

OTDK-dolgozat

Nguyen Gábor Loi 2013
BSc

A Bayesi-játék Nash-egyensúlya

The Nash equilibrium of the Bayesian Game

Kézirat lezárása: 2011.05.01.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Példák a Bayesi-játék ex-ante és interim Nash-egyensúlyára	3
2. Alapfogalmak	8
2.1. Típustér	8
2.2. A Bayesi-játék	11
3. A Bayesi-játék stratégiai formájai	13
3.1. Ex-ante és interim megközelítés	14
3.2. Típusok megjelentetése a modellben	15
3.3. A prior és az elsőrendű vélekedés konzisztenciája	17
3.4. Interim és ex-ante megközelítés a modellben	18
4. A Bayesi-Nash-egyensúly	21
4.1. Az ex-ante és az interim Bayesi-Nash-egyensúly	21
4.2. Példa a Bayesi-Nash-egyensúlyra végtelen sok típus esetén	25
5. Összefoglalás	28
Irodalomjegyzék	29

Ábrák jegyzéke

1.1. A játék fa formája	5
-----------------------------------	---

Táblázatok jegyzéke

1.1. Az játék kifizetései fej, illetve írás esetén	3
1.2. Kifizetések az interim stratégiai formában	5
1.3. Kifizetések az ex-ante stratégiai formában	6
1.4. Az új játék ex-ante stratégiai formája	7

1. fejezet

Bevezetés

A játékelmélet célja alapvetően a döntési szituációk modellezése, illetve ezen szituációk "optimális" megoldásainak megkeresése. Az elmúlt évtizedekben számos modell született, amelyek adott döntési szituációk leírására, és a megfelelő döntések kiválasztására szolgáltak. Azonban a számottevő eredmények ellenére ezen a területen még mindig rengeteg a kérdőjel, a megválaszolatlan kérdés.

Ezen dolgozatomban a nem tökéletes információs játékokkal, szokásos elnevezésükön Bayesi-játékokkal foglalkozom. A módszertant, amelyre a munkám alapozom Harsányi [1967-68] dolgozta ki, emiatt az utókor Harsányi Programnak is nevezi. Ez a program úgy oldja fel a nem teljes információs problémát, hogy a játékot visszavezeti egy úgy nevezett stratégiai formára, amelyet a szakirodalom már jól ismer. A stratégiai játékok esetében többféle egyensúly-koncepció is létezik, amelyek így a stratégiai formában felírt Bayesi-játékok esetében is alkalmazhatóak lesznek.

Azonban, ahogy már maga Harsányi [1967-68] is rámutatott, többféle módon is felírható a Bayesi-játék stratégiai formája. A szakirodalom (pl.: Battigalli et al. [2011]) kétféle átírást különböztet meg, a Bayesi-játék interim és ex-ante stratégiai formáját. A két stratégiai forma azonban nem egyezik meg egymással, az egyes megoldás-koncepciók eltérő egyensúlyokat eredményezhetnek.

Az alábbiakban csupán a legalapvetőbb egyensúlyfogalomnak tekinthető Nash-egyensúlyról lesz szó, azonban mint hamarosan látni fogjuk a Bayesi-játékok kétféle megközelítése itt is problémákhoz vezet. Mas-Colell et al. [1995] bebizonyította, hogy ezen két stratégiai forma Nash-egyensúlya bizonyos feltételek teljesülése mellett megegyezik egymással. Azonban ezek a feltételek a játékok egy igen szűk hányadára érvényesek, így ezeket feloldva érdekes eredményre juthatunk. Ebben a dolgozatban megmutatom, hogy az ex-ante stratégiai formában felírt Bayesi-játék Nash-egyensúlyi stratégiaprofiljainak halmaza tartalmazza a Bayesi-játék interim stratégiai formájának Nash-egyensúlyi stratégiaprofiljait, illetve adok egy szükséges

feltételt arra vonatkozóan, hogy mikor különbözhet ez a két halmaz egymástól.

A dolgozatot egy példával kezdem (persze a bevezetőn túl). Ez hármas célt szolgál. Egyrészt igyekszem szemléletesen bemutatni az általam használt esetenként nehezen értelmezhető, absztrakt fogalmakat, másrészt szeretném felhívni a figyelmet a Bayesi-játékok két felírási módjának különbségére, harmadrészt pedig egy egyszerű példán szeretném szemléltetni, hogy a Bayesi-Nash-egyensúly fogalma nem is olyan egyértelmű, hiszen a két felírásban különböző eredményeket kaphatunk.

A második fejezetben rátérek az általam használt fogalmak bemutatására. Első lépésként ismertetem az általam használt típustér koncepciót, a Heifetz and Samet [1998] által konstruált tisztán mérhető típusteret. Erre a típustérre alapozva felírom a Bayesi-játékot, amely a legtöbb elemében megegyezik a szakirodalomból ismerhető, szintén nem egységes definícióival. A definíciók közti különbség abból adódik, hogy az egyes esetekben más-más típustérre építik a Bayesi-játékot (pl.: Osborne and Rubinstein [1994], Battigalli et al. [2011]).

A harmadik fejezetben a Bayesi-játék stratégiai formákba történő felírását készítem elő, majd hajtom végre. Első lépésként a tisztán mérhető típustérben "elvesző" típusokat definiálok újra, majd bemutatom a Bayesi-játék interim és ex-ante stratégiai forma egyik leglényegesebb eltérését: az általuk alkalmazott vélekedéseket. A Bayesi-játék interim stratégiai formájában az úgy nevezett elsőrendű vélekedést, míg az ex-ante stratégiai formájában a prior vélekedést használják a játékosok.

Ezek között a vélekedések között azonban összefüggést kell feltételeznünk. A két közötti kapcsolatot a feltételes valószínűség fogalma fejezi ki, ami viszont a mérhető típustér esetében némileg bonyolultabb, mint a véges típusterek esetében. Ezen előkészületek után már képes vagyok felírni a Bayesi-játék interim illetve ex-ante stratégiai formáját.

A negyedik fejezetben térek rá a Bayesi-Nash-egyensúly vizsgálatára. Először definiálok a Nash-egyensúlyt a stratégiai játékok esetén, majd megmutatom, hogy a széles körben elterjedt Bayesi-Nash-egyensúly fogalma, amely az ex-ante stratégiai formára épül, minden esetben egy bővebb halmaz lesz, mint az interim Bayesi-Nash-egyensúly. Végezetül felírom a Mas-Colell et al. [1995] fent már említett tételével analóg állítást, amely elsősorban azt hivatott megmutatni, hogy az általam használt fogalmak hogyan viszonyulnak az általuk használtakhoz.

1.1. Példák a Bayesi-játék ex-ante és interim Nash-egyensúlyára

Az alábbiakban tárgyalt Battigalli et al. [2011]-től származó példa remek lehetőséget nyújt arra, hogy viszonylag egyszerűen felfogható módon mutassam be a típusteret, a rá épített Bayesi-játékot, és az interim és ex-ante stratégiai formákban felírt Nash-egyensúlyokat.

1.1.1. példa. *Két játékosunk van, az egyiket Annának, a másikat Bélának hívják. Egy olyan játékot játszanak, ahol a két játékos egymástól függetlenül hoz egy döntést: Anna az alult, a közepet vagy a fentet választhatja, Béla pedig a balt vagy a jobbat. A játékosok kifizetése kétféle lehet. Ezen kifizetéseket az 1.1 táblázatból olvashatjuk ki, ahol az első szám adja Anna, a második Béla kifizetését. Azt hogy melyik lesz a kifizetésük pénzfeldobással döntik el, amelynek az eredményét csak Anna tudja (köztudott, hogy Anna tudja). Kiegészítő feltételként feltesszük, hogy a játékosok nem kommunikálnak, és köztudott, hogy Béla $1/2$ valószínűséget tulajdonít a pénzfeldobás mindkét eredményének.*

	b	j
f	6,6	0,4
k	4,0	4,4
l	0,0	6,4

	b	j
f	6,0	0,4
k	4,0	4,4
l	0,6	6,4

1.1. táblázat. Az játék kifizetései fej, illetve írás esetén

A játéknak alapvetően két lehetséges verziója van. Az egyik, hogy az első táblázat alapján történnek a kifizetések, ezt jelölje h_1 , míg a második táblázat esetét jelölje h_2 . Így a paramétertér $H = \{h_1, h_2\}$. Érdekes itt megjegyezni, hogy ebben a példában a természet döntése egy pénzfeldobás formájában „testet ölt”, azonban ez a leggyakrabban nem jelenik meg ilyen formában.

A típustér, amelyet használók, a H paramétertérén túl tartalmazza a játékosok vélekedéseit a paramétertéréről. Anna pontosan tisztában van a természet választásával (a pénzfeldobás eredményével), így h_1 bekövetkezése esetén $\mu_A^1 \in \Delta(H)$, $\mu_A^1 = \delta_{h_1}$, h_2 esetén $\mu_A^2 \in \Delta(H)$, $\mu_A^2 = \delta_{h_2}$ (δ_{h_i} a Dirac-delta). Béla azonban nem képes megkülönböztetni a természet állapotait, így neki csak egyetlen vélekedése van: $\mu_B \in \Delta(H)$, ahol $\mu_B(h_1) = 1/2$ és $\mu_B(h_2) = 1/2$.

Mivel feltettük, hogy a vélekedések köztudottak, így a világállapotok halmaza $\Omega = \{(h_1, \mu_A^1, \mu_B), (h_2, \mu_A^2, \mu_B)\}$ két világállapotot tartalmaz. Érdekes megfigyelni,

hogy a világállapotok tartalmazzák a releváns paraméterek realizációját, és az összes játékos vélekedését egyszerre. Ezeket a világállapotokat innentől a rövidség kedvéért ω_1 -nek és ω_2 -nek fogom nevezni. Az Ω -t a gyakorlatban nem szükséges (sokszor nem is lehet) így felírni, ennek célja csupán annyi, hogy az olvasó számára könnyebben elképzelhető legyen a típustér.

A játékosok informáltságát a $\mathcal{M}_A = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$, illetve a $\mathcal{M}_B = \{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer reprezentálja. Látható, hogy Anna információs halmazai között ott szerepel $\{\omega_1\}$ és $\{\omega_2\}$, ami azt jelenti, hogy ő ezeket meg tudja különböztetni egymástól. Mindez Bélára nem igaz. Az ő információs halmaza a lehető legszűkebb, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a világállapotok közül semmit sem tud megkülönböztetni a többitől.

A világállapotok kezelésére a típustérben definiált függvények szolgálnak. Legyen $g = pr : \Omega \rightarrow H$ a koordináta projekció, és $f_A(\omega_i) = \mu_A^i$, $f_B(\omega_i) = \mu_B$ ($i \in \{1, 2\}$). Tehát a g függvény mutatja meg nekünk, hogy mit választott a természet, vagyis hogy fejet vagy írást dobtunk. Az f_i mutatja meg, hogy Anna és Béla mit gondol az adott világállapotban.

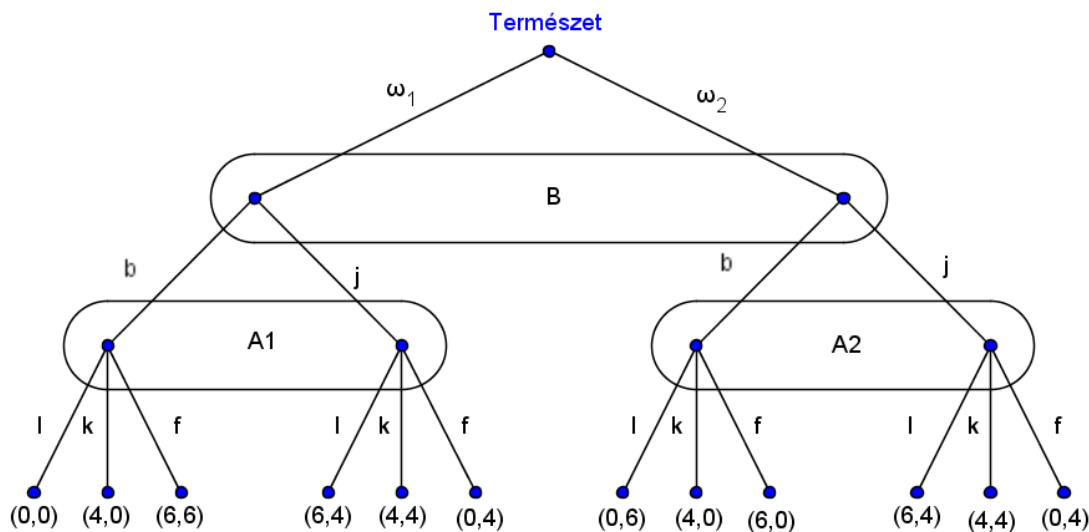
A prior, vagy előzetes vélekedéseket p_A -val és p_B jelöljük. Ezek azt mondják meg, hogy az egyes játékosok, hogyan vélekednek az egyes világállapotokról még a pénzfeldobás előtt. Ezúttal mindkét játékos egyaránt egykettő valószínűséget tulajdonít minden világállapotnak.

A Bayesi-játék definiálásához szükségünk van még a cselekvéshalmazokra. Anna cselekvéshalmaza: $A_A = \{f, k, l\}$, míg Béláé: $A_B = \{b, j\}$. A kifizetőfüggvényeket pedig a az 1.1 táblázat foglalja magába.

A játék felírható úgynevezett fa formában, amelyet az 1.1. ábra szemléltet. Itt jól látszik, hogy a Természetnek két választása van, a két világállapot egyikét választja. A játékosok sorrendje tetszőleges, itt csak az ábra átláthatósága végett vettem előre Bélát. Szokásos módon (bekarikázással) jelöltem az információs halmazokat, vagyis, hogy mely állapotokat nem tudják megkülönböztetni a játékosok. Látszik, hogy Béla egyáltalán nem tud különbséget tenni az állapotok között, így neki csak egyetlen halmaza van, míg Annának kettő. Anna bizonytalansága emiatt nem a típustérből adódik, hanem hogy nem tudja, hogy Béla mit fog választani.

A játék fa formájának segítségével már könnyedén fel lehet írni a játék úgy nevezett interim stratégiai formáját. Ebben az elgondolásban a játékosok Anna és Béla információs halmazai lesznek. Tehát Annából két játékos (A_1 és A_2), míg Bélából egy (B) „keletkezik”. Ezek valójában nem mások, mint a játékosok típusai.

Az így keletkezett játékosok cselekvéshalmazai megegyeznek azon játékos cselekvéshalmazával, akiből létrejöttek. Például A_1 és A_2 cselekvéshalmaza megegyezik



1.1. ábra. A játék fa formája

Anna cselekvéshalmazával, tehát mindkettő $\{f, k, l\}$. A_1 és A_2 kifizetése nem függhet egymástól, csak a saját és a Béla által választott cselekvéstől, így a kifizetéseiket minden esetben könnyen megtalálhatjuk. Azonban B-vel más a helyzet, mivel neki magától, A_1 -től és A_2 -től is függ a kifizetése. B nem tudja, hogy kivel fog valójában játszani, viszont van egy vélekedése róla, így ezt felhasználva tud számolni egy várható értéket a kifizetésekből.

Az interim stratégiai forma kifizetéseit az 1.2. táblázatból lehet kiolvasni. A megszokottól némiképp eltérően, az első szám jelöli A_1 , a második A_2 és a harmadik B kifizetését. A táblázatból az is jól kitűnik, hogy A_1 és A_2 kifizetése független egymástól.

$A_2 = f$	b	j	$A_2 = k$	b	j	$A_2 = l$	b	j
f	6,6,3	0,0,4	f	6,4,3	0,4,4	f	6,0,6	0,6,4
k	4,6,0	4,0,4	k	4,4,0	4,4,4	k	4,0,3	4,6,4
l	0,6,0	6,0,4	l	0,4,0	6,4,4	l	0,0,3	6,6,4

1.2. táblázat. Kifizetések az interim stratégiai formában

A játék felírható egy úgy nevezett ex-ante stratégiai formába is. Ebben az esetben a játékosok megegyeznek az eredeti Bayesi-játékban szereplőkkel, így a játék most Anna és Béla között zajlik. Anna ezúttal készít egy s stratégiát, amely minden lehetséges eshetőség (ω_1 és ω_2) esetén megmondja, hogy mit tegyen. Bélának nincsen ilyen problémája, neki csak egyféle információja van, ezért a cselekvése lesz a

stratégiája.

Az ex-ante szemléletben a kifizetéseket a prior vélekedés alapján számoljuk, vagyis még a pénzfeldobás előttől. Ekkor még mindketten azonos esélyt tulajdonítanak annak, hogy melyik táblázat jelöli a kifizetésüket. Így ha Anna például az első világgállapotban fentet, míg a másodikban lentet játszik, Béla pedig balt, akkor Anna kifizetését a

$$u_A^{ex}((f, l), b) = \frac{1}{2}u_A(f, b) + \frac{1}{2}u_A(l, b) = \frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}0 = 3$$

módon lehet kiszámolni. Az így kapott kifizetési mátrixot az 1.3. táblázat mutatja.

	b	j
(f, f)	6,3	0,4
(f, k)	5,3	2,4
(f, l)	3,6	3,4
(k, f)	5,0	2,4
(k, k)	4,0	4,4
(k, l)	2,3	5,4
(l, f)	3,0	3,4
(l, k)	2,0	5,4
(l, l)	0,3	6,4

1.3. táblázat. Kifizetések az ex-ante stratégiai formában

Tehát a Bayesi-játékot kétféle szemszögből is fel lehet írni. Emiatt rengetek kérdés merül fel, mint például, hogy ekvivalensnek tekinthető-e a két átírás. Ha játékelméletben legerősebb Nash-egyensúlyt alkalmazom a fent felírt esetekre, a válasz nyugtatólag hat, hiszen ennek az ex-ante Nash-egyensúlya $((l, l), j)$, illetve az interim Nash-egyensúlya (l, l, j) megegyezőnek tekinthető.

A két felírási mód Nash-egyensúlyát ez esetben ugyanannak találtuk, és a játékok egy bizonyos osztályára (elsősorban az egyszerűbbekre) ez mindig igaz lesz, azonban a következő példa rávilágít arra, hogy ez nem feltétlenül igaz, sőt majd látni fogjuk, hogy az általánosabb, összetettebb játékoknál szinte kivétel nélkül megbukik ez az egyezőség.

1.1.2. példa. *Vegyük az előző példát! Módosítsuk a játékosok vélekedéseit úgy, hogy Anna, úgy gondolja magáról (előzetes vélekedése), hogy fel tudja dobni úgy a pénzérmét, hogy az mindig fej legyen ($p_A(\omega) = \delta_{\omega_1}(\omega)$), míg Béla nem hisz az efféle trükkökben, így ő továbbra is azonos valószínűséget tulajdonít a két világgállapotnak.*

Csupán Anna prior vélekedését változtattam meg, amely csak a játék ex-ante stratégiai formájában kap szerepet, így a fenti képlet Anna kifizetéseinek kiszámolására a következőképpen alakul:

$$u_A^{ex}((f, l), b) = 1 * u_A(f, b) + 0 * u_A(l, b) = 6.$$

	b	j
(f, f)	6,3	0,4
(f, k)	6,3	2,4
(f, l)	6,6	3,4
(k, f)	4,0	2,4
(k, k)	4,0	4,4
(k, l)	4,3	5,4
(l, f)	0,0	3,4
(l, k)	0,0	5,4
(l, l)	0,3	6,4

1.4. táblázat. Az új játék ex-ante stratégiai formája

Az 1.4. táblázatból kiolvashatók az így megkapott kifizetések. Fontos észrevétel, hogy Anna második világállapotbeli cselekvése nem befolyásolja Anna kifizetéseit, csak Béláét. Az így bekövetkezett változás miatt az ex-ante stratégiai formájának ezúttal két Nash-egyensúlya lesz: az $((f, l), b)$, illetve az $((l, l), j)$.

Az interim stratégiai forma ezzel szemben nem változik, így a Nash-egyensúlya sem változik. Jól látható ezúttal, hogy az ex-ante stratégiai formának van olyan Nash-egyensúlya, amely az interimnél nem az.

Az eddigiekből látható, hogy a Nash-egyensúly valójában egy stratégiai formából eredeztethető fogalom. Emiatt rögtön adódik a kérdés, hogy a két felírás közül melyiket társíthatjuk inkább a Bayesi-játékhoz. Ennek a megválaszolásához először meg kell vizsgálni, hogy mi okozza a kettő közötti különbséget.

A következő két fejezetben a fent bemutatott fogalmakat fogom pontosan definiálni, majd ezt követően térek rá a Nash-egyensúly problémájára.

2. fejezet

Alapfogalmak

Jelölések:

- Legyen N a játékosok véges halmaza, és tegyük fel, hogy $0 \notin N$, és legyen $N_0 \triangleq N \cup \{0\}$, ahol a 0-val jelölt játékos a természet.
- $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér esetén jelölje $\Delta(X, \mathcal{M})$ a rajta értelmezett valószínűségi mértékek halmazát.
- Játékelméleti zsargonban gyakran használt kifejezés $i \in N$ esetén a $-i$ jelölés, ami $N \setminus \{i\}$ -vel egyenértékű, vagyis az i játékoson kívüli összes játékost jelöli.

2.1. Típustér

A bayesi megközelítésben a játékosok ha nem tudnak valamit pontosan, akkor is van egy úgy nevezett véleményük róla. Ez a vélemény egy valószínűségi eloszlást jelent, tehát a játékosok egy bizonyos valószínűséget rendelnek minden általuk lehetségesnek vélt esemény bekövetkezéséhez.

A játékosok vélekedését a világállapotokról, vélekedésüket a vélekedésekről, vélekedésüket a vélekedésekről való vélekedésekről stb. röviden (végtelen) véleményrangsornak szokás nevezni. Ezeknek általában fontos szerepe van a játék kimenetelének szempontjából, amelyre Allen and Morris [1998] és Ely and Peski [2006] is egy nagyon szemléletes példával rá is mutat. Ugyanakkor a véleményrangsorok hiába fontosak a probléma szempontjából, a vizsgálatuk elég nehézkes, az adott formájukban megvalósíthatatlan.

Harsányi [1967-68] ezek miatt vezette be a típus fogalmát, és a játékosok lehetséges véleményrangsorait ezekkel az objektumokkal helyettesítette. Azonban Harsányi nem definiálta pontosan a típusokat, azokat minden játék esetén külső adottságnak

tekintette. A későbbiekben viszont felvetődött annak a kérdése, hogy ezeket a lehetséges véleményrangsorokat bele lehet-e foglalni egy matematikai struktúrába, és ha igen, akkor milyenbe. Az ilyen célokat szolgáló struktúrákat nevezi a szakirodalom típustérnek.

Az alapvető problémák tárgyalásánál gyakran nem szükséges egy összetett, minden véleményrangsort tartalmazó típustér alkalmazása, néhány egyszerűsítő feltétel (például, hogy csak véges sok típus lehetséges) egy könnyen alkalmazható típustérhez vezet, amelyen a problémák ugyanúgy bemutathatóak. Azonban ezen feltételekből adódóan ezek a modellek csak bizonyos játékok esetén alkalmazhatók, így a Bayesi játékok általánosabb vizsgálatára kevésbé alkalmasak.

A véleményrangsorok matematikai formába való átírására többféle módot is ismer a szakirodalom. Ezek közül kettőt emelhetünk ki, a topologikus típustérrel, illetve a tisztán mérhető típustérrel. Ezek azonban lényegesen különböznek egymástól, amiből látszik, hogy még nem létezik egy olyan definíciója a típustérnek, amelyet maradéktalanul elfogadhatónak tekinthetünk.

A két típustér egy fontos különbsége az univerzális típustér létezésének kérdéséből fakad. Az univerzális típustér egyszerűen fogalmazva egy olyan típustér, amely magában foglalja az összes többi, tehát amelyben minden lehetséges típus megtalálható. Heifetz and Samet [1998] megmutatta, hogy a tisztán mérhető típustér esetén létezik ilyen, azonban Pintér [2010] bebizonyította, hogy a topologikus típustéren a triviálison kívül nem létezhet univerzális típustér.

Ez utóbbi tulajdonsága miatt döntöttem a tisztán mérhető típustér használata mellett, bár mint majd látni fogjuk, az általam vizsgált probléma sajátossága miatt némi megszorítással kell élnem a típustérrel illetően.

Ebben a dolgozatban Pintér [2008] alapján fogom alkalmazni a tisztán mérhető típustérrel, jelöléseim szinte egy az egyben megegyeznek vele, azonban a fent említettek miatt egy ponton eltérek tőle.

2.1.1. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, és jelölje $\Delta(X, \mathcal{M})$ a rajta értelmezett valószínűségi mértékek halmazát. Ekkor jelölje $\mathcal{A}^*$ a $\Delta(X, \mathcal{M})$ -n az alábbi módon értelmezett σ -algebrát:

$$\mathcal{A}^* \triangleq \sigma(\{\mu \in \Delta(X, \mathcal{M}) \mid \mu(A) \geq p\}, A \in \mathcal{M}, p \in [0, 1]).$$

Ez az alábbi definíció kiemelkedő fontosságú, hiszen ez mondja meg nekünk, hogy miről is beszélhetünk a Bayesi játékok kapcsán. A definíció azt az elméleti követelményt teljesíti (lásd Aumann [1999b]), hogy a probléma vizsgálata során olyan kijelentéseket tehessünk, hogy az egyik játékos legalább p valószínűséggel gondol va-

lamit. A továbbiakban minden valószínűségi mértékeket tartalmazó halmazhoz ezt a szigmaalgebrát fogom rendelni.

Ezzel neki is láthatunk a típustér definiálásának. Megkonstruálásához először is szükségünk van egy paramétertérre. A paramétertér, mint a neve is mutatja, mindazokat a tényezőket foglalja magába, amelyek befolyásolhatják az egyes játékosok kifizetéseit és a játékosok nem dönthetnek róluk.

2.1.2. feltevés. *Az $(H, \mathcal{A})$ paramétertér egy tetszőleges mérhető tér.*

A világállapotok halmaza, bár elsőre könnyen összetéveszthető a paramétertérrel, nagyban különbözik tőle. Ugyanis a világállapotok nem csak a paramétereket foglalják magukba, hanem a játékosok vélekedéseit is, amelyek nem hatnak közvetlenül a kifizetésükre. Így egy világállapot tartalmazza mind a paramétereket, mind a játékosok vélekedéseit. Egyszerűbb esetekben, ahol a játékosoknak csupán egyetlen vélekedésük van, a paramétertér azonosítható a világállapotok halmazával. Bonyolultabb esetekben azonban előfordulhat az is, hogy a játék paraméterei ugyanazok, de a játékosok különbözőképpen vélekednek. Ekkor minden vélekedéshez külön világállapot fog tartozni függetlenül a paraméterek egyezőségétől.

A világállapotok mellett minden játékoshoz tartozik egy $\mathcal{M}_i$ -vel jelölt halmazrendszer, amely az i játékos informáltságát jeleníti meg. Véges modellek esetén ezt a halmazrendszert az információs partíciók helyettesítik. A kettő különbségéről bővebben a 3.2. alfejezetben olvashatunk.

2.1.3. definíció. *Jelölje a világállapotok összességét Ω és legyen $\forall i \in N_0$ esetén $\mathcal{M}_i$ σ -algebra Ω -n. Ekkor $\mathcal{M}_i$ jeleníti meg az i -edik játékos informáltságát, és $\mathcal{M}_0$ jelöli a természet által birtokolt információt, amit az $\mathcal{A}$ Ω -ra való kiterjesztésének is tekinthetünk. Legyen $\mathcal{M} \doteq \sigma(\bigcup_{i \in N_0} \mathcal{M}_i)$.*

2.1.4. definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{M})$ a világállapotok tere. Ekkor a*

$$(H, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$$

struktúrát típustérnek nevezzük, ha

1. $g : \Omega \rightarrow H$ $\mathcal{M}_0$ -mérhető,
2. $\forall i \in N$ esetén $f_i : \Omega \rightarrow \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i})$ $\mathcal{M}_i$ -mérhető,
3. $\forall i \in N, \omega \in \Omega, A \in \mathcal{M}_{-i}$ esetén ha létezik $A' \in \mathcal{M}_i, \omega \in A'$ és $A' \subseteq A$, akkor $f_i(\omega)(A) = 1$, ahol $\mathcal{M}_{-i} = \sigma(\bigcup_{j \in N_0 \setminus \{i\}} \mathcal{M}_j)$.

2.1.5. megjegyzés. *Az általam vizsgált problémához szükség van ezen kívül a p_i -vel jelölt prior vélekedésre, amely $\forall i \in N$ játékos esetén $p_i \in \Delta(\Omega, \mathcal{M})$.*

A típustér a világállapotokból és a világállapotokat kezelő függvényekből, úgynevezett típusfüggvényekből áll. Ez utóbbiak közül a g (a természet típusfüggvénye) mondja meg, hogy az egyes világállapotokban mik a paraméterek, míg az f_i típusfüggvények jelölik a játékosok vélekedését. A hármas pontban felírt feltétel pedig annak a kritériumnak a matematikai formája, hogy a játékosok tudják a saját vélekedéseiket.

Fontos megjegyezni, hogy a 2.1.5. pontban szereplő prior vélekedések nem szerepelnek a tisztán mérhető koncepcióban, azonban az ex-ante megközelítés tárgyalásánál szükség van rá. Ez a prior vélekedés nem független az f_i típusfüggvényektől, köztük kapcsolatot kell feltételezni, amelyet a 3.3. részben tárgyalok. Ezentúl, ha a típusterről lesz szó, akkor a prioros típustert értem alatta. Az így megkonstruált típustér tehát egy elég általános struktúra, amelyben a játékosok vélekedéseit a feltett prior vélekedés némiképp azért behatárol.

2.2. A Bayesi-játék

A nem teljes információs játékok legelterjedtebb megközelítési módja a bayesi megközelítés, ahol az információs hiány valószínűségi változóként jelenik meg. Vagyis, ha egy játékos nem tudja eldönteni, hogy egy adott esemény bekövetkezik-e vagy sem, azt úgy írja le a modell, hogy a játékos egy adott valószínűséget tulajdonít az esemény bekövetkezésének, ezt nevezzük a játékos (szubjektív) vélekedésének. A játékosok szubjektív vélekedései azonban bármilyen valószínűségi eloszlások lehetnek, nem feltétlen kell megegyezniük sem egymással, sem pedig a "valóságra jellemző valószínűségi eloszlással". Annál is inkább, mivel ez utóbbinak a legtöbb esetben nincs is értelme, hiszen a világállapotok közül valójában csak egy fog bekövetkezni, amely sokszor a játékból elérhető információk alapján előre meghatározott.

Az alábbiakban kicsit pontatlanul alkalmaztam a vélekedés kifejezést, hiszen vélekedés alatt többféle dolgot is érthetünk. Prior vélekedésnek nevezzük a játékosok vélekedését a világállapotokról mielőtt még megismernék a típusukat (néha magyarsítva előzetes vélekedésként utalnak rá). A játékos elsőrendű vélekedésének nevezzük a játékosok vélekedését a világállapotokról, miután megismerték a saját típusukat. Másodrendű vélekedésnek hívjuk a játékos vélekedéseit a többi játékos elsőrendű vélekedéséről és a világállapotokról, és így tovább.

A fenti pontatlanságot azért engedtem meg magamnak, hiszen a fenti megállapítások állnak a vélekedések összes fajtájára. Azonban a különböző vélekedések

nem függetlenek egymástól, fontos, hogy egymással konzisztensek legyenek. A prior és az elsőrendű vélekedés konzisztenciáját bővebben a 3.3. pontban tárgyalom, míg az n -ed rendű vélekedések konzisztenciájáról például Pintér [2008]-ban lehet többet megtudni.

A Bayesi-játékok esetében fel szokás tenni, hogy köztudott, hogy a játékosok ismerik a játékot. A köztudottság egy igen bonyolult fogalom, bővebben Aumann [1999a] cikkében lehet utána járni, itt álljon róla csupán annyi, hogy ez nem csak azt jelenti, hogy minden játékos ismeri a játékot beleértve a típusteret is, hanem azt is tudja, hogy a többiek ismerik a játékot és hogy a többiek tudják, hogy ő tudja, hogy ismerik a játékot, és így tovább a végtelenségig.

Az alábbi definíciót Osborne and Rubinstein [1994] alapján dolgoztam ki, azonban míg ők nem definiálnak típusteret, helyette típushalmazokat használnak, addig az alábbi definícióban némileg általánosabban egy típustér szerepel. A különbség abból adódik, hogy míg ők felteszik, hogy a játékosoknak véges sok "típusuk" van, addig a fenti típustér nem él ilyen feltétellel.

2.2.1. definíció. Egy $G = (N, \mathcal{T}, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ struktúrát Bayesi-játéknak nevezünk, ahol

- N a játékosok nemüres halmaza, ahol $0 \notin N$,
- $\mathcal{T} = (H, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ a 2.1.4. definícióban említett típustér,
- A_i az i játékos nemüres cselekvéshalmaza (akcióhalmaza). Jelölje ekkor $A \triangleq \times_{i \in N} A_i$ a cselekvésteret,
- $u_i : \Omega \times A \rightarrow \mathbb{R}$ az i játékos kifizetőfüggvényét jelöli, ahol $u_{i|\Omega} \mathcal{M}_i$ -mérhető.

2.2.2. megjegyzés. A G Bayesi-játék stratégiai formába történő átírásához praktikus okokból fel kell tennünk még, hogy $u_{i|\Omega} p_i$ -integrálható.

A definícióból jól látszik, hogy míg a világállapotok és a típusfüggvények megjelennek a típustérben (az előbbieket Ω reprezentálja, míg az utóbbiakat az f_i és g függvények), addig a típusokat közvetlenül ebben a definícióban nem találhatjuk meg. Ez abból adódik, hogy ha nem tesszük fel, hogy a játékosoknak csak véges sok típusa lehetséges, akkor az Ω számunkra megfelelő információs partíciókra való felbontása nem feltétlenül lehetséges. Ezt a problémát a következő fejezetben fogom bővebben tárgyalni.

3. fejezet

A Bayesi-játék stratégiai formájai

Az alábbiakban a fent definiált Bayesi-játékot annak kezelhetősége érdekében vissza fogom vezetni egy a szakirodalomban már jól ismert játékra, az úgy nevezett stratégiai formában felírható játékra. Ez a forma sokkal egyszerűbben kezelhető, és pont emiatt többféle egyensúlyfogalmat is alaposan körüljártak már rajta. Ezen tulajdonságai miatt szeretnénk átalakítani a Bayesi-játékokat is ebbe a formába.

3.0.3. definíció (Játék stratégiai formája). Egy $G = (N, , \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ módon felírt játékot stratégiai formában felírt játéknak nevezünk, ahol

- N a játékosok nemüres véges halmazát,
- A_i nemüres halmaz a játékosok cselekvéshalmazát,
- $u_i : \Omega \times (\times_{i \in N} A_i) \rightarrow \mathbb{R}$ a játékosok kifizetőfüggvényét jelöli.

A szakirodalom addig egyet is ért, hogy a játékot fel kell írni stratégiai formába, azonban a felírás módja egyáltalán nem triviális. Mas-Colell et al. [1995] és sok más cikk az ex-ante stratégiai formát, míg mások, köztük Osborne and Rubinstein [1994] az interim stratégiai formát alkalmazza. Battigalli et al. [2011] ezen felírási módok egyensúlyait vizsgálja, és egy egyszerű példával rávilágít arra, hogy a két felírási mód nem ekvivalens egymással, többek között az interim racionalizálható stratégiák halmaza szűkebb az ex-ante racionalizálhatókénál. Azonban Battigalli et al. [2011] és Mas-Colell et al. [1995] is kimondja, hogy bizonyos esetekben a Nash-egyensúly a két felírási módban megegyezik.

Az általam használt típustér általános volta miatt ezek a feltételek nem teljesülnek, így két különböző definíció is adódik a Bayesi-Nash-egyensúlyra. Erről bővebben a 4. fejezetben lesz szó.

3.1. Ex-ante és interim megközelítés

Mint arra már többször is utaltam a nem teljes információs játékok egyensúlyának keresésekor visszavezetjük az adott játékot stratégiai formába, amelynek révén az alapvető játékelméleti fogalmakat használhatóvá tesszük (általánosítjuk) a Bayesi-játékokra is. A szakirodalom (például Battigalli et al. [2011]) kétféle visszavezetési módot (elvet) különít el egymástól, az interim illetve az ex-ante megközelítésmódot.

Érdekeség, hogy már Harsányi [1967-68] is említette a Bayesi-játékok visszavezetésének mindkét módját, így a két visszavezetési mód gyakorlatilag egy idős a Bayesi-játékkal.

Az ex-ante megközelítésmód lényege, hogy a játékosok minden általuk megkülönböztethető világállapot esetére készítenek egy stratégiát, amely a játékos minden típusához hozzárendel egy cselekvést. Ezen stratégiák összessége lesz az ex-ante stratégiai formában a játékos cselekvéshalmaza. A játékosok ezen stratégiák közül válogathatnak. Tehát egy játékos stratégiái megmutatják, hogy a játékos az összes általa megkülönböztethető szituációban, hogyan fog viselkedni.

A stratégiaprofilok a játékosok adott stratégiáinak együttese, tehát egy adott stratégiaprofil megmondja, hogy mit játszanak a játékosok az egyes világállapotokban. A játékosok az egyes stratégiaprofilokhoz tartozó kifizetései a prior vélekedés alapján határozódnak meg, vagyis az adott stratégiaprofil mellett a játékosok kifizetései várható értéke lesz.

Az ex-ante stratégiai formában tehát a játékosok még mielőtt bármilyen információhoz jutnának, eldöntik, hogy milyen esetben mit lépnek, majd csak ezután figyelik meg a típusukat.

Az interim megközelítésmód esetében azonban a természet „lép” először. A játékosok azután döntenek a vélekedésükről, hogy megkapják az információt, amit a természet „szán” nekik (vagyis miután megtudják a saját típusukat). A természet gyakorlatilag meghatározza a játékost az általa küldött jelzéssel, tehát minden játékosnak annyi fajtája lesz, ahány féle jelzést kaphat, vagy más szóval ahány féle típusa van.

Miután megtudta a játékos, hogy mi is a típusa, beleépíti a vélekedésébe, így kapja meg a fent említett elsőrendű vélekedését. Ebből adódik, hogy a különböző típusokban a játékosok vélekedése különbözik. Egy adott típusú játékos csak egyféle cselekvést választhat (hiszen a típusok azonosak az informáltsággal), azonban nem tudja pontosan, hogy az ellenfeleinek mi a típusa, ezért egy "csonka stratégiaprofil" képzel a játékos, amely tartalmazza az ő típusát, és a többi játékos összes típusát. Ezt a fajta megközelítést tekinthetjük úgy is, mintha a fenti stratégiaprofilokat leszűkítenénk oly módon, hogy rögzítjük az egyik játékos típusát.

A kifizetések ezen "csonka stratégiaprofilokhoz" rendelődnek hozzá, de az interim stratégiai forma esetén az egyes típusokban a prioroknál több információt tartalmazó elsőrendű vélekedések is rendelkezésre állnak, így ez alapján kaphatjuk meg az egyes típusokhoz tartozó interim kifizetéseket. Így az egyes típusokban a játékosunk minden "csonka cselekvésprofilhoz" számít egy várható értéket az elsőrendű vélekedései alapján.

Ebből adódóan a különböző játékosok különböző típusai eltérhetnek mind a kifizetésekben, mind a többi játékos típusáról való vélekedésben, így egész más eredményt kaphatunk, ha ugyanazon feltételek mellett más típusú játékosok találkoznak. Ezt az egyensúlykeresésnél figyelembe kell venni. Ennek a problémának az interim megoldása, hogy egy olyan játékot konstruálunk, ahol minden típus találkozik minden típussal, így egyetlen féle interakciót sem hagyunk figyelmen kívül. Ügyesen meghatározott kifizetőfüggvényekkel pedig azt is el lehet érni, hogy az egyes játékosok saját típusai indifferensek legyenek egymásra (vagyis a játékos egyik típusának döntésének változása ne zavarja a másik kifizetését.)

Így végső soron egy olyan játékhoz jutunk, ahol minden játékos típusa egy külön játékos, akinek saját vélekedése és saját kifizetőfüggvénye van.

3.2. Típusok megjelentetése a modellben

3.2.1. megjegyzés. *Ebben az alfejezetben általánosságban tárgyalom a típus megjelenésének problémáját, így itt nem szükséges feltenni a prior vélekedéseket.*

A típusok, mint már többször is utaltam rá, nem mások, mint az egyes játékosok informáltsága. Véges esetekben ezt leginkább a világállapotok Ω halmazának partíciókra való bontásával lehet jól szemléltetni, ahol az egyes partíciók jelölik a típusokat.

Az általam használt típustérben nem jelennek meg közvetlenül a típusok, ennek oka, hogy Ω -t nem feltétlenül lehet olyan partíciókra bontani, ahol a partíciók benne vannak az i játékos informáltságát reprezentáló $\mathcal{M}_i$ halmazrendszerben. Azonban a Bayesi-játék stratégiai formájának felírásához szükségünk van a típusokra.

3.2.2. definíció (Típusreláció). *Legyen $(H, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ egy típustér. Tekintsük az $R_i : \Omega \times \Omega$ relációt, ahol $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ esetén $\omega_1 R_i \omega_2$ azt jelense, hogy $\forall A \in \mathcal{M}_i : \omega_1 \in A \Rightarrow \omega_2 \in A$. Ezt a relációt a Ω típusrelációjának nevezzük.*

A típusreláció "összekapcsolja" azokat a világállapotokat, amelyeket az adott játékos nem tud megkülönböztetni egymástól. A célom vele az, hogy a világállapotokat a típusoknak megfelelő csoportokba soroljuk. Azonban hogy a fenti definíció

valóban garantálja azt, hogy a típusreláció szét képes választani az egyes típusokat egymástól, még nem látszik. A következő állítás segítségével viszont megmutatjuk, hogy valóban csoportokba sorolja a világállapotokat.

3.2.3. állítás. *A $\mathcal{T}$ típustéren értelmezett R_i típusrelációk ekvivalencia relációk.*

Bizonyítás:

1. Reflexivitás: Definícióból azonnal adódik.
2. Szimmetria: Indirekt tegyük fel, hogy $\omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall A \in \mathcal{M}_i$ esetén $\omega_1 \in A \Rightarrow \omega_2 \in A$ ($\omega_1 R_i \omega_2$), de $\exists B \in \mathcal{M}_i$, hogy $\omega_2 \in B$ és $\omega_1 \notin B$ ($\omega_2 R_i^c \omega_1$). Vegyünk egy tetszőleges $C \in \mathcal{M}_i$ halmazt, amelyre $\omega_1 \in C$. Ilyen biztosan létezik, hiszen $\Omega \in \mathcal{M}_i$. Vegyük észre, hogy $C \setminus B \in \mathcal{M}_i$, mivel $\mathcal{M}_i$ komplementumzárt. Ekkor $\omega_1 \in C \setminus B$ és $\omega_2 \notin C \setminus B$, ami pedig ellentmondás.
3. Tranzitivitás: Legyen tetszőleges $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$, amelyekre $\omega_1 R_i \omega_2, \omega_2 R_i \omega_3$. A definíciót felhasználva láthatjuk, hogy

$$\forall A \in \mathcal{M}_i : \omega_1 \in A \Rightarrow \omega_2 \in A \Rightarrow \omega_3 \in A.$$

Amiből következik, hogy $\omega_1 R_i \omega_3$.

□

Ez pontosan azt jelenti, hogy a relációban lévő világállapotok olyan ekvivalenciaosztályokat hoznak létre, amelyek elemeit az adott játékos nem képes megkülönböztetni egymástól. Ebből adódik a következő definíció.

3.2.4. definíció (Típushalmaz). *Legyen $\mathcal{T}$ egy típustér és R_i az i játékos típusrelációja, ekkor jelölje $T_i = (\Omega, R_i)$ az R_i Ω -n vett hányadossterét. A T_i halmazt ezután az i játékos típushalmazának nevezzük.*

A típushalmazok tartalmazzák a játékosok lehetséges típusait, azaz a t_i ekvivalenciaosztályokat. Azonban még nincs kész, hiszen a következőkben erőteljesen szeretnék támaszkodni arra, hogy azonos típusba tartozó világállapotokban ne különbözhessen a játékos vélekedése. Ez egy elég logikus követelmény, hiszen ha két világállapotban mást gondol a játékos akkor azt a két állapotot meg kellene, hogy tudja különböztetni. Ezt a követelményt látjuk be az alábbiakban.

3.2.5. állítás. *Legyen $\mathcal{T} = (H, \{(\Omega, \mathcal{M}_i)\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ egy típustér és $\{T_i\}_{i \in N}$ a rajta értelmezett típushalmazok. Ekkor tetszőleges $t_i \in T_i$ esetén, ha $\omega_1, \omega_2 \in t_i$, akkor $f_i(\omega_1) = f_i(\omega_2)$.*

Bizonyítás: Legyen $f_i(\omega_1) = \mu_1$ és $f_i(\omega_2) = \mu_2$ ($\mu_1, \mu_2 \in \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i})$). Ekkor $\mu_1 = \mu_2$ pontosan akkor, ha $\forall A \in \mathcal{M}_{-i}$ esetén $\mu_1(A) = \mu_2(A)$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\mu_1 \neq \mu_2$. Ez a fenti miatt azt jelenti, hogy $\exists A \in \mathcal{M}_{-i}$, amelyre $\mu_1(A) < \mu_2(A)$. (Fordított reláció esetén átindexeléssel ugyanezt kapjuk.) Ekkor $\exists p \in [0, 1]$, amelyre $\mu_1(A) < p < \mu_2(A)$.

Az $\Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i})$ -n értelmezett a 2.1.1. definícióban szereplő $\mathcal{A}^*$ σ -algebra definíciója miatt $\exists U \in \mathcal{A}^*$, amelyre $\mu_2 \in U$, de $\mu_1 \notin U$.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\omega_2 \in f_i^{-1}(U)$ és $\omega_1 \notin f_i^{-1}(U)$. Viszont f_i $\mathcal{M}_i$ -mérhető, tehát $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{M}_i$. Ez pedig ellentmondás.

□

Az alábbiakban az informáltságra alapozva definiáltuk a típusokat, és megmutattuk, hogy egy típusban a játékos csak egyféleképp vélekedhet. Azonban mielőtt nekilátnánk a stratégiai formák felírásának, még meg kell ismerkednünk a vélekedések mögött meghúzódó matematikai problémákkal.

3.3. A prior és az elsőrendű vélekedés konzisztenciája

A Bayesi-játék ex-ante és az interim megközelítés egy fontos különbsége az általuk alkalmazott vélekedésekben rejlik. Az első esetben a prior vélekedés alapján hozzuk meg a döntéseinket, választjuk ki a megfelelő stratégiát, míg a másodikban az elsőrendű vélekedéseinket alkalmazzuk. Egyszerűbb esetekben az elsőrendű vélekedés nem más, mint a már jól ismert feltételes valószínűség, azonban ez az út ilyen formában nem mindig járható. Ugyanis a feltételes valószínűség naiv definíciója feltételezi, hogy a típusunk mérhető halmaz, ráadásul nem nulla valószínűségű. Ezek a feltételek azonban ritkán teljesülnek ilyen formában, így ez a megközelítés nem vezet eredményre.

Emiatt a feltételes valószínűség naiv definíciója helyett egy általánosabb, mérhető struktúrákra jól alkalmazható megközelítést fogok alkalmazni. Az alábbiakban Medvegyev [2002] alapján röviden bemutatom a fenti probléma feloldásához szükséges matematikai háttérrel, illetve rávilágítok a témával való kapcsolatára.

3.3.1. definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ tetszőleges mérhető terek. A

$$P : X \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

függvényt átmenetvalószínűségnek mondunk, ha

1. minden rögzített $B \in \mathcal{B}$ halmazra az $x \rightarrow P(x, B)$ függvény $\mathcal{A}$ -mérhető,

2. minden rögzített $x \in X$ -re a $B \rightarrow P(x, B)$ valószínűségi mérték az $(Y, \mathcal{B})$ téren.

3.3.2. megjegyzés. Tetszőleges $\mathcal{T}$ típustér esetén az f_i típusfüggvények valójában átmenetvalószínűségek.

3.3.3. definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy tetszőleges valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, valamint a $\mathcal{B}$ egy tetszőleges σ -algebra, amelyre $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Ekkor az $M(\xi, \mathcal{B})$ -fel jelölt kiterjesztett valós szám értékű függvényt feltételes várható értéknek nevezzük, ha minden $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$\int_B \xi dP = \int_B M(\xi, \mathcal{B}) dP.$$

Speciálisan, ha $\xi = \chi_A$, akkor ezt a feltételes várható értéket $P(A|\mathcal{B})$ módon jelöljük és feltételes valószínűségnek nevezzük. Ekkor a fenti definíció egyenlőség az alábbiak adódik:

$$P(A \cap B) = \int_B P(A|\mathcal{B}) dP \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

3.3.4. megjegyzés. A Radon-Nikodym tétel következtében $P(\cdot|\mathcal{B})$ P -majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott.

3.3.5. definíció. Egy tetszőleges Bayesi-játék esetén a prior és az elsőrendű vélekedés egymással konzisztens, ha az f_i $\mathcal{M}_i$ -mérhető, és

$$f_i(\omega) \doteq \begin{cases} p_i(\cdot|\mathcal{M}_i) & , \text{ ha } \forall A \in \mathcal{M}_i, \omega \in A \text{ esetén } p_i(A) > 0, \\ \nu & \text{ egyébként,} \end{cases}$$

ahol $p_i(\cdot|\mathcal{M}_i)$ a p_i -ből származó feltételes valószínűség, ν pedig egy tetszőleges valószínűségi mérték $\Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i})$ -ből.

Az alábbiakban megismerhettük a prior és az elsőrendű vélekedést meghatározó f_i típusfüggvények kapcsolatát. Jól látható, hogy a kettő szoros kapcsolatban áll egymással, ami nem mond ellent a logikának, hiszen azzal, hogy kap a játékos egy új információt, az eddigi vélekedéseit nem dobja sutba. Kivétel akkor, ha egy olyan információ birtokába jut, amelyre nem számított, ilyenkor egy teljesen új vélekedést kell felállítania.

3.4. Interim és ex-ante megközelítés a modellben

Mielőtt még felírnám a Bayesi-játék interim és ex-ante stratégiai formáját, még egy fontos lépést be kell iktatni. A stratégiai formákban cselekvés gyanánt használt

stratégiák meghatározásánál több szempontot is figyelembe kell venni. A fentiekben említett "csonka stratégiát" nem definiálom, bár az interim stratégiai forma az elmondottak alapján indokolná. Viszont mindjárt látni fogjuk, hogy az alább bemutatott stratégia definíció az interim stratégiai forma esetében is használható, sőt egyszerűbb formát kölcsönöz neki.

3.4.1. definíció (Stratégia, stratégiahalmaz). *Legyen G egy tetszőleges Bayesi-játék. Vegyünk ekkor egy $s_i : \Omega \rightarrow A_i$ $\mathcal{M}_i$ -mérhető függvényt. Ekkor az s_i függvényt az i játékos stratégiájának nevezzük. Ezen stratégiák összességét tartalmazó S_i halmazt pedig az i játékos stratégiahalmazának, valamint a $\times_{i \in N} S_i$ elemeit stratégiaprofiloknak nevezzük.*

Amint látható, ez a stratégia definíció nem a stratégiai formákhoz, hanem a Bayesi-játékhoz van konstruálva, így nem kell két különböző (ex-ante és interim) stratégiát bevezetni. Ennek a kényelmi szempontokon túl az a szerepe, hogy az egyensúlyi stratégiák így közvetlenül összehasonlíthatóak lesznek.

3.4.2. definíció (Bayesi-játék interim stratégiai formája). *A 2.2.1. definícióban szereplő $G = (N, \mathcal{T}, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ Bayesi-játék interim stratégiai formájának nevezzük a $G^{int} = (T, \{A_{t_i}\}_{t_i \in T}, \{u_{t_i}\}_{t_i \in T})$ játékot, ahol*

- $T \doteq \bigcup_{i \in N} T_i$, ahol T_i az i játékos típusalmaza,
- $A_{t_i} \doteq A_i$, $i \in N, t_i \in T_i$,
- $u_{t_i} : S \rightarrow \mathbb{R}$, $u_{t_i}(s) \doteq \int_{\Omega} u_i(\omega, s(\omega)) d\mu_{t_i}$, ahol $\mu_{t_i} \doteq f_i(\omega')$, ha ω' eleme t_i ekvivalenciaosztálynak, és $s \in S$ egy tetszőleges stratégiaprofil.

A fenti egyszerűsítés miatt az interim stratégiai forma nem pontosan egyezik meg a 3.0.3. definícióban szereplő stratégiai formával. A játékosok halmaza itt is ugyanazt a szerepet tölti be, csak ez esetben az összes játékos összes típusa (T) lesz az. Az "interim játékosok", vagyis a típusok akciói szintén hasonló szerephez jutnak, mint a stratégiai forma definícióban. Ez esetben az egyes típusok cselekvéshalmaza meg fog egyezni a hozzá tartozó játékos cselekvéshalmazával, ugyanis a játékosok minden világállapotban ugyanazon cselekvések közül választhatnak.

Eddig ez teljes mértékben megegyezik a stratégiai formára felírt definícióval, azonban hamar szemet szúrhat, hogy a kifizetőfüggvények ezúttal nem a cselekvésprofilokhoz rendelődnek hozzá, hanem a Bayesi-játékból "segítségül hívott" stratégiaprofilhoz. A cselekvéshalmazos hozzárendelést azért vetettem el, mivel rögzített

világállapotok esetén minden játékos típusa adott, így az u_i függvények csupán ezen típusok akcióitól függnének. Ezt csak feleslegesen bonyolult jelölésekkel lehetett volna megoldani, aminek pusztán annyi előnye lett volna, hogy így megkapjuk az egzakt definíciót.

Az s függvény valójában nem tartalmaz különböző információt, mint az interim cselekvésprofil, hiszen az s_i -k mérhetősége biztosítja számunkra, hogy egy adott típuson belül a játékos ne alkalmazhasson több különböző cselekvést. Így az s pontosan azt határozza meg, hogy melyik játékos mely típusa esetén mit játszik. Tehát valójában csak látszólagos a különbség, ezért az így előállt játék formája valóban stratégiai forma.

Érdemes még megjegyezni, hogy az interim stratégiai formában az "interim játékosok" mindegyike rendelkezik egy önálló vélekedéssel (ez a játékosok elsőrendű vélekedése az adott típusban), amely alapján számolják ki a várható kifizetéseket. Megfigyelhető továbbá, hogy nem használtuk a p_i prior vélekedéseket, helyettük a típusból származó elsőrendű vélekedésekkel dolgoztunk. Ebből adódóan az interim felírás esetén nincsen szükség prior vélekedésekre, így az interim formában típusról p_i nélkül, általánosabban használható.

3.4.3. definíció (Bayesi-játék ex-ante stratégiai formája). A 2.2.1 definícióban szereplő $G = (N, \mathcal{T}, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ Bayesi játék ex-ante stratégiai formájának nevezzük a $G^{ex} = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i^{ex}\}_{i \in N})$ játékot, ahol

- N a játékosok halmaza,
- S_i az i játékos stratégiahalmaza,
- $u_i^{ex}(s) \doteq \int_{\Omega} u_i(\omega, s(\omega)) dp_i$, ahol $s \in \times_{i \in N} S_i$.

Az ex-ante stratégiai forma felírása esetén pontosan visszakaptuk a stratégiai formát, amit előzetesen definiáltunk. Az N továbbra is maradt a játékosok halmaza, a játékosok cselekvései azonban a Bayesi-játék stratégiái lettek. Itt fontos megjegyezni, hogy a stratégia és a cselekvés között lényegi különbség van, azonban ebben az esetben a kettő némiképp összemosódik. Figyelni kell arra, hogy ha ex-ante formáról beszélünk, akkor a Bayesi-játék stratégiáit cselekvéseknek kell neveznünk, egyébként ragaszkodnunk kell a stratégia elnevezéshez.

Látható továbbá, hogy itt a prior vélekedések fontos szerepet kapnak a kifizetőfüggvények kiszámolásánál, így azok semmiképp nem hagyhatóak el. Ezen vélekedések alapján számoljuk ki ugyanis a várható kifizetésünket. Ez utóbbi az egyik legfontosabb különbség az interim és az ex-ante stratégiai forma között.

4. fejezet

A Bayesi-Nash-egyensúly

4.1. Az ex-ante és az interim Bayesi-Nash-egyensúly

Az alábbi fejezetben a stratégiai formában felírt játékoknál már jól ismert Nash-egyensúly fogalmat fogom megvizsgálni a Bayesi-játékok interim illetve ex-ante stratégiai formái esetében. A szakirodalom már régóta alkalmazza az ex-ante stratégiai formát, így Mas-Colell et al. [1995] is ennek a formának a segítségével definiálta a Bayesi-Nash-egyensúlyt. Osborne and Rubinstein [1994] viszont az interim stratégiai formát részesítette előnyben, így ők erre építették az egyensúlyfogalmukat.

Ahhoz, hogy a két felírási mód különbözőségének nem tulajdonítottak igazán fontos szerepet, nagyban hozzájárult a kétféle Bayesi-Nash-egyensúly látszólagos egybeesése, mint ezt az 1.1.1. pontban szereplő példa is jól mutatja. Azt, hogy bizonyos körülmények között egy Bayesi-játék mindkét formában felírva azonos Bayesi-Nash-egyensúlyi stratégiaprofíllal rendelkezik már Mas-Colell et al. [1995] is megmutatta, de Battigalli et al. [2011] is hivatkozik rá.

Azonban ők több olyan feltételt is szabtak a Bayesi-játékhoz, amelyek az általam definiált játékokban nincsenek benne. Ezek közül egyet kell kiemelni, nevezetesen azt, hogy a játékosok prior vélekedései olyanok, hogy az összes típusuknak pozitív valószínűséget tulajdonítanak. Ennek a feltételnek a sérülése elegendő arra, hogy létezessen olyan stratégia, amely csak az ex-ante stratégiai forma esetén lesz Nash-egyensúlyi, ahogy ezt az 1.1.2. pontban szereplő példa is mutatja.

Tehát a két felírási formához tartozó Bayesi-Nash-egyensúlyok eltérhetnek egymástól. Ennek oka az ex-ante megközelítésben rejlik. Ekkor ugyanis a játékosok előzetes p_i vélekedésük alapján határozzák meg a várható kifizetésüket, így azon típusaik cselekvését, amelyek bekövetkezésére „nem számítanak”, vagyis pontosabban kifejezve 0 valószínűséget tulajdonítanak, gyakorlatilag figyelmen kívül hagyják. (Mértékelméleti megfontolásokkal élve a függvény nullmértékű halmazon való meg-

változtatása nem változtatja meg az integrál értékét).

4.1.1. definíció (Nash-egyensúly). Egy $(N, (A_i), u_i)$ stratégiai formában felírt játék esetén egy $a^* \in A$ cselekvésprofil Nash-egyensúlyi profilnak, vagy röviden Nash-egyensúlynak nevezünk, ha tetszőleges i esetén minden $a_i \in A_i$ -re

$$u_i(a_{-i}^*, a_i) \leq u_i(a_{-i}^*, a_i^*)$$

teljesül.

A Nash-egyensúly az interim stratégiai formában felírt Bayesi-játék esetén *minden játékos minden típusához* hozzárendel egy cselekvést, amelytől ha eltér, akkor az adott típus kifizetése biztosan nem lesz magasabb, mint az egyensúlyi cselekvés esetén.

A Nash-egyensúly az ex-ante stratégiai formában felírt Bayesi-játék esetén *minden játékoshoz* hozzárendel egy függvényt, amely meghatározza, hogy melyik típusa esetén melyik cselekvést válassza. Bármely játékos egyoldalú eltérése az adott függvénytől nem növelheti az adott játékos várható kifizetését.

4.1.2. állítás. Az ex-ante stratégiai formában felírt Bayesi-játék esetén az i játékos kifizetése nem változik, ha a stratégiaprofil p_i -nullmértékű halmazon megváltozik.

Bizonyítás: Legyen G^{ex} játék esetén $M \in \mathcal{M}_i$ p_i -nullmértékű halmaz, $s, s' \in S$ a G^{ex} játékhoz tartozó cselekvésprofilok, hogy $\forall \omega \in \Omega \setminus M$ esetén $s(\omega) = s'(\omega)$.

Ekkor

$$\begin{aligned} u_i^{ex}(s) &\doteq \int_{\Omega} u_i(\omega, s(\omega)) dp_i = \int_{\Omega \setminus M} u_i(\omega, s(\omega)) dp_i + \int_M u_i(\omega, s(\omega)) dp_i \\ u_i^{ex}(s') &\doteq \int_{\Omega} u_i(\omega, s'(\omega)) dp_i = \int_{\Omega \setminus M} u_i(\omega, s'(\omega)) dp_i + \int_M u_i(\omega, s'(\omega)) dp_i \end{aligned}$$

Azonban

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus M} u_i(\omega, s(\omega)) dp_i &= \int_{\Omega \setminus M} u_i(\omega, s'(\omega)) dp_i \\ \int_M u_i(\omega, s(\omega)) dp_i &= 0 = \int_M u_i(\omega, s'(\omega)) dp_i \end{aligned}$$

□

4.1.3. megjegyzés. Mivel az i játékos t_i típusai nem feltétlenül elemei a $\mathcal{M}$ információs halmazrendszernek, így ha $t_i \notin \mathcal{M}$, akkor $p_i(t_i)$ nem értelmezhető, tehát a nulla valószínűségű típus sem értelmezhető ekkor. Azonban a 3.3.5. definíciót alapul véve egy kis pontatlansággal nevezhetjük azokat a típusokat nulla valószínűségűnek, amelyekre $\omega \in t_i$ esetén létezik olyan $A \in \mathcal{M}$, hogy $\omega \in A$ és $p_i(A) = 0$.

4.1.4. következmény. Nulla valószínűségű típus esetén az i játékos ex-ante kifizetése nem változik, ha az adott típus esetén mást játszik.

Az alábbiakból az következik, hogy az ex-ante stratégiai formában, ha egy játékos nem számít egy esemény bekövetkezésére, akkor teljesen mindegy számára, hogy a többi játékos vagy akár ő maga milyen stratégiát dolgoz ki arra az esetre, ha ez következne be. Az 1.1.2. pontban található példa esetén ez annyit jelent, hogy Anna meggyőződése arról, hogy fejet dob gyakorlatilag érdektelenné teszi őt affelől, hogy mi történik akkor, ha mégis írás lesz. Ez amiatt érezhető problémásnak, mert a valóságban, ha netán Anna mégis írást dobna, akkor biztosan nem lenne számára mindegy, hogy mit választ.

A 4.2.1. példában egy olyan játékot vázolok fel, amikor is a játékosoknak végtelen sok típusa van, és mindegyik bekövetkezésének valószínűsége 0. Ekkor, amint majd később látni fogjuk, az ex-ante Bayesi-Nash-egyensúly megengedi számunkra, hogy az egyes világállapotokban bármit játszunk, feltéve hogy a "világállapotok többségében jól játszunk". Ez a nagyfokú szabadság szintén az előbb leírtak miatt érezhető kissé zavarónak.

Azonban a két forma Bayesi-Nash-egyensúlya között mégis megfigyelhetünk némi kapcsolatot, amelyet az alábbi tétel mond ki.

4.1.5. tétel. Egy G Bayesi-játék esetén az interim Bayesi-Nash-egyensúly ex-ante Bayesi-Nash-egyensúly is egyben.

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy az $u_i(\omega, s(\omega))f_i(\omega)(\Omega)$ valójában nem más, mint a 3.3.3. definícióban szereplő feltételes várható érték. Tetszőleges $B \in \mathcal{M}_i$ és tetszőleges, de rögzített $A \in \mathcal{M}$ esetén

$$\int_B u_i(\omega, s(\omega))f_i(\omega)(A)dp_i = \int_B u_i(\omega, s(\omega))d(f_i(\cdot)(A)p_i)$$

de mivel tetszőleges $C \in \mathcal{M}_i$ esetén $(f_i(\cdot)(A)p_i)(C) = \int_C f_i(\omega)(A)dp_i = p_i(A \cap C)$, így ha $p_i^A(C) \doteq p_i(C \cap A)$, akkor

$$\int_B u_i(\omega, s(\omega))d(f_i(\cdot)(A)p_i) = \int_B u_i(\omega, s(\omega))dp_i^A.$$

Ha viszont $A = \Omega$, akkor $p_i^A = p_i$, tehát tetszőleges $B \in \mathcal{M}_i$ esetén fennáll a

$$\int_B u_i(\omega, s(\omega)) f_i(\omega)(\Omega) dp_i = \int_B u_i(\omega, s(\omega)) dp_i. \quad (*)$$

Ebből már adódik, hogy ha s interim Bayesi-Nash-egyensúlyi stratégiaprofil, akkor minden $i \in N$, minden $\omega \in \Omega$ és minden $s' \in S$ stratégiaprofil esetén

$$u_i(\omega, s(\omega)) f_i(\omega)(\Omega) \geq u_i(\omega, s'(\omega)) f_i(\omega)(\Omega),$$

Ekkor természetesen

$$\int_B u_i(\omega, s(\omega)) f_i(\omega)(\Omega) dp_i \geq \int_B u_i(\omega, s'(\omega)) f_i(\omega)(\Omega) dp_i$$

Ekkor felhasználva a *-ot már következik az állítás. □

Az alábbi tétel után megvizsgálva a példáinkat arra juthatunk, hogy az interim Bayesi-Nash-egyensúly szigorúbb definíció. Ha a játékosunk "alkalmazkodik" a bekövetkezett világállapothoz (pontosabban szólva a típusához), akkor mindenképp az interim megközelítés a megfelelő. Az én véleményem így az, hogy az interim Bayesi-Nash-egyensúly inkább magában hordozza a Nash-egyensúlytól elvárható követelményeket, így ennek a használatát javaslom, azonban ez nem jelenti azt, hogy nem létezhet olyan szituáció, amelyet az ex-ante Bayesi-Nash-egyensúly magyaráz meg jobban.

A gyakorlatban előfordulhat, hogy az ex-ante Bayesi-Nash-egyensúly könnyebben kiszámolható, mint az interim. Ilyen esetekben érdemes tudni, hogy milyen feltételek mellett egyezik meg egymással a kettő.

4.1.6. tétel. *Az interim és az ex-ante Bayesi-Nash-egyensúlyi stratégiaprofilok halmazának egyezőségének elégséges feltétele, hogy $p_i(A) = 0$ esetén $A = \emptyset$.*

Bizonyítás: Könnyen belátható, hogy az ilyen típustér csak véges sok típust tartalmazhat. Ezt belátva a feltételek már egybecsengenek Mas-Colell et al. [1995]-ben kidolgozott tételével. □

A bizonyításból jól látható, hogy ez az általam használt típustérre való átfoglalozása a Mas-Colell et al. [1995] által alkalmazott "ne legyenek nullmértékű típusok" feltételnek.

Végezetül lássunk egy konkrét példát a Bayesi-Nash-egyensúlyra végtelen sok típust tartalmazó típustér esetén. A példa azt a célt szolgálja, hogy érzékeltesse az olvasóval az ex-ante "pontatlanságát", és bemutassa a fenti állítások gyakorlatban való megvalósulását.

4.2. Példa a Bayesi-Nash-egyensúlyra végtelen sok típus esetén

4.2.1. példa. *Két játékos játszik egy játékot. Mindkét játékosnak van egy kedvenc száma 0 és 1 között, amelyet kizárólag az adott játékos ismer. Ezután mindketten felírnak egy számot szintén 0 és 1 között, és megmutatják egymásnak. A **-ban szereplő függvény megmondja, hogy ha az első játékos kedvenc száma, h_1 és x_1 az általa felírt szám, a második játékosé pedig h_2 illetve x_2 , akkor mennyi az egyes játékosok kifizetése. A játékosok prior vélekedése a kedvenc számok alakulásáról egyenletes eloszlást követ, illetve minden játékos úgy véli, hogy az ő kedvenc számától nem függ a másik játékos kedvenc száma.*

$$u_i(h_1, h_2, x_1, x_2) \triangleq 1 - (x_1 x_2 - h_1 h_2)^2 \quad i \in \{1, 2\} \quad (**)$$

Mielőtt a játék egyensúlyát vizsgálnánk érdemes néhány szót ejteni a típusterről. Első lépésként vessünk egy pillantást a természet lehetséges állapotainak halmazára: $H \triangleq [0, 1] \times [0, 1]$. Ez természetesen nem más, mint a síkbeli egységnégyzet. Ennek egy tetszőleges eleme $(h_1, h_2) \in H$ esetén jelölje h_1 az első játékos kedvenc számát, míg h_2 értelemszerűen a második játékos kedvenc számát. Az egyszerűség kedvéért ebben a példában a természet minden állapotában a játékosok vélekedése a másik játékos kedvenc számáról egyenletes eloszlást követ, tehát a H azonosítható az Ω -val.

Látható továbbá, hogy az első játékos által nem megkülönböztethető világállapotokat az alábbi $M_a \triangleq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = a\}$ típusú halmazok jelenítik meg. Szavakban kifejezve ez annyit tesz, hogy amennyiben az első játékos kedvenc száma a , akkor ő nem tud még semmit mondani a másik játékos kedvenc számáról. Így az első játékos informáltságát megjelenítő halmazrendszer már egyértelműen adódik: $\mathcal{M}_1 \triangleq \sigma(\{M_a\}, \forall a \in [0, 1])$. Ezzel szimmetrikusan határozható meg a második játékos informáltságát megjelenítő $\mathcal{M}_2$ halmazrendszer. A természet, mint „0. játékos” szerepe ebben az esetben nem jelentős, hiszen nem birtokol olyan jelentős információt, amelyet a többi játékos valamelyike nem. Emiatt ez esetben nem kell vele külön foglalkozni.

A típustér további elengedhetetlen tartozékai az ezen halmazok közti kapcsolatot megjelenítő függvények. Ezek egyike a világállapotokból a természet állapotait megállapító $g : \Omega \rightarrow H$ függvény, ami a fentiek alapján nem más, mint az identitás függvény, ugyanis ez a két halmaz ez esetben megegyezőnek tekinthető.

Azt, hogy mint gondol az egyes világállapotokban az adott játékos az f_i típusfüggvények segítségével lehet meghatározni, így az $f_i : \Omega \rightarrow \Delta(\Omega, \mathcal{M}_{-i}), f_i((h_1^*, h_2^*)) \triangleq \mu$, ahol μ folytonos valószínűségi változó, melynek $f_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénye:

$$f_\mu(h_1, h_2) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha } h_i \neq h_i^* \\ 1 & \text{ha } h_i = h_i^* \end{cases}$$

Ez pusztán annak a feladatbeli feltételnek a matematikai megnyilvánulása, hogy az egyes játékosok egyenletes eloszlást tulajdonítanak egymás kedvenc számainak.

A Bayesi-játék meghatározásához a típustéren túl szükség van még a játékosok cselekvéshalmazaira is. Az eddigi példákkal ellentétben itt minden játékos A_i -val jelölt cselekvéshalmaza végtelen elemű (ráadásul kontinuum számosságú). A játékosok által választott számok az adott intervallumon belül bárhol előfordulhatnak ($A_i \doteq [0, 1]$). Így a $**$ pontban már felírt kifizetőfüggvénnyel együtt már rendelkezésünkre is áll a Bayesi-játék.

Ebben a játékban a játékosok stratégiáit az $s_i : \Omega \rightarrow [0, 1]$ jelenti, feltéve, hogy ez $\mathcal{M}_i$ -mérthető. Ez a két feltétel összefogható, és $s_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ formában írható, ahol az i játékos lehetséges kedvenc számához rendeljük hozzá az egyes számokat. Ez azért lehetséges, mert a játékosok információshalmazait reprezentálhatjuk a kedvenc számukkal.

A játék interim stratégiai formájában ebből adódóan a játékosokat megjelenítő T halmaz elemei a játékosok kedvenc számai lesznek ($T \doteq N \times [0, 1]$). Az így képzett "interim játékosok" cselekvéshalmaza továbbra is a $[0, 1]$ lesz. A kifizetőfüggvényeket minden $t_i \in T$ -re az

$$u_{t_i}(s) \doteq \int_0^1 u_i(h_1, h_2, s(h_1, h_2)) dh_{-i} = \int_0^1 1 - (x_i s_{-i}(h_{-i}) - h_1 h_2)^2 dh_{-i},$$

ahol $i \in \{1, 2\}$ és h_{-i} a másik játékos lehetséges kedvenc számát jelöli.

A játék ex-ante stratégiai formájában a játékosok halmaza továbbra is az $\{1, 2\}$ marad, míg a cselekvéshalmazuk a fentebb definiált stratégiák lesznek. Ehhez a felíráshoz tartozó kifizetőfüggvény pedig a következő lesz:

$$u_i^{ex}(s) \doteq \int_0^1 \int_0^1 u_i(h_1, h_2, s(h_1, h_2)) dh_1 dh_2 = \int_0^1 \int_0^1 1 - (s_1(h_1) s_2(h_2) - h_1 h_2)^2 dh_1 dh_2.$$

Vegyük az $s_i^*(h_i) = h_i$ stratégiát mindkét játékos esetében. Ekkor az ezekből alkotott stratégiaprofil a Bayesi-játék interim stratégiai formájának Nash-egyensúlya lesz. Ugyanis tetszőleges $t_i \in T$ esetén és tetszőleges $s \in S$ stratégiaprofil esetén:

$$u_{t_i}(s^*) - u_{t_i}(s) = \int_0^1 1 - (h_1 h_2 - h_1 h_2)^2 dh_{-i} - \int_0^1 1 - (x_i s_{-i}(h_{-i}) - h_1 h_2)^2 dh_{-i} =$$

$$= \int_0^1 (x_i s_{-i}(h_{-i}) - h_1 h_2)^2 dh_{-i} \geq \int_0^1 0 dh_{-i} = 0$$

Megjegyzendő, hogy a fentiből a Bayesi-Nash-egyensúlynál több következik, nevezetesen, hogy s^* választása esetén minden játékos kifizetése maximális lesz.

A 4.1.5. tételből következik, hogy az s^* az ex-ante stratégiai forma esetén is Nash-egyensúly lesz. Változtassuk meg valamely j játékos esetén s_j^* cselekvést az alábbi módon: Rögzítsünk két $d, h^* \in [0, 1]$ egymástól különböző számot, és legyen

$$s'_j(h) = \begin{cases} h & \text{ha } h \neq d \\ d & \text{ha } h = h^* \end{cases}.$$

Ekkor, ha tekintjük $s' \in S$ cselekvésprofil, ahol a j játékos ezt az s'_j cselekvést, míg a másik játékos továbbra is az s_{-j}^* cselekvést használja. Ekkor s^* és s' csak azon a halmazon fog különbözni egymástól, ahol j játékos kedvenc száma h^* . Ez az egységnegyzetten egy szakaszt jelent. Nevezzük ezt a halmazt M -nek. Könnyen belátható, hogy $p_i(M) = 0$, így a 4.1.2. állítás miatt minden i -re $u_i(s^*) = u_i(s')$, amiből következik, hogy s' is Nash-egyensúly az ex-ante stratégiai formában.

Az interim stratégiai formában a j játékos h^* típusának (jelölje ezt t_j) kifizetése a két cselekvés esetén viszont különböző:

$$\begin{aligned} u_{t_j}(s^*) - u_{t_j}(s') &= 1 - \int_0^1 1 - (h_{-j}d - h_1 h_2)^2 dh_{-j} = \\ &= 1 - \left[h_{-j} - (d - h_j)^2 \frac{(h_{-j})^3}{3} \right]_0^1 = (d - h_j)^2 > 0. \end{aligned}$$

Ebből adódik, hogy a j játékosnak megéri inkább s_j^* stratégiát választani, tehát s' stratégiaprofil nem lehet Bayesi-Nash-egyensúly az interim stratégiai formában.

Innen látható, hogy ha a játékosok megszámlálhatóan sok esetben eltérnek az s^* stratégiaprofiltól, akkor az ex-ante megközelítés esetén továbbra is Nash-egyensúlyhoz jutunk, azonban az interim esetben nem.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat megírásakor arra próbáltam ügyelni, hogy a csak limitált játékelméleti ismerettel rendelkező olvasó is megérthesse a mondandóm főbb tartalmát (minimális játékelméleti képzettség azonban attól tartok elengedhetetlen), így alaposan kidolgozott példákkal igyekeztem segíteni az olvasót az alapvető fogalmak és problémák megértésében, amelyek talán elősegíthetik a téma iránt érdeklődőnek az absztrakt fogalmak némileg világosabb megértését.

Az alábbi dolgozatban elsősorban a Bayesi-játék ex-ante és interim stratégiai formáját szerettem volna megismertetni az olvasó, illetve felhívni a figyelmet ennek a két felírási módnak a különbségére, különös tekintettel a Bayesi-Nash-egyensúly két különböző definíciójára. Mindezt a lehető legáltalánosabb keretek között igyekeztem megtenni, ugyanis a bonyolultabb modellek esetében jön ki elsősorban az általam tárgyalt különbség. Emellett a Bayesi-játék interim és ex-ante stratégiai formájára egy széles körben alkalmazható definíciót akartam kreálni, amely segítséget nyújt mind nekem, mind a többi a téma iránt érdeklődő számára a további alkalmazásban.

A Bayesi-játék interim stratégiai formájának felírásához bevezettem a típusok fogalmát a tisztán mérhető típustérben. Az így megalkotott interim stratégiai forma definícióm még az univerzális típustér esetén is megállja a helyét.

A Bayesi-játék ex-ante stratégiai formája azonban sokkal kevésbé tűnik megfelelőnek az ilyen általános struktúrán történő meghatározásra, így hogy a két stratégiai formát összehasonlíthassam némiképp szűkítenem kellett a vizsgálható típusterek halmazát.

Az ex-ante és az interim stratégiai forma különbségének tárgyalását elsősorban a Bayesi-Nash-egyensúlyra helyeztem ki. Mindenekelőtt bemutattam, hogy milyen "problémák" merülnek fel az ex-ante stratégiai forma esetén, ha nulla valószínűségű típussal is rendelkezik a típustér. Ezután megmutattam, hogy az interim Bayesi-

Nash-egyensúly szigorúbb, mint az ex-ante, és ez utóbbi két tulajdonsága miatt úgy vélem, hogy az interim Bayesi-Nash-egyensúly inkább kifejezi a Nash-egyensúly mondanivalóját.

Irodalomjegyzék

- Franklin Allen and Stephen Morris. Finance applications of game theory. *Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series 98-23-B*, 1998.
- Robert J. Aumann. Interactive epistemology i: Knowledge. *International Journal of Game Theory*, 28:263–300, 1999a.
- Robert J. Aumann. Interactive epistemology ii: Probability. *International Journal of Game Theory*, 28:301–314, 1999b.
- Pierpaolo Battigalli, Alfredo Di Tillio, Edoardo Grillo, and Antonio Penta. Interactive epistemology and solution concepts for games with asymmetric information. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 11(1), 2011.
- J. C. Ely and M. Peski. Hierarchies of belief and interim rationalizability. *Theoretical Economics*, 1:19–65, 2006.
- János Harsányi. Games with incomplete information played by bayesian players part i., ii., iii. *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502, 1967-68.
- Aviad Heifetz and Dov Samet. Topology-free typology of beliefs. *Journal of Economic Theory*, 82:324–341, 1998.
- A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- Péter Medvegyev. *Valószínűesszámitás: Fejezetek a matematikai analízisből és a valószínűesszámitásból*, volume 1. Aula, 2002.
- M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A course in game theory*. MIT Press, 1994.
- Miklós Pintér. Every hierarchy of beliefs is a type. *CoRR*, abs/0805.4007, September 2008. URL <http://arxiv.org/abs/0805.4007>.
- Miklós Pintér. The non-existence of a universal topological type space. *Journal of Mathematical Economics*, 46:223–229, 2010.