

OTDK-DOLGOZAT

Márkus Judit
BA

2013

A Shapley-megoldás airport játékokon

The Shapley solution for airport games

Márkus Judit

Kézirat lezárva: 2011. március 28.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. TU játékok	3
3. Az airport játékok osztálya	10
4. A Shapley-érték két axiomatizálása	15
5. Airport probléma és airport játék	19
5.1. A modell	19
5.2. Tulajdonságok megfeleltetése	23
5.3. Dubey(1982) valamint Moulin és Shenker(1992) eredménye	25
Irodalomjegyzék	26

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatban egy költségelosztási problémát szeretnénk megoldani. A költségelosztási problémák a gazdasági élet számos területén felmerülnek. Ahol egy adott szolgáltatást együttesen több ember vesz igénybe, rögtön felmerül a kérdés, hogy az adott szolgáltatás költségét milyen arányban osszák el az igénybevevők között. A költségelosztási probléma indukál egy költségjátékot. Ha az egyes játékosok összefogásából megszülető koalíció költsége az őt alkotó játékosok költségének maximuma, akkor airport játékról beszélhetünk. Dolgozatunk középpontjában az airport játékok osztálya áll.

A dolgozatot egy elméleti áttekintéssel kezdjük, amelyben bemutatjuk az átruházható hasznosságú kooperatív játékokat, röviden TU játékokat. Ebben a fejezetben a későbbi vizsgálatokhoz elengedhetetlenül szükséges fogalmakat, állításokat tárgyaljuk. Bemutatásra kerül egy fontos fogalom, a Shapley-érték és ehhez kapcsolódóan a Shapley-megoldás. A költségek elosztásának kérdésekor fontos szerep jut a Shapley-megoldásnak. Valamint igyekszünk gyakorlati példával rávilágítani arra, hogy a költségek elosztásánál használt axiómák jogosan elvárt tulajdonságokat fogalmaznak meg az elosztásra nézve.

Ezután részletesen bemutatásra kerülnek az airport játékok, valamint ezen játékok fontosabb tulajdonságai. Majd igazoljuk, hogy a Shapley (1953) és Young (1985) tételek teljesülnek az airport játékok osztályán is. A Shapley-érték Young-féle axiomatizálásának igazolásához az eredeti Young-féle bizonyítást alkalmazzuk. Az állítást, hogy a fent említett tételek teljesülnek az airport játékok osztályán, először Dubey (1982) illetve Moulin és Shenker (1992) igazolták.

A Thomson (2007) cikk egy áttekintést ad az airport játékok osztályán elért eredményekről. Dolgozatunkban feldolgozzuk az említett cikk egyes fejezeteit. A cikkre támaszkodva igazoljuk Dubey (1982) illetve Moulin és Shenker (1992) eredményeit. A bizonyítás menete során megmutatjuk, hogy a Thomson (2007) cikk axiómái megfeleltethetők a szokásos játékelméleti axiómáknak és mivel a Shapley-érték eredeti Shapley-féle és Young-féle axiomatizációját belátjuk airport játékokra az előző fejezetben, így Dubey illetve Moulin

és Shenker eredményei könnyen igazolhatóak. Ezzel a bizonyítással új igazolást adunk a Dubey (1982) illetve Moulin és Shenker (1992) eredményekre.

A témakörben több alkalmazás, eredmény megtalálható magyar nyelven is a következő munkákban: Csóka (2003), Balog et al. (2010), Pintér (2009), Pintér (2007) és Solymosi (2007).

A Forgó és Olajos (1991) cikk eredménye látszólagos ellentmondásban van jelen dolgozat eredményével az axiomatizáció terén. Ezen ellentmondás vizsgálata és feloldása még további kutatás tárgyát képezi.

2. fejezet

TU játékok

Ebben a fejezetben célunk a TU játékok bemutatása, a dolgozat későbbi fejezeteiben előforduló fogalmak bevezetése és a fontosabb eredmények áttekintése. Ebben segítségünkre volt a Peleg és Sudhölter (2003) könyv, valamint a következő cikk és elektronikus jegyzet: Pintér (2009) és Solymosi (2007)

Legyen N a játékosok egy nemüres, véges halmaza. A játékosok egy $S \subseteq N$ részhalmazát koalíciónak nevezzük. Speciálisan, az N a nagykoalíció, az $\emptyset$ pedig az üres koalíció. Az N halmaz összes részhalmazainak osztályát $\mathcal{P}(N)$ jelöli.

2.1. Definíció. *Legyen $N \neq \emptyset$, $|N| < \infty$ a játékosok egy halmaza. Legyen $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $v(\emptyset) = 0$. Ekkor a v -t átruházható hasznosságú kooperatív játéknak (coalitional game with transferable utility, röviden TU game) nevezzük. Valamint jelölje $\mathcal{G}^N$ az N játékoshalmazzal rendelkező TU játékok osztályát.*

Az átruházható hasznosságú játékok leggyakoribb reprezentációja a következő: a koalíciók emberek csoportját jelentik, a kifizetések pedig pénzben értendők, amit a koalíció tagjai tetszőlegesen feloszthatnak maguk között. A definícióban szereplő v függvény a különböző koalíciókhoz rendel más-más kifizetést. (A kifizetést mérhetjük pénzben vagy bármilyen tetszőleges mértékegységben, vagy pedig jelenthet hasznosságot is.)

2.2. Definíció. *Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék duálisa az a $\bar{v} \in \mathcal{G}^N$ játék, amelyre teljesül minden $S \subseteq N$ koalíció esetén, hogy $\bar{v}(S) = v(N) - v(N \setminus S)$.*

2.3. Definíció. *Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék monoton, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$ teljesül minden $S, T \subseteq N$ koalíció esetén.*

2.4. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és legyen v a következő: $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 1$, $v(\{1, 2\}) = 3$, $v(\{1, 3\}) = 3$, $v(\{2, 3\}) = 4$, $v(\{1, 2, 3\}) = 4$. Látható, hogy a nagykoalíció értékénél (4) nem nagyobb az egyes játékosok kifizetése (rendre 1,2,1), valamint a kétszemélyes koalíciók kifizetése (rendre 3,3,4) is kisebb vagy egyenlő, mint

a nagykoalíció kifizetése. Valamint a kétszemélyes koalíciók kifizetése (rendre 3,3,4) nem kisebb, mint az egy fős koalíciók értéke (rendre 1,2,1).

2.5. Definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék szubadditív, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra, amire $S \cap T = \emptyset$ igaz, teljesül, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$.

2.6. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és legyen v a következő: $v(\{1\}) = 1$, $v(\{2\}) = 2$, $v(\{3\}) = 1$, $v(\{1, 2\}) = 3$, $v(\{1, 3\}) = 2$, $v(\{2, 3\}) = 2$, $v(\{1, 2, 3\}) = 3$. Itt hat esetet kell vizsgálni (az üres halmaz esetében mindig teljesül a feltétel), ugyanis az S, T részhalmazok metszetének üresnek kell lennie, ami az $\{1\}$ - $\{2, 3\}$, $\{2\}$ - $\{1, 3\}$, $\{3\}$ - $\{1, 2\}$, $\{1\}$ - $\{2\}$, $\{1\}$ - $\{3\}$ és $\{2\}$ - $\{3\}$ részhalmazpárookra teljesül. Az első három részhalmazpár esetében az unió a nagykoalíció. Az egyéni kifizetés (rendre 1,2,1) és a hozzátartozó kétszemélyes koalíció kifizetésének (rendre 3,2,2) összege mindegyik esetben nem kisebb a nagykoalíció kifizetésénél (3). Az első két esetben szigorú egyenlőséggel, az utolsó esetben egyenlőséggel teljesül a megadott feltétel. A második három halmazpár esetében az unió a kétszemélyes koalíciókat jelenti. A két fős koalíciók értéke (rendre 3,2,2) nem nagyobb a hozzátartozó két egy fős koalíció kifizetéseinek összegénél (rendre 3,2,3). Látható, hogy az első két esetben egyenlőséggel, az utolsó esetben szigorú egyenlőséggel teljesül a megadott feltétel.

2.7. Definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék konkáv, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra teljesül, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

2.8. Állítás. Minden konkáv játék szubadditív.

Bizonyítás. Szubadditív játékok esetén csak $S \cap T = \emptyset$ halmazokat kell nézni, viszont ez esetben $v(S \cap T) = 0$, amiből az állítás adódik. $\square$

2.9. Definíció. Egy $c \in \mathcal{G}^N$ játék költségjáték, ha nemnegatív, monoton és szubadditív. (A nemnegatív tulajdonság azt jelenti, hogy $c : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$)

Tehát költségjáték alatt egy olyan c függvényt értünk, ami a különböző koalíciókhoz nemnegatív értéket rendel. Ez az érték szimbolizálja, hogy az egyes koalícióknak mennyibe kerül egy adott szolgáltatást igénybe venni. Beszélhetünk még költségelosztási problémáról is (cost allocation problem), amikor adottak az egyes játékosok költségei és ekkor a feladat a nagykoalíció költségének, vagyis az összköltségnek a elosztása a játékosok között.

2.10. Definíció. A $\psi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ függvényt, ahol $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A halmazon értelmezett megoldásnak nevezzük.

Megjegyzés: $A \rightrightarrows$ jelölést halmazértékű függvény megadására alkalmazom.

2.11. Definíció (Gillies (1959)). Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok egy halmaza, a játékosok egy $S \subseteq N$ részhalmaza pedig koalíció. A költségfüggvényt jelölje c . Ekkor az $c \in \mathcal{G}^N$ költségjáték magján a következőt értjük:

$$\text{Core}(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = c(N), \text{ minden } S \text{-re } \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \right\}$$

2.12. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és legyen c a következő: $c(\{1\}) = 1$, $c(\{2\}) = 2$, $c(\{3\}) = 3$, $c(\{1, 2\}) = 2$, $c(\{1, 3\}) = 3$, $c(\{2, 3\}) = 4$, $c(\{1, 2, 3\}) = 5$. Ekkor a következő egyenlőségnek és egyenlőtlenségeknek kell teljesülni ahhoz, hogy az x vektor a játék magja legyen: (1) $x_1 \leq 1$, (2) $x_2 \leq 2$, (3) $x_3 \leq 3$, (4) $x_1 + x_2 \leq 2$, (5) $x_1 + x_3 \leq 3$, (6) $x_2 + x_3 \leq 4$, (7) $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. (6) és (7) alapján az következik, hogy $x_1 \geq 1$. Ezt összevetve (1)-gyel adódik, hogy $x_1 = 1$. (5)-ből és (7)-ből következik, hogy $x_2 \geq 2$. Viszont (2) szerint $x_2 \leq 2$, tehát $x_2 = 2$. (4) és (7) alapján adódik, hogy $x_3 \geq 3$, viszont (3) szerint $x_3 \leq 3$, tehát $x_3 = 3$. Vagyis az $x = (1, 2, 3)$ vektor kielégíti az összes feltételt; a vektor magbeli. Látható, hogy a példában szereplő játék magja nemüres, egy eleme van, a fent említett x vektor.

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy egyetlen vektor sem elégíti ki a feltételeket, vagyis olyankor a mag üres.

2.13. Definíció. Tekintsünk egy $v \in \mathcal{G}^N$ játékot és legyen $i \in N$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor az i játékos v játékbeli határhozzájárulási függvényét a következőképpen definiálhatjuk: minden $S \subseteq N$ -re legyen $v_i'(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Vagyis $v_i'(S)$ az i játékos a v játékbeli határhozzájárulása az S koalícióhoz.

2.14. Definíció (Shapley (1953)). Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített, és minden $i \in N$ -re legyen

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} v_i'(S) \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}.$$

Ekkor $\phi_i(v)$ -t az i játékos v játékbeli Shapley-értékének nevezzük. A továbbiakban jelölje $\phi(v) = (\phi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ a Shapley-megoldást.

Az összegzésben azért csak azok az S koalíciók szerepelnek, amiben az i játékos nem szerepel, mert a $v_i'(S)$ határhozzájárulás 0 azokban az esetekben, amikor az i játékos tagja az S koalíciónak, valamint mert $S = N$ esetén -1 faktoriális jelenne meg a számlálóban. Ha az i játékos nem tagja az S koalíciónak, akkor az i játékos a koalícióba való belépéssel $v_i'(S)$ többlettel járul hozzá a koalíció értékéhez ceteris paribus. Tegyük fel, hogy a koalíciók az egyes játékosok véletlenszerű (például érkezési) sorrendjéből alakulnak ki, vagyis

az azonos számú koalíciók bekövetkezésének valószínűsége megegyezik. Az összes játékos $|N|!$ féleképpen érkezhethet. Legyen S egy tetszőleges koalíció. Az i előtt megérkező S koalíció tagjainak $|S|!$ -féle érkezési sorrendje van, míg az i -t követő $N \setminus (S \cup i)$ -beli játékosok $(|N \setminus S| - 1)!$ -féleképpen érkezhethetnek. Ekkor ha $i \notin S$, akkor az S koalíció megalakulásának valószínűsége $\frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}$. Így az i játékos hozzájárulása az S koalícióhoz várhatóan $v_i'(S) \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}$, vagyis a $\phi_i(v)$ Shapley-érték valójában nem más, mint várhatóérték.

2.15. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és legyen c a következő: $c(\{1\}) = 1$, $c(\{2\}) = 2$, $c(\{3\}) = 3$, $c(\{1, 2\}) = 2$, $c(\{1, 3\}) = 3$, $c(\{2, 3\}) = 4$, $c(\{1, 2, 3\}) = 5$.

A három játékos összes lehetséges sorrendje:

1. játékos	1	1	2	2	3	3
2. játékos	2	3	1	3	1	2
3. játékos	3	2	3	1	2	1

Játékosonkénti határhozzájárulások:

1. játékos	1	1	0	0	1	1
2. játékos	1	2	2	2	2	1
3. játékos	3	2	3	3	2	3

A Shapley-értékek:

$$\phi_1(c) = \frac{1}{6}(1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1) = \frac{2}{3}$$

$$\phi_2(c) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1) = \frac{5}{3}$$

$$\phi_3(c) = \frac{1}{6}(3 + 2 + 3 + 3 + 2 + 3) = \frac{8}{3}$$

Látható, hogy a Shapley-érték egyenlő súlyt rendel minden játékoshoz, ezt nevezzük a Shapley-érték normatív tulajdonságának.

2.16. Állítás. *A konkáv költségjátékok magja tartalmazza a Shapley-megoldást.*

Bizonyítás. Az Ichiishi (1981) és Shapley (1971) tételek szerint konvex játékok magja tartalmazza a Shapley-megoldást. A játék magjának illetve a költségjáték magjának definíciójából és az előbb említett tételekből következik az állítás. $\square$

2.17. Definíció. *Legyen a $v \in \mathcal{G}^N$ játék tetszőleges rögzített. Ekkor az $i, j \in N$ játékosok ekvivalensek a v játékban, ha minden $S \subseteq N$ -re, amelyre $i, j \notin S$ teljesül, igaz, hogy $v_i'(S) = v_j'(S)$. Jelölés: $i \sim^v j$. Valamint, ha $S \subseteq N$ olyan, hogy minden $i, j \in S$ -re i és j ekvivalensek a v játékban ($i \sim^v j$), akkor az S ekvivalenciahalmaz a v játékban.*

2.18. Definíció. ψ , az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett megoldás

- *Pareto-optimális (Pareto optimal, röviden PO), ha minden $v \in A$ játékra teljesül, hogy $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,*
- *nulla játékos tulajdonságú (null player property, röviden NP), ha tetszőleges $v \in A$ játékra és $i \in N$ játékosra teljesül, hogy $(v_i' = 0) \Rightarrow (\psi_i(v) = 0)$,*
- *egyenlően kezelő (equal treatment property, röviden ETP), ha minden $v \in A$ játékra teljesül, hogy $(i \sim^v j) \Rightarrow (\psi_i(v) = \psi_j(v))$,*
- *additív (additive, röviden ADD), ha minden $v, w \in A$ játékra, amelyre $v + w \in A : \psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$,*
- *marginális (marginal, röviden M), ha minden $i \in N$ játékosra és $v, w \in A$ játékra teljesül, hogy $(v_i' = w_i') \Rightarrow (\psi_i(v) = \psi_i(w))$.*

Vagyis a definícióban említett ψ megoldás *PO*, ha minden játék esetén teljesül az, hogy a megoldás által az egyes játékosokhoz rendelt értékek összege kiadja a nagykoalíció értékét. A ψ megoldás *NP*, ha minden játékban minden olyan játékos esetén, akinek a játékban a határhozzájárulása 0, a megoldás ehhez a játékoshoz 0 kifizetést rendel. A ψ megoldás *ETP*, ha minden játékban az ekvivalens játékosokhoz ugyanakkora értéket rendel. A ψ megoldás *ADD*, ha két olyan játék esetén, melyek összege is benne van a megoldás értelmezési tartományában, a két játék összegének megoldása megegyezik a két játék megoldásának összegével. A ψ megoldás *M*, ha minden játékosra, akinek a határhozzájárulása megegyezik két játékban, a megoldás egyenlő értéket rendel mindkét játékban az adott játékoshoz. A fenti tulajdonságok közül a *PO*, *NP* és az *ETP* tulajdonságok egy adott játékon belül a játékosok közötti viszonyt írják le, míg az *ADD* és a *M* tulajdonságok két játék között teremtenek összefüggést.

Az alábbiakban egy gyakorlati példán keresztül igyekszünk rávilágítani arra, hogy mennyire jogos elvárás, hogy egy költségelosztási problémára épülő költségjáték megoldása rendelkezzen a fenti tulajdonságokkal.

2.19. Példa. Egy társasház rendezni szeretné egy adott időszak szamláját, amit a szolgáltató a szemét elszállításáért számolt fel, és a szemétszállítás díját fel szeretné osztani a tulajdonosok között. Tegyük fel, hogy az elszállított hulladék mennyisége után kell a háznak fizetnie.

- *PO* tulajdonság: A lakóktól beszedett pénz nem lehet kevesebb, mint a számla értéke, mert akkor nem tudják azt kiegyenlíteni. Viszont a számla összegénél többet nem szednek be, mert csak ennek az adott szolgáltatásnak a költségét osztják szét ebben a szituációban.

- *NP* tulajdonság: Tegyük fel, hogy az előbbi társasháznak van olyan lakástulajdonosa, akinek a lakása üresen áll az adott időszakban. Ekkor feltehetjük, hogy a tulajdonosnak nem is keletkezett elszállítandó szemetete a vizsgált időszakban. A költségek elosztásánál ez esetben jogos elvárás, hogy ennek a tulajdonosnak ne kelljen fizetnie, ugyanis nem vesz igénybe szolgáltatást.
- *ETP* tulajdonság: A szemétszállítás költségeinek elosztásánál vannak ekvivalensnek tekinthető játékosok, akik nagyjából azonos mennyiségű szemetet „termelnek”. Egy lakásban keletkező szemet mennyiségét befolyásolja, hogy hányan laknak az ingatlanban, milyen korúak az egy háztartásban élők, milyen gyakran van náluk nagyobb összegjövétel és ehhez hasonló szempontok. Ennek megfelelően, ha lakik a házban két fiatal házaspár egy-egy csecsemővel, ahol a házaspárok ritkán fogadnak vendégeket, akkor ez a két házaspár tekinthető ekvivalens játékosoknak. Ez esetben elvárható, hogy a két család ugyanannyit fizessen a szemétszállításért.
- *ADD* tulajdonság: Tegyük fel, hogy a szemétszállítás költségeinek elosztási problémáját két időszakon keresztül vizsgáljuk. Ha az egyes tulajdonosok által fizetendő összegeket összeadjuk a két időszakra, jogosan várható el, hogy így ugyanannyit kelljen fizetniük, mintha egy időszakként vizsgáltuk volna a két időtartamot.
- *M* tulajdonság: Az előzőekhez hasonlóan tekintsük a szemétszállítás költségeinek elosztását két időszakra és egy adott tulajdonosra nézve. Ha azt tapasztaljuk, hogy a lakó a két időszakban ugyanannyival járult hozzá a ház által felhalmozott hulladék mennyiségéhez, akkor jogos elvárás, hogy a tulajdonosnak ugyanannyit kelljen fizetnie mindkét időszakban.

A következő eredmény jól ismert az irodalomban, így igazolásától eltekintünk.

2.20. Állítás. *A Shapley-megoldás PO , NP , ETP , ADD és M .*

2.21. Definíció. *Legyen $N, T \subseteq N, T \neq \emptyset$ tetszőlegesen rögzített, és minden $S \subseteq N$ -re*

$$u_T(S) := \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Az u_T játékot a T koalíción értelmezett egyetértési játéknak nevezzük.

A definíció szemléletesen: ha például a T koalíció tagjai közül van olyan tag, aki nem ért valamivel egyet egy szavazási szituációban, akkor nem lehet megvalósítani a tervet; a T tagjainak mintegy vétójoga van a kérdésben.

2.22. Lemma. *Az $\{u_T : \emptyset \neq T \subseteq N\}$ halmaz egy bázisa $\mathcal{G}^N$ -nek, az N játékosalmazzal rendelkező TU játékok osztályának.*

Bizonyítás. Ha $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza, akkor $2^n - 1$ egyetértési játék van. Az n játékos közül mindegyik játékos vagy benne van a T koalícióban, vagy nincs, ez 2^n lehetőség. Ebből levonva az üres koalíciót, adódik az egyetértési játékok számára a $2^n - 1$. A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy ez a $2^n - 1$ egyetértési játék lineárisan független, vagyis az $\{u_T\}_{T \neq \emptyset}$ egy lineárisan független vektorrendszert alkot. Indirekt tegyük fel, hogy $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T = 0$ és $\{T : \alpha_T \neq 0\} \neq \emptyset$, azaz nem minden $\alpha_T \in \mathbb{R}$ egyenlő nullával. Legyen T_0 a $\{T : \alpha_T \neq 0\}$ halmaz egy minimális eleme. Ekkor azonban $(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T)(T_0) = \alpha_{T_0} \neq 0$, ami ellentmond a feltevésnek. Tehát $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T \neq 0$, azaz az $\{u_T\}_{T \neq \emptyset}$ valóban egy lineárisan független vektorrendszer. (A $(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \alpha_T u_T)(T_0) = \alpha_{T_0}$ egyenlőség teljesül, mert az u_T egyetértési játék minden esetben nullát vesz fel, kivéve, ha $T = T_0$ a T_0 minimális tulajdonsága miatt.) $\square$

A következő két tétel a Shapley-érték egy-egy axiomatizálását adja. Az első az eredeti Shapley-féle axiomatizáció 1953-ból, míg a második Young 1985-ös eredménye a Shapley-érték axiomatizálására.

2.23. Tétel (Shapley (1953)). *Legyen ψ egy $\mathcal{G}^N$ -en értelmezett megoldás. Ekkor ψ pontosan akkor PO, NP, ETP és ADD, ha $\psi = \phi$, azaz ha ψ a Shapley-megoldás.*

2.24. Tétel (Young (1985)). *Legyen ψ egy $\mathcal{G}^N$ -en értelmezett megoldás. Ekkor ψ pontosan akkor PO, ETP és M, ha $\psi = \phi$, azaz ha ψ a Shapley-megoldás.*

3. fejezet

Az airport játékok osztálya

Az airport játékok reprezentációja a következő: adott egy repülőtér egyetlen kifutóval. A repülőtér kifutóját m db különböző típusú repülőgép veszi igénybe leszállás céljából. Jelölje c_k ($1 \leq k \leq m$) a k típusú repülőgépnek megfelelő kifutó építésének költségét. Például lehet m típus az alapján, hogy milyen hosszú kifutóra van szüksége az adott típusú repülőgépnek.

3.1. Definíció. Legyen T_k egy adott időszakban landoló k típusú gépek halmaza, ekkor az összes repülőgépet magában foglaló halmaz: $N = \bigcup_{k=1}^m T_k$. Az S koalíció költségfüggvénye pedig a következőképpen alakul: $c_a(S) = \max \{c_k : S \cap T_k \neq \emptyset\}_S$ és $c(\emptyset) = 0$. Valamint jelölje $\mathcal{G}_a^N$ az N játékosalmazzal rendelkező airport játékok osztályát.

3.2. Példa. Tegyük fel, hogy a repülőtér három típusú repülőgép veszi igénybe, ahol a típusok költsége rendre 2, 5 és 10 ($c_1 = 2, c_2 = 5$ és $c_3 = 10$). Ha egy koalícióban mindhárom géptípusból szerepelnek repülőgépek, akkor szükség van a leghosszabb kifutóra, vagyis a koalíció költsége 10 egység lesz. Viszont ha egy koalícióban csak az első és második típusú gépek halmazába tartozó repülőgépek vesznek részt, akkor a leghosszabb kifutóra nincs szükség, tehát a koalíció költsége a közepes kifutó építésének költségével egyezik meg, vagyis 5 egység lesz.

Az airport játékok további tárgyalásában fontos szerepet játszik az egyetértési játék duálisa. Az egyetértési játék és egy játék duálisának a fogalmából adódik a következő definíció:

3.3. Definíció. Legyen $N, T \subseteq N, T \neq \emptyset$ tetszőlegesen rögzített, és minden $S \subseteq N$ -re

$$\bar{u}_T(S) := \begin{cases} 1, & \text{ha } S \cap T \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Az $\bar{u}_T$ játékot a T koalíción értelmezett egyetértési játék duálisának nevezzük.

A definíció szemléletesen: tekintsük egy vállalatnál a szerződések aláírására jogosultakat a T koalíció tagjainak. Ekkor ha feltételezzük, hogy egyetlen aláírás is elegendő az iratok érvényesítésére, akkor csak azok az S koalíciók tudnak érvényes szerződéseket kötni a cég nevében, amelyben legalább egy aláírásra jogosult személy is szerepel.

3.4. Állítás. Az $\bar{u}_{T_1}, \bar{u}_{T_2}, \dots, \bar{u}_{T_m}$ játékok airport játékok.

Bizonyítás. Egy adott i -re teljesül a következő: $T_i \subseteq N$, valamint feltehető, hogy T_i nem-üres halmaz, azaz van i típusú gép. Az egyetértési játék duálisának definíciója szerint, ha az S koalíciónak van i típusú tagja, akkor $\bar{u}_{T_i}(S) = 1$, ha nincs, akkor $\bar{u}_{T_i}(S) = 0$. Ez egy olyan airport játék, ahol az i típusú játékosoknak 1 a költsége ($c_i = 1$), minden más típusú játékosnak pedig 0 ($c_j = 0$, ha $j \neq i$). Airport játék esetén minden koalíció költsége a különböző típusú tagjai költségének a maximuma. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy ha egy koalíciónak van i típusú tagja is, akkor ezen koalíció költsége 1 lesz, mert $\max\{0, 1\} = 1$ (ha kizárólag i típusú tagokból áll a koalíció, akkor minden tag költsége 1, így a koalícióé is). $\square$

3.5. Állítás. $\mathcal{G}_a^N$, vagyis az N játékosalmazzal rendelkező airport játékok osztálya kúp.

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy ha c_a airport játék, akkor αc_a is airport játék minden $\alpha > 0$ esetén. Mivel az αc_a játék abban különbözik a c_a airport játéktól, hogy egy pozitív α számmal meg van szorozva minden költség, ezért az αc_a játék is airport játék. Mégpedig olyan airport játék, amelyben minden költség α -szorosa a c_a airport játékbeli költségeknek. $\square$

3.6. Állítás. Az $\{\bar{u}_T\}_{T \subseteq N}$ játékok által kifeszített konvex kúp tartalmazza az N játékosalmazzal rendelkező airport játékok osztályát, vagyis $\mathcal{G}_a^N \subseteq \text{cone}(\{\bar{u}_T\}_{T \subseteq N})$.

Bizonyítás. A bizonyításhoz tekintsük az airport játékok egy másik felírását, amely hasonlít az öntözési játékokra. A konstrukció a következőképpen néz ki: a játékosokat egy láncra fűzzük fel aszerint, hogy mekkora a költségük. A költségeket típusunként növekvő sorrendbe állíthatjuk; $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_m$, amennyiben m db típusú játékos szerepel a játékban.

A lánc egy gyökérből indul, ezután az első csúcs a legkisebb költségű típusból jelent egy tetszőleges játékost. Ekkor a gyökér és az első csúcs közötti szakasz költsége c_1 , ami a két csúcs költségének különbségeként adódik: $c_1 - 0 = c_1$. A következő csúcsok azok közül a játékosok közül kerülnek ki, akik szintén a c_1 költségű típusba tartoznak. Két c_1 költségű játékos által képviselt csúcs közötti szakasz költsége 0 lesz ($c_1 - c_1 = 0$). Ezután a lánc következő csúcsa a c_2 költségű játékosok valamelyike lesz. A közte és a láncban őt közvetlenül megelőző csúcs közötti szakasz költsége $c_2 - c_1$ lesz. Ezután a c_2 költségű

játékosok következnek tetszőleges sorrendben, mely csúcsok közötti szakaszok költsége 0 lesz, ahogyan azt láthattuk a c_1 költségű játékosok esetében is.

A leírt logika szerint folytatjuk a lánc építését, míg el nem érkezünk a c_m költségű rendelkező játékosig. A láncban jelenleg az utolsó helyen a c_{m-1} költségű rendelkező típusból szerepel egy játékos, majd utána következik egy tetszőleges c_m költségű játékos. A két játékos által reprezentált két csúcs közötti szakasz költsége ebben az esetben is úgy alakul, mint az előzőekben, vagyis a költség $c_m - c_{m-1}$. A lánc soron következő tagjai a c_m költségű játékosok, akik által reprezentált csúcsok közötti szakaszok költsége szintén 0 lesz.

Ekkor az airport játék felírható a következő alakban a 3.1 definíció jelöléseivel :

$$\begin{aligned} c_a = & c_1 \bar{u}_N + (c_2 - c_1) \bar{u}_{N \setminus T_1} + (c_3 - c_2) \bar{u}_{N \setminus (T_1 \cup T_2)} + \dots + \\ & + (c_{m-1} - c_{m-2}) \bar{u}_{(T_{m-1} \cup T_m)} + (c_m - c_{m-1}) \bar{u}_{T_m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ez a felírás alkalmas a játék leírására. Ugyanis nézzük meg, hogy az ilyen formában adott airport játék milyen költségeket rendel az egyes koalíciókhoz! Az összeg első tagja alapján mindenkinek kell fizetni c_1 nagyságú összeget. A kizárólag T_1 tagjaiból álló koalíciók esetében a fenti összeg többi tagja 0 lesz, mert az egyetértési játékok duálisai nullát vesznek fel, így az ilyen koalíciók költsége c_1 . Azon koalíciók esetében, amelynek tagjai között szerepelnek T_2 típusú játékosok is, az összeg első és második tagja kivételével a többi tag nullát vesz fel. Vagyis ezekhez a koalíciókhoz rendelt költség $c_1 + (c_2 - c_1) = c_2$. Azon koalíciók esetében, amiben szerepelnek T_3 típusú játékosok, az összeg első három tagja lesz nullától különböző. Minden ilyen koalíció költsége tehát $c_1 + (c_2 - c_1) + (c_3 - c_2) = c_3$ lesz.

Következésképpen az eddig vizsgált esetekben a csak T_1 , csak T_2 , illetve a csak T_3 típusú tagokból álló koalíciók költsége rendre c_1 , c_2 és c_3 . A T_1 és T_2 típusú tagokat egyaránt tartalmazó koalíciók költsége c_2 , vagyis a két költség maximuma. Ehhez hasonlóan adódik, hogy a T_1 és T_3 , valamint a T_2 és T_3 típusú tagokat tartalmazó koalíciók költsége egyaránt c_3 . Annak a koalíciónak az esetében, amelyben szerepelnek T_1, T_2 és T_3 típusú játékosok is, szintén c_3 lesz a koalíció költsége.

A gondolatmenetet folytatva a $T_4, T_5, \dots, T_m$ típusú játékosokra, látható, hogy a fenti felírás valóban airport játékot ad. Ugyanis egy koalíció költsége a benne szereplő játékosok költségeinek maximumaként adódik, ami definíció szerint airport játék. A c_a fenti felírása egyértelműen meghatároz egy airport játékot.

Az állítás igazolására azt kell megmutatni, hogy minden airport játék előáll egyetértési játékok duálisainak kúp kombinációjaként. Vagyis minden airport játékhoz található olyan $\alpha, \beta, \dots, \omega$, hogy

$$c_a = \alpha \bar{u}_{T^1 \subseteq N} + \beta \bar{u}_{T^2 \subseteq N} + \dots + \omega \bar{u}_{T^k \subseteq N}.$$

Ha súlyoknak a $c_1, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_m - c_{m-1}$ súlyokat, koalícióknak pedig a $N, N \setminus T_1, N \setminus (T_1 \cup T_2), \dots, (T_{m-1} \cup T_m), T_m$ koalíciókat választjuk és a c_a játékot a fenti módon írjuk fel, akkor minden airport játékot egyértelműen felírhatunk egy ilyen formában adott c_a játékként. Ha a felírandó airport játékban megnézzük az egyes típusú játékosok költségét, és erre megkonstruáljuk a fenti összegképlet segítségével c_a -t, akkor a fenti felírás c_a -ra egyértelmű lesz. Vagyis minden airport játék felírható egyetértési játékok duálisainak kúp kombinációjaként. (Mégpedig ha m különböző típusú játékos van, akkor m db egyetértési játék duálisának kúp kombinációjaként.) $\square$

3.7. Példa. A fenti állítás illusztrálására:

A d játékban négy játékos vesz részt (A, B, C, D) és a játékosok három típusba sorolhatóak a következőképpen: $c_A = c_B = c_1, c_C = c_2$ és $c_D = c_3$. Legyen $a := c_1 \bar{u}_{\{A,B,C,D\}}$, $b := (c_2 - c_1) \bar{u}_{\{C,D\}}$ és $c := (c_3 - c_2) \bar{u}_{\{D\}}$.

	a	b	c	$a + b$	$a + c$	$b + c$	$a + b + c$
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0
$\{A\}$	c_1	0	0	c_1	c_1	0	c_1
$\{B\}$	c_1	0	0	c_1	c_1	0	c_1
$\{C\}$	c_1	$c_2 - c_1$	0	c_2	c_1	$c_2 - c_1$	c_2
$\{D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{A, B\}$	c_1	0	0	c_1	c_1	0	c_1
$\{A, C\}$	c_1	$c_2 - c_1$	0	c_2	c_1	$c_2 - c_1$	c_2
$\{A, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{B, C\}$	c_1	$c_2 - c_1$	0	c_2	c_1	$c_2 - c_1$	c_2
$\{B, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{C, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{A, B, C\}$	c_1	$c_2 - c_1$	0	c_2	c_1	$c_2 - c_1$	c_2
$\{A, B, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{A, C, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{B, C, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3
$\{A, B, C, D\}$	c_1	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$	c_2	$c_3 - c_2 + c_1$	$c_3 - c_1$	c_3

Látható, hogy mindegyik oszlop airport játék, vagyis bármely airport játék előáll egyetértési játékok duálisainak kúp kombinációjaként. Az utolsó oszlop adja meg a példa elején bemutatott d játékot, amely a következő alakban áll elő: $d = a + b + c = c_1 \bar{u}_{\{A,B,C,D\}} + (c_2 - c_1) \bar{u}_{\{C,D\}} + (c_3 - c_2) \bar{u}_{\{D\}}$. De ehhez hasonlóan a többi oszlop is megad egy-egy airport játékot. Nézzük például az utolsó előtti oszlop által megadott e játékot. A következő formában áll elő az e játék: $e = b + c = (c_2 - c_1) \bar{u}_{\{C,D\}} + (c_3 - c_2) \bar{u}_{\{D\}}$. A d

játékhoz hasonlóan az e játékban is négy játékos vesz részt (A, B, C, D) és a játékosok három típusba sorolhatóak a következőképpen: $c_A = c_B = 0$, $c_C = c_2 - c_1$ és $c_D = c_3 - c_1$. Tehát a d és az e játékok abban különböznek csak egymástól, hogy más az egyes típusok költsége a két játékban.

3.8. Lemma. *Ha tekintünk egy (3.1) alakban adott c_a airport játékot és az összeg tagjai közül letörlünk tetszőleges számú játékot, akkor az így kapott játék szintén airport játék lesz.*

Bizonyítás. Vegyük például azt a játékot, ami a $(c_2 - c_1)\bar{u}_{N \setminus T_1}$ játék letörlésével keletkezik:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_a = & c_1 \bar{u}_N + (c_3 - c_2) \bar{u}_{N \setminus (T_1 \cup T_2)} + \dots + \\ & + (c_{m-1} - c_{m-2}) \bar{u}_{(T_{m-1} \cup T_m)} + (c_m - c_{m-1}) \bar{u}_{T_m}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ha a $(c_2 - c_1)\bar{u}_{N \setminus T_1}$ játékot letörljük, akkor ez megfelel annak, hogy az $\bar{u}_{N \setminus T_1}$ egyetértési játék duálisának együtthatója 0, vagyis $c_2 = c_1$. Ez pedig azt jelenti, hogy a T_2 típusú játékosok ugyanolyan költséggel rendelkeznek mint a T_1 típusú játékosok. Tehát a $\tilde{c}_a$ játékban már nincsenek T_2 típusú játékosok, csak $T_1, T_3, T_4, \dots, T_m$ típusúak, amely típusú játékosok költsége rendre $c_1, c_3, c_4, \dots, c_m$. Vagyis (3.2) egyenletet alakítva a $\tilde{c}_a$ szebb alakban is írható:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_a = & c_1 \bar{u}_N + (c_3 - c_1) \bar{u}_{N \setminus T_1} + (c_4 - c_3) \bar{u}_{N \setminus (T_1 \cup T_3)} + \dots + \\ & + (c_{m-1} - c_{m-2}) \bar{u}_{(T_{m-1} \cup T_m)} + (c_m - c_{m-1}) \bar{u}_{T_m}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Láthatjuk, hogy a (3.3) egyenlet pontosan olyan alakú, mint a (3.1) egyenlet, tehát a $\tilde{c}_a$ játék is airport játék. Ugyanez a gondolatmenet működik arra az esetre is, amikor több játékot törölünk le. Ha például k számú játékot törölünk le, akkor k -val kevesebb típusú játékos lesz, de ugyanúgy airport játékot kapunk. Ezzel igazoltuk, hogy (3.1) alakban adott airport játékból törléssel is airport játékot kapunk.

□

4. fejezet

A Shapley-érték két axiomatizálása

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a 2.23 és a 2.24 tételek teljesülnek az airport játékok osztályán. A következőkben az említett tételek airport játékokra való kimondása, majd a tételek bizonyítása szerepel.

4.1. Tétel. *Legyen ψ egy $\mathcal{G}_a^N$ -en értelmezett pontértékű megoldás. Ekkor ψ pontosan akkor PO , NP , ETP és ADD , ha $\psi = \phi$, azaz ha ψ a Shapley-megoldás.*

Bizonyítás. Ha a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással, akkor a ψ megoldás PO , NP , ETP és ADD . Ez teljesül a 2.20 állítás miatt.

Ha a ψ megoldásra teljesül, hogy PO , NP , ETP és ADD tulajdonságú, akkor a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással. Ezt az állítást bizonyítom az alábbiakban.

Tekintsük a T koalíción értelmezett egyetértési játék duálisát, az $\bar{u}_T$ játékot.

Ha $i \notin T$, akkor ez az i játékos nulla játékos, ugyanis az $\bar{u}_T$ játékban a határhozzájárulása 0 ($(\bar{u}_T)'_i = 0$). Az i játékos bármilyen koalícióhoz csatlakozik is, nem tudja növelni annak értékét. Hiszen ha olyan S koalícióhoz csatlakozik, amelyre $S \cap T \neq \emptyset$ teljesül, akkor az S értéke i csatlakozása előtt és után is 1 lesz. Ha pedig olyan S koalícióhoz csatlakozik, amelyre igaz az, hogy $S \cap T = \emptyset$, akkor mivel $i \notin T$, az S koalíció értéke i csatlakozása után is 0 lesz. Mivel i nulla játékos, ezért a megoldás az NP tulajdonság alapján a következő értéket rendeli hozzá:

$$\psi_i(\bar{u}_T) = 0. \quad (4.1)$$

Ha $i, j \in T$, akkor ez a két játékos ekvivalens a játékban, vagyis $i \sim^{\bar{u}_T} j$. Vizsgáljunk egy tetszőleges S koalíciót, amelyre $i, j \notin S$ teljesül. Ez esetben i és j határhozzájárulása az S koalícióhoz megegyezik, hiszen bármelyikük csatlakozik is, legalább egy T -beli tag szerepel a koalícióban a csatlakozás után, vagyis ha eddig $S \cap T = \emptyset$, akkor ezután $S \cap T \neq \emptyset$, tehát a koalíció értéke 0-ról 1-re emelkedett. Viszont ha a csatlakozás előtt $S \cap T \neq \emptyset$, akkor egy T -beli játékos csatlakozása nem növeli a koalíció értékét: S értéke

ugyanúgy 1 lesz, tehát a határhozzájárulások is nullával egyenlőek mindkét játékos esetében $((\bar{u}_T)'_i(S) = (\bar{u}_T)'_j(S) = 0$, ha a csatlakozás előtt a következő teljesült: $S \cap T \neq \emptyset$). Az *ETP* tulajdonság alapján a játékban a két játékoshoz ugyanakkora értéket rendel a megoldás:

$$\psi_i(\bar{u}_T) = \psi_j(\bar{u}_T). \quad (4.2)$$

A nagykoalíció értéke ebben a játékban 1, vagyis $\bar{u}_T(N) = 1$. Ha a megoldás *PO* tulajdonságú, akkor teljesül a következő az $\bar{u}_T$ játékban:

$$\sum_{i \in N} \psi_i(\bar{u}_T) = \bar{u}_T(N) = 1. \quad (4.3)$$

A (4.1) egyenletből összesen $|N \setminus T|$ darab van, ami úgy adódik, hogy az összes nem T -beli játékosra felírjuk az adott összefüggést. A (4.2) összefüggés alkalmazásából összesen $|T| - 1$ lineárisan független egyenlet adódik a következőképpen: a T tagjai közül kiválasztunk egy tetszőleges i játékos és a (4.2) egyenletet felírjuk az i játékos és minden T -beli tag közötti összefüggésre. (Ebből a $|T| - 1$ számú egyenletből kiderül, hogy bármely két T -beli játékos ekvivalens egymással.) Végül felírhatjuk a (4.3) egyenletet is. Tehát összesen $|N \setminus T| + (|T| - 1) + 1 = |N|$ darab lineárisan független egyenlet és $|N|$ számú játékos van. Ebből következik, hogy egyetlen ψ megoldás van, ami kielégíti az összes egyenletet. Mivel a 2.20 állítás alapján a Shapley-érték *NP*, *ETP* és *PO* tulajdonságokkal rendelkező megoldás, ezért tetszőleges $\bar{u}_T$ játékra teljesül, hogy $\psi(\bar{u}_T) = \phi(\bar{u}_T)$.

A 3.4 állítás alapján az $\bar{u}_T$ játék airport játék. Emellett az $\alpha_T \bar{u}_T$ ($\alpha_T \geq 0$) játék is airport játék a 3.5 állítás alapján. Ez a játék csak a koalíciók értékében különbözik az $\bar{u}_T$ játéktól: Azon S koalíciók esetében, melyekre $S \cap T \neq \emptyset$ teljesül, a koalíció értéke α_T , a többi koalíció értéke pedig 0. Ebben az esetben is teljesülnek a következők:

- Ha $i \notin T$, akkor i nulla játékos. Ekkor a megoldás az *NP* tulajdonság és a (4.1) egyenlet szerint a következő értéket rendeli az i játékoshoz: $\psi_i(\alpha_T \bar{u}_T) = 0$.
- Ha $i, j \in T$, akkor ez a két játékos ekvivalens a játékban, tehát $i \sim^{\alpha_T \bar{u}_T} j$. Ekkor a megoldás egyforma értéket rendel a két játékoshoz az *ETP* tulajdonság miatt. Ez az érték a (4.2) összefüggés alapján: $\psi_i(\alpha_T \bar{u}_T) = \psi_j(\alpha_T \bar{u}_T)$.
- A nagykoalíció értéke ebben a játékban α_T , vagyis $\alpha_T \bar{u}_T(N) = \alpha_T$. Ha a megoldás *PO* tulajdonságú, akkor a (4.3) egyenlet alapján teljesül a következő az $\alpha_T \bar{u}_T$ játékban: $\sum_{i \in N} \psi_i(\alpha_T \bar{u}_T) = \alpha_T \bar{u}_T(N) = \alpha_T$.

Ekkor az $\bar{u}_T$ játékhoz hasonlóan az $\alpha_T \bar{u}_T$ játékban is teljesül, hogy $|N|$ darab lineárisan független egyenlet és $|N|$ számú játékos van. Ebből következik, hogy egyetlen ψ megoldás van, ami kielégíti az összes egyenletet. Mivel a 2.20 állítás alapján a Shapley-megoldás

NP, ETP és PO tulajdonságokkal rendelkező megoldás, ezért tetszőleges $\alpha_T \bar{u}_T$ játékra teljesül, hogy $\psi(\alpha_T \bar{u}_T) = \phi(\alpha_T \bar{u}_T)$.

Legyen a c játék a következőképpen adott: $c := \sum_{T \subseteq N} \alpha_T \bar{u}_T$, ahol $\alpha_T \geq 0$. A 3.6 állítás szerint c is airport játék. Valamint mivel minden airport játék felírható egyetértési játékok duálisainak kúp kombinációjaként, ezért a c játék tekinthető egy tetszőleges airport játéknak. Tehát a tétel bizonyításához még azt kell megmutatni, hogy $\psi(c) = \phi(c)$.

Minden $T \subseteq N$ koalícióra az $\alpha_T \bar{u}_T$ játékban a ϕ megoldás megegyezik a Shapley-megoldással és mivel a ψ megoldásról tudjuk, hogy ADD tulajdonságú is, ezért a $c = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T \bar{u}_T$ játékban is teljesül az említett egyenlőség. Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

4.2. Tétel. *Legyen ψ egy $\mathcal{G}_a^N$ -en értelmezett pontértékű megoldás. Ekkor ψ pontosan akkor PO , ETP és M , ha $\psi = \phi$, azaz ha ψ a Shapley-megoldás.*

Bizonyítás. Ha a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással, akkor a ψ megoldás PO , ETP és M . Ez teljesül a 2.20 állítás miatt.

Ha a ψ megoldás PO , ETP és M tulajdonságú, akkor a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással. Ezt az állítást igazoljuk az alábbiakban Young (1985) bizonyítását alkalmazva.

Minden $c \in \mathcal{G}_a^N$ airport játék egyértelműen előáll $\{\bar{u}_T\}_{T \subseteq N}$ játékok kúp kombinációjaként a 3.6 állítás alapján. Az egyértelműséget biztosítja, hogy az $\bar{u}_T$ vektorok függetlenek.

Definiáljuk a c airport játékhoz $D(c)$ -t a következőképpen:

$D(c) := |\{\alpha_T : c = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T \bar{u}_T \text{ és } \alpha_T \neq 0\}|$. Vagyis ha a c airport játékot felírjuk az $\{\bar{u}_T\}_{T \subseteq N}$ játékok kúp kombinációjaként, akkor $D(c)$ azt a számot jelöli, amennyi α_T súly pozitív a kombinációban.

A bizonyítás menete a továbbiakban $D(c)$ -re vonatkozó indukció lesz.

Ha $D(c) = 0$, akkor nulla játékot kapunk. A PO tulajdonság alapján a nagykoalíció értékét kell szétosztani, ami a nulla játékban 0. Minden játékos határhozzájárulása a nulla játékban 0, tehát minden játékos nulla játékos. Mivel minden játékos határhozzájárulása megegyezik, ezért ők ekvivalens játékosok, tehát a megoldás ugyanakkora értéket rendel mindenkihez az ETP tulajdonság alapján. Mivel 0 költséget kell szétosztani és mindenkihez ugyanakkora összeget kell rendelni, ezért a megoldás minden játékoshoz 0 költséget rendel.

Tegyük fel, hogy tetszőleges c játékra, melyre igaz, hogy $D(c) \leq n - 1$, teljesül, hogy a játék ψ megoldása egyértelmű és megegyezik a ϕ Shapley-megoldással, ha a ψ megoldás PO , ETP és M tulajdonságú.

Tekintsük a $D(c) = n$ esetet!

Ha van olyan i játékos, hogy valamelyik T -re, ahol $\alpha_T > 0$, i nulla játékos az $\bar{u}_T$ játékban, akkor töröljük le ezt a játékot, majd vizsgáljuk az így kapott d játékot, amire

$D(d) = n - 1$ teljesül. Az egyik komponens letörlésével is airport játékot kapunk a 3.8 lemma alapján, vagyis d is airport játék.

Ha vizsgáljuk az i játékos határhozzájárulásait az egyes játékokban, akkor a következőre jutunk: $c'_i = d''_i + (\bar{u}_T)'_i$. Az i játékos nulla játékos volta miatt $(\bar{u}_T)'_i = 0$, ezért $c'_i = d''_i$. A ψ megoldás M tulajdonsága miatt az i játékosra rótt költség megegyezik a c és a d játékban, tehát egyértelműen meghatározott az az érték, amelyet a megoldás az i játékoshoz rendel. Ez igaz minden olyan játékosra, aki valamelyik $\bar{u}_T$ játékban nulla játékos. (Ha valamely játékos egynél több ilyen $\bar{u}_T$ játékban is nulla játékos, akkor az adott játékok letörlésével kapott e játékra igaz, hogy $D(e) < n - 1$, de erre az esetre ugyanúgy alkalmazható az indukciós feltétel.)

Most tekintsünk azokat a játékosokat, akik egyik olyan $\bar{u}_T$ játékban sem nulla játékosok, ahol $\alpha_T > 0$. Ha csak egy ilyen i játékos van, akkor az az érték, amit a megoldás ehhez az i játékoshoz rendel, egyértelműen meghatározott. Ugyanis az i játékos kivételével minden játékosra igaz, hogy valamelyik játékban nulla játékosok, tehát a fentebb leírt módszerrel meghatározható a hozzájuk rendelt összeg. Mivel a nagykoalíció összege adott és a ψ PO tulajdonsága miatt a nagykoalíció értékét kell szétosztani a játékosok között, a megoldás által az i játékoshoz rendelt érték egyértelműen meghatározható.

Ha több olyan játékos is van, aki egyik olyan $\bar{u}_T$ játékban sem nulla játékos, ahol $\alpha_T > 0$, akkor ezek minden $\bar{u}_T$ játékban ekvivalens játékosok. Mivel ezek a játékosok minden $\bar{u}_T$ játékban ekvivalensek, ezért ezek kúp kombinációjában, vagyis a c játékban is ekvivalens játékosok. A ψ megoldás ETP tulajdonsága alapján minden ekvivalens játékoshoz ugyanakkora értéket rendel a megoldás. A nulla játékosokról már tudjuk, hogy mekkora értéket rendel hozzájuk a megoldás, a nagykoalíció értéke adott és a PO tulajdonság alapján ezt az értéket kell szétosztani a játékosok között, az ekvivalens játékosokról pedig tudjuk, hogy egyenlő összeget rendel hozzájuk a megoldás. Ebből következik, hogy a ψ megoldás egyértelmű.

Mivel a Shapley-megoldásra igaz a 2.20 állítás alapján, hogy PO , ETP és M tulajdonságú, ezért a $D(c) = n$ esetben is teljesül, hogy a ψ megoldás megegyezik a Shapley-megoldással, vagyis $\psi = \phi$. Ezzel a végére értünk az indukciós bizonyításnak, igazoltuk a tételt. $\square$

5. fejezet

Airport probléma és airport játék

Az ebben a fejezetben bemutatásra kerülő modellt, fogalmakat és eredményeket a Thomson (2007) cikk alapján tárgyaljuk. Jelölésekben alapvetően a cikket követjük, viszont néhol változtatásokat eszközölünk az ott leírtakhoz képest.

5.1. A modell

Legyen N a játékosok egy halmaza, akik igénybe szeretnék venni egy adott szolgáltatást, de azt előbb ki kell építeni. (Például egy adott utcában lakók szeretnék a kábeltévé szolgáltatást igénybe venni, de ahhoz előbb be kell vezetni az utcába a kábeltévéhez szükséges vezetékeket.) Minden játékosnak különböző szükséglete van a szolgáltatásra nézve. Úgy kell kiépíteni a szolgáltatáshoz szükséges rendszert, hogy az minden játékos szükségletét kielégítse.

Minden $i \in N$ játékos jellemezhető egy c_i költséggel. A c_i az a költség, amennyibe kerül az i játékosnak, ha egyedül építi ki a szolgáltatáshoz szükséges rendszert. Ha olyan rendszer épült ki, amely kielégíti az i játékos szükségletét, akkor ebből következik, hogy ez a rendszer kielégíti mindazon j játékosok szükségletét, akiknek a c_j költsége legfeljebb akkora, mint az i játékos c_i költsége. Olyan rendszer kiépítése, amely minden játékos szükségletét kielégíti, $\max_{j \in N} c_j$ költségű. A kérdés az, hogy ehhez az egyes játékosoknak mennyivel kell hozzájárulni.

A dolgozat elsődleges alkalmazásában a játékosok repülőgépek és a c_i költség az a költség, amely annak a kifutónak az építési költsége, amelyre az i játékosnak szüksége van. Airport probléma alatt egy $c \in \mathbb{R}_+^N$ vektort értünk. Jelölje $\mathcal{C}^N$ az összes airport probléma halmazát.

5.1. Definíció. Egy elosztási szabály (röviden szabály) olyan leképezés, amely az összes probléma halmazán van definiálva és minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémához hozzárendel egy $x \in \mathbb{R}^N$ vektort. A szabályt jelöljük χ -vel. Ekkor a χ szabályra a következő igaz: $\chi : \mathcal{C}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Megjegyzés: Az így definiált szabályok pontértékűek.

5.2. Definíció. Az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályán (*sequential equal contributions rule*, jelöljük ξ -vel) a következőt értjük: minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémára és minden $i \in N$ játékosra legyen

$$\xi_i := \frac{c_1}{n} + \frac{c_2 - c_1}{n-1} + \dots + \frac{c_i - c_{i-1}}{n-i+1}.$$

Nézzünk egy példát a ξ szabály alkalmazására!

5.3. Példa. Legyen a játékosok halmaza a következő: $N = \{1, 2, 3\}$ és legyen a c probléma a következő $\mathbb{R}^3$ -beli vektor: $c = (5, 6, 10)$. Ekkor a definíció alapján a következő értékeket rendeli a ξ szabály az egyes játékosokhoz: $\xi_1 = \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, $\xi_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$ és $\xi_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{1} = \frac{37}{6}$. Az airport probléma definíciója alapján a nagykoalíció költsége az egyes játékosok költségeinek maximuma ($c(N) = \max_{i \in N} c_i$). A példában szereplő c problémában $c(N) = c(\{1, 2, 3\}) = 10$. Ha összeadjuk azokat az értékeket, amit a szabály rendelt az egyes játékosokhoz, azt kapjuk, hogy az összeg megegyezik a nagykoalíció értékével: $\sum_{i=1}^3 \xi_i = 10$. Ezt a tulajdonságot elvárjuk egy szabálytól, hiszen a szabály segítségével szeretnénk szétosztani a nagykoalíció költségét az egyes játékosok között.

A következőkben definiálok a Thomson (2007) cikkben szereplő tulajdonságokat.

5.4. Definíció. A χ szabály, ami az összes airport probléma halmazán van értelmezve

- *nemnegatív (non-negativity, röviden NN)*, ha minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémára teljesül, hogy $0 \leq \chi(c)$,
- *korlátos költségű (cost boundedness, röviden CB)*, ha minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémára teljesül, hogy $\chi(c) \leq c$,
- *hatékony (efficiency, röviden E)*, ha minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémára teljesül, hogy $\sum_{i \in N} \chi_i = \max_{i \in N} c_i$,
- *egyforma játékosokat egyformán kezelő (equal treatment of equals, röviden ETE)*, ha minden $c \in \mathcal{C}^N$ problémára és minden $\{i, j\} \subseteq N$ játékospárra teljesül, hogy ha $c_i = c_j$, akkor $\chi_i(c) = \chi_j(c)$,
- *feltételesen költség additív (conditional cost additivity, röviden CCA)*, ha minden $\{c, \tilde{c}\} \in \mathcal{C}^N$ problémapárra, amelyre a játékosok azonos sorrendben szerepelnek a c és $\tilde{c}$ problémában, teljesül, hogy $\chi(c + \tilde{c}) = \chi(c) + \chi(\tilde{c})$,
- *rendelkezik a „legalább akkora költségek” függetlenségének tulajdonságával (independence of at-least-as-large costs, röviden IALC)*, ha minden $\{c, \tilde{c}\} \in \mathcal{C}^N$ problémapárra és minden i játékosra teljesül, hogy ha

- (i) $\tilde{c}_i = c_i$,
 - (ii) minden olyan $j \in N \setminus \{i\}$ játékosra, amelyre $c_j < c_i$, teljesül, hogy $\tilde{c}_j = c_j$ és
 - (iii) minden olyan $j \in N \setminus \{i\}$ játékosra, amelyre $c_j \geq c_i$, teljesül, hogy $\tilde{c}_j \geq c_j$,
- akkor $\chi_i(c) = \chi_i(\tilde{c})$.

A következőkben a 2.19 példához hasonló illusztráció segítségével igyekszünk megmutatni, hogy mennyire jogos elvárás, hogy egy költségelosztási probléma szabálya a definícióban említett tulajdonságokkal rendelkezzen.

5.5. Példa. Egy társasház rendezni szeretné egy adott időszaki számláját, amit a szolgáltató a szemét elszállításáért számolt fel, és a szemétszállítás díját fel szeretné osztani a tulajdonosok között. Minden lakóhoz tartozik egy költség, ami azt mutatja meg, hogy mennyit kéne fizetnie az adott lakónak, ha a házból egyedül venné igénybe a szolgáltatást.

- *NN* tulajdonság: Egyetlen lakó által befizetendő összeg sem lehet negatív. Valakinek vagy kell fizetnie egy pozitív nagyságú összeget, vagy semmit nem kell fizetnie, de egyetlen lakónak sem fizetünk a többi lakó által befizetett összegből a költségelosztás során.
- *CB* tulajdonság: Egy lakónak sem kell többet fizetnie a költségelosztás során az egyéni költségénél. Ugyanis ha ez előfordulna, akkor a lakó nem a házon keresztül intézné a szemét elszállítását, hanem egyénileg.
- *E* tulajdonság: A lakóktól beszedett pénz nem lehet kevesebb, mint a számla értéke, mert akkor nem tudják azt kiegyenlíteni. Viszont a számla összegénél többet nem szednek be, mert csak ennek az adott szolgáltatásnak a költségét osztják szét ezen költségelosztási problémában.
- *ETE* tulajdonság: Ha két lakástulajdonosnak megegyezik az egyéni költsége, akkor jogosan várható el, hogy ugyanannyit kelljen fizetniük, amikor a ház szemétszállítási költségét osztják fel a lakók. Hiszen a szolgáltatást azonos módon veszik igénybe, mivel az egyéni költségük megegyezik.
- *CCA* tulajdonság: Tegyük fel, hogy a szemétszállítás költségeinek elosztási problémáját két időszakon keresztül vizsgáljuk. Ha az egyes tulajdonosok által befizetendő összegeket összeadjuk a két időszakra, jogosan várható el, hogy így ugyanannyit kelljen fizetniük, mintha egy időszakként vizsgáltuk volna a két időtartamot.
- *IALC* tulajdonság: Az *IALC* tulajdonság szemléltetésére tekintsünk egy másik szituációt! Néhány vásárló egy áruház raktárához szeretne egy gépjárműbeállót építeni,

hogy egyszerűbb legyen az áru rakodása. A vásárlók között van, aki kis tételben vásárol, ő személygépkocsit használ, valaki kisteherautóval szeretné igénybevenni a beállót, míg a nagytételben vásárlók teherautóval érkeznek. A különböző méretű járműveknek különböző hosszúságú beálló kell, emiatt a beálló megépítésének egyéni költségei is eltérőek. Mivel van a járművek között teherautó, így a beállót ennek megfelelő nagyságúra kell építeni. A vásárlók között ezt a költséget szeretnénk elosztani.

Ugyanezek a vásárlók szeretnék a szomszéd áruházhoz is egy beállót építeni. (A két esetben az egyéni költségek eltérhetnek, hiszen más területen, más körülmények között, esetleg más kivitelezővel építkeznek.) Tekintsük az építés költségének elosztását a két építkezésre, valamint egy adott i vásárlóra nézve. Ha azt tapasztaljuk, hogy

- az i vásárló egyéni költsége a két építés esetében azonos,
- minden olyan j vásárló esetében, akinek az első beálló építéskor kisebb az egyéni költsége az i vásárlóénál, teljesül, hogy a j vásárló egyéni költsége megegyezik mindkét esetben, (Ez a feltétel azért várható el, mert tegyük fel, hogy kezdetben csak a j vásárló igényli a beálló megépítését, majd csatlakozik hozzá az i vásárló is. Ekkor ha az i vásárló egyéni költsége megegyezik a két vizsgált esetben, és a j vásárló egyéni költsége is azonos mindkét építési szituációban, akkor mondhatjuk, hogy az i vásárló ugyanannyival járult hozzá mindkét építkezés költségeihez.)
- minden olyan j vásárló esetében, akinek az első beálló építéskor nem kisebb az egyéni költsége az i vásárlóénál, teljesül, hogy a j vásárló egyéni költsége nem kisebb a második beálló építéskor, mint az első beálló építéskor, (Ez a feltétel azért várható el, mert ha feltesszük, hogy kezdetben csak a j vásárló igényli a beálló megépítését, majd csatlakozik hozzá az i vásárló is, akkor az i vásárló csatlakozása nem jelent többletköltséget. Viszont ha az i vásárló egyéni költsége mindkét építkezés esetében ugyanannyi, de a j vásárló esetében a második beálló építéskor kisebb, mint az első beálló építéskor, akkor előfordulhatna, hogy a második gépjárműbeálló építéskor a j vásárló költsége kisebb, mint az i vásárlóé. De ez nem lehetséges, mivel például egy kisteherautó egyéni költsége bármely beálló építéskor nagyobb egy személygépkocsi egyéni költségénél.)

akkor jogos elvárás, hogy a vásárlónak ugyanannyit kelljen fizetnie mindkét beálló építéskor.

5.2. Tulajdonságok megfeleltetése

A következőkben jelölje c a c_a airport játék mögötti airport problémát. Ha χ a c problémán értelmezett szabály és ψ a c_a játékon értelmezett megoldás, akkor legyen ψ olyan megoldás, amelyre a következő teljesül: $\psi(c_a) := \chi(c)$.

5.6. Állítás. *Ha a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály NN és CB , akkor a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás NP .*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $i \in N$ nulla játékost. Ekkor az i játékoshoz tartozó komponense a költségvektornak 0, vagyis $c_i = 0$. Az NN tulajdonság alapján a χ szabály az i játékoshoz nemnegatív értéket rendel. A CB tulajdonság miatt a χ szabály által az i játékoshoz rendelt érték nem nagyobb, mint a költségvektor i játékoshoz tartozó komponense, vagyis c_i , ami 0. Tehát az i játékoshoz nullát rendel a χ szabály a c airport problémában: $\chi_i(c) = 0$. Mivel $\psi(c_a) := \chi(c)$, ezért $\psi_i(c_a) = 0$. Látható, hogy a ψ megoldás a nulla játékoshoz 0-t rendel a c_a airport játékban, tehát ψ NP tulajdonságú. $\square$

5.7. Állítás. *Ha a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály E , akkor a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás PO .*

Bizonyítás. $\sum_{i \in N} \psi_i(c_a) = \sum_{i \in N} \chi_i(c) = \max_{i \in N} c_i = c_a(N)$. Tehát a ψ megoldás PO . Az első egyenlőség a $\psi(c_a) := \chi(c)$ összefüggésből, a második egyenlőség az E tulajdonságból következik. A $\max_{i \in N} c_i = c_a(N)$ összefüggés pedig amiatt teljesül, hogy a c_a airport játékban és a c_a mögötti c airport problémában ugyanazok a költségek tartoznak az egyes játékosokhoz. $\square$

Megjegyzés: Az állítás megfordítása is teljesül, tehát ha a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás PO , akkor a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály rendelkezik az E tulajdonsággal.

5.8. Állítás. *Ha a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály ETE , akkor a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás ETP .*

Bizonyítás. Tekintsünk két ekvivalens játékost: $i \sim^{c_a} j$, ahol $i, j \in N$. Airport játékok esetén az ekvivalens játékosokhoz ugyanakkora költség tartozik: $(c_a)_i = (c_a)_j$. Ebből következik, hogy $c_i = c_j$. Mivel a χ szabály ETE tulajdonságú, ezért a szabály ugyanakkora értéket rendel az i és j játékosokhoz: $\chi_i(c) = \chi_j(c)$. Mivel $\psi(c_a) := \chi(c)$, ezért $\psi_i(c_a) = \psi_j(c_a)$. Tehát a ψ megoldás rendelkezik az ETP tulajdonsággal. $\square$

5.9. Állítás. *Ha a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály CCA , akkor a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás ADD .*

Bizonyítás. $\psi(c_a + \tilde{c}_a) = \chi(c + \tilde{c}) = \chi(c) + \chi(\tilde{c}) = \psi(c_a) + \psi(\tilde{c}_a)$. Tehát a ψ megoldás *ADD*. Az első és a harmadik egyenlőség a $\psi(c_a) := \chi(c)$ összefüggés miatt teljesül, míg a második egyenlőség a *CCA* tulajdonságból következik. A *CCA* tulajdonság csak azokra a $c, \tilde{c} \in \mathcal{C}^N$ airport problémapárokra teljesül, amikben a játékosok azonos sorrendben szerepelnek. A $c_a, \tilde{c}_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékokban is azonos sorrendben szerepelnek a játékosok, ugyanis a sorrendet $\mathcal{G}_a^N$, az N játékosalmazzal rendelkező airport játékok osztálya egyértelműen meghatározza. $\square$

5.10. Állítás. *Ha a $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály *IALC*, akkor a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás *M*.*

Bizonyítás. Vegyünk két tetszőleges $c_a, \tilde{c}_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékot és egy tetszőleges i játékost, melyre teljesül a következő: $(c_a)_i' = (\tilde{c}_a)_i'$. Ha az i játékosnak két airport játékban megegyezik a határhozzájárulása, akkor igaz, hogy $(c_a)_i = (\tilde{c}_a)_i$. (Itt azt figyeljük, amikor az i játékos az üres koalícióhoz csatlakozik mindkét játékban.) Ebből következik, hogy az i játékoshoz tartozó komponense a költségvektornak a két airport játék mögötti két airport problémában megegyezik: $c_i = \tilde{c}_i$.

Valamint ha az i játékosnak két airport játékban megegyezik a határhozzájárulása, akkor igaz az is, hogy minden olyan $j \in N \setminus \{i\}$ játékosra, amelyre $(c_a)_j < (c_a)_i$ teljesül, igaz a következő: $(c_a)_j = (\tilde{c}_a)_j$. (Itt azt figyeljük, amikor az i játékos az egyszemélyes j koalícióhoz csatlakozik mindkét játékban.) Ebből következően teljesül, hogy $c_j = \tilde{c}_j$.

Emellett ha az i játékosnak két airport játékban megegyezik a határhozzájárulása, akkor teljesül az is, hogy minden olyan $j \in N \setminus \{i\}$ játékosra, amelyre $(c_a)_j \geq (c_a)_i$ teljesül, igaz a következő: $(\tilde{c}_a)_j \geq (c_a)_j$. (Ugyanis ha i csatlakozik a j játékoshoz a c_a játékban, akkor a határhozzájárulása 0, mert a koalíció költsége a tagok költségének maximuma. Viszont ekkor a j játékos költsége nem lehet kisebb a $\tilde{c}_a$ játékban mint a c_a játékban, mert ekkor előfordulhatna, hogy a j játékoshoz való csatlakozáskor i határhozzájárulása nagyobb lesz nullánál a $\tilde{c}_a$ játékban.) Ebből következően teljesül, hogy $\tilde{c}_j \geq c_j$.

Ekkor teljesül az *IALC* tulajdonság három feltétele, emiatt a χ szabály ugyanakkora értéket rendel az i játékoshoz mindkét airport problémában: $\chi_i(c) = \chi_i(\tilde{c})$. Mivel $\psi(c_a) := \chi(c)$, ezért $\psi_i(c_a) = \psi_i(\tilde{c}_a)$. Tehát a ψ megoldás *M* tulajdonságú. $\square$

5.11. Állítás. *A $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett χ szabály megegyezik az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályával, vagyis $\chi(c) = \xi(c)$, pontosan akkor, ha a $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játékon értelmezett ψ megoldás megegyezik a Shapley-megoldással, azaz $\psi = \phi$.*

Az állítás bizonyításától eltekintünk, az állítás igazolása megtalálható a Littlechild és Owen (1973) cikkben.

5.3. Dubey(1982) valamint Moulin és Shenker(1992) eredménye

5.12. Tétel (Dubey (1982)). *Legyen χ egy $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett szabály. Ekkor χ pontosan akkor NN , CB , E , ETE és CCA , ha $\chi = \xi$, azaz ha χ az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabálya.*

Bizonyítás. Ha a χ szabály megegyezik a ξ egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályával, akkor a χ szabály NN , CB , E , ETE és CCA . Ez az állítás igazolásra került a Thomson (2007) cikkben.

Ha a χ szabályra teljesül, hogy NN , CB , E , ETE és CCA tulajdonságú, akkor a χ szabály megegyezik a ξ -vel, az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályával. Ezt az állítást igazoljuk az alábbiakban.

Mivel χ szabály a fenti tulajdonságokkal bír, ezért az 5.6, 5.7, 5.8 és 5.9 állítások alapján a $c \in \mathcal{C}^N$ airport probléma által generált $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játék ψ megoldása NP , PO , ETP és ADD tulajdonságokkal rendelkezik. Ha viszont a c_a játék ψ megoldása NP , PO , ETP és ADD , akkor a 4.1 tétel szerint a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással. Az 5.11 állítás szerint pedig, ha a c airport probléma által generált c_a airport játék ψ megoldása megegyezik a ϕ Shapley-megoldással, akkor a c airport problémán értelmezett χ szabály megegyezik az egymást követő egyenlő hozzájárulás ξ szabályával. Ezzel igazoltuk a tételt. $\square$

5.13. Tétel (Moulin és Shenker (1992)). *Legyen χ egy $c \in \mathcal{C}^N$ airport problémán értelmezett szabály. Ekkor χ pontosan akkor E , ETE és $IALC$, ha $\chi = \xi$, azaz ha χ az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabálya.*

A tétel bizonyítása a 5.12 tétel bizonyításának analógiájára történik.

Bizonyítás. Ha a χ szabály megegyezik a ξ egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályával, akkor a χ szabály E , ETE és $IALC$. Ez az állítás igazolásra került a Thomson (2007) cikkben.

Ha a χ szabályra teljesül, hogy E , ETE és $IALC$ tulajdonságú, akkor a χ szabály megegyezik a ξ -vel, az egymást követő egyenlő hozzájárulás szabályával. Ezt az állítást igazoljuk az alábbiakban.

Mivel χ szabály a fenti tulajdonságokkal bír, ezért az 5.7, 5.8 és 5.10 állítások alapján a $c \in \mathcal{C}^N$ airport probléma által generált $c_a \in \mathcal{G}_a^N$ airport játék ψ megoldása PO , ETP és M tulajdonságokkal rendelkezik. Ha viszont a c_a játék ψ megoldása PO , ETP és M , akkor a 4.2 tétel szerint a ψ megoldás megegyezik a ϕ Shapley-megoldással. Az 5.11 állítás szerint

pedig, ha a c airport probléma által generált c_a airport játék ψ megoldása megegyezik a ϕ Shapley-megoldással, akkor a c airport problémán értelmezett χ szabály megegyezik az egymást követő egyenlő hozzájárulás ξ szabályával. Ezzel igazoltuk a tételt. $\square$

A fenti bizonyításokkal új igazolását adtuk a Dubey (1982) és a Moulin és Shenker (1992) tételeknek, valamint összekapcsoltuk az airport játékok esetében és az airport problémák területén elért eredményeket.

Irodalomjegyzék

- Balog D, Csóka P, Pintér M (2010) Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén. Hitelintézet Szemle 6:604–616
- Csóka P (2003) Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. Közgazdasági Szemle L(10):855–880
- Dubey P (1982) The shapley value as aircraft landing fees–revisited. Management Science 28:869–874
- Forgó F, Olajos M (1991) A family of cost allocations methods for a tree. PU.M.A. Pure Mathematics and Applications 1:5–13
- Gillies DB (1959) Solutions to general non-zero-sum games. Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press
- Ichiishi T (1981) Super-modularity: Applications to convex games and the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory 25:283–286
- Littlechild SC, Owen G (1973) A simple expression for the Shapley value in a special case. Management Science 20:370–372
- Moulin H, Shenker S (1992) Serial cost sharing. Econometrica 60:1009–1037
- Peleg B, Sudhölter P (2003) Introduction to the theory of cooperative games Kluwer
- Pintér M (2007) Regressziós játékok. Szigma XXXVIII:131–147
- Pintér M (2009) A Shapley-érték axiomatizálásai. Alkalmazott Matematikai Lapok 26:289–315
- Shapley LS (1953) A value for n -person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds.) Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies 28. Princeton University Press, Princeton pp. 307–317
- Shapley LS (1971) Cores of convex games. International Journal of Game Theory 1:11–26

- Solymosi T (2007) Kooperatív játékelmélet (elektronikus jegyzet). http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/solymosi_jatekelmelet.pdf
- Thomson W (2007) Cost allocation and airport problems. Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 538
- Young HP (1985) Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory 14:65–72