni, amíg az összes holtverseny eldőlt, vagy elfogynak a szempontok. A konstrukció révén végül két alternatíva pontosan akkor kerül indifferencia-relációba, ha minden szempont szerint azonos értékelést kaptak. Ekkor ezek a feladatban ekvivalensnek tekinthetők, illetve ha a döntéshozó ezt nem fogadja el, akkor további szempontokat kell meghatározni. A módszer további előnye, hogy a választási lehetőségek közötti egyértelmű viszony megállapítása után nincs szükség a kevésbé fontos szempontok szerinti értékelések ismeretére.

## 2.2. PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXOK

A többszempontú döntési problémák megoldására gyakran használt eljárás az *AHP* (Analytic Hierarchy Process), melynek központi eleme a páros (vagy páronkénti) összehasonlítás mátrix. Emögött az az intuíció húzódik meg, hogy a döntéshozó – az ökonometriából ismert látens változóhoz hasonlóan – egyértelműen súlyozni tudja az alternatívákat, bár ezt nem mindig képes explicit formában megadni, ezért a lehetőségek páronkénti összevetéséből kell következtetni a vektorra. Ha  $n$  alternatíva van a feladatban, akkor a páros összehasonlítás mátrix  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}$ , ahol  $a_{ij}$  a „Hányszor jobb az  $i$ -edik alternatíva a  $j$ -ediknél?” kérdésre adott válasz számszerű értékét jelöli.

|          | $A_1$         | $A_2$         | ...      | $A_n$         |
|----------|---------------|---------------|----------|---------------|
| $A_1$    | $w_1/w_1 = 1$ | $w_1/w_2$     | ...      | $w_1/w_n$     |
| $A_2$    | $w_2/w_1$     | $w_2/w_2 = 1$ | ...      | $w_2/w_n$     |
| $\vdots$ | $\vdots$      | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$      |
| $A_n$    | $w_n/w_1$     | ...           | ...      | $w_n/w_n = 1$ |

Vagyis a páros összehasonlítás mátrix minden eleme  $n$  darab pozitív szám páronkénti hányadosaként adódik. Egy ilyen tulajdonságú mátrixra biztosan igaz, hogy

$$Aw = nw, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

amennyiben  $\mathbf{A}$  a páros összehasonlítás mátrix, ennek elemeit a  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  vektorból képezzük,  $\mathbb{R}^n$  pedig az  $n$ -dimenziós euklideszi tér, ahol  $n$  a négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrix dimenziója. Így a páros összehasonlítás mátrix rangja 1, ugyanis  $i$ -edik oszlopa a  $j$ -edik  $w_i/w_j$ -szere, ezért egyetlen nemnulla sajátértéke a fenti egyenlet értelmében  $\lambda = n$ .

**4. Definíció:** Egy mátrix pozitív, ha minden eleme pozitív.

**5. Definíció:** Egy pozitív mátrix reciprok tulajdonságú, ha  $(a_{ij}) = (1/a_{ji})$  teljesül minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$  esetén.

**6. Definíció:** Egy pozitív mátrix konzisztens, ha  $(a_{ik}) = (a_{ij} \cdot a_{jk})$  fennáll minden  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$  számhármásra.

Ha egy döntéshozó tölti ki a páros összehasonlítás mátrixot (ez a tapasztalati páros összehasonlítás mátrix), természetesen semmilyen garancia sincs arra, hogy ennek értékei valóban a feltételezett  $\mathbf{w}$  súlyvektor megfelelő koordinátáinak hányadosaként adódnak. Ellenben elvárható a mátrix pozitivitása és reciprocitása. Mindkettő könnyen elérhető, ha meg sem kérdezzük egy alternatíva önmagával való, illetve egy másikkal mindkét irányban történő összehasonlítását, automatikusan feltételezve ezeket a tulajdonságokat.

A konzisztencia problémája már nem ennyire egyszerű. Elvileg itt is megtehetjük, hogy csak minimális számú, azaz  $n - 1$  olyan összehasonlítást kérünk, ami már biztosítja az összefüggőséget.<sup>5</sup> Azonban feltételezhető a megadott páronkénti összehasonlítások bizonytalansága, különösen numerikus értékek kérésekor, ami csökkenthető az összes ilyen viszony megadásával. Ekkor már nem valószínű a tranzitivitás teljesülése (a mátrix méretének növekedésével egyre kevésbé), vagyis a bármely háromelemű ciklusra teljesülő  $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} = 1$  összefüggés, ami reciprok mátrixokra a konzisztenciával ekvivalens.

**1. Tétel:** Egy pozitív konzisztens mátrix rangja 1 (Rapcsák, 2007).

A tétel fordítottja nem igaz. Létezik 1-rangú pozitív mátrix, ami nem konzisztens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ennek második sora az első háromszorosa, ugyanakkor  $a_{12} \cdot a_{22} = 12 \neq 3 = a_{21}$ .

**2. Tétel:** Legyen az  $\mathbf{A}$  pozitív mátrix konzisztens. Ekkor reciprok tulajdonságú is, azaz  $a_{ii} = 1$  minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re és  $a_{ij} = 1/a_{ji}$  minden minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$  mellett (Rapcsák, 2007).

---

<sup>5</sup> Például csak az első alternatívát vesse össze az összes többivel.

**3. Tétel:** *Egy pozitív mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha 1-rangú és minden főátlóbeli eleme 1* (Rapcsák, 2007).

**1. Következmény:** *Egy pozitív és konzisztens mátrix páros összehasonlítás mátrix.*

Egy konzisztens páros összehasonlítás mátrixból egyértelműen megkapható az alternatívák értékét tükröző  $\mathbf{w}$  súlyvektor a legnagyobb (egyben az egyetlen nemnulla) sajátértékhez tartozó jobboldali sajátvektor kiszámításával. Ennek unicitásait és pozitivitását az inkonzisztens esetben is biztosítja Perron 1907-ből származó tétele.

**4. Tétel (Perron-tétel):** *Egy pozitív mátrixnak létezik egyszeres multiplicitású domináns (bármely másik sajátérték abszolútértékénél nagyobb) sajátértéke, az ehhez tartozó sajátvektor elemei pozitívak és konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelműek.*

**5. Tétel:** *Egy pozitív mátrix pontosan akkor konzisztens, ha  $\lambda_{\max} = n$*  (Rapcsák, 2007).

Amennyiben egy döntéshozó által kitöltött, szubjektív értékítéleteket tartalmazó tapasztalati páros összehasonlítás mátrixról van szó, esetleg a mérés vagy becslés tökéletlensége miatt nem teljesül a konzisztencia, valamilyen alternatív módszert kell találni a választási lehetőségekhez tartozó névleges értékek meghatározására. Ezek tetszőleges pozitív reciprok négyzetes mátrixra alkalmazhatók, és a főátló feletti háromszögmátrixban levő  $0 + 1 + \dots + (n - 1) = n \cdot (n - 1)/2$  elemből kívánnak egy  $n$  elemű vektort meghatározni. Közülük kettőt az alábbiakban részletesen ismertetek.

## 2.3. SAJÁTVEKTOR MÓDSZER

A konzisztens páros összehasonlítás mátrixok analógiájából ered a Saaty-féle sajátvektor módszer (Eigenvector Method, EM), amely szintén a legnagyobb sajátértékhez tartozó jobboldali sajátvektor kiszámítását igényli, ennek komponensei adják – normálizálás után – az egyes alternatívák súlyát. Perron híres tétele értelmében a javasolt módszer a súlyok pozitivitása miatt döntéseméleti szempontból is elfogadható. Tehát a feladat:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda_{\max}\mathbf{w}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$$

ahol  $\lambda_{\max}$  a tapasztalati páros összehasonlítás mátrix domináns sajátértéke.

A választási lehetőségekhez tartozó súlyok meghatározása mellett egy döntéshozótól származó páros összehasonlítás mátrix esetében jogos igény merül fel az inkonzisztencia

mérésére. Ennek segítségével meghatározható egy küszöbérték, aminek átlépésekor kitöltési hibára, következtelenségre lehet gyanakodni. Ehhez az alábbi állítás nyújt segítséget:

**6. Tétel:** *Egy pozitív reciprok mátrix domináns sajátértékére  $\lambda_{max} \geq n$  (Rapcsák, 2007).*

Vagyis van értelme az alábbi hányados kiszámításának (consistency index,  $CI$ ):

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

Természetesen ez még csak egy nyers mérőszám, aminek nehéz meghatározni az elfogadhatósági intervallumát, célszerű valahogyan normálni. Ehhez a  $CI$  következtelenségi index átlagos értéke véletlenszerűen generált pozitív reciprok mátrixokra is kiszámításra kerül (ami persze függ  $n$ -től és a véletlen generálás paramétereitől), majd az adott tapasztalati páros összehasonlítás mátrix  $CI$  értéke már összevethető ezzel az  $RI$  számmal. Tehát a következtelenségi hányados (consistency ratio,  $CR$ ):

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

A fentiek értelmében  $CR$  nemnegatív, monoton növekvő módon méri az inkonzisztencia szintjét. A módszertan kidolgozói általában a  $CR = 0.1$ -es értéket tekintik az elfogadhatóság felső határának (Saaty, 1980). Hasznos kiegészítést nyújt a következő állítás:

**7. Tétel (Wielandt):** *Egy pozitív mátrix esetében  $\lambda_{max}$  értéke nő, ha a mátrix bármelyik eleme növekszik (Rapcsák, 2007).*

Saaty komoly kutatásokat folytatott a döntéshozók által kitöltött páros összehasonlítás mátrixok intervallum-skáláival kapcsolatban is. Véleménye szerint nagyságrendileg különböző alternatívák nem vethetők össze, ezért az  $AHP$  végrehajtása céljából az 1-től 9-ig terjedő számok (illetve ezek reciprokeinak) használatát javasolja. A szakirodalom döntő részében ez a kialakult hagyomány, és mivel a korlátozás ellenére viszonylag nagy eltéréseket enged meg, ezért a gyakorlati alkalmazás során én ugyancsak ezt fogom használni.

## 2.4. LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE

A sajátvektor módszer mellett más eljárások is léteznek a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokból származó súlyvektorok kiszámítására. Ezek mindegyikével szemben alapvető elvárás, hogy konzisztens mátrixokra az ezt meghatározó  $w$  vektort adják vissza. A legtöbb ilyen alapjául bizonyos távolságminimalizálási elvek szolgálnak. A szokásos euk-

lideszi távolság alkalmazásával kapható a legkisebb négyzetek módszere (Least Squares Method, *LSM*), melynél a következő optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$$

Ehhez hasonló a súlyozott legkisebb négyzetek módszere (Weighted Least Squares Method, *WLSM*):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j - w_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$$

Elméleti szempontból a legkisebb négyzetek módszere tűnik leginkább indokolhatónak, ugyanakkor a kapott nemlineáris probléma nehezen megoldható, esetenként több optimális súlyvektor is létezhet (Bozóki, 2008). Ezt küszöböli ki a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (Logarithmic Least Squares Method, *LLSM*):<sup>6</sup>

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \log a_{ij} - \log \left( \frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$$

Az eljárás legnagyobb erénye az analitikus megoldhatóság:

**1. Állítás:** *Az LLSM feladat optimális megoldása a páros összehasonlítás mátrix sorolemeinek mértani közepeiből számítható megfelelő normalizálással, azaz*

$$w_i^* = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**Bizonyítás:** A célfüggvény értéke tetszőleges  $\alpha \mathbf{w}$  (minden  $\alpha > 0$ -ra) pontban azonos, ezért ekvivalensen használható a  $\prod_{i=1}^n w_i = 1$  normalizáló feltétel is. Jelölje

$$r_{ij} = \log a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i = \log w_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

---

<sup>6</sup> Esetenként indokolt lehet a súlyok összege helyett ezek szorzatát 1-re normálni.

Ekkor a normalizálás  $\sum_{i=1}^n y_i = 0$  alakú lesz a logaritmus függvény tulajdonságai szerint. A páros összehasonlítás mátrix reciprok szimmetrikusságából minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$  mellett  $r_{ij} = -r_{ji}$  (speciálisan a főátlóbeli elemekre  $r_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ ). Tehát az eredeti feladat módosított alakja a következő:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [r_{ij} - (y_i - y_j)]^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 0$$

Belátható, hogy a második deriváltakból álló Hesse-mátrix pozitív definit (Bozóki 2001, 17-18. o.), ezért elegendő az optimalitás elsőrendű feltételét vizsgálni:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [r_{ij} - (y_i - y_j)]^2}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [r_{ij} - (y_i - y_j)]^2}{\partial y_i} = -2 \sum_{j=1}^n (r_{ij} - y_i + y_j) =$$

$$= -2 \sum_{j=1}^n r_{ij} + 2ny_i - 2 \sum_{j=1}^n y_j = 0$$

A normalizálási feltétel értelmében az utolsó tag nulla, így a megoldás:

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^n r_{ij}}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ezt az eredeti változókra visszaírva:

$$\log w_i = \frac{\sum_{j=1}^n \log a_{ij}}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Innen a logaritmus függvény tulajdonságainak ismételt felhasználásával kapható az állításban szereplő mértani közepes alak.

#### 2.4.1. Rangsortfordulás és aszimmetria inkonzisztenciája

Az előzőekben bemutatott *EM* és *LLSM* módszerek közös jellemzője a rangsortfordulás lehetősége: a páros összehasonlítás mátrixból számított optimális súlyvektor koordinátái alapján felállított rangsor módosulhat, amennyiben a döntéshozó számára új választási lehetőségeket kínálunk fel. Legyen kezdetben két alternatíva:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor mind a sajátvektor, mind a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere által adott normált súlyvektor  $x_1 = 0,6667$ ;  $x_2 = 0,3333$ , ami teljes egészében megfelel az

értékelés által sugalmazott helyzetnek, mely szerint az első alternatíva kétszer olyan jó, mint a második. Mivel egy  $2 \times 2$ -es mátrix mindig konzisztens, így domináns sajátértéke is  $\lambda = 2$ . Ha most megjelenik egy harmadik választási lehetőség, akkor az egy sorral és oszloppal kibővített mátrix a következő lehet:

$$A_{123} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Most az *LLSM* eljárással kapott, a sorok mértani közepei alapján képezhető értékelővektor  $x_1 = 0,3935$ ;  $x_2 = 0,4239$ ;  $x_3 = 0,1826$ , tehát az első két választási lehetőség sorrendje megfordul. Ez azonos a sajátvektor módszer eredményével.<sup>7</sup> Ugyanakkor a mátrix erősen inkonzisztens, legnagyobb sajátértéke  $\lambda = 3,6186$ , amiből a  $3 \times 3$ -as véletlen mátrixokból származó  $RI = 0,52$  miatt  $CI = 0,5948$ , ez pedig bőven a 10%-os elfogadhatósági küszöb felett van. Természetesen nagyobb méretű mátrixokra konstruálható olyan példa, amikor sokkal alacsonyabb inkonzisztencia szint mellett is megtörténik a rangsorfordulás, a fenti példa csak illusztrációként szolgál.

Az aszimmetrikus inkonzisztencia problémája azon a lehetőségen alapul, hogy nem teljesen egyértelmű a páros összehasonlítás mátrix definíciója. Hiszen a „*Hányszor jobb az  $i$ -edik alternatíva a  $j$ -ediknél?*” kérdés helyett elméletileg ugyanilyen indokolt lenne a „*Hányszor rosszabb a  $j$ -edik alternatíva a  $i$ -ediknél?*” típusú megfogalmazás. Ekkor az eredeti  $A$  mátrix helyett az  $A^T$  transzponált mátrixot kapnánk, míg a súlyvektornál éppen ellenkezőleg, a kisebb elemek jelentenék a kedvezőbb alternatívákat.

**6. Definíció:** Legyen  $A$  egy páros összehasonlítás mátrix,  $w$  az  $A$ -hoz és  $w'$  az  $A^T$ -hoz tartozó értékelővektorok. Ezekre teljesül a transzponálás invariancia tulajdonsága, ha

$$w_i > w_j \Rightarrow w'_i < w'_j \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

Mivel az *LLSM* módszer optimális súlyvektora a sorok mértani közepeinek lineáris transzformációja, az eljárás értelemszerűen invariáns a transzponálásra.

Ezzel szemben a sajátvektor módszer a mátrix jobboldali sajátvektorát adja eredményül, ami a transzponálás tulajdonságai alapján  $A^T$ -ra éppen az  $A$  baloldali sajátvektora. A kétoldali sajátvektorokra nem szükségképpen igaz, hogy elemeik fordított nagyságúak, még a főátlóbeli 1-esek és a reciprocitás korlátozásainak figyelembevételével sem. Legyen a páros összehasonlítás mátrix

---

<sup>7</sup> Megmutatható, hogy  $3 \times 3$ -as esetben ez mindig teljesül.

|       | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 1     | 1     | 3     | 9     | 9     |
| $A_2$ | 1     | 1     | 5     | 8     | 5     |
| $A_3$ | 1/3   | 1/5   | 1     | 9     | 5     |
| $A_4$ | 1/9   | 1/8   | 1/9   | 1     | 1     |
| $A_5$ | 1/9   | 1/5   | 1/5   | 1     | 1     |

Erre az  $A$ -hoz tartozó jobboldali sajátvektor koordinátái:

$$\mathbf{w}^T = \quad 36,5652 \quad 38,9564 \quad 16,7155 \quad 3,4693 \quad 4,2936$$

Ezzel szemben az  $A^T$  használata esetén kapható értékelővektor a baloldali sajátvektor:

$$\mathbf{w}^T = \quad 40,6431 \quad 36,4208 \quad 15,0669 \quad 3,4391 \quad 4,4302$$

Vagyis az első és második alternatívák sorrendje megfordult, annak ellenére, hogy a mátrix inkonzisztencia szintje az elfogadhatósági intervallumon belül volt, miután  $CR(A) = 0,0820$ . Eszerint az EM módszer alkalmazásakor indokolt az óvatosság, az értékelővektor egymáshoz közeli koordinátái alapján levont következtetésekkel vigyázni kell (Bozóki és Rapcsák, 2008).

### 3. KITERJESZTÉS A NEM TELJESEN KITÖLTÖTT PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXOK ESETÉRE<sup>8</sup>

„Általános érvényűen megállapítható tehát, hogy a nagyság szerinti összehasonlítás, illetve rendezés annál kisebb különbségeknél marad egyértelmű, minél lényegtelenebb az összehasonlított objektumok kvalitatív különbözősége. Vagy megfordítva: minél jelentősebb az összehasonlított objektumok kvalitatív különbözősége, annál nagyobbak kell lennie köztük a nagyságkülbségnek ahhoz, hogy az összehasonlítás egyértelműsége megmaradjon.”<sup>9</sup>

(Jánosy Ferenc: *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere*, 1963)

Az eddigiekben olyan tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokkal foglalkoztunk, amelyekben minden elem ismert volt. Azonban ez nem mindig van így. Nagyméretű feladatoknál irreális a döntéshozótól minden alternatíva páronkénti összehasonlítását elvárni, hiszen  $n$  növekedésével a keresett elemek  $\binom{n}{2}$  száma négyzetesen emelkedik. Az is előfordulhat, hogy néhány elemnél bizonytalanabb, ezért inkább kihagyja azokat. Amennyiben pedig minden reláció megadása további kiadással/idővel jár, értelemszerűen meg kell találni az átváltást az értékelés pontossága és ennek költsége között.

Tehát egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix néhány – természetesen a főátlón kívüli – eleme ismeretlen, például:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & * & a_{13} & a_{14} \\ * & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & * \\ 1/a_{14} & 1/a_{24} & * & 1 \end{bmatrix}$$

Ez még nem kezelhető matematikai eszközökkel, de a főátló feletti  $d$  számú ismeretlen elemet az  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}_+$  változókkal, míg a nekik megfelelő diagonális alattiakat az  $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_d \in \mathbb{R}_+$  reciprokokkal helyettesítve már igen. A  $C$  mátrixra  $d = 2$  és

$$C(x) = C(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & a_{13} & a_{14} \\ 1/x_1 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & x_2 \\ 1/a_{14} & 1/a_{24} & 1/x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>8</sup> A fejezetben jelentősen támaszkodtam Bozókai, Fülöp és Rónyai (2010) cikkére. Ennek ellenére viszonylag részletes leírást adok, mivel új eredményekről van szó, melyek az Olvasó számára még nem feltétlenül ismertek. Amennyiben mégis ez a helyzet, a rész elolvasása nyugodtan kihagyható.

<sup>9</sup> Forrás: Jánosy F., 2001. *Mérés, trend, evolúció*. Budapest: Aula Kiadó. 31. o.

ahol  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}_+^d$  az ismeretlen elemeket tartalmazó vektor. Ezáltal a páros összehasonlítás mátrix tekinthető egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix adott realizációjának, vagyis utóbbi a bővebb fogalom.

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok használata számos érdekes kérdést vet fel:

- Hogyan számítható ki a súlyvektor?
- Hogyan határozható meg az inkonzisztencia?
- Mikor tölthető ki konzisztensen?
- Milyen értékek beírásával lehet – valamilyen szempontból – optimálisan kitölteni?

A következőkben ezekre próbálok a lehetőségek erejéig választ adni.

### 3.1. GRÁF REPREZENTÁCIÓ

A páros összehasonlítás mátrixok vizsgálatánál gyakran jelent segítséget ezek gráfként való ábrázolása. Az analógia nem véletlen: az alternatívák összehasonlításakor egy arányszám formájában megtestesülő reláció keletkezik, ez megfelelhet az élek súlyának, az ismeretlen elemek pedig a nem behúzott éleknek. Tehát legyen  $\mathbf{A}$  egy  $n \times n$ -es nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, melyben  $S$  jelöli az ismert elemek halmazát.

**7. Definíció:** Az  $\mathbf{A}$  mátrixhoz tartozó irányítatlan gráf  $G := (V, E)$ , ahol a  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  csúcsok az összehasonlítandó választási lehetőségek és az  $E = \{e(i, j): a_{ij} \in S(\Leftrightarrow a_{ji} \in S), i \neq j\}$  irányítatlan élek az mátrix ismert elemei.

**8. Definíció:** Az  $\mathbf{A}$  mátrixhoz tartozó irányított gráf  $\vec{G} := (V, \vec{E})$ , ahol a  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  csúcsok az összehasonlítandó választási lehetőségeknek és az  $\vec{E} = \{\vec{e}(i, j): a_{ij} \in S(\Leftrightarrow a_{ji} \in S), i \neq j\} \cup \{\vec{e}(i, i): i = 1, 2, \dots, n\}$  irányított élek a mátrix ismert elemeinek felelnek meg, továbbá minden csúcshoz tartozik egy önmagába visszafutó hurokél.

**2. Következmény:** A  $\vec{G}$  irányított gráf úgy kapható a  $G$ -ből, hogy annak minden élét megduplázzuk és mindkét irányítással ellátjuk, valamint minden csúcshoz behúzzunk egy önmagába futó hurokét.

**1. Megjegyzés:** Egy teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf az  $n$  csúcsú teljes gráf, a  $\vec{G}$  pedig a teljes gráf oda-vissza irányított változata minden csúcsnál kiegészítve a hozzá tartozó irányított hurokéllal.

### 3.2. SAJÁTVEKTOR MÓDSZER

Mint azt már korábban láttuk, a Saaty-féle  $CR$  inkonzisztencia index és a páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértéke között függvényszerű kapcsolat van: adott  $n$ -re ezek egymás pozitív lineáris transzformáltjai. Ebből logikusan következik, hogy ismeretlen elemek megléte esetén a mátrix kitöltésénél  $\lambda_{max}$  minimalizálását célszerű szem előtt tartani, hiszen ekkor egyúttal az inkonzisztencia is optimális lesz. Vagyis a feladat:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} > 0$$

Vezessük be az  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d)$  felírás helyett az  $x_i = \ln(y_i)$  logaritmikus paraméterezést minden  $i = 1, 2, \dots, d$ -re, és jelölje  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}(y_1, y_2, \dots, y_d)$ .

**9. Definíció:** Legyen  $K \subseteq \mathbb{R}^k$  konvex halmaz és  $f: K \rightarrow \mathbb{R}_+$  egy ezen értelmezett függvény. Az  $f$  logkonvex, ha  $\log f: K \rightarrow \mathbb{R}$  konvex függvény.

**2. Megjegyzés:** Egy logkonvex függvény konvex.

**8. Tétel (Kingman-tétel):** Legyen az  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix tetszőleges eleme  $a_{ij}(t)$   $i, j = 1, 2, \dots, n$ , és  $t \in \mathbb{R}$ . Ha mindegyik  $a_{ij}(t)$  logkonvex függvénye  $t$ -nek, akkor  $\lambda_{max}(\mathbf{A}(t))$  szintén logkonvex, tehát konvex is. (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010)

**2. Állítás:** A  $\mathbf{B}(\mathbf{y})$  mátrix legnagyobb sajátértéke  $\mathbf{y}$  függvényeként logkonvex, azaz konvex is.

**Bizonyítás:** Elég megmutatni a logkonvexitást az  $\mathbf{y}$  tér egyeneseire. Egy ilyen mentén

$$\mathbf{B}(t) = (e^{c_{ij}t + d_{ij}}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ahol  $t$  skalár változó és  $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}$ . A képlet pontosan akkor ad páros összehasonlítás mátrixot minden  $t$ -re, ha  $c_{ii} = d_{ii} = 0$ ; továbbá minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$ -re  $c_{ij} = -c_{ji}$  és  $d_{ij} = -d_{ji}$ . Amennyiben az  $a_{ij}$  elem ismert, akkor  $c_{ij} = 0$  és  $d_{ij} = \log a_{ij}$ . Miután egy lineáris függvény konvex, a Kingman-tétel ismeretében adódik az állítás.

**3. Következmény:** A sajátérték minimalizálási feladatra alkalmazhatók a konvex optimalizálás eszközei.

**9. Tétel:** A  $\lambda_{max}(\mathbf{B}(\mathbf{y}))$  függvény egy tetszőleges  $\mathbf{y}$  terében futó egyenes mentén szigorúan konvex vagy konstans. (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010)

**10. Tétel:** A sajátérték minimalizálási feladat megoldása pontosan akkor egyértelmű, ha a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggő. (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010)

**4. Következmény:** Ha a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggő, akkor a logaritmikus paraméterezéssel felírt sajátérték minimalizálási probléma egy szigorúan konvex optimalizálási feladat. (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010)

Az eredeti  $x_1, x_2, \dots, x_d$  változók helyett azért ajánlott áttérni az  $y_1, y_2, \dots, y_d$ :  $y_i = \log(x_i)$  felírásra, hogy a sajátérték optimalizálási feladat konvex legyen. Ugyanis létezik olyan nem teljesen kitöltött mátrix, amire az  $\mathbf{x} \rightarrow \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$  függvény nem konvex, lásd Bozóki, Fülöp és Rónyai (2010).

### 3.3. LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE

Az  $LLSM$  eljárás szintén viszonylag egyszerűen kiterjeszthető a nem teljesen kitöltött esetre: a célfüggvényben csak az ismert  $a_{ij}$  tagokat kell figyelembe venni. Vagyis

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \log a_{ij} - \log \left( \frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 \chi(e(i, j) \in E) \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$$

ahol  $\chi(e(i, j) \in E)$  az  $e(i, j)$  él karakterisztikus függvénye, azaz  $\chi(e(i, j) \in E) = \{0, \text{ha } e(i, j) \notin E; 1, \text{ha } e(i, j) \in E\}$ .

**3. Állítás:** A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra felírt  $LLSM$  feladat megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha a mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggő.

**Bizonyítás:** A célfüggvény értéke tetszőleges  $\alpha \mathbf{w}$  (minden  $\alpha > 0$ -ra) pontban azonos, ezért használható a  $w_n = 1$  normalizáló feltétel is. Jelölje

$$r_{ij} = \log a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad e(i, j) \in E$$

$$y_i = \log w_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ekkor a normalizálás  $y_n = 0$  alakú lesz a logaritmus függvény tulajdonságai szerint. Tehát az eredeti feladattal ekvivalens a következő:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [r_{ij} - (y_i - y_j)]^2 \chi(e(i, j) \in E) + \sum_{i=1}^{n-1} (r_{in} - y_i)^2 \chi(e(i, n) \in E) \rightarrow \min$$

Itt már nincsenek korlátozó feltételek, hiszen  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Az optimalitás elsőrendű feltétele az első derivált nulla volta:

$$-2 \sum_{j=1}^n (r_{ij} - y_i + y_j) \chi(e(i, j) \in E) - 2 \sum_{j=1}^n (r_{in} - y_i) \chi(e(i, n) \in E) = 0$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & d_2 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & d_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & d_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \end{bmatrix}$$

ahol  $d_i$  a  $G$  gráf  $i$ -edik csúcsának fokszáma ( $0 \leq d_i \leq n-1$ , ez egyben a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix  $i$ -edik sorában a főátló kivételével ismert elemek száma), míg a baloldali együtthatómátrix  $(i, j: i \neq j)$  pozíciójú eleme  $-\chi(e(i, j) \in E)$ . A jobboldali vektorban a jelölés egyszerűsítése érdekében  $R_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot \chi(e(i, j) \in E)$ .

Bár itt az együtthatómátrix  $(n-1) \times (n-1)$ -es, de a megadott szabályokkal kiegészíthető  $n \times n$ -essé: az  $(n, n)$  pozíciójú elem értéke  $d_n$  az  $n$ -edik csúcs fokszáma, míg az  $(i, n)$ -edik és  $(n, i)$ -edik elemek értéke  $-1 \Leftrightarrow e(i, n) \in E \Leftrightarrow e(n, i) \in E$  vagy  $0 \Leftrightarrow e(i, n) \notin E \Leftrightarrow e(n, i) \notin E$ . Az így kapott mátrix rangja a korábbihoz képest változatlan, mivel az  $n$ -edik sor az első  $(n-1)$  összegének ellentéte.

A kiegészített  $n \times n$ -es mátrix a  $G$  gráf  $L_{n \times n}$  Laplace-mátrixa, ami több fontos tulajdonsággal rendelkezik (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010):

- Sajátértékei nemnegatív valós számok;
- Legkisebb sajátértéke  $\lambda_1 = 0$ ;
- Második legkisebb sajátértéke pontosan akkor pozitív, ha a gráf összefüggő;
- Rangja pontosan akkor  $n-1$ , ha a gráf összefüggő.

Legyen  $L_{(n-1) \times (n-1)}$  a Laplace-mátrix bal felső  $(n-1) \times (n-1)$ -es főminora. Az optimalitás elsőrendű feltételrendszere akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha  $L_{(n-1) \times (n-1)}$  teljesrangú. Ez persze ekvivalens azzal, hogy a Laplace-mátrix rangja  $n-1$ , azaz a  $G$  gráf összefüggő.

Az optimalitás elsőrendű feltételrendszere lineáris, ezért a Hesse-mátrix ugyancsak  $L_{(n-1) \times (n-1)}$ , ami szimmetrikus és a Laplace-mátrix tulajdonságai alapján pontosan akkor pozitív definit, ha a  $G$  gráf összefüggő.<sup>10</sup> Tehát a kapott szélsőérték valóban minimum.

---

<sup>10</sup> Ez a megállapítás a hivatkozott cikkben (Bozóki, Fülöp és Rónyai, 2010) bizonyítás nélkül szerepel, azonban nem ismerek rá triviális megoldást: abból, hogy a Laplace-mátrix egyetlen nulla sajátértékének kivételével az összes pozitív, még nem feltétlenül következik, hogy eggyel kisebb dimenziójú bal felső főminora – aminek persze a nulla már nem sajátértéke – valóban pozitív definit.

**4. Állítás:** Az  $L_{(n-1) \times (n-1)}$  szimmetrikus Hesse-mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha a mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggő.

**Bizonyítás:** Indirekt módon bizonyítunk. Jelölje (1) a Hesse-mátrix pozitív definitiségét és (2) a hozzátartozó  $G$  gráf összefüggőségét. Belátjuk, hogy fennállnak a  $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$  és  $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$  implikációk, ami ekvivalens az állítással. Jelölje  $H = L_{(n-1) \times (n-1)}$ .  
 $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$ :

Most  $G$ -nek létezik összefüggő részgráfja, ami nem áll kapcsolatban a gráf többi részével. Legyenek ennek csúcsai  $1, 2, \dots, l$ , ahol  $l \leq n - 1$ . Eszerint a  $H$  mátrixot jobbról az  $s_k = \{1, \text{ha } 1 \leq k \leq l; 0 \text{ egyébként}\}$  elemekből álló  $s$  vektorral szorozva  $HS = 0s$ , ugyanis az első  $l$  csúcs alkotta részgráfból nem fut ki él, tehát ezen oszlopok összege a nullvektor. Mivel  $\lambda = 0$  a mátrix sajátértéke, így biztosan nem lehet pozitív definit.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$ :

Tekintsük a  $HS = \lambda s$  sajátérték-egyenletet, melynek általános tagja  $d_i s_i - \sum_{j=1}^{n-1} s_j \chi(e(i, j) \in E)$ . Az indirekt feltevés értelmében létezik  $\lambda \leq 0$  sajátérték. Mivel minden  $s_i$  valós szám és véges sok ilyen van, található közöttük maximális. Legyen  $s_k = \max\{s_i : 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Feltehető  $s_k \geq 0$ , mert a sajátvektor invariáns a skalárral való szorzásra, így mindig elérhető legnagyobb koordinátájának pozitivitása. Eszerint  $s_k \geq s_i$  minden  $i$ -re, valamint a Laplace-mátrix konstrukciója alapján  $d_k \geq \sum_{j=1}^{n-1} \chi(e(k, j) \in E)$ . Utóbbiban éppen akkor áll fenn egyenlőség, ha  $e(k, n) \notin E$ .

Tehát  $d_k s_k - \sum_{j=1}^{n-1} s_j \chi(e(k, j) \in E) \geq 0$ , ellenben  $\lambda s_k \leq 0$ . Az első kifejezés csak akkor lehet nulla, ha  $s_k = s_i$  minden  $1 \leq i \leq n - 1$  esetén és  $e(k, n) \notin E$ . Ekkor viszont a  $HS$  mátrixszorzat általános tagja  $d_i - \sum_{j=1}^{n-1} \chi(e(i, j) \in E) \geq 0$  minden  $1 \leq i \leq n - 1$ -re, vagyis a sajátérték-egyenlet fennállása miatt  $e(i, n) \notin E$ . Tehát az első  $n - 1$  csúcs alkotta részgráf nincs összekötve az  $n$ -edikkel, a  $G$  gráf nem összefüggő.

**5. Következmény:** A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixra felírt LLSM feladat optimális megoldásának egyértelműsége csak a  $G$  gráf összefüggőségétől, azaz a kitöltött elemek pozícióitól függ, nem ezek konkrét értékeitől.

A megadott módszer teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra is alkalmazható, de szükség van annak belátására, hogy ez az eredetivel azonos eredményt ad (emlékeztetünk a 2. Fejezet 1. Állítására):

**5. Állítás:** Egy  $n \times n$ -es teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixra a fenti, általánosított LLSM megoldásvektor elemei a mátrix sorainak mértani közepeként adódnak a megfelelő normalizálás után.

**Bizonyítás:** Az előző mátrixegyenlet most a következő alakú:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/n & 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 2/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 1/n & 2/n & \cdots & 1/n \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 2/n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \end{bmatrix}$$

ahol  $R_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} = \log(\prod_{j=1}^n a_{ij})$   $1 \leq i \leq n-1$ , azaz a páros összehasonlítás mátrix  $k$ -adik sorelemei szorzatának logaritmusai. Eszerint

$$y_i = \frac{1}{n} R_i + \sum_{k=1}^{n-1} R_k = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{j=1}^n r_{ij} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} r_{kj} = \frac{1}{n} R_i \quad 1 \leq i \leq n-1$$

kihasználva a mátrix reciprocitási tulajdonságát, vagyis azt, hogy minden  $i, j = 1, 2, \dots, n$  mellett  $r_{ij} = -r_{ji}$ . Az eredeti változókra áttérve kapjuk az első  $n-1$  koordinátára vonatkozó összefüggést, míg az utolsóra a  $w_n = 1$  normalizálás alapján teljesül a kapcsolat.

Kövessük végig a módszert a korábban bemutatott  $\mathbf{C}$  mátrixon, az ismert elemeknek már konkrét értéket adva! Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & * & 2 & 3 \\ * & 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & * \\ 1/3 & 1/5 & * & 1 \end{bmatrix}$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(6) \\ \log(10) \\ \log(1/4) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \log(6) \\ \log(10) \\ \log(1/4) \end{bmatrix}$$

Ennek megoldása:  $y_1 = 1,2263$ ;  $y_2 = 1,4817$ ;  $y_3 = 0,6609$ . Visszaírva az eredeti változókra, majd összegüket 1-re normalizálva a  $\mathbf{C}$  mátrix LLSM eljárással nyerhető optimális súlyvektora:  $x_1^{LLSM} = 0,3172$ ;  $x_2^{LLSM} = 0,4095$ ;  $x_3^{LLSM} = 0,1802$ ;  $x_4^{LLSM} = 0,0931$ . Az eredmény megerősíti a páros összehasonlítás mátrix ismert elemei alapján kialakuló képet, a kis méretű feladatnál egyértelműen ez tűnik a logikus rangsornak.

#### 4. A MÓDSZERTAN ALKALMAZÁSA A 2010-ES FÉRFI SAKKOLIMPIA EREDMÉNYEIRE

*„Általában az absztrakt tudományok, legfőképpen a számok rejtélye iránti hajlam roppant ritka, s ez aligha meglepő: ennek a fennkölt tudománynak az elbűvölő bája csak azok előtt nyilatkozik meg, akiknek van merszük eléggé belemélyedni.”<sup>11</sup>*

(Karl Friedrich Gauss levele Sophie Germainnek)

Az egyetemi oktatásban számos esetben komoly gondot okoz, hogy a szép elméleti módszerek gyakorlati felhasználása nehézségekbe ütközik, így a hallgatók jelentős része eleve némi gyanakvással kezeli a témát, ami többnyire a mélyebb megértés rovására megy. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kérdésköre hasonló problémákkal jár. Bár viszonylag könnyű olyan okokat találni, melyek miatt nem ismert két alternatíva közvetlen kapcsolata, csak a más szempontokon keresztül, közvetett viszonyuk határozható meg, de ezen példák többsége eléggé erőltetett, általában időhiányra és/vagy adatkezelési problémákra hivatkozik.

Ugyanakkor a gyakorlatban megfigyelhető néhány olyan eset, amikor valóban nem lehetséges minden páros összehasonlítást elvégezni. Tipikusan ilyen a sportesemények jelentős része: egy tenisztornán vagy futball-világbajnokságon – elsősorban a résztvevők nagy száma miatt – nyilván nem járható út az összes lehetséges párosításban mérkőzéseket rendezni, bizonyos résztvevők között csak közvetett kapcsolat írható fel. Ezeket általában egyenes kieséses rendszerben<sup>12</sup> bonyolítják le (vagy legalább részben: a legtöbb csapat-sportágban úgynevezett csoportkör is van, ahol mindenki minden csoporttag ellen játszik mérkőzést), így könnyen előfordulhat, hogy résztvevők fele csupán egyetlen összehasonlításban szerepel, míg mások – például a későbbi győztes – esetében jóval több reláció felírása lehetséges.

Miután a végeredmény az egyenes kieséses szakasz során fokozatosan alakul ki, a résztvevők csak kevésbé érdekeltek a továbbjutást eredményező győzelem mértékében, ezért vitatott lehet az AHP módszer alkalmazása, ahol az alternatívák értékelése döntően

---

<sup>11</sup> Idézi Singh, S., 1999. *A nagy Fermat-sejtés*. Budapest: Park Könyvkiadó. 115-116. o.

<sup>12</sup> Vagyis egy-egy összecsapás végén a győztes továbbjut, míg a vesztes kiesik a további küzdelmekből. Néhány esetben ez nem ilyen egyszerű, a vesztesek egymás között játszhatnak a végső sorrend kialakításáért, vagy – például bizonyos küzdősportágakban – létezhet úgynevezett vigaszág, amikor az egyszer vereséget szenvedett versenyző továbbra is részt vehet a küzdelemben, amennyiben legyőzője a következő mérkőzését megnyeri. Ez azonban csak kevésbé enyhíti a fent említett problémákat.

folytonos skálán történik, nem pedig bináris (győztes/vesztes) változóként.<sup>13</sup> Így egyrészt nehéz meghatározni a győzelem nagyságának számszerű megjelenítését, másrészt az eljárás joggal kritizálható azért, mert a résztvevők nem az általunk javasolt módszer szerinti eredményességre törekedtek.

A fenti nehézségek ellenére mégis egy ilyen sporteseményt választottam vizsgálódásom céljául, nevezetesen a nyugat-szibériai Hanti-Manszijszkban 2010. szeptember 20. és október 4. között megrendezett 39. férfi sakkolimpiát.<sup>14</sup> Döntésemet főként az alábbi szempontok motiválták (egy részük a 3. Függelékben leírt szabályok révén válik érthetővé):

- az esemény aktualitása;<sup>15</sup>
- a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok relevanciája;
- a résztvevő csapatok nem csak a győzelemben, annak nagyságában is érdekeltek;
- a részletes eredménytáblázat egyszerű megszerzése;<sup>16</sup>
- a győztes kilétén kívül a végső sorrend vizsgálata szintén hasznos lehet;
- a hivatalos sorrend meghatározását érintő gyakori kritikák.<sup>17</sup>

#### 4.1. FELÍRÁS NEM TELJESEN KITÖLTÖTT PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXKÉNT

Miután összesen 149 csapat vett részt (játszott mérkőzést) a tornán, a páros összehasonlítás mátrix  $149 \times 149$ -es lesz, minden országnak egy-egy sor, illetve oszlop felel meg. A főátlóban értelemszerűen 1-esek szerepelnek, a többi elem a lejátszott mérkőzések eredményéből határozható meg. Amennyiben két csapat nem játszott egymással, a mátrix megfelelő eleme ismeretlennek tekinthető. Elméletileg minden csapat 11 mérkőzésen vett volna részt (azaz minden sorban 23 elem ismert), de ez némileg módosult.

---

<sup>13</sup> Sok esetben az azonos körben kiesők között nem is állapítják meg a sorrendet – a labdarúgó Európa-bajnokságon még bronzmérkőzést sem rendeznek!

<sup>14</sup> Bár a Magyar Sakkszövetség honlapján ([http://www.chess.hu/hu/esemeny\\_lap.php?id=1](http://www.chess.hu/hu/esemeny_lap.php?id=1)) férfi sakkolimpiát említenek, az eredeti angol elnevezés (open section) jobban tükrözi a valóságot. Ugyanis annak ellenére, hogy a fentivel azonos helyszínen és időpontban a 24. női sakkolimpia is lebonyolításra került, néhány női versenyző – köztük a magyar csapatban a 2000 júliusa óta női világranglista-vezető Polgár Judit – a férfiak között szerepelt.

<sup>15</sup> Az ötlet eredetileg a 2010/11-es tanév őszi félévében hallgatott Fejezetek a döntéseméletből tárgy tanulása közben merült fel bennem, ahol megismertem a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokat.

<sup>16</sup> A 39. férfi sakkolimpia összes eredménye elérhető a Microsoft Excel xls-formátumban az alábbi honlapon: <http://chess-results.com/tnr36795.aspx?lan=1> (letöltve: 2011. március 1.)

<sup>17</sup> Ezek egy része a magyar csapat szereplését érintette: erre lásd a függelékben az egyik játékosal, Almási Zoltánnal készült interjút!

1. táblázat. A sakkolimpia köreinek főbb jellemzői és rendhagyó esetei<sup>18</sup>

| Kör      | Mérkőzések | Döntetlenek | Bye                   | Nem párosított                         |
|----------|------------|-------------|-----------------------|----------------------------------------|
| 1        | 73         | 0           | Sri Lanka             | Angola, Sao Tome and Principe          |
| 2        | 73         | 9           |                       | Angola, Sao Tome and Principe, Senegal |
| 3        | 73         | 10          | Sao Tome and Principe | Angola, Senegal                        |
| 4        | 73         | 7           | U.S. Virgin Islands   | Angola, Senegal                        |
| 5        | 74         | 14          |                       | Senegal                                |
| 6        | 74         | 11          |                       | Senegal                                |
| 7        | 74         | 15          |                       | Senegal                                |
| 8        | 74         | 19          |                       | Senegal                                |
| 9        | 74         | 10          |                       | Senegal                                |
| 10       | 74         | 17          |                       | Senegal                                |
| 11       | 74         | 15          | Senegal               |                                        |
| Összesen | 810        | 127         |                       |                                        |

A továbbiakban a bye-okkal nem foglalkozom, hiszen ekkor valójában mérkőzés nélkül kapott pontot egy csapat. Eszerint a főátló feletti összesen  $148 \times 149 / 2 = 11026$  elemből csupán 810, alig 7,3 százaléknyi ismert (mivel minden páros összehasonlítás mátrix reciprokon szimmetrikus, így elég a főátló feletti elemekkel foglalkozni). Ez technikailag ugyancsak megnehezíti a feladat megoldását, mivel az ismert alkalmazások általában jóval kisebb méretű mátrixokkal és kevesebb hiányzó elemmel dolgoznak.

A döntetlenek száma azért lehet különösen fontos, mert a korábbi tornákon gyakori jelenség volt, hogy egyes csapatok az utolsó körökben – amikor már nagyjából kiderült helyezésük, és nem volt esélyük komoly eredmény elérésére – csupán a vereség elkerülését tartották szem előtt, így megnőtt a 2:2-re végződő mérkőzések száma, ami torzíthatja a páros összehasonlítás mátrixot.<sup>19</sup> Bár a döntetlenek száma itt is emelkedő tendenciát mutat, ez minden bizonnyal a párosítási eljárásnak köszönhető, és az utolsó körben sem kiugró.

A feladat megoldására, vagyis a nem teljesen kitöltött mátrix alapján az optimális súlyvektor, majd ennek koordinátái alapján a csapatok végső sorrendjének meghatározására elsősorban a korábban bemutatott két eljárás áll rendelkezésre: a sajátvektor módszer és a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere. Mindkettő egyértelmű megoldhatósága ekvivalens a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefü-

<sup>18</sup> Angola, illetve Sao Tome és Principe esetében a játékosok vízumproblémái miatt csúszott a megérkezés, de a hosszú utazásra és „bátorságukra” való tekintettel engedték indulni őket. Előzetes jelzése ellenére Szenegál nem vett részt a tornán, első mérkőzését 4:0 arányban jóváírták az ellenfele (Szingapúr) javára, később pedig nem párosították, csak az utolsó körben lett bye. Ennek megfelelően akár ki is lehetett volna hagyni a vizsgálatból, bár minden bizonnyal nincs komoly hatással az eredményekre. Az Izrael-Jemen nem lejátszott mérkőzés esetén a hivatalosan előírt 4:0-s eredménnyel számoltam. Az említett 810-es mérkőzés-szám már e két problémás esetet tartalmazza.

<sup>19</sup> A sakkban ugyanis – a legtöbb másik sportágban ismeretlen módon – lehetséges lényegében egy játszma kezdetén mindkét fél beleegyezésével elfogadni a döntetlen kimenetelt.

góságával. Ez éppen azt jelenti, hogy közvetlenül vagy legalább közvetve bármely két résztvevő összehasonlítható. Bár ezt előzetesen nem ellenőriztem, az *LLSM* módszer alkalmazásakor mindenképpen fény derül rá, hiszen a  $G$  irányítatlan gráf pontosan akkor összefüggő, ha Laplace-mátrixa bal felső  $(n - 1) \times (n - 1)$ -es főminorának rangja  $n - 1$ , ami viszont szükséges ennek invertálhatóságához.

Ez már a lebonyolítás rendjéből is sejthető. Ugyanis a  $G$  gráf szétesése azt jelentené, hogy olyan „alcsoporthoz” keletkeznék, amelyekből nem mutat ki él. Kiválasztva az első kört és a csapatok egy csoportját, az e fordulóban lejátsszódó mérkőzések eredményeként bizonyos országok feljebb, mások lejjebb kerülnek a következő párosítás alapját képező rangsorban, így – ha nem is szűnik meg teljesen – jelentősen csökken az esélye a későbbi mérkőzések csoporton belüli voltának. Amennyiben az eredmény döntetlen, egymás ellen már nem játszhatnak. A 11 kör elegendőnek tűnik a folyamat teljes lezajlására.

A sajátvektor módszer használata elsősorban azért lehet előnyös, mert rögtön adódik az inkonzisztencia szintje, valamint a mátrix optimális kitöltése. Így egyrészt mérhető a csapatok összteljesítményének ingadozása (kedvező esetben nem alakulnak ki körbeverések, intranzitív hármasok), másrészt „jóslatok” fogalmazhatók meg két, valójában egymás ellen nem játszó csapat mérkőzésének eredményéről. Adott esetben például megvizsgálható, az első 10 kör eredményeként (ekkor még csak a mátrix  $810 - 74 = 736$  eleme volt ismert, de az összefüggőség már minden bizonnyal fennállt) milyen előrejelzés lenne adható a 11. körre, majd ez összehasonlítható a ténylegesen megvalósulttal.

Az eljárás hátrányaként róható fel, hogy bonyolult matematikai műveletek végrehajtását kívánja (sajátérték és -vektor számítás), ami csak speciális matematikai programokban (például Matlab) érhető el, ráadásul ez esetben a mátrixban előforduló hiányzó elemek magas száma miatt rendkívül időigényes az optimalizálás. A logaritmusos legkisebb négyzetek módszere a súlyvektor meghatározásához viszont csupán egyszerű matematikai műveleteket, a mátrixok transzformációit (a  $G$  gráf Laplace-mátrixának kiszámolása, annak inverze és az eredeti mátrix sorelemei szorzata logaritmusainak előállítás) kívánja, így sokkal egyszerűbben és gyorsabban végrehajtható, ezért emellett döntöttem.<sup>20</sup>

Az inkonzisztenciával egyáltalán nem foglalkoztam. Itt ugyanis kétségtelenül „biztos”, egyértelmű adatokról van szó, így magas szintje sem indokolná a használt módszerek

---

<sup>20</sup> Egyetlen esetben kipróbáltam a sajátvektor eljárást is, a több mint 10 ezer változós optimalizálási feladat, ha lassan is, de megoldható. A ciklikus koordináták módszerével egy teljes ciklus lefutása mintegy 2 órát vesz igénybe, de 40 körű ciklus után már keveset változik az optimum értéke helye, a keresett súlyvektor.

elvetését. Viszont érdekes vizsgálatok tárgya lehetne, a torna előrehaladtával hogyan változott ennek mértéke, vajon csökkent vagy nőtt a csapatok teljesítményének változékonysága. Előbbit indokolhatná a játékosok fáradtsága, fokozatos kimerülése, utóbbit pedig a valószínűségi változók egyre kisebb szórása. Végül a *CR* vagy más inkonzisztencia-mutatók a rangsor bizonytalanságának mértékeként szolgálhatnak, akár más tornákkal, sportágakkal való összevetést is lehetővé téve.

Ezután már csak egyetlen kérdés megválaszolása maradt hátra: hogyan értékelendők az egyes mérkőzések eredményei? Az olimpiai szabályrendszer szerint ez csapatonként 4-4 játékos páros összecsapásából alakul ki. Mind a 4 játszma háromféleképpen végződhet egy ország szempontjából: vereség (0 játékpont), döntetlen (0,5 játékpont) vagy győzelem (1 játékpont). Ezek összegzéséből alakul ki a végeredmény. Ha a csapat legalább 2,5 játékpontot elért, akkor győztes és 2 mérkőzéspontra kap. Ha pontosan 2 játékpontot, akkor döntetlenre végződött a játék, ami 1 mérkőzéspontra ér (az ellenfélnek hasonlóan). Végül 1,5 játékpont vagy annál kevesebb esetén vereséget szenved, ami 0 mérkőzéspontra ér.

Tehát a csapatok főként a mérkőzéspontra maximalizálásában érdekeltek, hiszen ez számít a végső sorrend elsődleges meghatározójának. Viszont két, azonos mérkőzéspontra számmal rendelkező csapat között a Sonneborn-Berger (TB2) érték adja a sorrendet, ami-ben komoly szerepe van a győzelmek mértékének. Miután a 11 mérkőzés révén legfeljebb 22 pont szerezhető és 149 résztvevő van, garantált, hogy számos esetben holtverseny fog kialakulni az első kritérium alapján, így a csapatoknak az elért játékpontok számának növelése is rendkívül fontos. Ez különösen a középmezőnyben érvényes, ahol „sűrűsödnek” a csapatok, az élmezőnyben csak mérsékelten – az összes mérkőzés megnyerésével biztosan olimpiai bajnok lesz egy ország. Bár előre senki sem tudhatja, milyen eredményt fog elérni, a nagyarányú győzelmekre törekvés talán kevésbé jellemző a legjobb és legrosszabb csapatokra. A Sonneborn-Berger pontszám alapján már szinte biztosan eldönthetők a holtversenyek, ezért a további szabályok technikai jelentőségűnek tekinthetők.<sup>21</sup>

Ennek figyelembevételével összesen négy megjelenítést vizsgáltam:

- Az **A** mátrixnál a győzelem mértékével nagyjából egyenesen arányos az *AHP* skála, de 1-től 5-ig szűkíti azt,<sup>22</sup>
- A **B** mátrix ehhez hasonló, csak a skálát egészen 9-ig széthúzza;

---

<sup>21</sup> Három esetben nem lehetett az első két kritérium alapján eldönteni a holtversenyeket.

<sup>22</sup> A mérkőzések vizsgálatakor jól látható, hogy a „teljes” 4:0-s arányú győzelmek már csak jelentősen eltérő képességű csapatok között jöttek létre. A 810 összecsapás eredményeinek eloszlásáról tudósít az 14. ábra. ábra.

- A **C** mátrixban minden győzelem kis súllyal szerepel, ez egyfajta különbség-minimalizáló kódolás;
- A **D** mátrix esetében elsősorban a győzelem megléte számít, annak mértéke csak csekély mértékben.

2. táblázat. A mérkőzések eredményeinek kódolása

| Játékpont | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 0         | 1/5      | 1/8      | 1/3      | 1/5      |
| 0,5       | 1/4      | 1/6      | 2/5      | 1/4      |
| 1         | 1/3      | 1/4      | 1/2      | 2/7      |
| 1,5       | 1/2      | 1/2      | 2/3      | 1/3      |
| 2         | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 2,5       | 2        | 2        | 3/2      | 3        |
| 3         | 3        | 4,00     | 2        | 7/2      |
| 3,5       | 4        | 6,00     | 5/2      | 4        |
| 4         | 5        | 8,00     | 3        | 5        |

#### 4.2. A KAPOTT EREDMÉNYEK ELEMZÉSE

Az összes szükséges feltétel meghatározása után már lehetséges a feladat megoldása. Ehhez mind a 810 mérkőzés eredményét összegyűjtöttem egy  $149 \times 149$ -es mátrixban, aminek soraiban és oszlopaiban az egyes csapatok szerepelnek, főátlója üres,  $(i, j)$  eleme pedig az  $i$ -edik csapat  $j$ -edik csapat ellen elért játékpontszámát jelöli, ha játszottak egymás ellen, egyébként üres. Az  $(i, j)$  és  $(j, i)$  elemek összege természetesen 4. Ebből kiszámítottam a fent definiált négyféle, nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixot, értelemszerűen a főátlóban már 1-esekkel (a reciprok tulajdonság a kódolásból adódik), majd erre alkalmaztam az *LLSM* módszert. Továbbá – lassú konvergenciája ellenére – a **C** mátrixra a sajátvektor módszer is bemutatásra kerül, elsősorban illusztráció céljából.

A végeredmény egy-egy 149 értékből álló vektor, ennek  $i$ -edik koordinátája az  $i$ -edik csapat súlyát adja meg, összegüket 1-re normalizálva. Az 5 vektor (az első 4 az *LLSM* eljárással, míg az utolsó a **C** mátrixra alkalmazott sajátvektor módszerrel) a 7. táblázatban látható. A nyers számok – nem utolsósorban a vektor nagy méretéből adódóan – azonban nehezen értékelhetők, ezért a továbbiakban a numerikus értékek helyett a koordináták csökkenő sorba rendezéséből származó csapatrangsorokat vizsgálom.<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Ezek a mellékletben, a 8. táblázatban szerepelnek. A a könnyebb visszakereshetőség érdekében megtartottam a résztvevő csapatok angol neveit és kódjait.

Az eltérő kódolási elvek értékeléséhez, illetve hivatalos végeredménnyel történő összehasonlításához a 149 elemű rangsorok kapcsolatát célszerű feltárni.<sup>24</sup> Két, sorrendi (ordinális) skálán mért változó összehasonlítására a leggyakran használt eljárás a Spearman-féle rangkorrelációs mutató vizsgálata (Hunyadi és Vita 2003, 165-166. o.). Jelölje az  $X$  változó szerinti rangszámokat  $R_X$ , az  $Y$  szerintiek pedig  $R_Y$ . Ha a változónak egyetlen egyszer sem fordul elő több egyforma értéke, akkor nincsenek kapcsolt rangok,<sup>25</sup> és a  $\rho$  rangkorrelációs együttható az alábbi módon számolható:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum (R_X - R_Y)^2}{N(N^2 - 1)}$$

ahol  $N$  a két vizsgált változó szerinti megfigyelések száma.  $\rho$  értéke mindig a  $-1$  és  $+1$  határok közé esik, a  $\rho = 1$  az  $R_X$  és  $R_Y$  rangszámsorozat tökéletes egyezését, míg a  $\rho = -1$  eset ezek pontosan fordított voltát jelzi. Ha  $\rho = 0$ , akkor a két rangsor között egyáltalán nincs kapcsolat. A  $\rho$  mutató négyzete megadja, hogy az egyik rangsor ismeretében mennyivel (hány százalékkal) csökken a másikkal kapcsolatos bizonytalanság.<sup>26</sup>

A páros rangkorrelációk egy szimmetrikus, négyzetes mátrixba foglalhatók, amelynek főátlójában 1-esek állnak (egy változó önmagával vett rangkorrelációja), míg  $(i, j)$  eleme az  $i$ -edik és  $j$ -edik sorrend rangkorrelációja. A hivatalos végeredményre a továbbiakban Final sorrendként hivatkozom, a négy *LLSM* módszert az ennek során használt betűjeles mátrixokkal, míg a *C*-re alkalmazott sajátvektor eljárást a  $\lambda$  *max* kiegészítő címkével jelölöm. A rangsorok között rendkívül erős az összefüggés, ezért Start elnevezéssel az első körbeli párosítás alapját képező kezdeti (a priori) rangsort is szerepeltetem a vizsgálatokban.<sup>27</sup>

Elsőként nézzük az általam számolt 5 értékelővektor kapcsolatát (a jobb alsó  $5 \times 5$ -ös al mátrixot)! Láthatjuk, hogy a legkisebb érték is messze magasabb 0,99-nél, vagyis a fenti értelmezéssel közülük bármelyiket kiválasztva ez legalább 99,5%-ban magyaráz egy tetszőleges másik sorrendet. Bár ez elsőre rendkívül magas értéknek tűnik, egyes csapatok tekintetében jelentősebb különbségek is előfordulnak: Franciaország a *D* mátrixnál 6., a

<sup>24</sup> A hivatalos végső rangsort a kiegészítő mutatókkal lásd a függelék 9. táblázatában.

<sup>25</sup> Jelen esetben ez a helyzet, mivel két csapat sorrendje mind a hivatalos, mind az általam kiszámolt súlyvektor esetén egyértelmű, nincs döntetlen (utóbbi esetben ezt külön ellenőrizni kellene, de nyilván rendkívül kicsi az esélye, hogy ez ne álljon fenn, nem utolsósorban az alkalmazott numerikus módszerek miatt).

<sup>26</sup> A  $\rho$  értéke megegyezik a két változó közötti lineáris regresszióban a magyarázó változó együtthatójával.

<sup>27</sup> Ennek pontos definíciója a 3. Függelékben szereplő hivatalos olimpiai szabályzatban található meg. A kapott eredmények vizsgálatakor mindig célszerű figyelembe kell venni ezt a tényt, hiszen önmagában nehezen értékelhető a sorrendek kapcsolata a csapatok korábbi teljesítményeinek erősen meghatározó volta miatt.

**B**-nél viszont 10., míg Jordánia a **D** mátrixnál 67., a **B**-nél pedig 73. További vizsgálatokra nyújt lehetőséget a függelékben a 10. táblázat.

3. táblázat. A rangsorok közötti páros rangkorrelációk

|                           | Start  | Final  | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix | C mátrix ( $\lambda$ max) |
|---------------------------|--------|--------|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Start                     | 1      | 0,9353 | 0,9688   | 0,9686   | 0,9689   | 0,9699   | 0,9690                    |
| Final                     | 0,9353 | 1      | 0,9683   | 0,9684   | 0,9686   | 0,9654   | 0,9680                    |
| A mátrix                  | 0,9688 | 0,9683 | 1        | 0,9997   | 0,9998   | 0,9987   | 0,9998                    |
| B mátrix                  | 0,9686 | 0,9684 | 0,9997   | 1        | 0,9998   | 0,9978   | 0,9998                    |
| C mátrix                  | 0,9689 | 0,9686 | 0,9998   | 0,9998   | 1        | 0,9983   | 0,9999                    |
| D mátrix                  | 0,9699 | 0,9654 | 0,9987   | 0,9978   | 0,9983   | 1        | 0,9983                    |
| C mátrix ( $\lambda$ max) | 0,9690 | 0,9680 | 0,9998   | 0,9998   | 0,9999   | 0,9983   | 1                         |

A mátrix első két oszlopa különösen fontos. A Final rangsorral szemben az általam számoltak mindegyike 0,96 feletti rangkorrelációs együtthatóval bír, tehát a végeredménnyel kapcsolatos bizonytalanságot legalább 93%-kal csökkenti. Ugyanakkor ennek jelentős része fikció: az eredmények ismerete nélkül – csupán a játékosok korábbi teljesítményét figyelembe véve – is 86%-nál nagyobb pontossággal becsülhető a végeredmény. Miután a kezdeti értékelés nagyobb mértékben determinálja a kiszámolt sorrendeket, mint a torna hivatalos végeredményét, azt lehet mondani, ezek kevésbé tükrözik az egyes játszmák meglepő eredménye miatti ingadozásokat. E ténynek persze nem feltétlenül pozitív az interpretációja, hiszen éppen a játék varázsa veszhet el az eredmények könnyű előrejelezhetősége következtében. Másfelől azonban az is lehetséges, hogy a szabályzat a „gyengébb” csapatok felé torzít, az *LLSM* és sajátvektor módszereknél kevésbé véve figyelembe az ellenfelek játékerejét.

Érdemes megemlíteni a fenti rangkorrelációs mutató bizonyos problémáit. Jelen esetben ugyanis egyáltalán nem indokolt az eltérések négyzetét számolni, mivel így azonos súlyt kapnak a különböző helyeken mért különbségek, a főként a középmezőnyben előforduló ingadozások rendkívül felnagyítva jelentkeznek. A valóságban azonban az első 20 helyezett kiléte sokkal érdekesebb lehet, mint a 80. és 99. hely közöttieké. A rangkorrelációs mutató értékét döntően a „futottak még” csapatok jelentős eltérése határozza meg: például a Final és Start változók közötti rangszámbeli differenciák négyzetösszege összesen 35684, ebből 3721 (több mint 10%) egyedül Pakisztánnak köszönhető, és még több hasonló csapat is van.

Vagyis célszerű lenne egy másik mutatószámot konstruálni, ami:

- Nagyobb szerepet ad az élmezőnyben bekövetkező helycseréknek, mint a hátrébb előfordulóknak;

- Nem feltétlenül négyzetesen súlyozza a rangsorok eltéréseit;
- Szimmetrikus és szigorúan monoton növekvő minden pontban.

Kézenfekvő lehetőségként kínálkozna a rangsorban hátrafele haladva az eltérések súlyainak exponenciális csökkentése, de ez nem kezelné a négyzetre emelés „nagyító” hatását, és a paraméter megválasztása ad hoc megoldásnak tűnik. Ennek elkerülésére találtam ki a továbbiakban  $\tau$ -távolságnak nevezett mérőszámot.<sup>28</sup>

$$\tau = \sum \log \left( \max \left\{ \frac{R_X}{R_Y}; \frac{R_Y}{R_X} \right\} \right)$$

ahol ismét  $R_X$  jelöli az  $X$ ,  $R_Y$  pedig az  $Y$  változó szerinti rangszámokat. Először a két helyezés hányadosai közül az 1-nél nagyobbat veszi, majd ennek logaritmusát, így az arány-számot a  $[1, +\infty)$  intervallumból a  $[0, +\infty)$ -be képezi.<sup>29</sup> Minimuma nulla, amit pontosan a két rangsor azonosságakor ér el. A képletből adódik a szimmetricitás (a hányadosok közül legfeljebb az egyik lesz 1-nél nagyobb) és a szigorúan monoton növekedés.

Maximuma ugyancsak meghatározható (természetesen  $N$  függvényében, most  $\tau_{max}^{149} = 1170,41$ ), majd ennek segítségével valamilyen eljárás révén normálható, de ezt mellőzöm, miután az összehasonlítandó rangsorok mindegyike ugyanolyan méretű. A rangsor elején előforduló ingadozások sokkal nagyobb súlyt kapnak: amennyiben az egyik sorrendben 1. csapat a másikonban csak 2., ez a mutató értékét önmagában 1-gyel növeli, míg ha a 80-adikról a 90-edik helyre esik vissza, már csak 1/8-dal. Ez persze igencsak jelentős különbséget takar, de talán nem indokolatlan.

A Final és az  $A$  mátrixból kapott sorrendek közötti előjeles  $\tau$ -távolságokat mutatja a 2. ábra. Ennél a nagyobb hányados logaritmusai pozitív, ha a csapat az adott rangsor szerint jobb helyezést ért el, és negatív, amennyiben rontott az „a priori” pozícióján. Néhány esetben különösen jelentős a differencia, ezeket később tárgyalom.

---

<sup>28</sup> Ez a mutató távolságfüggvény. Két pont távolsága éppen akkor nulla, ha egybeesnek, továbbá a szimmetria is teljesül, míg a háromszög-egyenlőtlenség a logaritmus függvény tulajdonságaiból következik. Vegyük az  $A, B, C$  rangsorokat! Amennyiben minden koordináta esetében fennáll a háromszög-egyenlőtlenség, összegükre is igaz lesz. Legyenek ezek  $a, b, c$ . Feltehető  $a < b < c$ . Most  $\tau(a, b) = \log(b/a) = \log b - \log a \leq (\log c - \log b) + (\log c - \log a) = \log(c/b) + \log(c/a) = \tau(a, c) + \tau(c, b)$ . Hasonlóan  $\tau(a, c) = \tau(a, b) + \tau(b, c)$ , ahol  $\log b$  kiesése miatt biztosan egyenlőség van és  $\tau(a, c) \leq \tau(a, b) + \tau(b, c)$ .

A  $\log_b x = \log_a x / \log_a b$  azonosság szerint a logaritmus alapjának módosítása csak a távolságértékek abszolút nagyságát befolyásolja, azok relatív arányait nem, így a további tárgyalás során nincs jelentősége. A számolásokban természetes alapú logaritmust alkalmazok.

<sup>29</sup> Az eltéréseket jelentős mértékben felnagyító hányadosok hatását némileg mérsékli a logaritmus vétele annak ismert „összehúzó” tulajdonsága miatt, de ez nem okoz nagy gondot, miután ezek többsége elég közel van 1-hez. Alternatív megoldásként kínálkozna 1-et levonni minden hányadosból (a dolgozat eredeti formájában ez szerepelt), de ekkor csak a távolságfüggvény első két kívánalma teljesülne, a háromszög-egyenlőtlenség nem.

A  $\tau$ -távolságokra szintén elkészíthető a különböző rangsorok kapcsolatát tükröző szimmetrikus, négyzetes mátrix (most a főátlóban definíció szerint nullák vannak):

4. táblázat. A rangsorok közötti páros  $\tau$ -távolságok

|                           | Start | Final | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix | C mátrix ( $\lambda$ max) |
|---------------------------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Start                     | 0,00  | 32,40 | 22,88    | 22,72    | 22,58    | 24,15    | 22,67                     |
| Final                     | 32,40 | 0,00  | 23,54    | 23,34    | 23,17    | 23,28    | 23,27                     |
| A mátrix                  | 22,88 | 23,54 | 0,00     | 2,78     | 1,52     | 4,61     | 1,80                      |
| B mátrix                  | 22,72 | 23,34 | 2,78     | 0,00     | 1,46     | 6,95     | 1,58                      |
| C mátrix                  | 22,58 | 23,17 | 1,52     | 1,46     | 0,00     | 5,64     | 0,60                      |
| D mátrix                  | 24,15 | 23,28 | 4,61     | 6,95     | 5,64     | 0,00     | 5,74                      |
| C mátrix ( $\lambda$ max) | 22,67 | 23,27 | 1,80     | 1,58     | 0,60     | 5,74     | 0,00                      |

Itt persze elég nehéz megfelelő értelmezést adni az értékeknek, mindenesetre az általam számolt sorrendek ismét közelebb állnak a csapattagok Élő-pontszámain alapuló, a priori értékelést tükrözőhöz a hivatalos módszer eredményénél. A számított rangsorok ilyen értelemben nagyjából ugyanolyan távolságra helyezkednek el a Start és Final sorrendekhez képest. Az **A**, **B** és **C** mátrixok közötti különbség szinte elhanyagolható, viszont a győzelem mértékét jórészt mellőző **D**-re már kissé eltérő végeredmény alakul ki. A **C** mátrixra alkalmazott sajátvektor módszer lényegében az *LLSM*-mel azonos megoldást ad. A konstrukció miatt ismét előfordul, hogy két rangsor teljes különbségének jelentős része egy országnak köszönhető; például a **B** és a **D**-kódolásokkal kialakuló rangsor közötti teljes 6,95-ös eltérésből 0,5108-ért Franciaország pozícióváltozása felelős.

A rangsorok viszonyát talán szemléletesebben lehet grafikusan bemutatni. A lehetőségek csökkentése érdekében ezúttal csak a hivatalos sorrenddel (Final) vetettem össze a kiszámolt 5 esetet, ezek a függelék ábráin láthatók, berajzolva az egyszerű lineáris trendvonalat is.<sup>30</sup> A pontdiagramok alapvetően nem különböznek, az eltérő kódolások szinte teljesen azonos eredményt adnak. A kapcsolat mind az 5 sorrendnél erősnek tűnik, viszont érdekes tendencia, hogy – főleg a középmezőnyben – a kevesebb mérkőzéspontszámmal, de magasabb Sonneborn-Berger értékkel rendelkező országok általában jobban teljesítenek, mint a hivatalos rangsorban náluk előrébb végző, azonban a velük azonos pontszámú csapatok között hátul szereplők.<sup>31</sup> Néhány esetet kiragadva:

- Lengyelország a legjobb 15 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 11., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 9., 8., 8. 11., illetve 8.

<sup>30</sup> A magyarázó változó (Final rangsor szerinti helyezés) együttthatója megegyezik az adott sorrenddel vett rangkorrelációs mutatójával.

<sup>31</sup> Ennek köszönhető az azonos mérkőzéspontszámú csoportokon belül jóval meredekebbnek tűnő egyenes.

- Dánia a legrosszabb 15 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 19., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 46., 47., 47. 42., illetve 47.<sup>32</sup>
- Grúzia a legjobb 13 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 30., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 15., 15., 15. 16., illetve 15.
- Az ICSC<sup>33</sup> a legrosszabb 13 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 48., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 75., 76., 75. 73., illetve 75.
- Zambia esete különösen figyelemreméltó. Helyezései a táblázatnak megfelelő sorrendben: 121. (Start), 47. (Final), 91., 89., 91., 92., végül az *EM* módszernél 90. A nagyarányú eltérés oka minden bizonnyal az lehet, hogy egyszer sem játszott a Final rangsorban nála előrébb végző csapat ellen. Ennek megfelelően Buchholz pontszáma csupán 100, ami a 149 résztvevő között nagyságban a 110. (ezzel szemben a szintén 100-as Buchholz értékkel rendelkező Guatemala a hivatalos rangsorban 99.). Úgy tűnik, a felhasznált, nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixon alapuló eljárások viszonylag nagy súlyt adnak e mutatónak.
- Németország a legjobb 11 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 64., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 41., 41., 41. 45., illetve 41. Az *LLSM* módszernél többször a 15 pontos Dániát is megelőzte. Ez – a kiegészítő mutatókat figyelembe véve – már nem annyira meglepő, hiszen Sonneborn-Berger pontszáma 268, míg Dániáé csak 258 (a Buchholz pontszám értéke 128, illetve 119);
- Nigéria a legrosszabb 10 pontos csapat, a hivatalos rangsorban 101., míg az általam számolt rangsoroknál (sorrendben) 112., 114., 113. 109., illetve 113.

Végezetül megnéztem az első négy csapat helyzetét, nem utolsósorban a hazánk számára hátrányosnak tűnő hivatalos rangsor miatt. Ezen helyeket minden esetben Ukrajna, Izrael, Magyarország és Oroszország 1. csapata (a továbbiakban Oroszország) foglalják el, így a „külső” kohézióval nincs gond – nagy biztonsággal kijelenthető, hogy ez a négy ország teljesített legjobban. Helyezéseiket az alábbi táblázat tartalmazza:

---

<sup>32</sup> Zambia mellett Dánia a másik ország, amelyik egyszer sem játszott a Final rangsorban nála előrébb végző csapat ellen, bár a 21., nála két hellyel hátrébb végző Olaszország ellen igen.

<sup>33</sup> International Committee of Silent Chess (Nemzetközi Siket Sakkszövetség). Ezenkívül még egy, nem országgént, tartományként részt vevő csapata volt a tornának, az IPCA (International Physically disabled Chess Association = Nemzetközi Mozgáskorlátozott Sakkszövetség).

5. táblázat. Az első négy ország helyezései

| Ország        | Start | Final | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix | C mátrix ( $\lambda$ max) |
|---------------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Ukrajna       | 2     | 1     | 2        | 2        | 2        | 2        | 2                         |
| Oroszország 1 | 1     | 2     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1                         |
| Izrael        | 11    | 3     | 4        | 4        | 4        | 4        | 4                         |
| Magyarország  | 5     | 4     | 3        | 3        | 3        | 3        | 3                         |

Eszerint vitathatatlanul Oroszország és Ukrajna osztozik az első két helyen, Izrael és Magyarország pedig a harmadikon és negyediken, ami a játékosok korábbi teljesítménye alapján – talán Izraelt kivéve – nem tűnik meglepőnek. Az utóbbi eset tűnik egyszerűbbnek: miután Izrael úgymond „alsó ágról” került a harmadik helyre, azaz a torna elején rosszabbul teljesített, így a későbbiekben könnyebb ellenfelekkel találkozott. Ennek megfelelően – azonos mérkőzéspontszám mellett – Sonneborn-Berger pontszáma magasabb és több játékpontot is szerzett (gyenge ellenfeleket egyszerűbb „nagyon” megverni), ugyanakkor Buchholz pontszáma már alacsonyabb, míg hazánké az összes résztvevő között Oroszországgal holtversenyben a legmagasabb. Ennek ellenére két nyomós ok szólhat a hivatalos sorrend elfogadása mellett: egyrészt Izrael legyőzte Magyarországot, másrészt a csapat erejéhez képest kiemelkedő teljesítményt nyújtott.<sup>34</sup>

Oroszország és Ukrajna viszonya már kérdésesebb. Sonneborn-Berger pontszámuk lényegében azonos, míg Ukrajna játékpontszáma magasabb, azaz utóbbi jobban megverte a neki jutó gyenge ellenfeleket, de az alacsonyabb Buchholz pontszámából adódóan kevésbé jobbakkal játszott. Ez viszont ezúttal nem abból adódik, hogy „alsó ágról” tört volna előre, csak egyszerűen korábbi mérkőzéspartnerei később rosszul szerepeltek. Ellenben nem szenvedett vereséget, és Oroszországgal döntetlent játszott. Utóbbi viszont a harmadik Magyarországtól kikapott (bár csak minimális különbséggel), és nem tudta kihasználni a lehetőséget a későbbi győztes megverésére. Ezek alapján – az általam használt módszerből kapott eredményekkel szemben – inkább Ukrajna első helye tűnik „logikusnak”.

Érdemes közelebbről megnézni az 5 esetben a súlyok abszolút nagyságát is:

6. táblázat. A sajátvektorokból kapott normalizált súlyok hányadosai

|                         | A vektor | B vektor | C vektor | D vektor | C vektor ( $\lambda$ max) |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Oroszország 1 / Ukrajna | 108,34%  | 110,09%  | 104,45%  | 111,33%  | 103,52%                   |
| Magyarország / Izrael   | 114,54%  | 112,96%  | 108,19%  | 126,26%  | 108,10%                   |

<sup>34</sup> A négy ország mérkőzéseit lásd a10. táblázatban.

Az első két helyezett között a legkisebb különbség a **C** mátrixnál mutatkozik, ami meglehetősen összehúzza az *AHP* skálát, a legnagyobb különbségnek 3-at választva. Ennek fényében nem meglepő a **B** mátrixnál adódó nagy eltérés, ahol jóval szélesebb a skála. Ugyanakkor az *LLSM* és sajátérték-módszerek „fekete doboz” természetéből adódóan nehéz értékelni a különbségeket, mindenesetre jó választásnak tűnik, hogy a **C** mátrixra hajtottam végre két vizsgálatot. Ellenben fontos észrevenni az eredmények érzékenységet: kis különbségek esetén két hasonlóan tűnő eljárás sem feltétlenül adja ugyanazt az eredményt. Ezenkívül felmerülhet, hogy mivel az *EM* módszer nem teljesíti az aszimmetrikus inkonzisztencia követelményét, a baloldali sajátvektor különbözősége esetleg megfordíthatja a két ország pozícióját.

Magyarország és Izrael viszonylatában már nagyobb eltérések mutatkoznak. Talán nem rendkívüli a **D** mátrix kimagasló értéke, hiszen itt kapta a legkisebb súlyt a győzelem mértéke, így hazánk alacsonyabb Sonneborn-Berger pontszáma csak kevésbé játszik szerepet. Ellenben a „keskeny” *AHP* skálának megfelelő **C** mátrixnál az előny 8% körülre csökken. Ezen négy ország esete alapján mindenesetre valamivel „hatékonyabbnak”, a hivatalos végső rangsort jobban mutatónak tűnik a Saaty-féle módszertan, amit már a rangkorrelációs mutatószámok is megerősítettek.

#### 4.3. VIZUÁLIS MEGJELENÍTÉS

A fenti vizsgálatok kétségtelenül sok hasznos tapasztalattal szolgáltak, de egy módszer felhasználhatóságát gyakran jobban befolyásolja az „eladhatóság”, az egyszerű, látványos, könnyen értelmezhető output, mint a mögöttes matematikai tartalom kifinomultsága. Az átlagos megfigyelőtől, nézőtől nemigen várható el, hogy alaposan átböngéssze a függelékben közölt majdnem 150 soros táblázatokat, megértse az *LLSM* és sajátvektor eljárások különbözőségét, ezek kapcsolatát a hivatalos végeredménnyel. Ezért ebben az alfejezetben megpróbálok némileg emberközelibbé, befogadhatóbbá tenni a vizsgálatot.

Ehhez a többváltozós statisztikai elemzésekben használt sokdimenziós skálázás (MDS = Multidimensional Scaling) módszerét használtam. Ez a kiindulási hipotézist nem igénylő, feltáró alkalmazások közé tartozik, amely az adatok közötti eltérésekből nyer információt, amiket egy skálatérképen ábrázol. Az illeszkedés jóságára utal, ha a származtatott és eredeti koordináták közötti különbség minimális. Lényegében egy objektív skálát

definiál a redukált dimenziójú térben; miután  $n$  pont  $n - 1$  dimenzióban tökéletesen megjeleníthető, ennek egy valódi, lehetőleg minél kisebb alterét kell kiválasztani.<sup>35</sup>

Alkalmazására kiváló példa a városok közötti távolság: autóstérképek függelékében gyakran található ilyen  $n \times n$ -es négyzetes mátrix, melynek  $(i, j)$  pozíciójú eleme az  $i$ -edik és  $j$ -edik település távolságát mutatja. A pontok egy  $n - 1$  dimenziós térben hibátlanul felrajzolhatók, bár a származtatás miatt ez mindössze két dimenzióban is hibátlanul elvégezhető. Ha azonban ezt a szokásos, többnyire lineáris kapcsolatokon nyugvó statisztikai módszerekkel kívánjuk megtenni, igen nagy nehézségekbe ütközhetünk, míg az MDS eljárás valóban visszaadja a kívánt térképet, a települések egymáshoz viszonyított helyzetét, bár a kapott koordinátáknak nincs önálló tartalma.

A végrehajtás alapvetően kétféleképpen történhet: egy  $n \times p$  dimenziójú megfigyelés-változó mátrixból kiindulva a mérési skála megadásával vagy a vizsgálandó elemek közötti távolságmátrix alapján. Előbbi esetben mérhető a megfigyelések és a változók különbözősége is. Nálam az ismert pontokat a 149 ország, a változókat a különböző eljárásokkal nyert eredmények adják, így mindenképp az utóbbiakat kell ábrázolni. A kettő kapcsolata ebből nyilvánvaló: a definiált skálafüggvénnyel kiszámítható a  $p \times p$  dimenziójú távolságmátrix, vagyis mindegy, hogy az utóbbit közvetlenül adjuk meg, vagy a használt programcsomaggal végezzük a sorrendek különbözőségének meghatározását. Ezért közvetlenül a távolságmátrixból indultam ki, mert így egyéni függvényeket is meg lehet adni, nem szükséges ragaszkodni a programban elérhető változatokhoz.

Tehát a különböző rangsorok átfogó vizsgálatához elengedhetetlen az alkalmazott metrika definiálása. A vizsgálatban három ilyen próbáltam ki:

- 1) Szokásos euklideszi távolság, az eltérések négyzetösszegének gyöke:  
$$d_{ik}^2 = \sum_{j=1}^{149} r_{ij} \cdot r_{kj},$$
 ahol  $r_{ij}$  a  $j$ -edik csapat helyezése az  $i$ -edik rangsorban, míg  $d_{ik}$  az  $i$ -edik és  $k$ -edik sorrendek távolsága. Erről ugyan már a  $\rho$  rangkorrelációs mutató esetében láttuk, hogy a célnak nem igazán felel meg, de az összehasonlíthatóság érdekében szükségesnek tartottam foglalkozni vele.
- 2) Eltérések abszolútértékének négyzetösszege, city-block vagy Manhattan metrika:  $d_{ik} = \sum_{j=1}^{149} |r_{ij} - r_{kj}|$ . Itt nem kap indokolatlanul nagy kvadratikussúlyt a „futottak még” kategóriában szereplő csapatok pozíciójának komoly ingadozása.

---

<sup>35</sup> A módszer részletes leírását lásd Kovács 2009, 125-138. o.

- 3) A korábban definiált  $\tau$ -távolság, ami elsősorban az élmezőnyben előforduló eltéréseket veszi figyelembe:  $d_{ik} = \sum_{j=1}^{149} \log(\max\{r_{ij}/r_{kj}; r_{kj}/r_{ij}\})$ .<sup>36</sup>

Ezek mindegyike egy négyzetes, szimmetrikus távolságmátrixot eredményez, amely egyelőre 7 sort és oszlopot tartalmaz (Start, Final és az 5 számított rangsor). A sorrendek 6 dimenzióban tökéletesen ábrázolhatók, a vizualizálás érdekében viszont ezt jó lenne kettő, esetleg egy tengelyre sűríteni. A megoldás során ugyanakkor figyelembe kell venni, hogy  $p$  változónál az ismert távolságok száma  $p \cdot (p - 1)/2$ , míg a származtatott térben  $p \cdot k$  dimenziót becslünk, így optimális esetben  $k \ll (p - 1)/2$ , mert ez mutatja a jó sűrítetőséget. Eszerint  $p = 7$  esetén nem is lehet kettőnél több dimenzióban ábrázolni. A tökéletesebb kép érdekében ezért még további három sorrendet alkottam, egyik esetében sem engedve meg a holtversenyt, a csatolt rangszámokat:

- 1) Sonneborn-Berger: lexikografikus rendezés először a Sonneborn-Berger érték (TB2), majd a mérkőzésponatok száma (TB1), végül a játékpontok száma (TB3) alapján. Ez már teljes sorrendet ad, a harmadik feltételig három esetben jut el az algoritmus, ami egyben a hivatalos végeredmény első két komponense szerint azonos csapatok halmaza: a 93. helyért Thaiföld és Panama, a 97-edikért Luxemburg és Ciprus, míg a 140-edikért Ghána és Bermuda versenyez, és mindháromszor az elsőként felsorolt nyer a magasabb játékpontszám révén, akiknek mellesleg Buchholz pontszáma (TB4) is nagyobb. A nem páros összehasonlítás mátrixból kapott mind az 5 rangsornál ugyanez a helyzet, ami a döntési kritérium stabilitására utal.
- 2) Buchholz: a Buchholz pontszám (TB4) és az elért mérkőzésponatok számának (TB1) szorzata, leosztva a mérkőzések számával. A Buchholz érték ugyanis csupán az ellenfelek erősségét tükrözi, ami a párosítási algoritmus következtében ugyan erősen korrelál a helyezéssel, mégis célszerű valahogy módosítani. Erre legmegfelelőbb a csapatok számára elsődleges célt jelentő mérkőzésponatok száma. A korrekciót nincs sok értelme a játékpontok számával végezni, mert ez – a definíciónak megfelelően – lényegében a Sonneborn-Berger pontszámával egyező sorrendet adna. A lejátszott mérkőzések számával osztást a néhány rendhagyó eset indokolja. A felmerülő holtversenyek

---

<sup>36</sup> A megoldást joggal érheti kritika azért, mert a  $\tau$ -különbség nem távolságfüggvény. Mivel a kapott „távolságmátrixban” teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, így a kifogás talán mellőzhető.

eldöntése ezúttal a mérkőzésponatok száma, majd a Sonneborn-Berger érték alapján történik.

- 3) Mix: Egy kompozit mutató a Sonneborn-Berger és Buchholz pontszámokból. Először egy csapat győzelmeinek 3, a döntetleneinek 2, a vereségeinek 1 pontot adva az így kapott összeget szorozza a Buchholz pontszámmal, majd ismét a mérkőzések számával osztja.<sup>37</sup> Ez a szám nagyjából azonos skálára kerül a TB2 mutatóval; előbbiek átlaga 232, utóbbiaké 203. Ezután még hozzáadja a Sonneborn-Berger pontszámot, tehát egyszerre mutatja az ellenfelek erősségét és az ellenük elért teljesítményt (például az első tag egyértelműen Magyarországnak, a második Izraelnek kedvez). Csupán a 83. helyért alakul ki holtverseny a Feröer-szigetek és Skócia között, amit az előbbi javára döntöttem el jobb Sonneborn-Berger pontja alapján, mivel mérkőzésponataik száma azonos, noha az *LLSM* és *EM* módszereknél Skócia végzett előrébb.<sup>38</sup>

Ezután meghatároztam a kialakuló 10 rangsor távolságmátrixát mindhárom definíció esetén. Az MDS módszernél ennek kezelésére egy további opció is létezik, az intervallum, arány vagy ordinális (nem metrikus) skálán történő számítás. Az első esetben a skálatérképen mért  $d$  távolságok lineáris függvénnyel kapcsolódnak a bemenő  $\delta$  különbözőségekhez, azaz  $d = a + b\delta$ . A másodiknál ugyanez a helyzet, csak  $a = 0$ . Végül a harmadik csak monoton függvényt követel meg, nem veszi figyelembe az eredeti távolságok nagyságát, csupán ezek egymáshoz való viszonyát. Emiatt rangszámokhoz eredetileg az utóbbi, ordinális skálázást kellene használni, de ez esetben véleményem szerint a mátrix elemei intervallumskálán értelmezhetők, mert van természetes nullapont (két sorrend teljesen azonos) és az eltérések nagysága is számít. Ezért az első opciót választottam.

Az illeszkedés jóságát a Kruskal-féle Stress függvény méri az adott konfigurációból származó és a becsült távolságok eltérése alapján, ami egy  $[0,1]$  intervallumba eső szám, alacsony értéke jó illeszkedést jelez, 0,2 alatt legalább gyenge a kapcsolat (Kovács 2009, 130. o.). Értéke értelemszerűen növekszik, ha több változó van vagy kevesebb dimenzióba kell leképezni ezeket. Emellett az RSQ mutató méri az eredeti távolságok varianciájának a redukált skálatérben magyarázott részét; így minél nagyobb értéke kívánatos.

---

<sup>37</sup> A döntetlen a valóságban is 2 pontot ér, a győztesek átlagos játékpontszáma 3,13, a veszteseké – ennek komplementereként 0,87; ezt mutatja be az 1. ábra.

<sup>38</sup> Ennél a három rangsornál is látszik néhány furcsaság a hivatalos sorrendhez képest. Például az 13 mérkőzésponatú csapatok közül legjobb Grúzia ott csak 30., míg a Sonneborn-Berger alapján 14., a Buchholznál 23., a Mixnél pedig 17. Ugyanezek az értékek a legrosszabb 13 pontos ICSC-nél 48., illetve 75., 56. és 71. Ez persze a három sorrend definíciójára tekintettel már nem annyira meglepő.

Az euklideszi távolság esetén a Stress értéke két dimenzióban mintegy 0,125, ami gyenge-közepes kapcsolatot jelent, míg az RSQ mutató szintén elég magas.<sup>39</sup> Egy dimenzióban az illeszkedés jelentősen romlik, egyáltalán nem tűnik elfogadhatónak. A kapott koordinátákat mutatja a 12. táblázat, míg a skálaterképet a 8. ábra. A tengelyeknek nem adható közvetlen értelmezés, de ez nem is annyira lényeges. Jól látható, hogy a Start és Final rangsorok helyezkednek el legtávolabb egymástól, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból kapott rangsorok pedig alapvetően nem különböznek, talán a **D** mátrixból kapott tér el kissé a többitől – a másik 4 lényegében nem különböztethető meg egymástól.

Az átlagos abszolút eltérésekkel számoló modell ehhez hasonló eredményt ad. Két dimenzióban a Stress mutató szintén kismértékben 0,15 alatt marad, közepes erősségű a kapcsolat. Ekkor sem érdemes egy dimenzióban ábrázolni, a Stress kétszeresére emelkedne és a magyarázott variancia 80% körülire csökkenne. A koordináták csaknem azonosak az előző esettel (13. táblázat és 9. ábra), így nem nagyon indokolt ez a megoldás.

Végül a  $\tau$ -távolságok alapján is meghatároztam a kétdimenziós koordinátákat, miután itt sem indokolt tovább szűkíteni a teret egyetlen tengelyre (14. táblázat). Itt a legkedvezőtlenebb a Stress és az RSQ értéke, az eredeti és számított távolságok pontdiagramja egy csaknem szabályos 45 fokos egyenes, az illeszkedés még mindig elfogadható. A rangsorok helyzete kissé módosul: a Mix elnevezésű itt kerül legközelebb a saját számításokhoz, ahogy azt a 10. ábra mutatja.<sup>40</sup>

Zárásként érdemes megjegyezni a fő tanulságot: lényegében sikerült előállítani a sajátvektor eljárást az eredetileg is meglevő változók lineáris transzformációjával. A Buchholz szintén nincs túl messze az általam számoltaktól, főleg a Sonneborn-Bergerrel összehasonlítva, így kérdéses lehet utóbbi hangsúlyos szerepe a hivatalos lexikografikus rendezésnél. Végül – hasonlóan a két korábbi esethez – az általam számolt rangsorok mindegyike a Start és Final sorrendek „között” helyezkedik el, azaz kevésbé tükrözik a váratlan, a csapatok erejével ellentétes eredményeket, bár ez a Sonneborn-Berger értékekre is igaz. Ezenkívül a problémás, a tornába csak később bekapcsolódó csapatok kihagyásával minden bizonnyal tovább lehetne javítani az illeszkedésen, ezeket (főleg Szenegált) inkább csak a „történeti hűség” kedvéért tartottam meg.

---

<sup>39</sup> Ordinális (nem-metrikus) skálázás esetén a Stress érték sokkal alacsonyabb lenne.

<sup>40</sup> Itt kívánom megjegyezni, hogy bár a Mix rangsor megadásával valóban a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból kapott sorrendek reprodukálása volt a célom, ezt nem hosszas próbálkozásokkal, hanem tisztán elméleti megfontolásokból kiindulva alkottam meg, így kissé meglepő a jó illeszkedés.

## 5. TOVÁBBI FELHASZNÁLÁSI TERÜLETEK

*„Ha találni lehetne itt még néhány más, komolyabb feladatot, akkor ez a módszer már több haszonnal járna, és már nem lenne szabad figyelmen kívül hagyni.”<sup>41</sup>*

(Leonhard Euler a königsbergi hidak problémájának megoldásáról)

### 5.1. EGYÉB SPORTVERSENYEK

A sakk mellett a módszertan alkalmazása más sportesemények kapcsán is felmerülhet. Természetesen ez elsősorban olyan egyéni és csapatsportágakban lehetséges, ahol páros mérkőzéseket rendeznek. Azonban fontos figyelembe venni azt a tényt, hogy a résztvevők sokszor nem igazán érdekeltek a győzelem mértékében, így nehéz a teljes *AHP* skálát felhasználni a mátrix megalkotásához. Ekkor az automatikusan a döntetlen eredményhez rendelt 1-es érték mellett csupán egy további szám határozható meg. Ezt célszerű olyanak választani, ami megfelel a hivatalos rangsorban szereplőknek; például labdarúgásban a döntetlen 1, a győzelem 3 pontot ér, ennek megfelelően a nyertes mérkőzés 3-as számként írható be a mátrixba.

Ugyancsak komoly gondot okozhat a szimmetricitás hiánya: a legtöbb csapatsportágban kimutatható a hazai pálya előnye. Ez egyéni sakkversenyek esetén is felmerülhet, ha a versenyzők az adott párosításban csak egyszer játszanak, de a vizsgált olimpia esetén ez szerencsére nem jelentett gondot. Végül számos esetben nincs különösebb szükség a módszertan alkalmazására, hiszen a szabályok hosszú ideje változatlan formában léteznek, és (részben e tényből kifolyólag) senki sem kifogásolja őket: az európai országok első osztályú labdarúgásában szinte kivétel nélkül 18-20 csapat vesz részt, melyek egy idény során egymással kétszer játszanak, így végül a mátrix teljesen kitöltötté válik.

Néhány egyéni sportágban fontos szerepe van a világranglistáknak. Ilyenek a snooker vagy a sakk jól ismert Élő-pontszáma, de talán a legnagyobb publicitást a tenis� kapja. Ez alapvetően egy „pontgyűjtő” rendszernek felel meg: minden héten az ezt megelőző 52 hét alatt meghatározott számú és súlyú, egyenes kieséses rendszerben szervezett versenyeken elért eredmények függvénye. Például a férfiak esetében a négy legrangosabb Grand Slam torna (Ausztrál Open, Roland Garros, Wimbledon, US Open) egyikén elért győze-

---

<sup>41</sup> Idézi: Gingyikin, Sz. G., 2004. *Történetek fizikusokról és matematikusokról*. Második, javított kiadás.. Budapest: Typotex Kiadó. 241. o.

lem 2000, a döntőbe jutás 1200, az elődöntőbe jutás pedig 720 pontot ér.<sup>42</sup> Ennek megfelelően egyáltalán nem számít az, vajon a vizsgált versenyző kitől szenvedett vereséget vagy kit győzött le, noha a valóságban ez nem tekinthető mellékesnek. A problémát ugyan némileg mérsékli a kiemelések rendszere, ami igyekszik megakadályozni a legjobb versenyzők korai találkozását, de ez sem tekinthető tökéletes megoldásnak.

Így indokolt lehet a páros összehasonlítás mátrixok felírása, melynek sorai és oszlopai ismét az egyes versenyzőknek felelnek meg. Itt azonban a szereplők számának nehéz felső korlátot szabni, valamilyen más módszerrel célszerű a legjobb 100, 500 stb. kiválasztása, akikre már tökéletesen alkalmazható az eljárás. A mátrixok főátlóiban értelemszerűen 1-esek állnak. Az összes többi elem helyén a két versenyző egymás elleni mérkőzéséből konstruált érték szerepel, illetve ennek hiányában ismeretlennek tekintjük. Az összefüggőség biztosítására természetesen érdemes egy viszonylag hosszabb, például a hivatalosnak megfelelő 52 hetes időtartamot választani; ha ezalatt két játékos többször találkozott, mérkőzéseik eredményeiből egy összetett szám konstruálható.

A tenisz további előnye, hogy az összecsapások eredményének *AHP* skálán történő kódolásához számos lehetőség áll rendelkezésre. Itt ugyanis a végső győzelemhez többnyire két játszma megnyerése szükséges, melyek mindegyikéhez alapvetően hat játékot kell győztesen megvívni.<sup>43</sup> Ez máris a végeredmények széles skáláját kínálja, ami akár – az egyszerűség kedvéért a nőknél – a totális fölényt jelentő 6:0, 6:0-tól a fordulatos mérkőzést takaró 0:6, 6:0, 7:6-ig terjedhet. Emellett gyakran a mérkőzés idejét is számon tartják, ezzel szintén közelíthető a győzelem mértéke. Utóbbi minél rövidebb voltában, ami persze nem független a játszmák eredményeitől, erősen érdekelték a játékosok, hiszen viszonylag sűrű a versenyprogram, egy évben sok tornán kell részt venni a világranglista élmezőnyében maradáshoz. Így még a sakknál is finomabb különbségek engedhetők meg, az értékelő preferenciáinak megfelelően.

Ezután a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból már a szokásos módon számítható az értékelővektor az említett módszerek valamelyikének alkalmazásával, majd ennek koordinátái alapján felállítható a végső sorrend. Ugyanakkor felmerül egy további probléma: az optimális súlyvektor koordinátáinak mennyiben van önálló tartalma? A jelenleg használt hivatalos ranglista kétségtelen előnye ugyanis, hogy elméletileg (elte-

---

<sup>42</sup> A rendszer részletei megtalálhatók a <http://www.atpworldtour.com/Rankings/Rankings-FAQ.aspx> (letöltve: 2011. március 13.) honlapon.

<sup>43</sup> Férfiaknál az évi négy Grand Slam versenyen és a csapatok számára rendezett Davis-kupán három győztes játszma szükséges a mérkőzés megnyeréséhez.

kintve a módszertan és a versenyek változásaitól) lehetővé teszi az összehasonlítást időben távoli versenyzők esetében is – egy 50 évvel ezelőtt aktív játékos teljesítménye szintén meghatározható az eljárással, ami utána közvetlenül összevethető a maiakéval. Az *LLSM* vagy *EM* módszernél ennek érvényessége kérdéses, hiszen a vektor elemei erősen függnék például a kódolás módjától; miközben a rangsor alig változik (7. táblázat).

Ugyanakkor a bemutatott módszertan másféleképpen is felhasználható egy időtől független világranglista felállítására, amennyiben elegendő játékos adatai állnak rendelkezésre, miután két, közvetlenül egymás ellen nem játszó versenyző között kapcsolatot teremthet egy közös ellenfél. Ez egyúttal a nézők, érdeklődők régi vágyát teljesíthetné, bár más sportágakra történő kiterjeszthetősége korlátozott: atlétikában vagy úszásban a versenyzők időeredménye a jelenhez közeledve fokozatosan javul, így úgy tűnhet, a korábbi győztesek mindegyike „rosszabb” volt a mostaniaknál. Itt nem segítene a páros összehasonlítás mátrixok módszere sem, hiszen legalábbis arányskálán mért adatokról van, aminek eltérő kódolását nehezen lehetne indokolni.

Végezetül még egy lehetséges alkalmazási területet említek meg, az eltérő sportágak közötti összevetést. Sokakat érdeklő kérdés, vajon a különböző távolságokon induló futók és úszók teljesítményét lehet-e azonos skálán mérni. Elméletileg ugyan lehetséges lenne, hogy egymással versenyezzenek, de ennek nincs különösebb értelme. Nyilván mindenki megnyerné a saját versenyszámát, a köztes távolságokon pedig nem rendeznek bajnokságokat. Ellenben lehetőségként kínálkozik valamilyen közvetett kapcsolat találása, ilyen célra elsődlegesen egy mindkét távon induló versenyző felelne meg. De nagy segítséget jelenthet a férfiak számára rendezett tízpróba, vagy a női hétpróba. Előbbiben például 100, 400 és 1500 méteres síkfutás, valamint 110 méteres gátfutás is szerepel. Így a tízpróbázókon keresztül lehetne néhány sportágat átfogó összehasonlítást végezni. Természetesen ez a megoldás óvatosságot igényel, hiszen a gerelyhajítás vagy a rövidtávfutás eltérő izomzatot, testfelépítést igényel, ezért a tízpróbán indulók többségének vannak „erős” és „gyenge” számai. Mindenesetre itt is látok némi teret az értelemszerűen nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok felhasználására.

## 5.2. KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSOK<sup>44</sup>

### 5.2.1. Több időszakra vonatkozó indexszámítás

A gazdaságban megfigyelt legtöbb aggregált sokaság valójában az egyes jószágokból termelt mennyiségek és a hozzájuk tartozó árak szorzataként áll elő:  $A = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n p_i \cdot q_i$ , ahol  $n$  a termékek száma,  $v_i$  pedig az  $i$ -edik termékből előállított mennyiség összértéke, amely a  $q_i$  volumen- és  $p_i$  egyedi árindex szorzataként adódik. A teljes előállított érték időbeli felbontásakor értelemszerűen szeretnénk elkülöníteni egymástól az ár- és volumenváltozások hatását; a bruttó nemzeti termék számításakor például az előbbi, a fogyasztói árindexnél az utóbbi kiszűrése a vizsgálat célja.

Az egyszerűség kedvéért induljunk ki két időszakból, jelölje 0 index a bázisidőszakot és  $t$  a tárgyidőszakot! Ekkor több kézenfekvő lehetőség kínálkozik az összehasonlítás-hoz használt árak kiválasztására:

- 1) Bázisidőszaki adatok használata (Laspeyres-féle index):

$$I_q^0 = \frac{\sum p_0 \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0} \text{ és } I_p^0 = \frac{\sum p_t \cdot q_0}{\sum p_0 \cdot q_0}$$

- 2) Tárgyidőszaki adatok használata (Paasche-féle index):

$$I_q^t = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_t \cdot q_0} \text{ és } I_p^t = \frac{\sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_t}$$

- 3) Átlagos adatok használata (Edgeworth-Marshall-típusú index):

$$I_q^{EM} = \frac{\sum 0.5(p_0 + p_t) \cdot q_t}{\sum 0.5(p_0 + p_t) \cdot q_0} = \frac{\sum p_0 \cdot q_t + \sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0 + \sum p_t \cdot q_0}$$
$$I_p^{EM} = \frac{\sum p_t \cdot 0.5(q_0 + q_t)}{\sum p_0 \cdot 0.5(q_0 + q_t)} = \frac{\sum p_t \cdot q_0 + \sum p_t \cdot q_t}{\sum p_0 \cdot q_0 + \sum p_0 \cdot q_t}$$

- 4) Mértani átlagolás (Fischer-féle index):

$$I_q^F = \sqrt{I_q^0 \cdot I_q^t} \text{ és } I_p^F = \sqrt{I_p^0 \cdot I_p^t}$$

A formulákból közvetlenül adódik, hogy a Laspeyres ár- és Paasche volumenindex, illetve a Laspeyres volumen- és Paasche árindexek szorzata éppen a két időszak közötti értékindexet adja. Az Edgeworth-Marshall indexre nem írható fel ilyen összefüggés, míg a mértani átlagból származó Fischer ár- és volumenindex szorzata szintén kiadja az értékindexet. Utóbbi – elméletileg nehezen indokolható – bevezetése elsősorban ezért célszerű, amellett, hogy a Laspeyres és Paasche típusú indexek jelentősen különbözhetnek a súly-

---

<sup>44</sup> Az alfejezet statisztikai része döntően Hunyadi és Vita (2003) könyvén alapul, ezt a továbbiakban csak a fontosabb esetekben jelzem külön hivatkozással.

arányok eltérése miatt: például a fogyasztói árindexet tekintve, a jobban dráguló termékek iránti relatív kereslet általában csökken a tárgyidőszakra a bázisidőszakhoz képest, így a Paasche-index kisebb lesz a Laspeyresnél.

A korábban definiált mutatószámok értelemszerűen kiterjeszthetők több időszakra. Itt azonban mindegyiknek kétféle alkalmazása lehetséges, miután egynél több érték keletkezik. Az állandó súlyú indexsoroknál a nem változó komponensek mindegyik esetben egy adott időpontból származnak, a Laspeyresnél ez a bázisidőszak, a Paaschenál a tárgyidőszak. A láncindexsoroknál annyiban módosul az alapkoncepció, hogy a felhasznált súlyok is „tolódnak”, vagyis például a  $(t - 2)$ -edik és  $(t - 1)$ -edik időszak összevetésénél a Laspeyres-index  $(t - 2)$ -edik, a Paasche  $(t - 1)$ -edik időszaki súlyokat használ, miközben a bázisindexeknél ezek a 0-dik, illetve a  $t$ -edik időszakból származnak. A Fischer-index ismét a kettő mértani közepe.

Ilyenkor a döntő kérdés: vajon a két végpont közötti indexek előállnak-e az egymást követő időszakok egyedi indexeinek szorzataként. Az állandó súlyozású indexsor legfőbb előnye, hogy ez a kapcsolat biztosan fennáll, hiszen a törtek összeszorzásakor az első tényező számlálója meg fog egyezni a második nevezőjével. A megoldás hátránya a súlyok elavulása: egy hosszú, több évtizedes időszak esetén mind a bázis, mind a tárgyidőszaki súlyok használata indokolatlan, hiszen közben jelentősen módosulhatott a fogyasztói kereslet vagy a termelés szerkezete. A Fischer-index is csak részben kezeli a problémát, a fiktív súlyok használata elméletileg nehezen indokolható.

Változó súlyú láncindexsorok esetén a súlyok módosulása sokkal kevésbé releváns, hiszen a statisztikai megfigyelések viszonylag sűrűn rendelkezésre állnak ahhoz, hogy ez a változás ne okozzon komoly eltérést a Laspeyres és Paasche indexek között. Ugyanakkor a láncindexek szorzata még állandó súlyok mellett sem feltétlenül egyezik meg a két végpont közötti, azonos módon számított mutatóval. Vegyük a fogyasztói árindexet három időszakra! Tegyük fel, hogy a termékek súlya végig azonos, miközben az egyik, az indexben 10%-os súllyal szereplő jószág ára az első és második időszak között 20%-kal csökkent, a második és a harmadik között viszont 25%-kal emelkedett, vagyis visszaállt a korábbi szintre. Ekkor az első és harmadik időszak közötti fogyasztói árindex értéke nyilvánvalóan  $CPI_{13} = 1$ . Ugyanakkor a két láncindex:

$$CPI_{12} = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,98, \text{ illetve } CPI_{23} = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1,25 = 1,025$$

Az ezekből számolt mutató az első és harmadik időszak között:

$$CPI_{12} \cdot CPI_{23} = 0,98 \cdot 1,25 = 1,0045 \neq CPI_{13} = 1$$

A probléma még élesebben jelentkezik, ha a súlyok is változnak a közbenső időszakokban. Ezt a hatást a Fischer-index használata ugyan nagymértékben csökkenti, de teljesen nem szünteti meg.

Miután mindkét megoldás több hátrányos tulajdonsággal rendelkezik, a gyakorlatban legtöbbször szakaszosan állandó súlyú indexeket használnak. Eszerint mintegy 5-10 évig nem változtatnak a súlyokon, ezeket a „szeleteket” pedig láncszerűen kapcsolják egymáshoz, az új súlyok megjelenésekor a mutatót a korábbi módszertannal is elkészítik.

A különböző indexszámítási módszerek összehasonlítására szolgálnak az alábbi követelmények (Hunyadi és Vita 2003, 242. o.):

- *Összemérhetőség*: az index értéke ne függjön a mértékegységtől;
- *Arányosság*: ha minden ár ugyanolyan mértékben változik, akkor az index is ennek megfelelően módosuljon;
- *Reciprocitás*: az időszakok vagy területi egységek felcserélése mellett kapott eredmény az eredeti reciproka legyen;
- *Tényezőpróba*: a formulával nyert volumen- és árindexek szorzata legyen egyenlő az értékindexxszel;
- *Tranzitivitás*: a láncindexek szorzata a bázisindexszel azonos eredményt adjon.

Az előzőek alapján a Laspeyres- és Paasche-indexek megsértik a reciprocitás, a tényezőpróba és a tranzitivitás feltételeit. Az Edgeworth-Marshall index az utolsó két előírást nem teljesíti. Végül a Fischer-index az első négyet minden esetben, az utolsót, a tranzitivitást pedig közelítőleg kielégíti, így nem véletlen széles körű elterjedtsége.

A fenti követelmények már a páros összehasonlítás mátrixok alkalmazhatóságára utalnak. Amennyiben több periódust vizsgálunk (az egyszerűség kedvéért legyenek éves adatok, miközben a vizsgálandó mutató a bruttó hazai termék), ezek sorrendben megfeleltethetők a mátrix sorainak és oszlopainak, tehát a 0 indexű bázisidőszak az első, a  $t$ -vel jelölt tárgyidőszak a  $(t + 1)$ -edik „alternatívának”. A fődiagonális felett minden elem kitölthető a reciprocitást biztosító Fischer-index alapján, hiszen két év között többnyire elhanyagolható az egyes ágazatok árváltozási dinamikája. Ez már biztosítja a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggőségét, ami elvileg elegendő az optimális értékelővektor kiszámításához. Ennek megfelelő elemeit egymással elosztva pedig meghatározható az egyes időszakok közötti GDP-változás nagysága.

Természetesen egy-egy sorban a főátló felett több elem is megadható. Ekkor ugyan elveszik a korábban meglevő konzisztencia, de az egyes évek jobban összehasonlíthatóvá válnak, a mutató kevésbé fog függeni az árak becslésében elkövetett esetleges hibáktól. Az *EM* vagy *LLSM* módszerrel kapott optimális súlyvektor elemei pedig biztosítják a tranzitivitást. Ez egészen addig megtehető, amíg az elemző nem foglalkozik az árak „elavulásával”, a fentieknek megfelelően soronként 5-10 elem beírásával. Amikor új súlyokat kell használni, egész egyszerűen rá lehet térni az eggyel lejjebb levő sor feltöltésére. Így bizonyos mértékben egymástól távoli, akár több évtizednyi távolságra levő évek termelése vagy árszínvonala is összehasonlíthatóvá válik a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix használatával.

### 5.2.2. Nemzetközi összehasonlítás

Az indexszámításban az időegység szerepét egy terület is átveheti, ilyenkor területi indexekről beszélünk. A korábban definiált mutatószámok ugyanúgy alkalmazhatók. Azonban nemzetközi összehasonlítások során egy újabb probléma merülhet fel, hiszen az érték (ár, volumen) adatok eltérő mértékegységben, valutában állnak rendelkezésre. Viszont az elemzések gyakran éppen arra irányulnak, hogy ezeket azonos skálán, például USD-ban vagy euróban jelenítsék meg. Ezenkívül a területi indexeknél – az időbeli vizsgálatokkal szemben – nem adható meg egyértelmű sorrend az államok, régiók között, így alapkövetelmény az azonos relációjú összehasonlítások megegyező eredménye, ami lényegében a reciprocitásnak felel meg: ha az *A* ország egy főre jutó bruttó nemzeti terméke a *B*-ének kétszerese, akkor a *B* országban ez az érték feleakkora, mint *A*-ban. Hasonlóan, a két területi egység közötti közvetett, *C* államon keresztül történő összehasonlításának a közvetlennel egyező eredményt kell adnia (tranzitivitás).

Miután az eltérő valutájú országokban az árindexek számlálója és nevezője más-más mértékegységben van kifejezve, ez nem adható meg százalékos formában, ezért az így kapott  $PPP(A/B)$  mutatókat vásárlóerő-paritásnak szokták nevezni. Ráadásul eltérő fejlettségű, földrajzilag távoli államok összehasonlításakor sokkal nagyobb eltérések lehetnek az egyes termékek súlyaiban, mint az időbeli vizsgálatoknál: miközben a legtöbb afrikai országban a fogyasztás döntő többségét az élelmiszerek teszik ki, addig Nyugat-Európában ezek jóval kisebb szerepet játszanak az inflációs mutatóban. Ennek megfelelően szinte egyáltalán nem használják a Laspeyres és Paasche indexeket, csak a Fischer-típusúakat, ami a reciprocitás követelményét automatikusan teljesíti:

$$I_p^A(A/B) = \frac{\sum p_A \cdot q_A}{\sum p_B \cdot q_A} \text{ és } I_p^B(A/B) = \frac{\sum p_A \cdot q_B}{\sum p_B \cdot q_B}$$

$$I_p^F(A/B) = \sqrt{I_p^A(A/B) \cdot I_p^B(A/B)}$$

Ezt a vásárlóerő-paritást a pénzpiacon érvényes  $ER(A/B)$  valutaárfolyammal osztva megkapható a két ország árszínvonalának hányadosa, ami már skálafüggetlen mutató, százalékos formában megadható.

A több országra kiterjedő, multilaterális vizsgálatoknál alapkövetelmény a reciprocitás mellett a tranzitivitás megléte, aminek biztosítására alapvetően három módszer ismert:

- 1) Minden relációjú indexnél egy előre kiválasztott ország súlyait használják (volumenindexnél árait, árindexnél volumeneit). Lényegében az állandó súlyozással kerül ki a tranzitivitás problémáját. Ezt ma már viszonylag ritkán használják, mert nem tesz eleget a semlegesség követelményének, az adott államból származó súlyok jelentősen torzíthatják az összehasonlítást. Esetleg nagyon hasonló gazdasági háttérű országoknál lehet indokolt, de itt is csak óvatosan alkalmazható.
- 2) A centrális eljárásnál először a Fischer-formula segítségével minden országot egy centrum országhoz viszonyítanak, és az összes többi páros relációt ebből vezetik le. Így a konstrukcióból adódóan teljesül a tranzitivitás, mintha egy döntéshozót úgy kérnénk a páros összehasonlítások elvégzésére, hogy ne fordulhasson elő inkonzisztens preferencia-reláció.<sup>45</sup>
- 3) A nemzetközi szakirodalomban leggyakrabban használt eljárás az 1960-as években a magyar Éltető Ödön és Köves Pál, illetve a lengyel B. Szulc által kidolgozott EKS módszer (Hunyadi és Vita 2003, 237. o.). Ez a páronkénti Fischer-indexekből állít elő tökéletesen semleges és tranzitív mérőszámokat:

$$I^{EKS}(i/j) = \sqrt[k]{\prod_{r=1}^k I^F(i/r) \cdot I^F(r/j)}$$

Megmutatható, hogy ez az index minimalizálja az alábbi eltérés-négyzetösszeget:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k [\log I^F(i/j) - \log I(i/j)]^2$$

---

<sup>45</sup> Vagyis a páros összehasonlítás mátrixnak csak az egyik sora lesz kitöltve, de az teljesen, így a hozzátartozó irányítatlan gráf a minimális összefüggőséget biztosító  $n$  csúcsú fa lesz.

Ezenkívül az adott relációra vonatkozó EKS volumenindex és árindex szorzata megegyezik az ehhez tartozó területi értékindexszel.

Az ilyen nemzetközi összehasonlításoknál megint rögtön adódik a páros összehasonlítás mátrixokkal való analógia: a sorokban és oszlopokban a vizsgált országok szerepelnek, a főátlóban mindig 1-es van, a többi elem pedig a megfelelő index bilaterális módon számolt értéke. A Fischer-index használatakor a reciprocitás azonnal teljesül, viszont a konzisztencia többnyire nem, így indokolt lehet az optimális súlyvektor kiszámítása. Itt azonban nehéz olyan okot találni, ami miatt nem lenne teljesen kitöltött a páros összehasonlítás mátrix: ha egy sorban a főátlón kívül legalább egy elem ismert (ami a mátrixhoz tartozó gráf összefüggőségének szükséges feltétele), akkor az ennek megfelelő ország ár- és volumenadatai is rendelkezésre állnak, így az összes többivel összevethető, minden relációra felírható a vizsgált indexszám. Ezután az ebből meghatározott értékelővektor megfelelő koordinátáinak hányadosai jelentik a két állam árszínvonalának/jövedelmének arányát, így normalizálni sem szükséges.

Az EKS formula tulajdonságából – a logaritmusok eltérésének négyzetösszegét minimalizálja – következik, hogy az *LLSM* eljárással azonos eredményt ad. Bizonyos szempontból a sajátvektor módszer alkalmazása szintén releváns lehet, bár a jobb- és baloldali sajátvektorok koordinátái arányának különbözősége nehéz választás elé állítja az elemzőt. Ez persze – némi cinizmussal – akár kedvező is lehet, hiszen két lehetőség közül „lehet” kiválasztani a vizsgálat céljainak jobban megfelelőt. Ugyanakkor az utóbbi módszer méri az inkonzisztenciát, ami hasznos kiegészítő mutatóként szolgálhat. Egyrészt a statisztikai adatokban mindig meglevő bizonytalanság miatt a túl magas domináns sajátérték a felmérés felülvizsgálatára ösztönözhet, bár ez a súlyok területi különbözőségéből is fakadhat. Másrészt az elemzésben szereplő országok árszínvonalának vagy termelési szerkezetének egységességére utalhat; alacsonyabb értéke jobban integrálódott piacokat jelent, vagyis akár egyfajta globalizációs mutatóként is felfogható.

### **5.2.3. Egyéni kockázatfelmérés**

További alkalmazási lehetőséget jelent a befektetők, banki ügyfelek kockázatviselő hajlandóságának felmérése. Ezt manapság többnyire kérdőíves formában végzik, de egy páros összehasonlítás mátrix kitöltésével ugyanúgy elérhető. Kevésbé biztos preferenciák esetén megengedhető a „nem tudom” válasz, hiszen elég a mátrixhoz tartozó  $G$  gráf összefüggőségét biztosítani. Emellett a Saaty-féle módszer az inkonzisztencia mérőszámát is megadja, ennek révén további következtetések vonhatók le. Az ügyfelek különböző cso-

portokba oszthatók, és kapcsolat kereshető más banki aktivitást mérő mutatókkal. Például logikus elgondolás lehet, hogy a kevésbé konzisztens preferenciákkal rendelkező emberek hajlamosabbak nem átgondolt, csak részlegesen megértett pénzügyi döntéseket hozni, adott esetben nem érzékelve egy devizahitel árfolyamkockázatát.

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBFEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK

*„Az elemzés szokásos eljárása során viszont nem vakon manipulálunk, hanem az egész idő alatt tudjuk, mit teszünk és mit jelentenek szavaink; ezért fejben tarthatjuk a szükséges fenntartásokat és minősítő körülményeket, továbbá azokat a módosításokat, amelyekre később sornak kell kerülnie.”<sup>46</sup>*

(John Maynard Keynes: *Általános elmélet*, 1936)

Az első két fejezetben a szakirodalomra támaszkodva bemutattam a többszemponútú döntési feladatok megoldásának egyik eszközét, a páros összehasonlítás mátrixokat, és ennek általánosítását a nem teljesen kitöltött esetre (3. Fejezet). Itt saját eredmény a Bozóki, Fülöp és Rónyai (2010) cikkben nem szereplő 4. Állítás bizonyítása. Az ezután következő 4. Fejezetben a 2010-es férfi sakkolimpia végeredményét vizsgáltam a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra alkalmazott módszertannal. Az ehhez tartozó értékelővektorból meghatároztam az egyes csapatok súlyát, majd ennek alapján alternatív rangsorokat készítettem. Részletesen elemeztem ezek tulajdonságait:

- Az általam kapott rangsorok – a jelentősen eltérő interpretáció ellenére – viszonylag közel esnek a hivatalos végeredményhez; ez arra utalhat, hogy a 11 mérkőzés alapján már jól meghatározható a sorrend;
- Bizonyos csapatok esetén komoly eltérések jelentkeznek, elsősorban akkor, ha a mérkőzéspontszám nem áll arányban a kiegészítő mutatókkal, a Sonnebern-Berger (TB2) és Buchholz (TB4) pontszámokkal;
- A rendelkezésre álló aggregált adatokból lehetséges olyan mutatót konstruálni, ami a „fekete dobozként” működő *LLSM* és *EM* módszerhez hasonló sorrendet ad, így jóval könnyebben interpretálható;
- Az élmezőny ugyanakkor egyértelműen megkapható, de több csapat esetén kérdéses az egymáshoz való viszony, hiszen akár rajtuk kívülálló okok (ellenfelek későbbi teljesítménye, választott módszertan) is befolyásolhatják az eredményt.

---

<sup>46</sup> Keynes, J. M., 1965. *A foglalkoztatottság, a kamat és a pénz általános elmélete*. KJK. 322. o.

A döntéshozók, jelen esetben a FIDE szabályhozói számára talán megfontolandó lehet egy hasonló módszerekkel végrehajtott komolyabb vizsgálat. A – dolgozatban csak mellékszálként megjelenő – párosítási algoritmus sok szempontból tökéletesítésre szoríthat, hiszen például a hivatalosan 47. helyezett Zambia nem találkozott nála előrébb végző csapatokkal, így nem meglepő, hogy az általam kapott sorrendekben ennél lényegesen rosszabb pozícióba került. Valóban léteznek ennek javítására irányuló törekvések, elsősorban stabil párosítások konstruálásával, lásd Kujansuu, Lindberg és Mäkinen (1995).

Az eredmények arra utalnak, hogy a – mások által is vitatott – holtverseny eldöntésére szolgáló szabályok alkalmazásának sorrendje meglehetősen önkényes. A lexikografikus rendezés egész koncepciója megkérdőjelezhető. Esetleg érdemes lehet elgondolkodni egy kompozit mutató összeállításán, bár ennek kétségtelen hátránya lehet a közvélemény számára nehezen értelmezhető volta. A sajátvektor és *LLSM* módszerek alkalmazása ellen szól, hogy a csapatok számára ez esetben kevésbé lenne világos, vajon milyen eredményt szükséges elérni (például az utolsó fordulóban) az áhított helyezéshez – amivel azonban néhány „sportszerűtlennek” minősíthető eset is megelőzhető lenne.<sup>47</sup>

A vizsgálat elméleti szempontból szintén hasznos eredményekkel szolgált. Bemutattam, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokon alapuló eljárások alkalmasak lehetnek a párosítás vagy az egyszerű lexikografikus rendezés furcsaságainak feltárására, nagyméretű problémáknál akár adatbányászati célra is használhatók. Ez főleg a csak egyszerű matematikai műveleteket igénylő logaritmikus legkisebb négyzetek esetében lehet igaz. Továbbá érdemes lehet alaposabban megvizsgálni a győzelem mértékének számszerű megjelenítését vagy az *LLSM* és sajátvektor módszerek eltérésének okait, noha ezek a grafikus vizsgálat alapján viszonylag közel esnek egymáshoz. Más, csupán rangsorok meghatározását célzó módszerek (Condorcet, Borda, Cook és Seiford stb.) szintén alkalmazhatók a problémára, ezekről alapos áttekintést nyújt Temesi (2002).

Az utolsó, 5. Fejezetben áttekintettem a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok gyakorlati alkalmazásának néhány lehetséges területét, elsősorban a különböző sporteseményekre összpontosítva. Ezenkívül rámutattam a nemzetközi összehasonlításokban felmerülő hasonló statisztikai problémákra. Összességében a negyedik és ötödik feje-

---

<sup>47</sup> Miután az utolsó forduló során kiderült, hogy Oroszország már nem győzheti le Spanyolországot, a döntetlennel már biztos győztes ukránok a két, még nyitott játszmában azonnal felajánlották a döntetlen lehetőségét az ellenük játszó izraelieknek, amit azok – a csaknem biztos bronzérem tudatában – gondolkodás nélkül elfogadtak. Az erről szóló tudósítás: <http://www.origo.hu/sport/sakk/20101003-osszejohet-a-bronzerem-a-sakkolimpian.html> (letöltve: 2011. november 23.). Emellett különböző taktikázásokra is lehetőség nyílik: például léteznek olyan megnyitások (kezdeti lépések a játszmában) amelyeket csak nagy kockázat vállalásával lehet „feltörni”, így a kockázatkerülő ellenfél hajlamos lehet elfogadni a döntetlent.

zetek – a kapcsolódó módszertan bemutatásán kívül – teljes egészében saját eredmények tekinthetők.

Ezek alapján néhány további kérdést, továbbfejlesztési irányt fogalmaztam meg:

- Létezik-e a páros összecsapások eredményének olyan – triviális szabályoknak megfelelő – számkódolása,<sup>48</sup> amivel az így kapott nem teljesen kitöltött mátrixhoz tartozó súlyvektor a hivatalos sorrenddel (közel) megegyező végső rangsort ad?
- Mennyire befolyásolja a végső rangsort az egyes játszmák eredménye (egy-fajta érzékenységvizsgálat)? Hogyan módosítható néhány mérkőzés kimenetele úgy, hogy a csapatok sorrendje egyáltalán ne vagy minimális mértékben változzon?
- Milyen összehasonlító mutatót, távolságfüggvényt érdemes alkalmazni a rangkorreláció helyett az eltérések szimmetriájának megszüntetésére, az általam bevezetett – nem teljesen megfelelő –  $\tau$ -távolság mellett?
- Miként alakult az azonos ellenfelek ellen játszó csapatok sorrendje?<sup>49</sup>
- Hogyan befolyásolhatja a sorrend stabilitását a résztvevők magas száma? Tanulságos lehet az eredményeket összehasonlítani a női tornáéval, ahol csak 114 csapat játszott, de ugyanúgy 11 kört. Itt viszont Oroszország 1. csapata fölényesen, minden mérkőzését megnyerve diadalmaskodott, vagyis a győztes kiléte minden bizonnyal teljesen egyértelmű.
- Mennyire befolyásolja a kapott súlyvektort az egyes sorokban ismert elemek eltérő száma? Szenegál esetében a főátlón kívül csak egyetlen elem ismert, ez is a minimális értékkel, ehhez képest mind az *LLSM*, mind az *EM* eljárás után viszonylag jó helyezést ért el.
- Miként lehet figyelembe venni a sajátvektorok koordinátáit? Esetleg célszerű lehet a kis különbségektől eltekinteni, és az így kialakuló holtversenyek, kapcsolt rangok kiküszöbölésére valamilyen más módszert alkalmazni.
- Létezik-e az általam alkalmazottnál gyorsabb algoritmus a sajátvektor módszer végrehajtására?

---

<sup>48</sup> Azaz a döntetlen értéke 1, a győzelmeké 1-nél nagyobb, szigorúan monoton növekvő, a 4:0-hoz tartozó 9-nél nem nagyobb, míg a vereségéke ennek reciproka.

<sup>49</sup> A lebonyolítás rendszeréből adódóan ugyanis a végig hasonló teljesítményt nyújtó csapatok hasonló erősségű, akár „átfedő” ellenfelekkel is találkoztak.

Óhatatlanul felmerülő kérdés, hogy érdemes-e ennyire alaposan vizsgálni egy sport-esemény eredményeit? Én úgy vélem, a válasz egyértelműen igen. Hiszen más területeken csak ritkán áll rendelkezésre ilyen nagyméretű, ugyanakkor objektív adatokon alapuló páros összehasonlítás mátrix. Ennek elemzése pedig valóban érdekes módszertani problémákat vetett fel, emellett az érdekelt szervezőket, intézményeket is további vizsgálatokra ösztönözheti a különböző rangsorok tökéletesebb, kevesebb kritikát kiváltó meghatározására.

## IRODALOMJEGYZÉK

### Szakirodalom

- Bozóki, S., 2001. *An analysis of the Analytic Hierarchy Process*. Master's Thesis in Applied Mathematics. Eötvös University, Budapest (ELTE).
- Bozóki, S., 2008. Solution of the Least Squares Method problem of pairwise comparison matrices, *Central European Journal of Operations Research*, 16, pp.345-358.
- Bozóki, S. és Rapcsák, T., 2008. On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices. *Journal of Global Optimization*, 42(2), pp. 157-175.
- Bozóki, S., Fülöp, J., és Rónyai, L., 2010. On optimal completions of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52, pp. 318-333.
- Hunyadi L. és Vita L., 2003: *Statisztika közgazdászoknak*. Második, javított kiadás. Budapest: Központi Statisztikai Hivatal.
- Kéri G., 2005. Kritériumok páros összehasonlítás mátrixokra. *Sigma*, 36(3-4), pp. 139-148.
- Kovács E. 2009. *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése*. Harmadik, bővített kiadás. Budapest: Tanszék Kft.
- Kujansuu, E., Lindberg, T. és Mäkinen, E., 1995. *The stable roommates problem and chess tournament pairings*. University of Tampere Department of Computer Science Series of Publications A.
- Rapcsák T., 2007. *Többszempon্তু döntési problémák*. Budapesti Corvinus Egyetem MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetébe kihelyezett Gazdasági Döntések Tanszék
- Saaty, T. L., 1980. *The analytic hierarchy process*. New York: McGraw-Hill.
- Temesi J., 2002. *A döntéselmélet alapjai*. Budapest: Aula Kiadó.

### Internetes források

- <http://chess-results.com/tnr36795.aspx?lan=1>
- <http://www.atpworldtour.com/Rankings/Rankings-FAQ.aspx>
- <http://www.fide.com/fide/handbook.html?id=95&view=article>
- <http://www.origo.hu/sport/sakk/20101007-interju-almasi-zoltan-sakkozoval.html>
- <http://www.origo.hu/sport/sakk/20101003-osszejohet-a-bronzerem-a-sakko olimpian.html>

## **MELLÉKLETEK**

## 1. FÜGGELEK: TÁBLÁZATOK

7. táblázat. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból származó optimális súlyvektorok

| Csapat                      | Kód | A vektor | B vektor | C vektor | D vektor | C vektor ( $\lambda$ max) |
|-----------------------------|-----|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Albania                     | ALB | 0,00609  | 0,00536  | 0,00703  | 0,00549  | 0,00701                   |
| Algeria                     | ALG | 0,00231  | 0,00157  | 0,00374  | 0,00192  | 0,00374                   |
| Andorra                     | AND | 0,00390  | 0,00302  | 0,00527  | 0,00338  | 0,00527                   |
| Angola                      | ANG | 0,00176  | 0,00117  | 0,00320  | 0,00130  | 0,00317                   |
| Argentina                   | ARG | 0,00995  | 0,00970  | 0,00968  | 0,00979  | 0,00962                   |
| Armenia                     | ARM | 0,02368  | 0,02810  | 0,01687  | 0,02645  | 0,01678                   |
| Aruba                       | ARU | 0,00106  | 0,00058  | 0,00222  | 0,00085  | 0,00223                   |
| Australia                   | AUS | 0,00792  | 0,00744  | 0,00846  | 0,00723  | 0,00846                   |
| Austria                     | AUT | 0,00816  | 0,00795  | 0,00860  | 0,00711  | 0,00857                   |
| Azerbajjan                  | AZE | 0,01927  | 0,02205  | 0,01488  | 0,02031  | 0,01483                   |
| Bahrain                     | BRN | 0,00167  | 0,00107  | 0,00303  | 0,00131  | 0,00303                   |
| Bangladesh                  | BAN | 0,00303  | 0,00211  | 0,00443  | 0,00281  | 0,00443                   |
| Barbados                    | BAR | 0,00235  | 0,00155  | 0,00374  | 0,00211  | 0,00372                   |
| Belarus                     | BLR | 0,01549  | 0,01667  | 0,01292  | 0,01623  | 0,01293                   |
| Belgium                     | BEL | 0,00477  | 0,00388  | 0,00599  | 0,00433  | 0,00598                   |
| Bermuda                     | BER | 0,00047  | 0,00020  | 0,00130  | 0,00038  | 0,00131                   |
| Bolivia                     | BOL | 0,00198  | 0,00123  | 0,00331  | 0,00182  | 0,00329                   |
| Bosnia & Herzegovina        | BIH | 0,00999  | 0,00977  | 0,00977  | 0,00963  | 0,00981                   |
| Botswana                    | BOT | 0,00180  | 0,00112  | 0,00316  | 0,00154  | 0,00318                   |
| Brazil                      | BRA | 0,01242  | 0,01218  | 0,01116  | 0,01341  | 0,01114                   |
| Bulgaria                    | BUL | 0,01093  | 0,01109  | 0,01043  | 0,01030  | 0,01041                   |
| Burundi                     | BDI | 0,00039  | 0,00015  | 0,00111  | 0,00036  | 0,00112                   |
| Cameroon                    | CMR | 0,00065  | 0,00031  | 0,00161  | 0,00051  | 0,00162                   |
| Canada                      | CAN | 0,00849  | 0,00799  | 0,00879  | 0,00796  | 0,00876                   |
| Chile                       | CHI | 0,00942  | 0,00917  | 0,00940  | 0,00882  | 0,00941                   |
| China                       | CHN | 0,02340  | 0,02847  | 0,01689  | 0,02475  | 0,01685                   |
| Chinese Taipei              | TPE | 0,00096  | 0,00051  | 0,00209  | 0,00076  | 0,00210                   |
| Colombia                    | COL | 0,00881  | 0,00842  | 0,00900  | 0,00829  | 0,00896                   |
| Costa Rica                  | CRC | 0,00355  | 0,00265  | 0,00490  | 0,00321  | 0,00488                   |
| Croatia                     | CRO | 0,01213  | 0,01240  | 0,01105  | 0,01213  | 0,01104                   |
| Cuba                        | CUB | 0,01513  | 0,01662  | 0,01272  | 0,01526  | 0,01269                   |
| Cyprus                      | CYP | 0,00213  | 0,00137  | 0,00351  | 0,00190  | 0,00349                   |
| Czech Republic              | CZE | 0,01846  | 0,02204  | 0,01462  | 0,01765  | 0,01459                   |
| Denmark                     | DEN | 0,00815  | 0,00757  | 0,00848  | 0,00777  | 0,00848                   |
| Dominican Republic          | DOM | 0,00315  | 0,00234  | 0,00462  | 0,00264  | 0,00462                   |
| Ecuador                     | ECU | 0,00471  | 0,00402  | 0,00601  | 0,00386  | 0,00598                   |
| Egypt                       | EGY | 0,00733  | 0,00655  | 0,00793  | 0,00703  | 0,00791                   |
| England                     | ENG | 0,01436  | 0,01548  | 0,01230  | 0,01432  | 0,01222                   |
| Estonia                     | EST | 0,01029  | 0,01007  | 0,00989  | 0,01019  | 0,00981                   |
| Ethiopia                    | ETH | 0,00147  | 0,00085  | 0,00272  | 0,00129  | 0,00273                   |
| Faroe Islands               | FAI | 0,00422  | 0,00329  | 0,00549  | 0,00386  | 0,00548                   |
| Finland                     | FIN | 0,00545  | 0,00457  | 0,00654  | 0,00500  | 0,00653                   |
| Former YUG Rep of Macedonia | MKD | 0,00622  | 0,00565  | 0,00729  | 0,00517  | 0,00726                   |
| France                      | FRA | 0,02117  | 0,02336  | 0,01553  | 0,02550  | 0,01547                   |
| Georgia                     | GEO | 0,01808  | 0,02108  | 0,01452  | 0,01742  | 0,01454                   |
| Germany                     | GER | 0,00850  | 0,00837  | 0,00887  | 0,00739  | 0,00881                   |
| Ghana                       | GHA | 0,00064  | 0,00030  | 0,00158  | 0,00051  | 0,00159                   |
| Greece                      | GRE | 0,01295  | 0,01364  | 0,01154  | 0,01273  | 0,01152                   |
| Guatemala                   | GUA | 0,00225  | 0,00150  | 0,00367  | 0,00193  | 0,00365                   |

|                      |      |         |         |         |         |         |
|----------------------|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Guernsey             | GCI  | 0,00053 | 0,00023 | 0,00137 | 0,00046 | 0,00138 |
| Haiti                | HAI  | 0,00073 | 0,00036 | 0,00175 | 0,00057 | 0,00175 |
| Honduras             | HON  | 0,00182 | 0,00118 | 0,00321 | 0,00144 | 0,00322 |
| Hongkong             | HKG  | 0,00110 | 0,00059 | 0,00225 | 0,00096 | 0,00227 |
| Hungary              | HUN  | 0,02771 | 0,03255 | 0,01847 | 0,03472 | 0,01841 |
| IBCA                 | IBCA | 0,00312 | 0,00218 | 0,00448 | 0,00293 | 0,00447 |
| Iceland              | ISL  | 0,00815 | 0,00765 | 0,00861 | 0,00747 | 0,00865 |
| ICSC                 | ICSC | 0,00443 | 0,00353 | 0,00568 | 0,00405 | 0,00580 |
| India                | IND  | 0,01440 | 0,01535 | 0,01234 | 0,01465 | 0,01235 |
| Indonesia            | INA  | 0,00659 | 0,00614 | 0,00751 | 0,00556 | 0,00758 |
| IPCA                 | IPCA | 0,00394 | 0,00305 | 0,00529 | 0,00352 | 0,00531 |
| Iran                 | IRI  | 0,01033 | 0,01001 | 0,00992 | 0,01043 | 0,00988 |
| Iraq                 | IRQ  | 0,00358 | 0,00276 | 0,00498 | 0,00303 | 0,00505 |
| Ireland              | IRL  | 0,00443 | 0,00363 | 0,00578 | 0,00381 | 0,00581 |
| Israel               | ISR  | 0,02419 | 0,02882 | 0,01707 | 0,02750 | 0,01703 |
| Italy                | ITA  | 0,01523 | 0,01614 | 0,01277 | 0,01600 | 0,01279 |
| Jamaica              | JAM  | 0,00220 | 0,00152 | 0,00360 | 0,00178 | 0,00361 |
| Japan                | JPN  | 0,00214 | 0,00142 | 0,00353 | 0,00184 | 0,00355 |
| Jersey               | JCI  | 0,00155 | 0,00088 | 0,00281 | 0,00147 | 0,00281 |
| Jordan               | JOR  | 0,00464 | 0,00357 | 0,00583 | 0,00461 | 0,00583 |
| Kazakhstan           | KAZ  | 0,00965 | 0,00946 | 0,00955 | 0,00907 | 0,00952 |
| Kenya                | KEN  | 0,00109 | 0,00059 | 0,00226 | 0,00090 | 0,00226 |
| Korea                | KOR  | 0,00136 | 0,00077 | 0,00260 | 0,00119 | 0,00260 |
| Kyrgyzstan           | KGZ  | 0,00554 | 0,00484 | 0,00667 | 0,00480 | 0,00671 |
| Latvia               | LAT  | 0,00648 | 0,00572 | 0,00734 | 0,00598 | 0,00726 |
| Lebanon              | LIB  | 0,00211 | 0,00136 | 0,00349 | 0,00187 | 0,00349 |
| Libya                | LBA  | 0,00285 | 0,00201 | 0,00428 | 0,00247 | 0,00430 |
| Lithuania            | LTU  | 0,00644 | 0,00592 | 0,00740 | 0,00539 | 0,00744 |
| Luxembourg           | LUX  | 0,00285 | 0,00203 | 0,00427 | 0,00248 | 0,00428 |
| Macau                | MAC  | 0,00076 | 0,00039 | 0,00179 | 0,00058 | 0,00180 |
| Madagascar           | MAD  | 0,00130 | 0,00075 | 0,00253 | 0,00107 | 0,00253 |
| Malawi               | MAW  | 0,00100 | 0,00053 | 0,00211 | 0,00084 | 0,00214 |
| Malaysia             | MAS  | 0,00270 | 0,00190 | 0,00414 | 0,00229 | 0,00415 |
| Mali                 | MLI  | 0,00105 | 0,00057 | 0,00221 | 0,00087 | 0,00221 |
| Malta                | MLT  | 0,00166 | 0,00100 | 0,00299 | 0,00142 | 0,00300 |
| Mauritania           | MTN  | 0,00112 | 0,00061 | 0,00228 | 0,00093 | 0,00229 |
| Mauritius            | MRI  | 0,00113 | 0,00063 | 0,00232 | 0,00092 | 0,00235 |
| Mexico               | MEX  | 0,00688 | 0,00642 | 0,00764 | 0,00601 | 0,00763 |
| Moldova              | MDA  | 0,00945 | 0,00916 | 0,00940 | 0,00899 | 0,00945 |
| Monaco               | MNC  | 0,00203 | 0,00130 | 0,00339 | 0,00178 | 0,00340 |
| Mongolia             | MGL  | 0,00573 | 0,00481 | 0,00679 | 0,00538 | 0,00677 |
| Montenegro           | MNE  | 0,00827 | 0,00794 | 0,00866 | 0,00749 | 0,00865 |
| Mozambique           | MOZ  | 0,00092 | 0,00048 | 0,00201 | 0,00075 | 0,00201 |
| Namibia              | NAM  | 0,00093 | 0,00049 | 0,00204 | 0,00074 | 0,00203 |
| Nepal                | NEP  | 0,00175 | 0,00113 | 0,00312 | 0,00139 | 0,00313 |
| Netherlands          | NED  | 0,01742 | 0,01889 | 0,01377 | 0,01945 | 0,01383 |
| Netherlands Antilles | AHO  | 0,00066 | 0,00031 | 0,00159 | 0,00056 | 0,00160 |
| New Zealand          | NZL  | 0,00337 | 0,00252 | 0,00475 | 0,00295 | 0,00476 |
| Nigeria              | NGR  | 0,00176 | 0,00107 | 0,00308 | 0,00155 | 0,00311 |
| Norway               | NOR  | 0,00963 | 0,00952 | 0,00958 | 0,00890 | 0,00966 |
| Pakistan             | PAK  | 0,00454 | 0,00356 | 0,00577 | 0,00431 | 0,00584 |
| Palestine            | PLE  | 0,00113 | 0,00061 | 0,00233 | 0,00094 | 0,00232 |
| Panama               | PAN  | 0,00211 | 0,00134 | 0,00349 | 0,00189 | 0,00354 |
| Papua New Guinea     | PNG  | 0,00052 | 0,00024 | 0,00140 | 0,00039 | 0,00142 |

|                          |      |         |         |         |         |         |
|--------------------------|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Paraguay                 | PAR  | 0,00346 | 0,00258 | 0,00486 | 0,00308 | 0,00484 |
| Peru                     | PER  | 0,00707 | 0,00616 | 0,00769 | 0,00709 | 0,00769 |
| Philippines              | PHI  | 0,00817 | 0,00782 | 0,00862 | 0,00735 | 0,00864 |
| Poland                   | POL  | 0,02067 | 0,02496 | 0,01567 | 0,02085 | 0,01562 |
| Portugal                 | POR  | 0,00516 | 0,00432 | 0,00630 | 0,00464 | 0,00630 |
| Puerto Rico              | PUR  | 0,00296 | 0,00205 | 0,00435 | 0,00278 | 0,00436 |
| Qatar                    | QAT  | 0,00430 | 0,00343 | 0,00563 | 0,00375 | 0,00572 |
| Russia 1                 | RUS1 | 0,03359 | 0,04221 | 0,02096 | 0,04168 | 0,02085 |
| Russia 2                 | RUS2 | 0,02186 | 0,02632 | 0,01614 | 0,02285 | 0,01612 |
| Russia 3                 | RUS3 | 0,01894 | 0,02119 | 0,01462 | 0,02062 | 0,01459 |
| Russia 4                 | RUS4 | 0,00747 | 0,00711 | 0,00815 | 0,00645 | 0,00815 |
| Russia 5                 | RUS5 | 0,00564 | 0,00470 | 0,00674 | 0,00521 | 0,00675 |
| Rwanda                   | RWA  | 0,00027 | 0,00010 | 0,00089 | 0,00020 | 0,00090 |
| San Marino               | SMR  | 0,00067 | 0,00031 | 0,00160 | 0,00060 | 0,00161 |
| Sao Tome and Principe    | STP  | 0,00049 | 0,00021 | 0,00133 | 0,00041 | 0,00135 |
| Scotland                 | SCO  | 0,00468 | 0,00361 | 0,00585 | 0,00461 | 0,00588 |
| Senegal                  | SEN  | 0,00117 | 0,00061 | 0,00228 | 0,00112 | 0,00234 |
| Serbia                   | SRB  | 0,01311 | 0,01330 | 0,01162 | 0,01366 | 0,01160 |
| Seychelles               | SEY  | 0,00029 | 0,00011 | 0,00093 | 0,00021 | 0,00094 |
| Sierra Leone             | SLE  | 0,00044 | 0,00018 | 0,00123 | 0,00037 | 0,00123 |
| Singapore                | SIN  | 0,00585 | 0,00487 | 0,00684 | 0,00562 | 0,00684 |
| Slovakia                 | SVK  | 0,01401 | 0,01507 | 0,01210 | 0,01397 | 0,01208 |
| Slovenia                 | SLO  | 0,01050 | 0,01030 | 0,01004 | 0,01046 | 0,01001 |
| South Africa             | RSA  | 0,00407 | 0,00310 | 0,00539 | 0,00377 | 0,00533 |
| Spain                    | ESP  | 0,02033 | 0,02357 | 0,01543 | 0,02156 | 0,01540 |
| Sri Lanka                | SRI  | 0,00220 | 0,00149 | 0,00359 | 0,00184 | 0,00363 |
| Surinam                  | SUR  | 0,00103 | 0,00054 | 0,00218 | 0,00087 | 0,00219 |
| Sweden                   | SWE  | 0,01053 | 0,01030 | 0,01004 | 0,01063 | 0,00999 |
| Switzerland              | SUI  | 0,00639 | 0,00593 | 0,00740 | 0,00515 | 0,00746 |
| Tajikistan               | TJK  | 0,00425 | 0,00355 | 0,00563 | 0,00344 | 0,00570 |
| Thailand                 | THA  | 0,00318 | 0,00234 | 0,00460 | 0,00270 | 0,00468 |
| Trinidad & Tobago        | TRI  | 0,00158 | 0,00092 | 0,00286 | 0,00142 | 0,00286 |
| Turkey                   | TUR  | 0,00622 | 0,00540 | 0,00711 | 0,00580 | 0,00711 |
| Turkmenistan             | TKM  | 0,00483 | 0,00392 | 0,00600 | 0,00442 | 0,00597 |
| U.S. Virgin Islands      | ISV  | 0,00021 | 0,00007 | 0,00075 | 0,00017 | 0,00076 |
| Uganda                   | UGA  | 0,00171 | 0,00105 | 0,00308 | 0,00143 | 0,00309 |
| Ukraine                  | UKR  | 0,03100 | 0,03834 | 0,02007 | 0,03744 | 0,02014 |
| United Arab Emirates     | UAE  | 0,00461 | 0,00368 | 0,00584 | 0,00427 | 0,00582 |
| United States of America | USA  | 0,02054 | 0,02317 | 0,01541 | 0,02312 | 0,01530 |
| Uruguay                  | URU  | 0,00520 | 0,00428 | 0,00637 | 0,00470 | 0,00642 |
| Uzbekistan               | UZB  | 0,00895 | 0,00892 | 0,00909 | 0,00797 | 0,00906 |
| Venezuela                | VEN  | 0,00431 | 0,00337 | 0,00559 | 0,00398 | 0,00558 |
| Vietnam                  | VIE  | 0,01165 | 0,01200 | 0,01082 | 0,01118 | 0,01089 |
| Wales                    | WLS  | 0,00181 | 0,00113 | 0,00315 | 0,00158 | 0,00316 |
| Yemen                    | YEM  | 0,00316 | 0,00222 | 0,00451 | 0,00305 | 0,00450 |
| Zambia                   | ZAM  | 0,00307 | 0,00222 | 0,00447 | 0,00269 | 0,00449 |

8. táblázat. A csapatok sorrendje a különböző módszerek szerint

| Helyezés | Final | Start | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix | C mátrix (λ max) |
|----------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|------------------|
| 1        | UKR   | RUS1  | RUS1     | RUS1     | RUS1     | RUS1     | RUS1             |
| 2        | RUS1  | UKR   | UKR      | UKR      | UKR      | UKR      | UKR              |
| 3        | ISR   | CHN   | HUN      | HUN      | HUN      | HUN      | HUN              |
| 4        | HUN   | RUS2  | ISR      | ISR      | ISR      | ISR      | ISR              |
| 5        | CHN   | HUN   | ARM      | CHN      | CHN      | ARM      | CHN              |
| 6        | RUS2  | ARM   | CHN      | ARM      | ARM      | FRA      | ARM              |
| 7        | ARM   | AZE   | RUS2     | RUS2     | RUS2     | CHN      | RUS2             |
| 8        | ESP   | BUL   | FRA      | POL      | POL      | USA      | POL              |
| 9        | USA   | USA   | POL      | ESP      | FRA      | RUS2     | FRA              |
| 10       | FRA   | FRA   | USA      | FRA      | ESP      | ESP      | ESP              |
| 11       | POL   | ISR   | ESP      | USA      | USA      | POL      | USA              |
| 12       | AZE   | ENG   | AZE      | AZE      | AZE      | RUS3     | AZE              |
| 13       | RUS3  | NED   | RUS3     | CZE      | RUS3     | AZE      | CZE              |
| 14       | BLR   | RUS3  | CZE      | RUS3     | CZE      | NED      | RUS3             |
| 15       | NED   | POL   | GEO      | GEO      | GEO      | CZE      | GEO              |
| 16       | SVK   | ESP   | NED      | NED      | NED      | GEO      | NED              |
| 17       | BRA   | CZE   | BLR      | BLR      | BLR      | BLR      | BLR              |
| 18       | IND   | CUB   | ITA      | CUB      | ITA      | ITA      | ITA              |
| 19       | DEN   | IND   | CUB      | ITA      | CUB      | CUB      | CUB              |
| 20       | CZE   | GEO   | IND      | ENG      | IND      | IND      | IND              |
| 21       | ITA   | SRB   | ENG      | IND      | ENG      | ENG      | ENG              |
| 22       | GRE   | SVK   | SVK      | SVK      | SVK      | SVK      | SVK              |
| 23       | CUB   | NOR   | SRB      | GRE      | SRB      | SRB      | SRB              |
| 24       | ENG   | BRA   | GRE      | SRB      | GRE      | BRA      | GRE              |
| 25       | ARG   | GRE   | BRA      | CRO      | BRA      | GRE      | BRA              |
| 26       | EST   | ARG   | CRO      | BRA      | CRO      | CRO      | CRO              |
| 27       | KAZ   | VIE   | VIE      | VIE      | VIE      | VIE      | VIE              |
| 28       | MDA   | CRO   | BUL      | BUL      | BUL      | SWE      | BUL              |
| 29       | IRI   | SLO   | SWE      | SLO      | SLO      | SLO      | SLO              |
| 30       | GEO   | ITA   | SLO      | SWE      | SWE      | IRI      | SWE              |
| 31       | BUL   | MDA   | IRI      | EST      | IRI      | BUL      | IRI              |
| 32       | CRO   | BIH   | EST      | IRI      | EST      | EST      | EST              |
| 33       | SRB   | UZB   | BIH      | BIH      | BIH      | ARG      | BIH              |
| 34       | SWE   | SWE   | ARG      | ARG      | ARG      | BIH      | NOR              |
| 35       | LTU   | BLR   | KAZ      | NOR      | NOR      | KAZ      | ARG              |
| 36       | SLO   | MEX   | NOR      | KAZ      | KAZ      | MDA      | KAZ              |
| 37       | CAN   | PHI   | MDA      | CHI      | MDA      | NOR      | MDA              |
| 38       | AUT   | IRI   | CHI      | MDA      | CHI      | CHI      | CHI              |
| 39       | RUS4  | LTU   | UZB      | UZB      | UZB      | COL      | UZB              |
| 40       | ISL   | EGY   | COL      | COL      | COL      | UZB      | COL              |
| 41       | EGY   | KAZ   | GER      | GER      | GER      | CAN      | GER              |
| 42       | MNE   | GER   | CAN      | CAN      | CAN      | DEN      | CAN              |
| 43       | QAT   | MKD   | MNE      | AUT      | MNE      | MNE      | MNE              |
| 44       | PER   | DEN   | PHI      | MNE      | PHI      | ISL      | ISL              |
| 45       | TUR   | AUT   | AUT      | PHI      | ISL      | GER      | PHI              |
| 46       | URU   | PER   | DEN      | ISL      | AUT      | PHI      | AUT              |
| 47       | ZAM   | SUI   | ISL      | DEN      | DEN      | AUS      | DEN              |
| 48       | ICSC  | EST   | AUS      | AUS      | AUS      | AUT      | AUS              |
| 49       | UZB   | AUS   | RUS4     | RUS4     | RUS4     | PER      | RUS4             |
| 50       | PHI   | TUR   | EGY      | EGY      | EGY      | EGY      | EGY              |
| 51       | NOR   | CHI   | PER      | MEX      | PER      | RUS4     | PER              |
| 52       | VIE   | RUS4  | MEX      | PER      | MEX      | MEX      | MEX              |

|     |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| 53  | CHI  | CAN  | INA  | INA  | INA  | LAT  | INA  |
| 54  | COL  | ISL  | LAT  | SUI  | SUI  | TUR  | SUI  |
| 55  | AUS  | QAT  | LTU  | LTU  | LTU  | SIN  | LTU  |
| 56  | MKD  | MNE  | SUI  | LAT  | LAT  | INA  | LAT  |
| 57  | ALB  | COL  | TUR  | MKD  | MKD  | ALB  | MKD  |
| 58  | SIN  | LAT  | MKD  | TUR  | TUR  | LTU  | TUR  |
| 59  | FIN  | POR  | ALB  | ALB  | ALB  | MGL  | ALB  |
| 60  | BEL  | FIN  | SIN  | SIN  | SIN  | RUS5 | SIN  |
| 61  | UAE  | RUS5 | MGL  | KGZ  | MGL  | MKD  | MGL  |
| 62  | PAK  | TJK  | RUS5 | MGL  | RUS5 | SUI  | RUS5 |
| 63  | IPCA | SCO  | KGZ  | RUS5 | KGZ  | FIN  | KGZ  |
| 64  | GER  | VEN  | FIN  | FIN  | FIN  | KGZ  | FIN  |
| 65  | SUI  | ECU  | URU  | POR  | URU  | URU  | URU  |
| 66  | BIH  | MGL  | POR  | URU  | POR  | POR  | POR  |
| 67  | INA  | INA  | TKM  | ECU  | ECU  | JOR  | BEL  |
| 68  | KGZ  | ALB  | BEL  | TKM  | TKM  | SCO  | ECU  |
| 69  | LAT  | TKM  | ECU  | BEL  | BEL  | TKM  | TKM  |
| 70  | RUS5 | IPCA | SCO  | UAE  | SCO  | BEL  | SCO  |
| 71  | MGL  | BEL  | JOR  | IRL  | UAE  | PAK  | PAK  |
| 72  | MEX  | ICSC | UAE  | SCO  | JOR  | UAE  | JOR  |
| 73  | BAN  | SIN  | PAK  | JOR  | IRL  | ICSC | UAE  |
| 74  | RSA  | URU  | IRL  | PAK  | PAK  | VEN  | IRL  |
| 75  | POR  | IRL  | ICSC | TJK  | ICSC | FAI  | ICSC |
| 76  | TKM  | IRQ  | VEN  | ICSC | QAT  | ECU  | QAT  |
| 77  | JOR  | KGZ  | QAT  | QAT  | TJK  | IRL  | TJK  |
| 78  | LBA  | IBCA | TJK  | VEN  | VEN  | RSA  | VEN  |
| 79  | PAR  | JOR  | FAI  | FAI  | FAI  | QAT  | FAI  |
| 80  | FAI  | CRC  | RSA  | RSA  | RSA  | IPCA | RSA  |
| 81  | VEN  | RSA  | IPCA | IPCA | IPCA | TJK  | IPCA |
| 82  | CRC  | BAN  | AND  | AND  | AND  | AND  | AND  |
| 83  | SCO  | FAI  | IRQ  | IRQ  | IRQ  | CRC  | IRQ  |
| 84  | YEM  | PAR  | CRC  | CRC  | CRC  | PAR  | CRC  |
| 85  | ECU  | YEM  | PAR  | PAR  | PAR  | YEM  | PAR  |
| 86  | TJK  | MAS  | NZL  | NZL  | NZL  | IRQ  | NZL  |
| 87  | AND  | DOM  | THA  | DOM  | DOM  | NZL  | THA  |
| 88  | IRL  | UAE  | YEM  | THA  | THA  | IBCA | DOM  |
| 89  | ALG  | AND  | DOM  | ZAM  | YEM  | BAN  | YEM  |
| 90  | DOM  | LUX  | IBCA | YEM  | IBCA | PUR  | ZAM  |
| 91  | NZL  | ALG  | ZAM  | IBCA | ZAM  | THA  | IBCA |
| 92  | MAS  | NZL  | BAN  | BAN  | BAN  | ZAM  | BAN  |
| 93  | THA  | WLS  | PUR  | PUR  | PUR  | DOM  | PUR  |
| 94  | PAN  | THA  | LUX  | LUX  | LBA  | LUX  | LBA  |
| 95  | BAR  | MNC  | LBA  | LBA  | LUX  | LBA  | LUX  |
| 96  | JPN  | BAR  | MAS  | MAS  | MAS  | MAS  | MAS  |
| 97  | LUX  | JAM  | BAR  | ALG  | BAR  | BAR  | ALG  |
| 98  | CYP  | ANG  | ALG  | BAR  | ALG  | GUA  | BAR  |
| 99  | GUA  | LIB  | GUA  | JAM  | GUA  | ALG  | GUA  |
| 100 | MLT  | PUR  | JAM  | GUA  | JAM  | CYP  | SRI  |
| 101 | NGR  | JPN  | SRI  | SRI  | SRI  | PAN  | JAM  |
| 102 | IBCA | BOT  | JPN  | JPN  | JPN  | LIB  | JPN  |
| 103 | IRQ  | GUA  | CYP  | CYP  | CYP  | JPN  | PAN  |
| 104 | SRI  | BOL  | LIB  | LIB  | PAN  | SRI  | LIB  |
| 105 | JAM  | LBA  | PAN  | PAN  | LIB  | BOL  | CYP  |
| 106 | UGA  | MLT  | MNC  | MNC  | MNC  | MNC  | MNC  |

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 107 | NEP | PAN | BOL | BOL | BOL | JAM | BOL |
| 108 | PUR | TRI | HON | HON | HON | WLS | HON |
| 109 | LIB | CYP | WLS | ANG | ANG | NGR | BOT |
| 110 | MNC | MRI | BOT | NEP | BOT | BOT | ANG |
| 111 | HON | SUR | ANG | WLS | WLS | JCI | WLS |
| 112 | PLE | BRN | NGR | BOT | NEP | HON | NEP |
| 113 | KOR | JCI | NEP | BRN | NGR | UGA | NGR |
| 114 | BOL | NEP | UGA | NGR | UGA | MLT | UGA |
| 115 | TRI | SRI | BRN | UGA | BRN | TRI | BRN |
| 116 | BOT | KOR | MLT | MLT | MLT | NEP | MLT |
| 117 | BRN | PNG | TRI | TRI | TRI | BRN | TRI |
| 118 | MRI | AHO | JCI | JCI | JCI | ANG | JCI |
| 119 | TPE | SMR | ETH | ETH | ETH | ETH | ETH |
| 120 | KEN | ARU | KOR | KOR | KOR | KOR | KOR |
| 121 | ARU | ZAM | MAD | MAD | MAD | SEN | MAD |
| 122 | WLS | MAC | SEN | MRI | PLE | MAD | MRI |
| 123 | JCI | PAK | PLE | PLE | MRI | HKG | SEN |
| 124 | ANG | HKG | MRI | MTN | MTN | PLE | PLE |
| 125 | MLI | HON | MTN | SEN | SEN | MTN | MTN |
| 126 | NAM | BER | HKG | KEN | KEN | MRI | HKG |
| 127 | MAW | UGA | KEN | HKG | HKG | KEN | KEN |
| 128 | ETH | GCI | ARU | ARU | ARU | MLI | ARU |
| 129 | HKG | NAM | MLI | MLI | MLI | SUR | MLI |
| 130 | GCI | MOZ | SUR | SUR | SUR | ARU | SUR |
| 131 | MTN | TPE | MAW | MAW | MAW | MAW | MAW |
| 132 | SUR | ETH | TPE | TPE | TPE | TPE | TPE |
| 133 | MAC | KEN | NAM | NAM | NAM | MOZ | NAM |
| 134 | MOZ | PLE | MOZ | MOZ | MOZ | NAM | MOZ |
| 135 | MAD | HAI | MAC | MAC | MAC | SMR | MAC |
| 136 | AHO | SEY | HAI | HAI | HAI | MAC | HAI |
| 137 | CMR | GHA | SMR | CMR | CMR | HAI | CMR |
| 138 | STP | STP | AHO | SMR | SMR | AHO | SMR |
| 139 | HAI | NGR | CMR | AHO | AHO | CMR | AHO |
| 140 | GHA | MAD | GHA | GHA | GHA | GHA | GHA |
| 141 | BER | MAW | GCI | PNG | PNG | GCI | PNG |
| 142 | SLE | RWA | PNG | GCI | GCI | STP | GCI |
| 143 | PNG | BDI | STP | STP | STP | PNG | STP |
| 144 | SMR | CMR | BER | BER | BER | BER | BER |
| 145 | BDI | MLI | SLE | SLE | SLE | SLE | SLE |
| 146 | RWA | MTN | BDI | BDI | BDI | BDI | BDI |
| 147 | ISV | SEN | SEY | SEY | SEY | SEY | SEY |
| 148 | SEY | SLE | RWA | RWA | RWA | RWA | RWA |
| 149 | SEN | ISV | ISV | ISV | ISV | ISV | ISV |

**Megjegyzés:**

A csapatkódok feloldására lásd a 7. táblázatot!

9. táblázat. A torna hivatalos végeredménye

| Helyezés | Csapat | Mérkőzés | + | = | - | TB1 | TB2   | TB3  | TB4 |
|----------|--------|----------|---|---|---|-----|-------|------|-----|
| 1        | UKR    | 11       | 8 | 3 | 0 | 19  | 380,5 | 31   | 143 |
| 2        | RUS1   | 11       | 8 | 2 | 1 | 18  | 379,5 | 28   | 157 |
| 3        | ISR    | 11       | 7 | 3 | 1 | 17  | 367,5 | 29   | 148 |
| 4        | HUN    | 11       | 8 | 1 | 2 | 17  | 355,5 | 26,5 | 157 |
| 5        | CHN    | 11       | 7 | 2 | 2 | 16  | 362   | 29   | 147 |
| 6        | RUS2   | 11       | 8 | 0 | 3 | 16  | 355   | 29,5 | 144 |
| 7        | ARM    | 11       | 7 | 2 | 2 | 16  | 345   | 27   | 147 |
| 8        | ESP    | 11       | 7 | 2 | 2 | 16  | 332   | 28,5 | 137 |
| 9        | USA    | 11       | 7 | 2 | 2 | 16  | 315,5 | 27   | 141 |
| 10       | FRA    | 11       | 6 | 4 | 1 | 16  | 311,5 | 25   | 149 |
| 11       | POL    | 11       | 6 | 3 | 2 | 15  | 346,5 | 29   | 142 |
| 12       | AZE    | 11       | 6 | 3 | 2 | 15  | 333   | 28   | 143 |
| 13       | RUS3   | 11       | 5 | 5 | 1 | 15  | 320,5 | 26   | 144 |
| 14       | BLR    | 11       | 7 | 1 | 3 | 15  | 307,5 | 27,5 | 135 |
| 15       | NED    | 11       | 6 | 3 | 2 | 15  | 305   | 24,5 | 144 |
| 16       | SVK    | 11       | 6 | 3 | 2 | 15  | 302,5 | 26,5 | 134 |
| 17       | BRA    | 11       | 7 | 1 | 3 | 15  | 290,5 | 27   | 133 |
| 18       | IND    | 11       | 7 | 1 | 3 | 15  | 287   | 26,5 | 133 |
| 19       | DEN    | 11       | 7 | 1 | 3 | 15  | 257,5 | 26,5 | 119 |
| 20       | CZE    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 338,5 | 28   | 142 |
| 21       | ITA    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 316,5 | 25,5 | 148 |
| 22       | GRE    | 11       | 5 | 4 | 2 | 14  | 302,5 | 26,5 | 132 |
| 23       | CUB    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 299   | 26,5 | 137 |
| 24       | ENG    | 11       | 5 | 4 | 2 | 14  | 292   | 26   | 133 |
| 25       | ARG    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 281   | 26   | 128 |
| 26       | EST    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 277   | 25,5 | 130 |
| 27       | KAZ    | 11       | 5 | 4 | 2 | 14  | 274   | 27   | 122 |
| 28       | MDA    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 265   | 27   | 122 |
| 29       | IRI    | 11       | 6 | 2 | 3 | 14  | 259,5 | 25,5 | 129 |
| 30       | GEO    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 316   | 27,5 | 143 |
| 31       | BUL    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 287,5 | 26,5 | 129 |
| 32       | CRO    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 284,5 | 25   | 138 |
| 33       | SRB    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 278,5 | 25,5 | 139 |
| 34       | SWE    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 277   | 24   | 138 |
| 35       | LTU    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 268   | 27,5 | 118 |
| 36       | SLO    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 264,5 | 25   | 130 |
| 37       | CAN    | 11       | 4 | 5 | 2 | 13  | 264   | 25   | 128 |
| 38       | AUT    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 263   | 27   | 119 |
| 39       | RUS4   | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 258   | 27,5 | 114 |
| 40       | ISL    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 257,5 | 26,5 | 119 |
| 41       | EGY    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 252   | 25   | 123 |
| 42       | MNE    | 11       | 5 | 3 | 3 | 13  | 251,5 | 26   | 118 |
| 43       | QAT    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 236   | 26   | 114 |
| 44       | PER    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 231   | 24   | 127 |
| 45       | TUR    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 230   | 23,5 | 118 |
| 46       | URU    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 227   | 24,5 | 112 |
| 47       | ZAM    | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 202,5 | 25   | 100 |
| 48       | ICSC   | 11       | 6 | 1 | 4 | 13  | 197   | 24   | 110 |
| 49       | UZB    | 11       | 5 | 2 | 4 | 12  | 285   | 25,5 | 130 |
| 50       | PHI    | 11       | 5 | 2 | 4 | 12  | 276   | 26   | 127 |
| 51       | NOR    | 11       | 5 | 2 | 4 | 12  | 274,5 | 24   | 130 |
| 52       | VIE    | 11       | 4 | 4 | 3 | 12  | 272   | 24   | 136 |

|     |      |    |   |   |   |    |       |      |     |
|-----|------|----|---|---|---|----|-------|------|-----|
| 53  | CHI  | 11 | 6 | 0 | 5 | 12 | 261   | 24   | 132 |
| 54  | COL  | 11 | 4 | 4 | 3 | 12 | 255   | 24   | 133 |
| 55  | AUS  | 11 | 5 | 2 | 4 | 12 | 253   | 26   | 123 |
| 56  | MKD  | 11 | 5 | 2 | 4 | 12 | 246,5 | 26,5 | 115 |
| 57  | ALB  | 11 | 5 | 2 | 4 | 12 | 231,5 | 24   | 123 |
| 58  | SIN  | 11 | 4 | 4 | 3 | 12 | 231   | 22,5 | 119 |
| 59  | FIN  | 11 | 5 | 2 | 4 | 12 | 218   | 23,5 | 118 |
| 60  | BEL  | 11 | 6 | 0 | 5 | 12 | 215   | 23,5 | 113 |
| 61  | UAE  | 11 | 5 | 2 | 4 | 12 | 211,5 | 23,5 | 113 |
| 62  | PAK  | 11 | 6 | 0 | 5 | 12 | 194,5 | 22   | 115 |
| 63  | IPCA | 11 | 6 | 0 | 5 | 12 | 192,5 | 22,5 | 106 |
| 64  | GER  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 268   | 24,5 | 128 |
| 65  | SUI  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 258,5 | 25,5 | 124 |
| 66  | BIH  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 254,5 | 23   | 138 |
| 67  | INA  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 248,5 | 25   | 119 |
| 68  | KGZ  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 231,5 | 23,5 | 124 |
| 69  | LAT  | 11 | 3 | 5 | 3 | 11 | 224   | 22   | 129 |
| 70  | RUS5 | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 220   | 22   | 121 |
| 71  | MGL  | 11 | 3 | 5 | 3 | 11 | 216,5 | 22   | 124 |
| 72  | MEX  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 214   | 22   | 120 |
| 73  | BAN  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 200   | 22   | 108 |
| 74  | RSA  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 194,5 | 22   | 114 |
| 75  | POR  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 194   | 22   | 115 |
| 76  | TKM  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 193   | 21   | 125 |
| 77  | JOR  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 188   | 21,5 | 120 |
| 78  | LBA  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 187,5 | 23   | 105 |
| 79  | PAR  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 186   | 22,5 | 108 |
| 80  | FAI  | 11 | 4 | 3 | 4 | 11 | 185,5 | 21,5 | 117 |
| 81  | VEN  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 184,5 | 22   | 117 |
| 82  | CRC  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 179   | 22   | 108 |
| 83  | SCO  | 11 | 5 | 1 | 5 | 11 | 175,5 | 20,5 | 122 |
| 84  | YEM  | 10 | 5 | 1 | 4 | 11 | 165   | 20   | 112 |
| 85  | ECU  | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 219   | 23   | 116 |
| 86  | TJK  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 218   | 24   | 114 |
| 87  | AND  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 206,5 | 21,5 | 118 |
| 88  | IRL  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 202   | 23,5 | 117 |
| 89  | ALG  | 11 | 3 | 4 | 4 | 10 | 195,5 | 22   | 111 |
| 90  | DOM  | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 191,5 | 24   | 105 |
| 91  | NZL  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 176   | 20,5 | 110 |
| 92  | MAS  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 172   | 22   | 103 |
| 93  | THA  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 168,5 | 21   | 106 |
| 94  | PAN  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 168,5 | 20,5 | 103 |
| 95  | BAR  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 168   | 19,5 | 106 |
| 96  | JPN  | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 166,5 | 20,5 | 104 |
| 97  | LUX  | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 162,5 | 20,5 | 106 |
| 98  | CYP  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 162,5 | 19   | 102 |
| 99  | GUA  | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 160,5 | 22   | 100 |
| 100 | MLT  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 157   | 22   | 95  |
| 101 | NGR  | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 153   | 20   | 98  |
| 102 | IBCA | 11 | 5 | 0 | 6 | 10 | 145,5 | 19   | 118 |
| 103 | IRQ  | 11 | 4 | 1 | 6 | 9  | 183   | 21   | 116 |
| 104 | SRI  | 11 | 4 | 1 | 6 | 9  | 169   | 19,5 | 106 |
| 105 | JAM  | 11 | 4 | 1 | 6 | 9  | 160   | 20   | 99  |
| 106 | UGA  | 11 | 4 | 1 | 6 | 9  | 158,5 | 21   | 101 |

|     |     |    |   |   |    |   |       |      |     |
|-----|-----|----|---|---|----|---|-------|------|-----|
| 107 | NEP | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 152,5 | 21   | 93  |
| 108 | PUR | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 151   | 17   | 115 |
| 109 | LIB | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 149   | 19   | 110 |
| 110 | MNC | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 143   | 18   | 107 |
| 111 | HON | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 141,5 | 21,5 | 94  |
| 112 | PLE | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 133   | 20   | 91  |
| 113 | KOR | 11 | 3 | 3 | 5  | 9 | 132   | 17   | 97  |
| 114 | BOL | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 116,5 | 16,5 | 105 |
| 115 | TRI | 11 | 4 | 1 | 6  | 9 | 107   | 16,5 | 96  |
| 116 | BOT | 11 | 4 | 0 | 7  | 8 | 141   | 18   | 103 |
| 117 | BRN | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 139   | 19   | 95  |
| 118 | MRI | 11 | 2 | 4 | 5  | 8 | 138   | 19   | 87  |
| 119 | TPE | 11 | 2 | 4 | 5  | 8 | 137,5 | 20,5 | 85  |
| 120 | KEN | 11 | 4 | 0 | 7  | 8 | 135   | 18   | 93  |
| 121 | ARU | 11 | 2 | 4 | 5  | 8 | 130,5 | 18,5 | 92  |
| 122 | WLS | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 127,5 | 17,5 | 107 |
| 123 | JCI | 11 | 4 | 0 | 7  | 8 | 127   | 15   | 104 |
| 124 | ANG | 7  | 4 | 0 | 3  | 8 | 125   | 19,5 | 89  |
| 125 | MLI | 11 | 4 | 0 | 7  | 8 | 121,5 | 18   | 91  |
| 126 | NAM | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 112   | 18   | 91  |
| 127 | MAW | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 104   | 16,5 | 88  |
| 128 | ETH | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 100   | 14,5 | 101 |
| 129 | HKG | 11 | 3 | 2 | 6  | 8 | 83    | 15   | 97  |
| 130 | GCI | 11 | 4 | 0 | 7  | 8 | 69,5  | 14,5 | 81  |
| 131 | MTN | 11 | 2 | 3 | 6  | 7 | 112,5 | 15   | 95  |
| 132 | SUR | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 110   | 16   | 93  |
| 133 | MAC | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 108,5 | 17   | 89  |
| 134 | MOZ | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 103   | 16,5 | 89  |
| 135 | MAD | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 102   | 16   | 99  |
| 136 | AHO | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 80,5  | 14,5 | 87  |
| 137 | CMR | 11 | 3 | 1 | 7  | 7 | 78,5  | 16   | 84  |
| 138 | STP | 9  | 3 | 1 | 5  | 7 | 70,5  | 14,5 | 81  |
| 139 | HAI | 11 | 2 | 2 | 7  | 6 | 98    | 17   | 85  |
| 140 | GHA | 11 | 2 | 2 | 7  | 6 | 81    | 15,5 | 84  |
| 141 | BER | 11 | 2 | 2 | 7  | 6 | 81    | 14,5 | 80  |
| 142 | SLE | 11 | 2 | 2 | 7  | 6 | 74    | 13   | 79  |
| 143 | PNG | 11 | 3 | 0 | 8  | 6 | 70    | 18   | 72  |
| 144 | SMR | 11 | 3 | 0 | 8  | 6 | 50,5  | 10   | 93  |
| 145 | BDI | 11 | 3 | 0 | 8  | 6 | 45,5  | 9    | 83  |
| 146 | RWA | 11 | 1 | 1 | 9  | 3 | 57    | 10,5 | 76  |
| 147 | ISV | 11 | 1 | 1 | 9  | 3 | 32,5  | 8    | 71  |
| 148 | SEY | 11 | 1 | 0 | 10 | 2 | 46    | 9,5  | 76  |
| 149 | SEN | 1  | 0 | 1 | 0  | 1 | 0     | 2    | 65  |

**Jelmagyarázat:**

Mérkőzés: a lejátszott (ilyennek elkönyvelt) összecsapások száma

+: győzelmek száma      =: döntetlenek száma      -: vereségek száma

Tie Break1 (TB1): mérkőzéspontok összege (győzelemért 2, döntetlenért 1, vereségért 0)

Tie Break2 (TB2): olimpiai Sonneborn-Berger pont a legalacsonyabb eredmény nélkül (Hanti-Manszijszk)

Tie Break3 (TB3): játékpontok összege

Tie Break4 (TB4): olimpiai Buchholz pont a legalacsonyabb eredmény nélkül (Hanti-Manszijszk)

**Megjegyzés:**

A csapatkódok feloldására lásd a 7. táblázatot!

10. táblázat. A csapatok helyezése a különböző rangsorokban

| Csapat | Final | Start | A mátrix | B mátrix | C mátrix | D mátrix | C mátrix ( $\lambda$ max) |
|--------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|---------------------------|
| ALB    | 57    | 68    | 59       | 59       | 59       | 57       | 59                        |
| ALG    | 89    | 91    | 98       | 97       | 98       | 99       | 97                        |
| AND    | 87    | 89    | 82       | 82       | 82       | 82       | 82                        |
| ANG    | 124   | 98    | 111      | 109      | 109      | 118      | 110                       |
| ARG    | 25    | 26    | 34       | 34       | 34       | 33       | 35                        |
| ARM    | 7     | 6     | 5        | 6        | 6        | 5        | 6                         |
| ARU    | 121   | 120   | 128      | 128      | 128      | 130      | 128                       |
| AUS    | 55    | 49    | 48       | 48       | 48       | 47       | 48                        |
| AUT    | 38    | 45    | 45       | 43       | 46       | 48       | 46                        |
| AZE    | 12    | 7     | 12       | 12       | 12       | 13       | 12                        |
| BRN    | 117   | 112   | 115      | 113      | 115      | 117      | 115                       |
| BAN    | 73    | 82    | 92       | 92       | 92       | 89       | 92                        |
| BAR    | 95    | 96    | 97       | 98       | 97       | 97       | 98                        |
| BLR    | 14    | 35    | 17       | 17       | 17       | 17       | 17                        |
| BEL    | 60    | 71    | 68       | 69       | 69       | 70       | 67                        |
| BER    | 141   | 126   | 144      | 144      | 144      | 144      | 144                       |
| BOL    | 114   | 104   | 107      | 107      | 107      | 105      | 107                       |
| BIH    | 66    | 32    | 33       | 33       | 33       | 34       | 33                        |
| BOT    | 116   | 102   | 110      | 112      | 110      | 110      | 109                       |
| BRA    | 17    | 24    | 25       | 26       | 25       | 24       | 25                        |
| BUL    | 31    | 8     | 28       | 28       | 28       | 31       | 28                        |
| BDI    | 145   | 143   | 146      | 146      | 146      | 146      | 146                       |
| CMR    | 137   | 144   | 139      | 137      | 137      | 139      | 137                       |
| CAN    | 37    | 53    | 42       | 42       | 42       | 41       | 42                        |
| CHI    | 53    | 51    | 38       | 37       | 38       | 38       | 38                        |
| CHN    | 5     | 3     | 6        | 5        | 5        | 7        | 5                         |
| TPE    | 119   | 131   | 132      | 132      | 132      | 132      | 132                       |
| COL    | 54    | 57    | 40       | 40       | 40       | 39       | 40                        |
| CRC    | 82    | 80    | 84       | 84       | 84       | 83       | 84                        |
| CRO    | 32    | 28    | 26       | 25       | 26       | 26       | 26                        |
| CUB    | 23    | 18    | 19       | 18       | 19       | 19       | 19                        |
| CYP    | 98    | 109   | 103      | 103      | 103      | 100      | 105                       |
| CZE    | 20    | 17    | 14       | 13       | 14       | 15       | 13                        |
| DEN    | 19    | 44    | 46       | 47       | 47       | 42       | 47                        |
| DOM    | 90    | 87    | 89       | 87       | 87       | 93       | 88                        |
| ECU    | 85    | 65    | 69       | 67       | 67       | 76       | 68                        |
| EGY    | 41    | 40    | 50       | 50       | 50       | 50       | 50                        |
| ENG    | 24    | 12    | 21       | 20       | 21       | 21       | 21                        |
| EST    | 26    | 48    | 32       | 31       | 32       | 32       | 32                        |
| ETH    | 128   | 132   | 119      | 119      | 119      | 119      | 119                       |
| FAI    | 80    | 83    | 79       | 79       | 79       | 75       | 79                        |
| FIN    | 59    | 60    | 64       | 64       | 64       | 63       | 64                        |
| MKD    | 56    | 43    | 58       | 57       | 57       | 61       | 57                        |
| FRA    | 10    | 10    | 8        | 10       | 9        | 6        | 9                         |
| GEO    | 30    | 20    | 15       | 15       | 15       | 16       | 15                        |
| GER    | 64    | 42    | 41       | 41       | 41       | 45       | 41                        |
| GHA    | 140   | 137   | 140      | 140      | 140      | 140      | 140                       |
| GRE    | 22    | 25    | 24       | 23       | 24       | 25       | 24                        |
| GUA    | 99    | 103   | 99       | 100      | 99       | 98       | 99                        |
| GCI    | 130   | 128   | 141      | 142      | 142      | 141      | 142                       |
| HAI    | 139   | 135   | 136      | 136      | 136      | 137      | 136                       |
| HON    | 111   | 125   | 108      | 108      | 108      | 112      | 108                       |

|      |     |     |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| HKG  | 129 | 124 | 126 | 127 | 127 | 123 | 126 |
| HUN  | 4   | 5   | 3   | 3   | 3   | 3   | 3   |
| IBCA | 102 | 78  | 90  | 91  | 90  | 88  | 91  |
| ISL  | 40  | 54  | 47  | 46  | 45  | 44  | 44  |
| ICSC | 48  | 72  | 75  | 76  | 75  | 73  | 75  |
| IND  | 18  | 19  | 20  | 21  | 20  | 20  | 20  |
| INA  | 67  | 67  | 53  | 53  | 53  | 56  | 53  |
| IPCA | 63  | 70  | 81  | 81  | 81  | 80  | 81  |
| IRI  | 29  | 38  | 31  | 32  | 31  | 30  | 31  |
| IRQ  | 103 | 76  | 83  | 83  | 83  | 86  | 83  |
| IRL  | 88  | 75  | 74  | 71  | 73  | 77  | 74  |
| ISR  | 3   | 11  | 4   | 4   | 4   | 4   | 4   |
| ITA  | 21  | 30  | 18  | 19  | 18  | 18  | 18  |
| JAM  | 105 | 97  | 100 | 99  | 100 | 107 | 101 |
| JPN  | 96  | 101 | 102 | 102 | 102 | 103 | 102 |
| JCI  | 123 | 113 | 118 | 118 | 118 | 111 | 118 |
| JOR  | 77  | 79  | 71  | 73  | 72  | 67  | 72  |
| KAZ  | 27  | 41  | 35  | 36  | 36  | 35  | 36  |
| KEN  | 120 | 133 | 127 | 126 | 126 | 127 | 127 |
| KOR  | 113 | 116 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 |
| KGZ  | 68  | 77  | 63  | 61  | 63  | 64  | 63  |
| LAT  | 69  | 58  | 54  | 56  | 56  | 53  | 56  |
| LIB  | 109 | 99  | 104 | 104 | 105 | 102 | 104 |
| LBA  | 78  | 105 | 95  | 95  | 94  | 95  | 94  |
| LTU  | 35  | 39  | 55  | 55  | 55  | 58  | 55  |
| LUX  | 97  | 90  | 94  | 94  | 95  | 94  | 95  |
| MAC  | 133 | 122 | 135 | 135 | 135 | 136 | 135 |
| MAD  | 135 | 140 | 121 | 121 | 121 | 122 | 121 |
| MAW  | 127 | 141 | 131 | 131 | 131 | 131 | 131 |
| MAS  | 92  | 86  | 96  | 96  | 96  | 96  | 96  |
| MLI  | 125 | 145 | 129 | 129 | 129 | 128 | 129 |
| MLT  | 100 | 106 | 116 | 116 | 116 | 114 | 116 |
| MTN  | 131 | 146 | 125 | 124 | 124 | 125 | 125 |
| MRI  | 118 | 110 | 124 | 122 | 123 | 126 | 122 |
| MEX  | 72  | 36  | 52  | 51  | 52  | 52  | 52  |
| MDA  | 28  | 31  | 37  | 38  | 37  | 36  | 37  |
| MNC  | 110 | 95  | 106 | 106 | 106 | 106 | 106 |
| MGL  | 71  | 66  | 61  | 62  | 61  | 59  | 61  |
| MNE  | 42  | 56  | 43  | 44  | 43  | 43  | 43  |
| MOZ  | 134 | 130 | 134 | 134 | 134 | 133 | 134 |
| NAM  | 126 | 129 | 133 | 133 | 133 | 134 | 133 |
| NEP  | 107 | 114 | 113 | 110 | 112 | 116 | 112 |
| NED  | 15  | 13  | 16  | 16  | 16  | 14  | 16  |
| AHO  | 136 | 118 | 138 | 139 | 139 | 138 | 139 |
| NZL  | 91  | 92  | 86  | 86  | 86  | 87  | 86  |
| NGR  | 101 | 139 | 112 | 114 | 113 | 109 | 113 |
| NOR  | 51  | 23  | 36  | 35  | 35  | 37  | 34  |
| PAK  | 62  | 123 | 73  | 74  | 74  | 71  | 71  |
| PLE  | 112 | 134 | 123 | 123 | 122 | 124 | 124 |
| PAN  | 94  | 107 | 105 | 105 | 104 | 101 | 103 |
| PNG  | 143 | 117 | 142 | 141 | 141 | 143 | 141 |
| PAR  | 79  | 84  | 85  | 85  | 85  | 84  | 85  |
| PER  | 44  | 46  | 51  | 52  | 51  | 49  | 51  |
| PHI  | 50  | 37  | 44  | 45  | 44  | 46  | 45  |

|      |     |     |     |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| POL  | 11  | 15  | 9   | 8   | 8   | 11  | 8   |
| POR  | 75  | 59  | 66  | 65  | 66  | 66  | 66  |
| PUR  | 108 | 100 | 93  | 93  | 93  | 90  | 93  |
| QAT  | 43  | 55  | 77  | 77  | 76  | 79  | 76  |
| RUS1 | 2   | 1   | 1   | 1   | 1   | 1   | 1   |
| RUS2 | 6   | 4   | 7   | 7   | 7   | 9   | 7   |
| RUS3 | 13  | 14  | 13  | 14  | 13  | 12  | 14  |
| RUS4 | 39  | 52  | 49  | 49  | 49  | 51  | 49  |
| RUS5 | 70  | 61  | 62  | 63  | 62  | 60  | 62  |
| RWA  | 146 | 142 | 148 | 148 | 148 | 148 | 148 |
| SMR  | 144 | 119 | 137 | 138 | 138 | 135 | 138 |
| STP  | 138 | 138 | 143 | 143 | 143 | 142 | 143 |
| SCO  | 83  | 63  | 70  | 72  | 70  | 68  | 70  |
| SEN  | 149 | 147 | 122 | 125 | 125 | 121 | 123 |
| SRB  | 33  | 21  | 23  | 24  | 23  | 23  | 23  |
| SEY  | 148 | 136 | 147 | 147 | 147 | 147 | 147 |
| SLE  | 142 | 148 | 145 | 145 | 145 | 145 | 145 |
| SIN  | 58  | 73  | 60  | 60  | 60  | 55  | 60  |
| SVK  | 16  | 22  | 22  | 22  | 22  | 22  | 22  |
| SLO  | 36  | 29  | 30  | 29  | 29  | 29  | 29  |
| RSA  | 74  | 81  | 80  | 80  | 80  | 78  | 80  |
| ESP  | 8   | 16  | 11  | 9   | 10  | 10  | 10  |
| SRI  | 104 | 115 | 101 | 101 | 101 | 104 | 100 |
| SUR  | 132 | 111 | 130 | 130 | 130 | 129 | 130 |
| SWE  | 34  | 34  | 29  | 30  | 30  | 28  | 30  |
| SUI  | 65  | 47  | 56  | 54  | 54  | 62  | 54  |
| TJK  | 86  | 62  | 78  | 75  | 77  | 81  | 77  |
| THA  | 93  | 94  | 87  | 88  | 88  | 91  | 87  |
| TRI  | 115 | 108 | 117 | 117 | 117 | 115 | 117 |
| TUR  | 45  | 50  | 57  | 58  | 58  | 54  | 58  |
| TKM  | 76  | 69  | 67  | 68  | 68  | 69  | 69  |
| ISV  | 147 | 149 | 149 | 149 | 149 | 149 | 149 |
| UGA  | 106 | 127 | 114 | 115 | 114 | 113 | 114 |
| UKR  | 1   | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   | 2   |
| UAE  | 61  | 88  | 72  | 70  | 71  | 72  | 73  |
| USA  | 9   | 9   | 10  | 11  | 11  | 8   | 11  |
| URU  | 46  | 74  | 65  | 66  | 65  | 65  | 65  |
| UZB  | 49  | 33  | 39  | 39  | 39  | 40  | 39  |
| VEN  | 81  | 64  | 76  | 78  | 78  | 74  | 78  |
| VIE  | 52  | 27  | 27  | 27  | 27  | 27  | 27  |
| WLS  | 122 | 93  | 109 | 111 | 111 | 108 | 111 |
| YEM  | 84  | 85  | 88  | 90  | 89  | 85  | 89  |
| ZAM  | 47  | 121 | 91  | 89  | 91  | 92  | 90  |

**Megjegyzés:**

A csapatkódok feloldására lásd a 7. táblázatot!

11. táblázat. Az első négy ország mérkőzései

| Ukraine against          | Rank | Result | Russia 1 against         | Rank | Result |
|--------------------------|------|--------|--------------------------|------|--------|
| Iraq                     | 103  | 4      | Ireland                  | 88   | 3,5    |
| Scotland                 | 83   | 4      | Serbia                   | 33   | 3      |
| Croatia                  | 32   | 2      | Italy                    | 21   | 3      |
| Slovenia                 | 36   | 2,5    | United States of America | 9    | 3      |
| Bosnia & Herzegovina     | 66   | 3      | Hungary                  | 4    | 1,5    |
| Hungary                  | 4    | 3      | Czech Republic           | 20   | 2,5    |
| Georgia                  | 30   | 2,5    | Russia 2                 | 6    | 2,5    |
| Russia 1                 | 2    | 2      | Ukraine                  | 1    | 2      |
| Azerbaijan               | 12   | 2,5    | Armenia                  | 7    | 2,5    |
| France                   | 10   | 3,5    | China                    | 5    | 2,5    |
| Israel                   | 3    | 2      | Spain                    | 8    | 2      |
| Israel against           |      |        | Hungary against          |      |        |
| Jemen                    | 84   | 4      | Jordan                   | 77   | 3,5    |
| Indonesia                | 67   | 2      | Argentina                | 25   | 2,5    |
| France                   | 10   | 2      | Czech Republic           | 20   | 2,5    |
| Moldova                  | 28   | 3      | China                    | 5    | 2,5    |
| Russia 3                 | 13   | 1,5    | Russia 1                 | 2    | 2,5    |
| Peru                     | 44   | 3,5    | Ukraine                  | 1    | 1      |
| Uzbekistan               | 49   | 2,5    | Brazil                   | 17   | 3      |
| Netherlands              | 15   | 3      | Azerbaijan               | 12   | 2      |
| Hungary                  | 4    | 2,5    | Israel                   | 3    | 1,5    |
| United States of America | 9    | 3      | Belarus                  | 14   | 3      |
| Ukraine                  | 1    | 2      | Poland                   | 11   | 2,5    |

**Megjegyzés:**

Félkövér számokkal szedve szerepelnek a győzelmek, formázás nélkül a döntetlenek és aláhúzással a vereségek.

A Rank oszlop az ellenfél hivatalos végső helyezését, a Result az ellene elért játékpontszámot mutatja.

12. táblázat. Euklideszi távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták

| Rangsor                   | MDS koordináta |         |
|---------------------------|----------------|---------|
|                           | x              | y       |
| Start                     | 2,4877         | 1,1441  |
| Final                     | -1,9346        | 1,1269  |
| A mátrix                  | 0,3529         | -0,6971 |
| B mátrix                  | 0,3765         | -0,6503 |
| C mátrix                  | 0,3597         | -0,6499 |
| D mátrix                  | 0,2214         | -0,8763 |
| C mátrix ( $\lambda$ max) | 0,3371         | -0,6747 |
| Sonneborn-Berger          | -0,5470        | 1,4239  |
| Buchholz                  | -1,2333        | -0,4868 |
| Mix                       | -0,4204        | 0,3400  |
| Stress                    | 0,12635        |         |
| RSQ                       | 0,95409        |         |

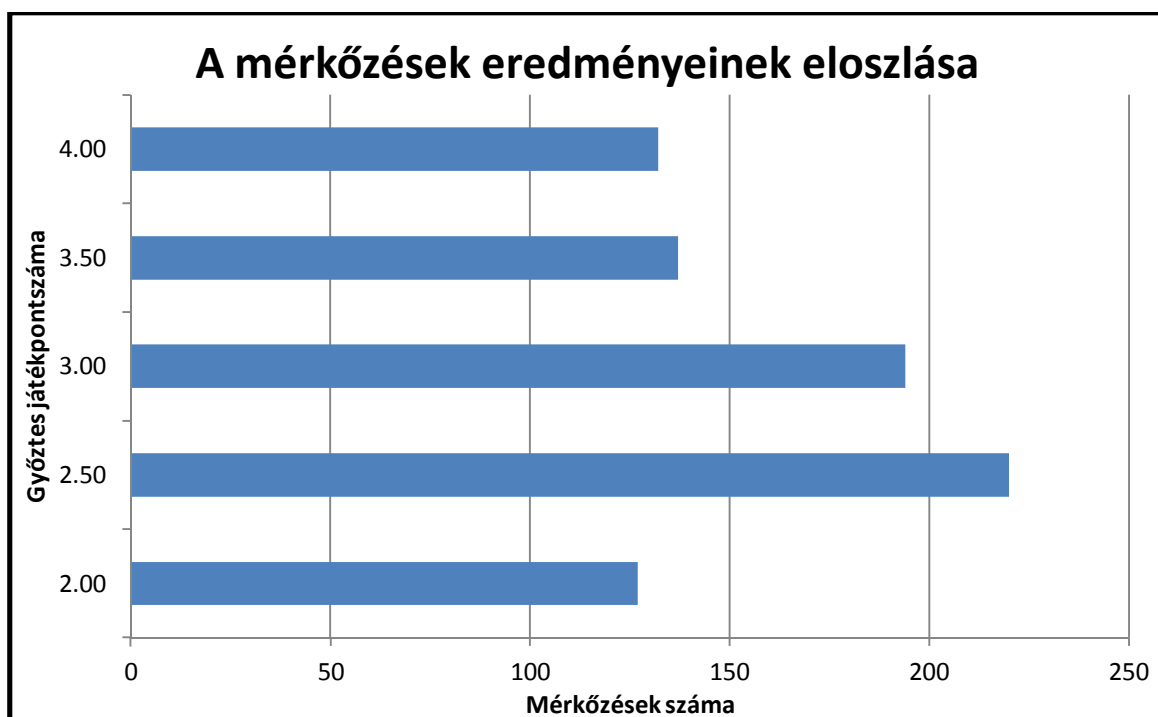
13. táblázat. Manhattan távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták

| Rangsor                   | MDS koordináta |         |
|---------------------------|----------------|---------|
|                           | x              | y       |
| Start                     | 2,3797         | 1,3437  |
| Final                     | -1,8784        | 1,129   |
| A mátrix                  | 0,3827         | -0,7213 |
| B mátrix                  | 0,4022         | -0,6847 |
| C mátrix                  | 0,3779         | -0,6825 |
| D mátrix                  | 0,2438         | -0,9058 |
| C mátrix ( $\lambda$ max) | 0,3777         | -0,6995 |
| Sonneborn-Berger          | -0,6545        | 1,3892  |
| Buchholz                  | -1,2163        | -0,4629 |
| Mix                       | -0,4148        | 0,2949  |
| Stress                    | 0,13756        |         |
| RSQ                       | 0,94592        |         |

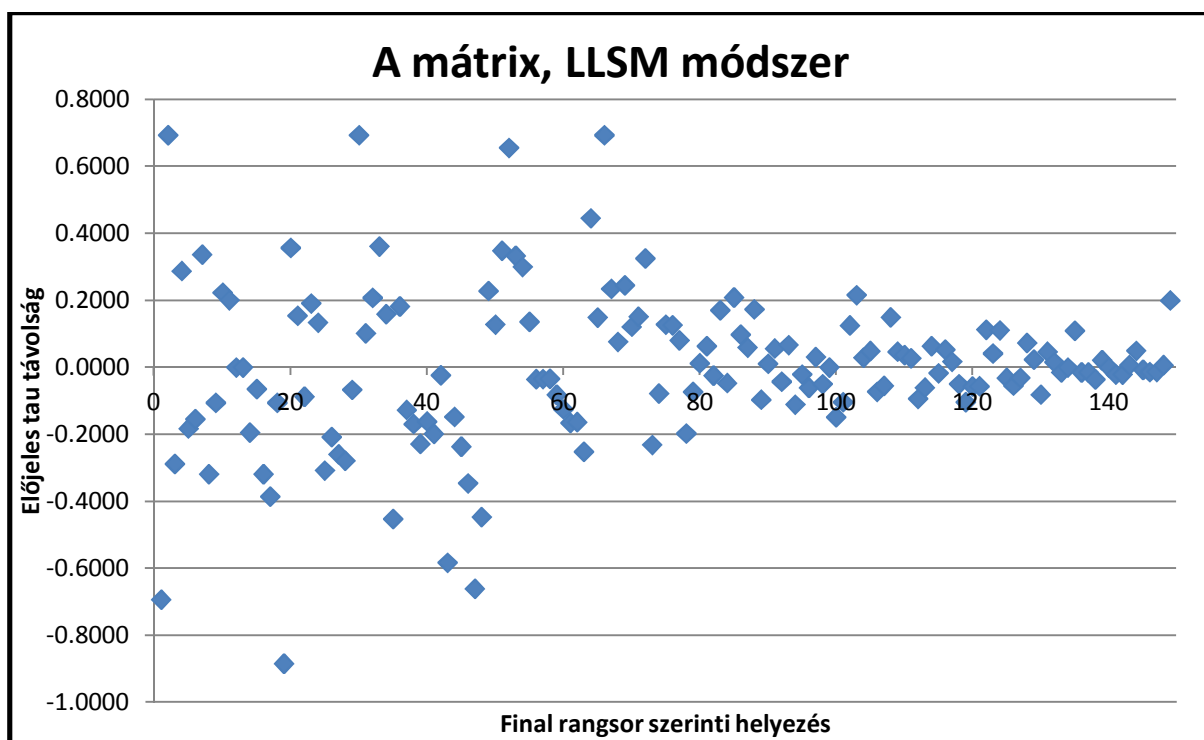
14. táblázat.  $\tau$ -távolsággal számolt kétdimenziós MDS-koordináták

| Rangsor                   | MDS koordináta |         |
|---------------------------|----------------|---------|
|                           | x              | y       |
| Start                     | 2,4159         | 1,0673  |
| Final                     | -1,9606        | 1,1745  |
| A mátrix                  | 0,3210         | -0,6790 |
| B mátrix                  | 0,3628         | -0,5684 |
| C mátrix                  | 0,3304         | -0,5743 |
| D mátrix                  | 0,1653         | -0,9802 |
| C mátrix ( $\lambda$ max) | 0,3368         | -0,5926 |
| Sonneborn-Berger          | -0,5225        | 1,6373  |
| Buchholz                  | -1,1694        | -0,6745 |
| Mix                       | -0,2798        | 0,1899  |
| Stress                    | 0,1363         |         |
| RSQ                       | 0,9451         |         |

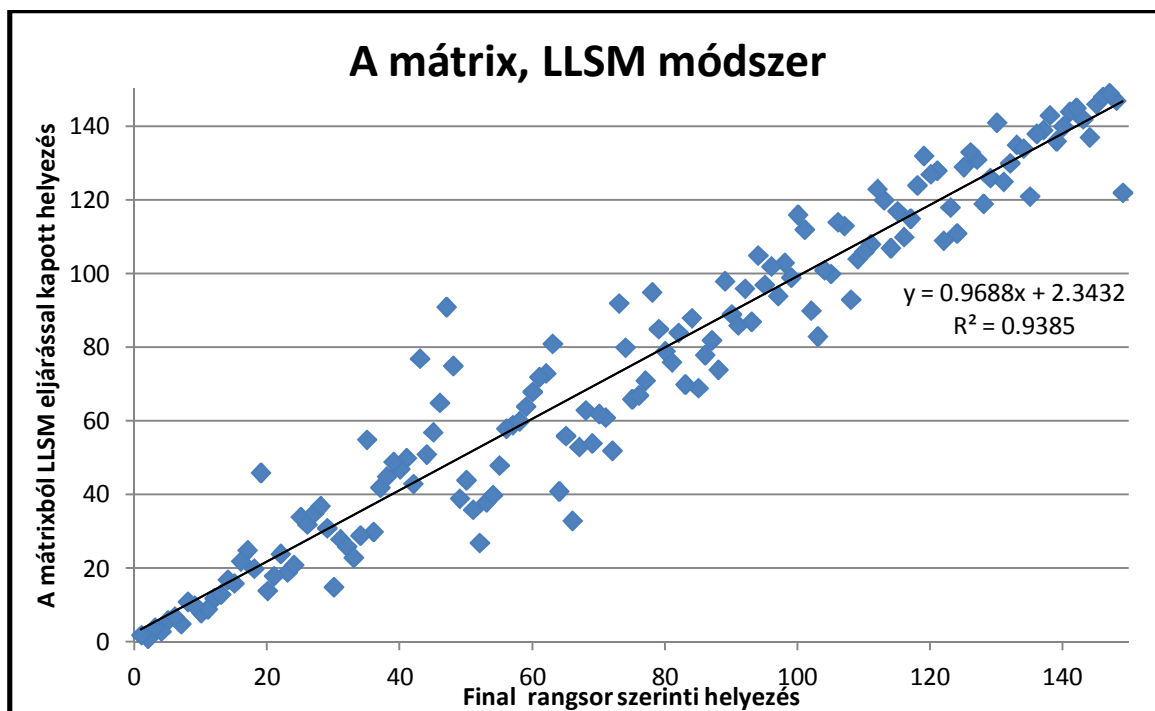
## 2. FÜGGELEK: ÁBRÁK



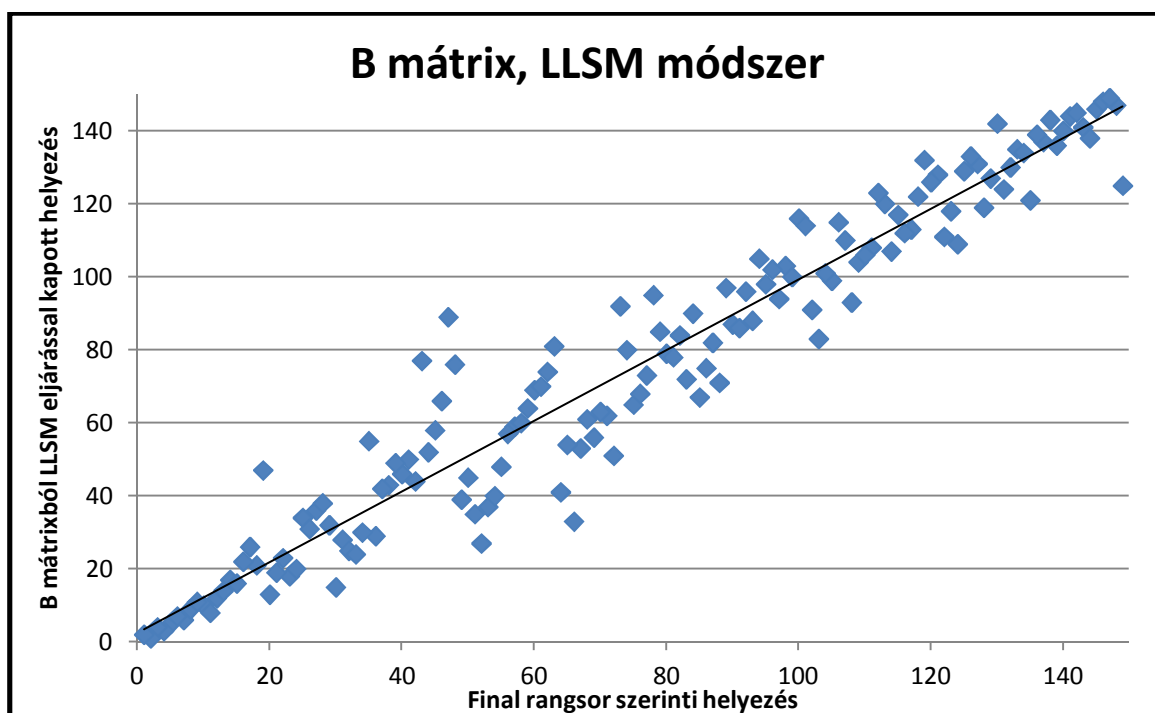
1. ábra. A mérkőzések eredményeinek eloszlása



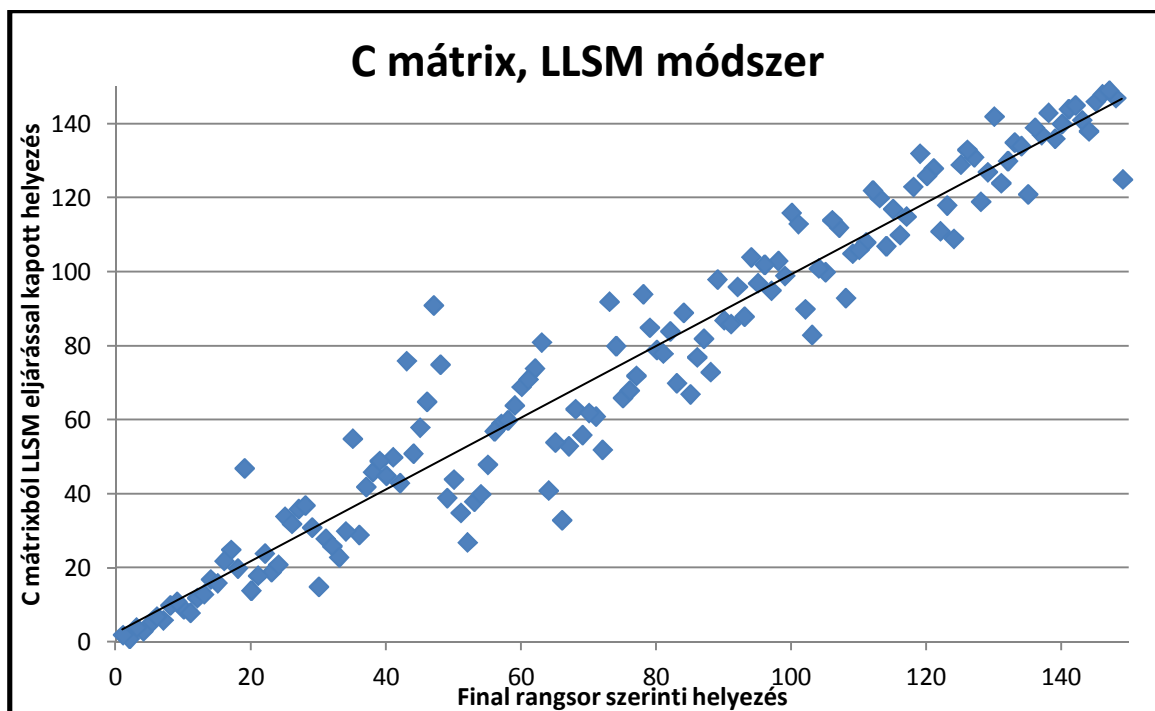
2. ábra. A hivatalos végső rangsor és az A mátrixból LLSM módszerrel számolt közötti előjeles  $\tau$ -távolság komponensei



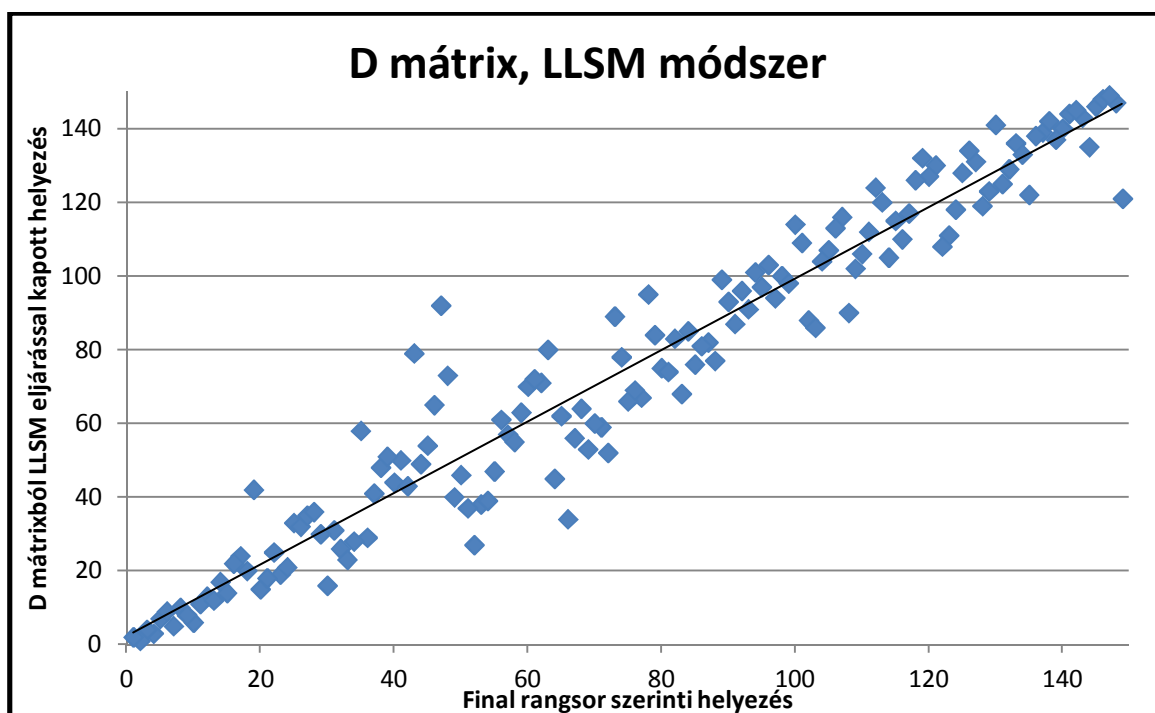
3. ábra. A hivatalos rangsor és az A mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata



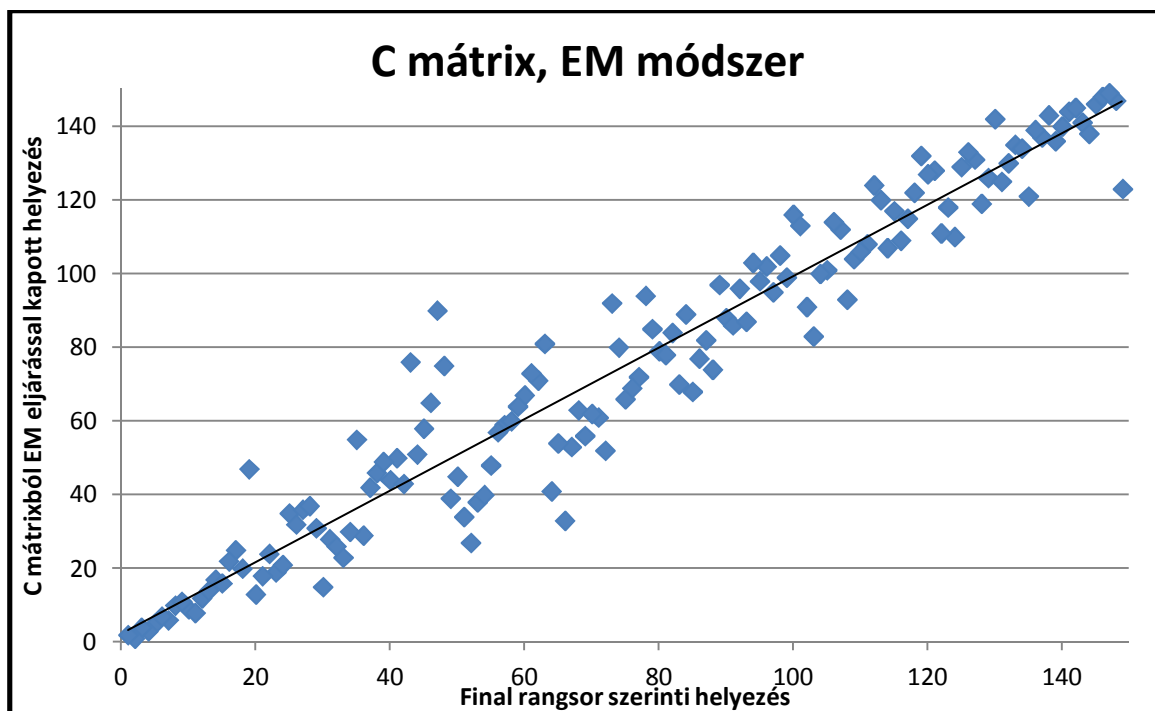
4. ábra. A hivatalos rangsor és a B mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata



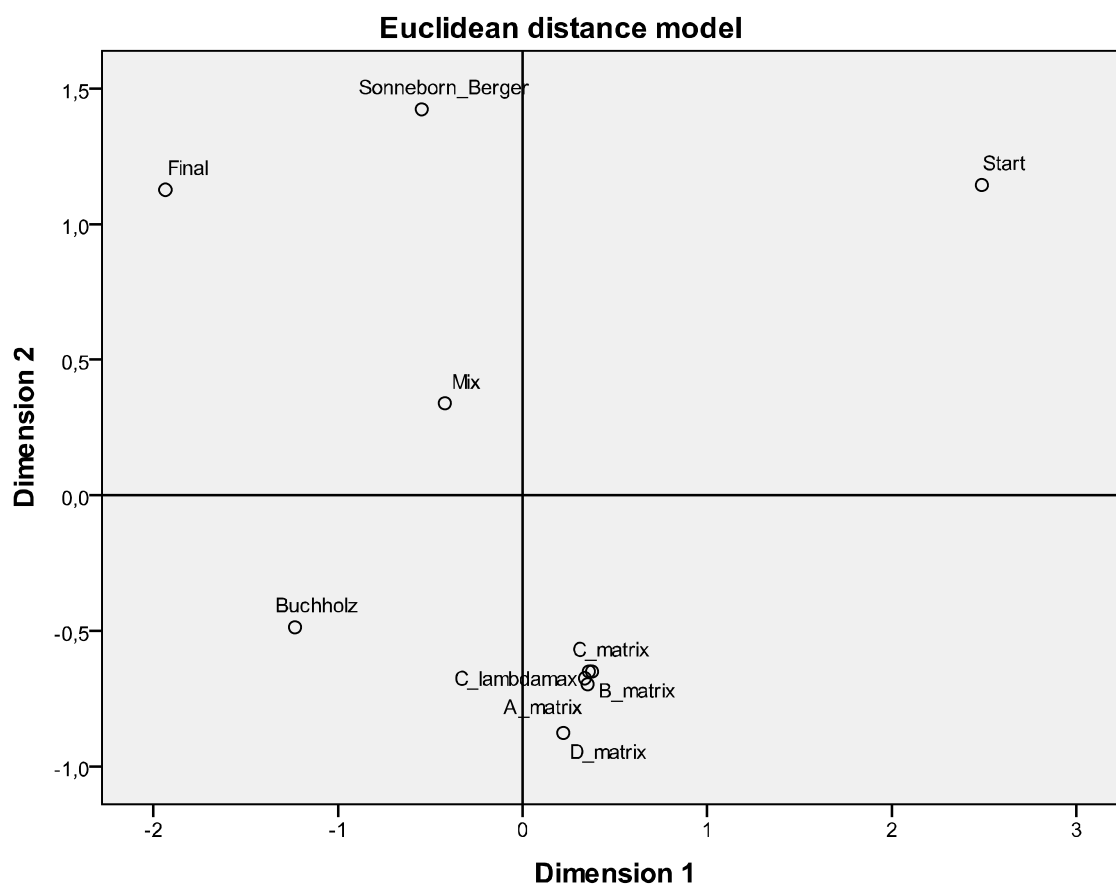
5. ábra. A hivatalos rangsor és a C mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata



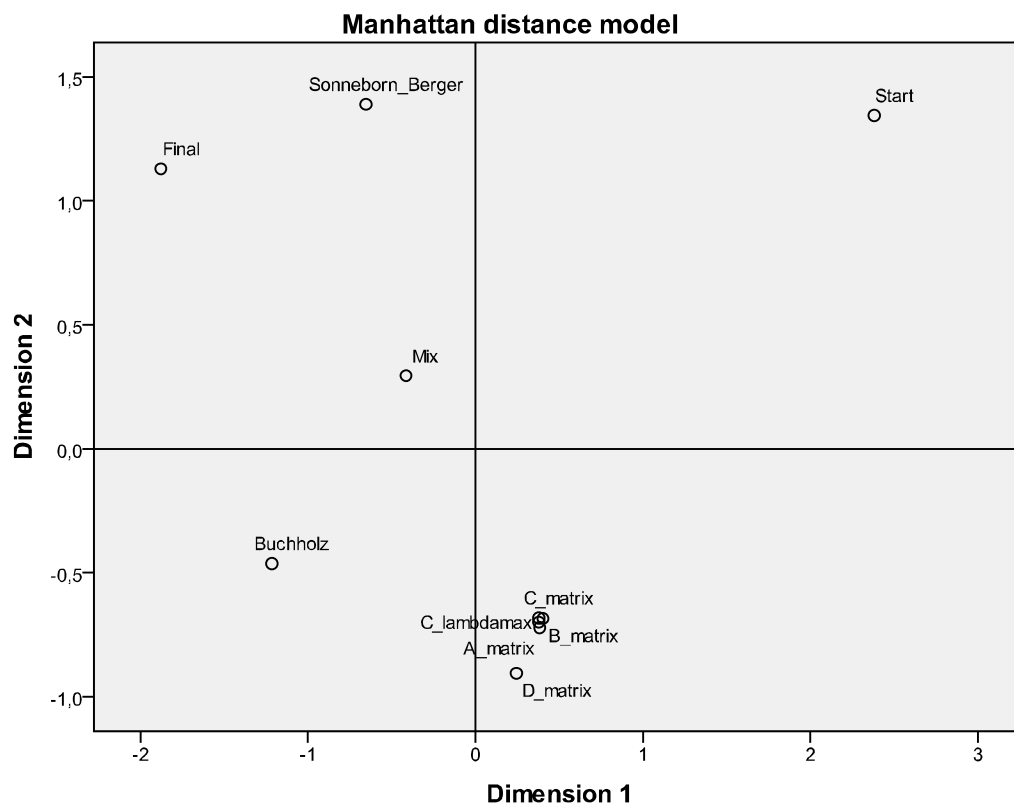
6. ábra. A hivatalos rangsor és a D mátrixból LLSM módszerrel számolt kapcsolata



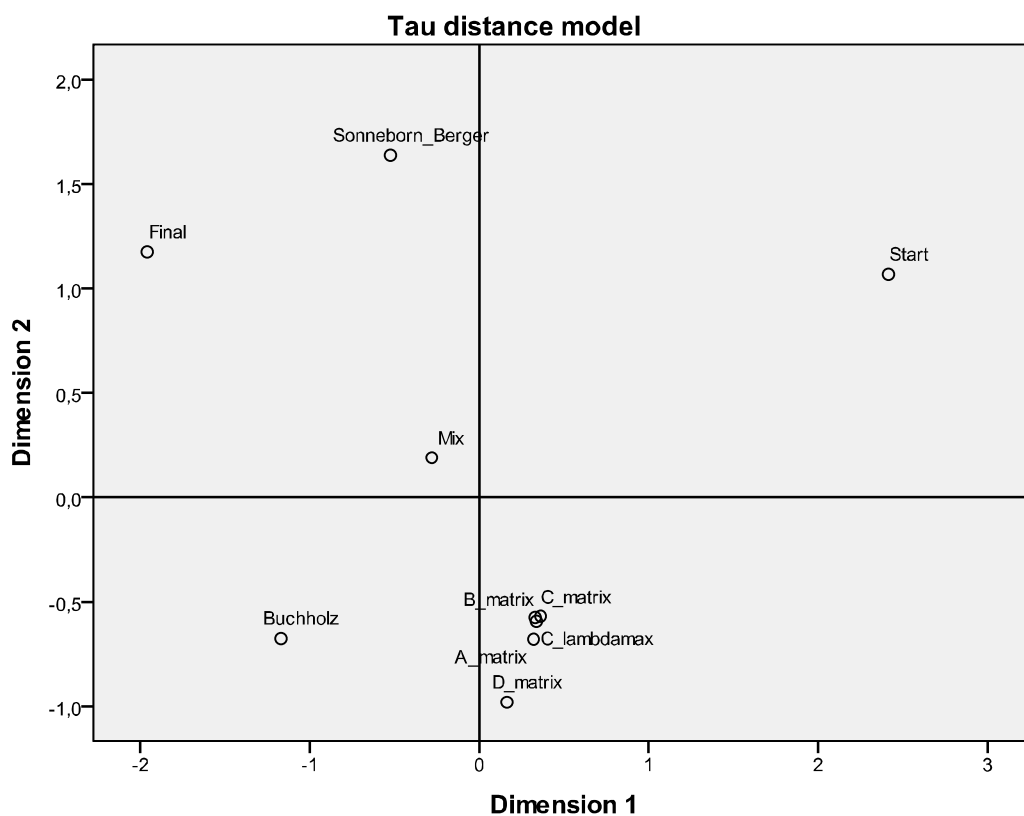
7. ábra. A hivatalos rangsor és a C mátrixból EM módszerrel számolt kapcsolata



8. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren euklideszi távolság mellett



9. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren Manhattan távolság mellett



10. ábra. Rangsorok a kétdimenziós skálátéren  $\tau$ -távolság mellett

### 3. FÜGGELEK: A FIDE HIVATALOS OLIMPIAI SZABÁLYZATA

A következőkben a FIDE (Fédération Internationale des Échecs), a nemzetközi sakkszövetség szabályzata alapján összefoglalom a kétévente megrendezésre kerülő nemzetközi sakkolimpia szervezési szabályzatát, elsősorban a résztvevő csapatok párosítására, a végeredmény meghatározására összpontosítva.<sup>50</sup>

#### A) Párosítási rendszer alapja

1) A párosítási rendszer alapja mind a párosítás, mind az értékelés esetében a mérkőzés-pontokat használó kontrollált svájci rendszerű párosítás.

#### B) Páratlan számú résztvevő csapat

2) A rendező szövetség jogosult egy második csapat („B”) indítására. Amennyiben a résztvevő csapatok száma páratlan, a rendező szövetség egy harmadik csapatot („C”) is indíthat.<sup>51</sup>

3) Amennyiben a „C” csapat az első körben játszott, a továbbiakban részt vehet a tornán, még akkor is, ha új csapatok érkezésével vagy régiek kiesésével páratlan számú csapat lesz.<sup>52</sup>

#### C) A csapatok rangsorolása párosítás céljából

4) A férfi sakkolimpia minden csapata 4 játékosból áll, egy tartalékkal.<sup>53</sup>

6) Minden FIDE pontszámmal rendelkező játékos ezt a pontszámot kapja.<sup>54</sup>

---

<sup>50</sup> A teljes szabályzat elérhető az alábbi honlapon:

<http://www.fide.com/fide/handbook.html?id=95&view=article> (letöltve: 2011. március 11.). A vizsgálat kezdeti szakaszában komoly nehézségeim akadtak amiatt, hogy a FIDE honlapján egy korábbi verzió volt megtalálható, amelyben még másképp számolták a nem lejátszott mérkőzéseket. Miután a tornán ilyen eset is előfordult, sokáig nem értettem, bizonyos csapatoknál miként alakultak ki a hivatalos végeredményben megadott Sonneborn-Berger és Buchholz pontszámok. Az ellentmondást csak a lebonyolításhoz használt program készítőjével, Heinz Herzog úrral folytatott többszöri levélváltás után sikerült tisztázni, akinek ezúton is köszönetet mondok. Azóta a szervezet honlapján frissítették az olimpiai kézikönyvet.

<sup>51</sup> Valójában Oroszország 5(!) csapatot indított a tornán a férfiak között. Bár erre a szabályzatban nem találtam indoklást, minden bizonnyal a rendező ország föderális berendezkedése, esetleg a Nemzetközi Sakkszövetség elnöke, a kalmük Kirszan Iljumszinov beavatkozása húzódhat meg a háttérben. A korábbi szokásokkal ellentétben – a többi csapat kapitányának tiltakozása ellenére – azt sem szabályozták, hogy közülük csak egy végezhet dobogón. Oroszország élt a lehetőséggel: második csapata szintén rendkívül erős volt (a játékosok átlagos FIDE-pontszáma alapján a 4., erősebb a magyar csapatnál), bár ezt többen bírálták, mert az elsőbe gyengébb formában levő játékosok is bekerültek, ami a végelszámolásnál sokba került.

<sup>52</sup> Ténylegesen előfordult olyan, hogy néhány ország csapata nem játszott az elméletileg előírt 11 alkalommal. Ezeket az eseteket a páros összehasonlítás mátrix szerkezeténél tárgyalom.

<sup>53</sup> Közülük minden mérkőzésen csak 4 játékos játszik, ugyanakkor az egyes mérkőzések között tetszőlegesen lehet cserélni.

- 7) A FIDE pontszámmal nem rendelkező játékosok ennek minimumértékét kapják.
- 8) A torna elején minden csapatot a 4 legmagasabb FIDE pontszámmal rendelkező játékos átlagos pontszáma alapján rangsorolnak. A legmagasabb átlagos pontszámú az 1-es párosítás pontszámú, a második a 2-es, stb.<sup>55</sup>
- 9) Amennyiben két vagy több csapat átlagos pontszáma azonos, a következők alapján rangsorolandók:

- a) Az ötödik játékos pontszáma
- b) Alfabetikus sorrend

Minden kör végén a csapatokat a következők alapján kell rangsorolni

- a) Mérkőzéspontok száma
- b) Játékpontok száma
- c) Rangsorolás a 9) pont alapján

#### **D) Körök száma**

- 11) Mind a férfi, mind a női olimpián 11 kört rendeznek.<sup>56</sup>

#### **E) Bye-ok**

- 12) Ha a csapatok száma páratlan, egy csapat bye lesz, 1 mérkőzéspontot és 2 játékpontot kap.

Az első körben az utolsóként rangsorolt csapat lesz bye. Például ha 85 csapat van, akkor a 85. sorszámú csapat.

A későbbi körökben a legkevesebb mérkőzéspontú csoportban levő, utolsóként rangsorolt csapat lesz bye.

Egyetlen csapat sem lehet egynél többször bye.

#### **F) Befejezetlen játékok pontozása párosítás céljából**

- 13) A befejezetlen játékokat döntetlenként kell számításba venni.<sup>57</sup>

---

<sup>54</sup> A FIDE a különböző tornák eredménye alapján – más sportágak közül leginkább a teniszhez hasonlóan – nyilvántartja a legjobb sakkozók rangsorát és az ennek alapját képező úgynevezett Élő-pontszámukat. Az aktuális rangsor elérhető: <http://ratings.fide.com/>

<sup>55</sup> Az eredmények elemzése során ez volt Start rangsor.

<sup>56</sup> 2004-ben még 14, 2006-ban 13, 2008-ban már csak 11 fordulót rendeztek. Ez nem túl sok a 149 résztvevőhöz képest.

<sup>57</sup> Bár ez meglehetősen elméleti szabálynak tűnik, a 2010-es férfi sakkolimpián is szerepet kapott: az első körben ugyanis az Izraelt ellenfelül kapó Jemen – amely előbbi állam létét hivatalosan nem ismeri el – nem állt ki a mérkőzésre, így a későbbiekben ellenük játszó csapatok Sonneborn-Berger és Buchholz pontjainak számításánál életbe léptek az F) és G) pontok speciális szabályai. Hasonló történt a Szingapúr-

### **G) Holtversenyek eldöntése (Tie Breaking)**

14) Az azonos mérkőzéspontszámmal (TB1) végző csapatokat sorrendben a következő szempontok alapján kell rangsorolni:<sup>58</sup>

- a) A Sonneborn-Berger pontok összege, ami a következőképpen számítandó:
- b) Minden ellenfél mérkőzéspontja, kivéve a legkevesebb pontot szerzett ellenfelet, szorozva az ellene elért játékpontok számával (TB2);<sup>59</sup>
- c) A játékpontok száma (TB3);
- d) Minden ellenfél pontszámának összege, kivéve a legkisebbet (ez az úgynevezett Bucholz pontszám, az eredménytáblázatban TB4 elnevezéssel szerepel).<sup>60</sup>

Holtverseny eldöntése esetén a bye vagy nem lejátszott mérkőzések – amikor az ellenfél nem jelenik meg időben – egy virtuális ellenfél elleni döntetlenségként veendő számításba. A kör kezdetén a virtuális ellenfélnek annyi mérkőzés- és játékpontja van, mint a jelenlevő csapatnak. Ezután hozzáadják a nem lejátszott mérkőzés eredményét (1 mérkőzés- és 4 játékpont nem lejátszott győzelem esetében, 1 mérkőzés- és 2 játékpont byenál, 0 mérkőzés- és 0 játékpont nem lejátszott vereségnél), majd minden későbbi körben 1 mérkőzéspontot és 2 játékpontot.

### **H) Általános párosítási szabályok**

15) A C) pont alapján minden csapat kap egy párosítási sorszámot.

16) Egyetlen csapat sem játszhat kétszer ugyanazzal az ellenféllel.

Olyan csapat, amelyik játék nélkül kapott pontszámot, nem lehet bye egymást követő körökben. Ez az eset áll fenn, ha a csapat a résztvevők páratlan száma miatt lett bye, vagy az ellenfelek egyike nem jelent meg időben.

17) Két párosított csapat mérkőzéspontszámának különbsége nulla, vagy ha ez nem lehetséges, a lehető legkisebb.

18) Egy pontcsoport az azonos mérkőzésponttal rendelkező csapatokból áll.

---

Szenegál első forduló mérkőzésénél is, melyet az utóbbi csapat késése miatt 4:0-s arányban Szingapúr javára könyveltek el, de a kiegészítő (TB2, TB3, TB4) mutatóknál nem lejátszott mérkőzésnek számít. Több ilyen párosítás nem volt. A korrekciók részletei a szerzőnél elérhetők.

<sup>58</sup> Ez gyakorlatilag egy lexikografikus rendezésnek felel meg.

<sup>59</sup> Ha a legkevesebb mérkőzéspontot elérő ellenfél kiléte nem egyértelmű, akkor a kevesebb játékpontot elérővel szembeni eredmény nem számít (Heinz Herzog úr szíves közlése).

<sup>60</sup> Amennyiben ezen négy szempont alapján sem lehet eldönteni a sorrendet, tényleges holtverseny alakul ki a két csapat között. Ilyen azonban nem fordult elő (Heinz Herzog úr szíves közlése).

19) A párosítást az első csoporttól lefelé – de nem beleértve – a középső csoportig; ezután az alsó csoporttól felfelé – de nem beleértve – a középső csoportig; végül a középső csoportban kell végezni. A középső csoport az, amelyikben a medián csapat van. Ha páros számú csapatot kell párosítani, a két középső csapat közül a hátrébb rangsorolt a medián csapat.

Például 88 csapatot feltételezve:

| Hely          | Mérkőzéspont |
|---------------|--------------|
| ...           |              |
| 43            | 11 pont      |
| 44            | 11 pont      |
| Medián csapat | 45 10 pont   |
| 46            | 10 pont      |

Ennélfogva a 10 mérkőzéspontú csoport a középső.

#### I) Színkiosztás

Itt részletesen kifejtésre kerül a színek (világos vagy sötét) kiosztása. Ennek dolgozatom szempontjából kicsi a jelentősége, ezért nem tárgyalom.

#### J) A párosítási eljárás részletezése

30) Ha egy medián csoport feletti pontcsoportban páratlan számú csapat van, a legutolsóként rangsorolt csapat az eggyel lejjebb levő pontcsoportba kerül, és ennek legmagasabbként rangsorolt olyan csapatával kerül párba, aki ellen még nem játszott.

Ha az a pontcsoport, ahonnan az utolsóként rangsorolt csapat lejjebb levő pontcsoportba kerülne, olyan, hogy az ebben maradó csapatok teljes párosítása nem lehetséges, akkor – az itt utolsóként rangsorolt csapat helyett – a csoport második legalacsonyabbként rangsorolt csapata kerül az eggyel lejjebb levő csoportba stb.

31) Ha a pontcsoportban utolsóként rangsorolt csapat az eggyel lejjebb levő pontcsoportban már minden csapat ellen játszott, akkor visszakerül az eredeti pontcsoportjába, és az ott második legalacsonyabban rangsorolt csapat kerül eggyel lejjebb stb.

32) Ha a medián csoport feletti valamely pontcsoportban minden csapat játszott már a közvetlenül alatta elhelyezkedő pontcsoportban levő minden csapattal, akkor az itt legutolsóként rangsorolt csapat még egy pontcsoporttal lejjebb kerül, a 30)-as és 31)-es pontok szabályainak megfelelően.

33) Ha egy medián csoport alatti pontcsoportban páratlan számú csapat van, az itt legelsőként rangsorolt csapat az eggyel feljebb levő pontcsoportba kerül, és ennek legalacsonyabbként rangsorolt olyan csapatával kerül párba, aki ellen még nem játszott.

Ha az a pontcsoport, ahonnan az elsőként rangsorolt csapat feljebb levő pontcsoportba kerülne, olyan, hogy az ebben maradó csapatok teljes párosítása nem lehetséges, akkor – az itt elsőként rangsorolt csapat helyett – a csoport második legmagasabbként rangsorolt csapata kerül az eggyel feljebb levő csoportba stb.

34) Ha a pontcsoportban elsőként rangsorolt csapat az eggyel feljebb levő pontcsoportban már minden csapat ellen játszott, akkor visszakerül az eredeti pontcsoportjába, és az ott második legmagasabbként rangsorolt csapat kerül eggyel feljebb stb.

35) Ha a medián csoport alatti valamely pontcsoportban minden csapat játszott már a közvetlenül felette elhelyezkedő pontcsoportban levő minden csapattal, akkor az itt legelsőként rangsorolt csapat még egy pontcsoporttal feljebb kerül, a 33)-as és 34)-es pontok szabályainak megfelelően.

36) Amennyire lehetséges, minden pontcsoport felső felébe tartozó csapatok sorrendben ugyanazon pontcsoport alsó felébe tartozó csapatokkal játszanak.

37) A medián csoportban és a felette levő pontcsoportokban az élvez elsőleges prioritást, hogy a pontcsoportban legmagasabban rangsorolt csapat megfelelő párt kapjon.

38) A medián csoport alatt levő pontcsoportokban az élvez elsőleges prioritást, hogy a pontcsoportban legalacsonyabban rangsorolt csapat megfelelő párt kapjon.

39) Feltételezve, hogy a csoportban  $2N$  csapat van, először az első csapat  $N + 1$ -edikkel történő párosítását kell megkísérelni. Ha ez lehetséges, egy  $2N - 2$  elemű alcsoportot kapunk. Ezután a fenti eljárást alkalmazzuk a kapott alcsoportra. Ha egy mérkőzés nem lehetséges, mert a csapatok már játszottak egymás ellen, vagy az alcsoport megoldhatatlan, a csoport (vagy alcsoport) első csapata az  $N + 2$ -edikkel játszik (az  $N + 1$ -edik helyett), ezután az  $N + 3$ -adikkal, egészen a  $2N$ -edikig, ha így is sikertelen, akkor pedig az  $N - 1$ -edikkel,  $N - 2$ -edikkel stb.

40) Az eljárás illusztrálására legyen adott a pontcsoportban 6 csapat, jelöljük őket az 1-6 számokkal. Ekkor a csoportban 15 különböző párosítás lehetséges, melyek a prioritás csökkenő sorrendjében:

- (1) 1 x 4, 2 x 5, 3 x 6
- (2) 1 x 4, 2 x 6, 3 x 5
- (3) 1 x 4, 2 x 3, 5 x 6
- (4) 1 x 5, 2 x 4, 3 x 6

- (5) 1 x 5, 2 x 6, 3 x 4
- (6) 1 x 5, 2 x 3, 4 x 6
- (7) 1 x 6, 2 x 4, 3 x 5
- (8) 1 x 6, 2 x 5, 3 x 4
- (9) 1 x 6, 2 x 3, 4 x 5
- (10) 1 x 3, 2 x 5, 4 x 6
- (11) 1 x 3, 2 x 6, 4 x 5
- (12) 1 x 3, 2 x 4, 5 x 6
- (13) 1 x 2, 3 x 5, 4 x 6
- (14) 1 x 2, 3 x 6, 4 x 5
- (15) 1 x 2, 3 x 4, 5 x 6

41) Ha egy pontcsoport egy csapata a pontcsoport minden másik csapata ellen játszott már, az eggyel lejjebb (a medián csoport feletti pontcsoportokban), illetve eggyel feljebb (a medián csoport alatti pontcsoportokban) levő pontcsoportba kerül.

42) Prioritást élvez az, hogy egy pontcsoportban az átsorolás előtt a lehető legtöbb csoporton belüli párosítást elvégezzük. Minden ilyen esetben a fenti logikát kell követni.

## **K) Egyebek**

Technikai szabályok a mérkőzéseken történő megjelenésre és záró rendelkezések.

#### 4. FÜGGELEK: INTERJÚ ALMÁSI ZOLTÁN SAKKOZÓVAL

Lékó Péter hosszú hegemoniája után novembertől Almási Zoltán lesz az első számú magyar sakkozó. A sakkolimpián negyedik helyen végzett válogatott tábladíjasa szerint Lékó többet tett nála azért, hogy helyet cseréljenek a rangsorban, és még így is elképzelhetőnek tartja, hogy jövőre kényszerszünet vár rá.

##### **- Hogy értékeli a csapat szereplését a sakkolimpián?**

- Nagy siker ez a negyedik hely, de nem tudtunk neki annyira örülni, mert ott volt az esély az olimpiai bronzérem megszerzésére, de a sors nem úgy akarta. A csapatszellem kitűnő volt, a kapitány, Horváth Tamás jól végezte a dolgát. Ki kell emelni, hogy egyénileg igazán kimagaslót senki nem nyújtott, én nyertem 13 Élőt, és tábladíjas lettem, de ezt boldogan elcserélném a bronzéremért. A társak megcsinálták az elvárásaikat, Lékó Peti egy kicsit ingott.

##### **- A csapatösszeállítást együtt beszélték meg?**

- A tökéletes összhangot jól mutatja, hogy a színelosztás, a színisméltés nem jelentett gondot. Én három fehér partival kezdtem, Polgár Judit három sötéttel, ez később valahogy kiegyenlítődött, de nem azért, mert így akartuk, hanem ilyen volt a párosítás. Mindenki tette a dolgát. Mindenki akkor nyert, amikor kellett. Vita nem volt köztünk, mindent megbeszéltünk.

**- Egyértelműen erősebb csapatokkal kellett megmérkőzniük, mint a külső körön feljött izraeli válogatottnak. Nem szerettük meg a svájci rendszerű lebonyolítást? (Ebben a rendszerben mindig az azonos pontszámmal rendelkező csapatokat párosítják össze, ezért az izraeli csapat a gyengébb kezdés után gyengébb ellenfeleket kapott, mint a jól kezdő magyar - a szerk.)**

- Azt sosem szerettük, s nem is fogjuk. Talán nem is a svájci rendszerrel van a baj, hanem azzal a számítási rendszerrel, amellyel a holtversenyeket eldöntötték. Az a módszer, hogy a mérkőzéspontokat, ez a külső körös csapatokat segíti, hiszen gyengébb együtteseket könnyebb nagy arányban legyőzni, mint az élcsoportban a legjobbakkal hadakozni. Az élmezőnnyel sorban játszottuk a mérkőzéseinket, Kína, Oroszország, Ukrajna, Azerbajdzsán, és ezek a csapatok az élcsoportban is végeztek. Izrael ezzel szemben messziről jött. Ha itt is a Bucholz-számítást (a 2008-as olimpiáig működött rendszer, amelyben azt veszik figyelembe, hogy az ellenfél hány pontot szerzett - a szerk.) alkalmazták volna, akkor mi most bronzérmesek lennénk. A mezőnyben az oroszokkal együtt nekünk volt a legjobb ez

a pontszámunk, jóval realisabban tükrözi, hogy milyen nehéz ellenfelekkel mérkőztünk meg.

**- Sajnos a FIDE vezérkara a különböző bizottságok javaslataira olyan szabályokat hoz, amelyek azt sugallják, hogy nem is igazán értenek a sakkhoz.**

- Ezen egyáltalában nem lepődnék meg, hogy nem, vagy kevésbé értenek a sakkhoz. Két éve Drezdában is már ez volt a szabály, de akkor nem voltunk érintettek, fel sem tűnt, hogy mennyire igazságtalan.

**- Érdekes, hogy Izrael csapata szinte lemásolta a drezdai szereplését. Ott is „surranó pályás” versenyük volt. Hanti-Manszijszkban nem játszottak az oroszokkal, a kínaiakkal, akkor értek az élcsoporthoz, amikor a riválisok jóval fáradtabbak voltak a nagy rangadók miatt.**

- Kétszer bejött nekik, remélem, hogy harmadszor már nem jön be ez a taktika. Nagy szerencsájuk volt, hogy Peter Szvidler vesztese után már két döntetlennel is olimpiai bajnokok lettek az ukránok. Minden kapitány meghúzta volna ezt a lépést, a kombinált remiajánlatot, de ez most az izraelieknek is kedvezett.

**- Hogy értékeli saját szereplését, eredményét?**

- Elégedett vagyok, azt az egy partit kár volt elveszteni az azeri Tejmur Radzsabov ellen, de minden nem lehet tökéletes. Jól hangzik teljesítményem 2801 pontos performance-pontszáma, nyertem közel 13 Élő-pontot. A számok engem annyira nem izgatnak, de elégedett lehetek vele. Csapatban nem könnyű játszani, nem csak a saját partiról szól, hanem a többieket is figyelni kell. Ez egy plusz terhelés. Nem minden játszám volt sima, de amit be kellett húznom, azt behúztam.

**- Az erőviszonyok nagyon kiegyenlítődtek. Már kevés a boldogsághoz, hogy akár 100 ponttal is jobb az ellenfélnél.**

- Ez mindig így lesz. Az olimpia elején szenved az ember, amíg a viszonylag gyengébbekkel játszik, de később sem könnyű őket megverni, mert egy 2600 pontszám körüli ellenfél nem nevezhető gyengének. Már mindenki rendelkezik egy olyan megnyitási repertoárral, ki tud hozni olyan állást, amivel a + 2700 Élő-pontos játékosnak is gondot tud okozni.

**- Ennek ékes bizonyítéka a világranglistát vezető norvég Magnus Carlsen és a bolgár exvilágbajnok Veszelin Topalov gyengébb szereplése, jelentős pontvesztése.**

- Szerintem az várható volt, hogy a topjátékosok magas Élő-ponttal nem fognak brillírozni. Természetesen mindig van kivétel, de az olimpia erről szól. Nem az egyéni, hanem a csapatérdek a fontos.

**- Nagyon féltünk az olimpia előtt, mert számos rossz hírt olvashattunk elkésett beruházásról, egyéb gondokról. Milyen volt a Hanti-Manszijszkiban megrendezett olimpia?**

- Már a kilencedik olimpián vettem részt. Minden szempontból ez volt a legjobb. Tökéletes szervezés, jó hotel, remek ellátás, csak a legnagyobb elismerés illeti a szervezőket. Nem az ő hibájuk volt a holtversenyt eldöntő Berger-pontszámítás, vagy az a hihetetlen történet, hogy a mezőnyünkben öt orosz csapat játszott. A szabályzat nem tiltotta, ezt használták ki.

**- Az már biztos, hogy a következő hivatalos Élő-listáig nem játszanak versenyen, így november 1-től a világranglistán az első számú magyar sakkozó lesz. Ez jelent-e valami pluszt a jövőben versenyekre történő meghívásoknál?**

- Nagy jelentőséget ennek nem tulajdonítok, ráadásul ezt sokban Lékó Petinek köszönhetem, aki egy év alatt több mint 40 pontot veszített, míg én ennyit nyertem. Ő többet tett érte, mint én, hogy helyet cseréltünk a rangsorban. Csak a jövő dönti el, hogy ez jelent-e számomra valami pluszt. Peti leáll egy hosszabb időre, ezalatt én megpróbálom megerősíteni a vezető pozíciómat, stabilizálni a játékomat. Három hét múlva utazom Texasba. Polgár Zsuzsa által szervezett hatfős, kétfordulós tornán játszom, ez lesz az évben az utolsó versenyem. Jövőre még minden bizonytalan. Próbálkoztam, de igazán nem jártam sikerrel. Lehet, hogy számomra is valami kényszerszünet lesz.

Forrás: <http://www.origo.hu/sport/sakk/20101007-interju-almasi-zoltan-sakkozoval.html>

Letöltve: 2010. november 25.

## 5. FÜGGELÉK: FELHASZNÁLT PROGRAMCSOMAGOK

Az egyes mérkőzések eredményeinek letöltése után ebből minden nehézség nélkül előállítható a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix. Az ehhez tartozó egyszerű számítások és ábrák többségét a Microsoft Excel 2007 táblázatkezelő szoftverrel készítettem. A sajátvektor és a logaritmikus legkisebb módszereket a Matlab numerikus számításokra kifejlesztett programcsomag 6.5. verziójával hajtottam végre.

Az *LLSM* eljárás – mint az a levezetésből kiderül – nem különösebben eszközigényes, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó  $G$  gráf Laplace-mátrixát kell előállítani, majd dimenzióját eggyel csökkentve invertálni, ezenkívül csak egyszerű mátrixszorzást és logaritmus-számítást igényel. A sajátvektor módszer megvalósítása ennél bonyolultabb, ehhez a Bozóki, Fülöp és Rónyai (2010) cikkében ajánlott, ciklikus koordináták iterációján alapuló megoldást használtam. A mátrix nagy mérete, sok hiányzó eleme miatt ez meglehetősen időigényes, emiatt nem áll rendelkezésre minden esetben az eredmény.

Az MDS sokdimenziós skálázáshoz szükséges számítások az SPSS statisztikai programcsomag 18.0 verziójával készültek, ebben közvetlenül megtalálhatók a kívánt opciók. A távolságmátrixnak legalább  $10 \times 10$ -esnek kell lennie, ez is indokolta további rangsorok felállítását.