

OTDK-DOLGOZAT

Bayer Péter és Tóth Mánuel László
BA

2013

**A véleményrangsorok fontossága – egy pénzügyi megközelítés –
és az információs prémium**

**The Importance of the Hierarchy of Beliefs – a Financial
Approach – and the Information Premium**

Bayer Péter és Tóth Mánuel László

Kézirat lezárva: 2011. április 28.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés (Bayer Péter)	1
1.1. A szerkezetről	1
1.2. Az irodalomról	1
2. Alapok (Bayer Péter)	3
2.1. Játékelméleti alapfogalmak	3
2.2. Nem teljes információs játékok	5
3. Az Allen-Morris játék egy formája (Bayer Péter és Tóth Mánuel László)	9
3.1. Az alapjáték	9
3.2. A tökéletes információs eset	11
3.3. A nem tökéletes információs eset	13
4. A bank játéka (Tóth Mánuel László)	23
4.1. A bank, mint új játékos	23
4.2. A bank és a betétesek sem tökéletesen informáltak	24
4.3. A betétesek tökéletesen informáltak	29
4.4. Általános megállapítások	31
5. Az információs prémium (Bayer Péter)	34
5.1. A fogalom	34
5.2. Problémák és még nyitott kérdések	36
5.3. Alkalmazási lehetőségek	37
6. Függelék - bizonyítások (Bayer Péter és Tóth Mánuel László)	38
Irodalomjegyzék	41

Táblázatok jegyzéke

2.1. A fogolydilemma kifizetőmátrixa	4
3.1. Az alapjáték kifizetőmátrixa	9
3.2. A természet apriori eloszlása	10
3.3. A játék kimenetele	12
3.4. A lehetséges állapotok és azok előfordulási valószínűségei	13
3.5. Az elsőrendű vélekedések mátrixa	15
3.6. A másodrendű vélekedések $T_a = 3$ esetén	17
3.7. A negyedrendű vélekedések	18
3.8. Az egyes típusokhoz tartozó döntések	21
3.9. A játék lejátszása (R_4, R_4) stratégiapár esetén	21
4.1. Az alapjáték paraméteresen felírva	25
4.2. A vélekedésekből származó valószínűségek	25
4.3. A játékosok egyes kategóriákra adott válaszai	26
4.4. A speciális eset megoldása	26
4.5. Az alapjáték paraméteresen	27
4.6. A vélekedésekből származó valószínűségek általános esetben	27
4.7. A játékosok válaszainak valószínűsége általánosan	28
4.8. A specifikált eredmények összevetése	31
4.9. Az általános eredmények az első kikötés mellett	32
4.10. Az általános eredmények a második kikötés mellett	32

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat témája, amennyire ezt össze lehet foglalni egy kifejezésben, a nem teljes információs játékok alkalmazása a gazdasági élet modellezésében. A társzerzővel írt dolgozatok sajátossága, hogy írói nem teljesen ugyanolyan hangsúlyt helyeznek annak különböző részeire. Igyekeztünk e természetes jelenséget javunkra fordítani, és a „kecske is jóllakik, káposzta is megmarad” elvét követni a dolgozat felépítésekor. Ennek szerencsés következménye, hogy az egyetemes, absztrakt matematikai következtetések megfelelő arányban keverednek a kreatív, szigorúan gyakorlati alkalmazásokkal.

1.1. A szerkezetről

Az ezt követő fejezetben, első lépésként áttekintjük a játékelméleti apparátust, megismerjük a dolgozatban használt jelölésrendszert, kisebb példákon is bemutatva. Ezután a harmadik fejezetben egy adott gazdasági helyzetre mutatunk meg egy lehetséges modellezést, a hangsúlyt az episztemológiai fogalmak alkalmazására, és az ebből fakadó gazdasági következményekre helyezve. Megvizsgáljuk, van-e hatása az episztemológiai jellemzők mozgatásának a racionális játékosok döntéseire. A negyedik fejezet ennek a modellnek a bővítése, ennek lehet a legnagyobb közgazdasági relevanciája dolgozatunkban. Megvizsgáljuk egy modellszerű bank betéti kamatképzését a játékosok információs helyzetének megfelelően, látni fogjuk, hogy jól megválasztott modellben a több információ nagyobb társadalmi összhasznossággal jár. Az ötödik fejezetben visszatérünk az absztrakt matematikához és bevezetünk egy új mutatószámot, mely szigorúan episztemológiai fogalmakat kapcsol össze szigorúan gazdasági paraméterekkel. Az utolsó három fejezet döntő többsége saját eredmény, de az eredeti ötlet, a játék paramétereiről alkotott vélekedések egymásra épülése nélkül egy tapodtat sem mozdult volna előre a kutatás. Az itt kihozott tételek bizonyításának némelyike technikailag rendkívül egyszerű, ismertetése azonban hosszadalmas és megtörné a dolgozat fő gondolatmenetét, ezért ezek a függelékbe kerültek. A röviden belátható tételeket igyekeztünk helyben bizonyítani.

1.2. Az irodalomról

Az általunk használt irodalmat három nagyobb kategóriába lehet sorolni. Az első kategória a játékelméleti alapfogalmakhoz használt források, hogy el tudjuk helyezni kutatásunkat a tudományterületek között és keretet adjunk modelljeinknek. A második kategória a nem teljes információs játékok megértéséhez és megragadásához használt irodalom, melyeket elengedhetetlenek voltak a modellek specifikálásához. A harmadik, a modellek alapötletétől szolgáló irodalmak, munkánk csírája, mely a

dolgozat témáját segített megadni.

A második fejezetben, a játékelméleti alapfogalmak tárgyalásához igyekeztünk követni a Osborne and Rubinstein [1994] és a Forgó et al. [2005] szerint megadott fogalmakat, jelöléseket. A Nash-egyensúly koncepciójának megértéséhez Nash [1950] cikkét használtuk. Itt a jelölésrendszer nagyrészt megegyezik a felhasznált irodalmakkal. A nem teljes információs játékokat Harsányi [1967-68] alapján kezeltük, az információs helyzeteket Aumann [1999a] szerint, a véleményrangsorokat Aumann [1999b] szerint specifikáltuk. A természeti apriori eloszlásokat Aumann [1976] egyik speciális eseteként tekintettük. A modell alapjaként Allen and Morris [1998] modellje szolgált, az egymásra épülő vélekedések koncepciója innen fakad dolgozatunkban. Végezetül, az információs helyzetek és a gazdaság összefüggéseinek ötlete Mas-Colell et al. [1995] és Gömöri [2001] alapján fogalmazódott meg.

2. fejezet

Alapok

Az alábbiakban bevezetjük azokat a fogalmakat és jelöléseket, melyeket az egész dolgozatban használni fogunk. Mind a régi, beágyazódott, mind a frissebb területeken igyekeztük követni a bevett, illetve eredeti jelölésrendszert és definíciókat, apró eltérések előfordulhatnak. Ennek fő oka, hogy egyelőre nem célunk a végsőkéig általánosítani az itt kapott következményeket, ezért a kiinduláskor sem teszünk olyan sok feltételt.

2.1. Játékelméleti alapfogalmak

A játékelmélet legalapvetőbb absztrakt fogalma maga a játék, amiről a terület az elnevezését kapta. Anélkül, hogy belemennénk az elnevezés pontosságába vagy filozófiai kérdésekbe, számunkra a játék Osborne and Rubinstein [1994] alapján egy olyan rendszer lesz, melyet szereplők alkotnak, akik különböző akciók közül válogathatnak. Attól függően, hogy az egyes szereplők hogyan döntöttek, a játékosok kapnak valamilyen kifizetést. A játékosokat az fogja összekötni a játékban, hogy kifizetésük függ a többi játékos döntésétől. Játékosból és akcióból is bármilyen számosságú lehet a játékban, nekünk az első modellben véges sok játékosunk és akciónk lesz, a későbbi bővítésben majd belép még egy szereplő, aki kontinuum sok akció közül válogathat. A kifizetés minden játékos esetében egy valós szám lesz. Formálisan a következő jelöléseket vezetjük be Forgó et al. [2005] szerint.

- A játékosok halmazát N -el jelöljük úgy, hogy $0 \notin N$. 0-val a „Természetet” fogjuk jelölni, ennek csak később, a nem tökéletes információs játékoknál lesz jelentősége.
- A_i fogja jelölni egy $i \in N$ játékos választható akcióinak halmazát, A_0 a természet akcióit. Legyen továbbá $A := \times_{i \in (N \cup 0)} A_i$ akcióprofilok halmaza.
- u_i fogja jelölni egy $i \in N$ játékos kifizetőfüggvényét. $u_i: A \rightarrow \mathbb{R}$, tehát minden játékosra minden lehetséges akcióprofilhoz egy valós számot fog rendelni. Hasonlóan u -val jelöljük a $\times_{i \in N} u_i$ szorzatot.

Így egy G -vel jelölt játékot meghatároz a $G = \{N, A, u\}$ felírás. Ezt az alakot nevezzük a G játék stratégiai formájának. A felsorolásban megadott tulajdonságokat a játék paramétereinek nevezzük.

Példaként mutassuk ezt be az egyik legismertebb játékon, a Fogolydilemmán. Itt két játékos található, a két fogoly, akiket nevezünk Első fogolynak és Második fogolynak. Mindketten két akció közül válogathatnak, vagy Vall-t, vagy Nem vall-t játszanak. A kifizetéseket a 2.1 táblázat tartalmazza. A bal oldalon lévő számok az Első, a jobb oldalon lévők a Második játékos kifizetéseit ábrázolják.

Tehát a játék paramétereai a következők:

		Második fogoly	
		Vall	Nem vall
Első fogoly	Vall	-5; -5	-1; -9
	Nem vall	-9; -1	-2; -2

2.1. táblázat. A fogolydilemma kifizetőmátrixa

- $N = \{\text{Első fogoly}, \text{Második fogoly}\}$
- $A_i = \{\text{Vall}, \text{Nem vall}\}$ $i \in N$ -re.
- u -t mátrix formában adtuk meg, ahogy a későbbiekben is tenni fogjuk.

2.1.1. definíció (Racionalitás). Egy i játékost *racionálisnak* nevezzük, amennyiben maximalizálja kifizetését.

A továbbiakban feltesszük, hogy minden játékos racionális.

2.1.2. definíció (Köztudott). Egy G játék p paramétere *köztudott*, amennyiben minden játékos tudja p -t, minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja p -t, és így tovább a végtelenségig.

Tegyük fel, hogy a fogolydilemmában minden paraméter köztudott és a játékosok racionalitása is köztudott. Ekkor vegyük észre, hogy ha egy fogoly Vall-t játszik, az mindenképp nagyobb kifizetést hoz neki, mintha Nem vall-t játszana, függetlenül attól, hogy a másik játékos milyen akciót választ. Ezt szigorú dominanciának nevezzük. Egy játékos, aki maximalizálni akarja kifizetését, nem játszik szigorúan dominált stratégiát, hisz az ellentmondana a racionalitás definíciójának, ezért kijelenthetjük, hogy a fogolydilemma-szerű játékok, mind a (Vall, Vall) akcióprofilal érnek véget. Érdekes következmény, hogy amennyiben mindketten Nem vall-t játszottak volna, mindketten magasabb kifizetést kaptak volna ((-2, -2) a (-5, -5) helyett).

Ebben az esetben a tudás kifejezést a szó köznapi értelmében használtuk, később azonban különbséget fogunk tenni vélemény, tudás, információ és egyéb episztemológiai kifejezések között. Ebben az esetben egy paraméter tudása egybevág a későbbi definíciójával.

A következő definícióban i játékos (kevert) stratégiahalmazának neveztük azt az S_i halmazt, amely tartalmazza az összes valószínűségi mértéket A_i fölött.

2.1.3. definíció (Nash-egyensúly). Egy G játék Nash-egyensúlya az az $s^* = \times_{i \in N} s_i^*$ stratégiaprofil, amire teljesül, hogy egyik $i \in N$ játékosnak sincs olyan $s_i \in S_i$ stratégiája, amelyre $u_i(s_i^* \times s_{-i}^*) < u_i(s_i \times s_{-i}^*)$.

Megjegyzendő, hogy e definíció szerint egy játéknak lehet több Nash-egyensúlya is, de legalább egy biztosan van Nash [1950] alapján. A fogolydilemmának csak egy van, ez a (Vall, Vall) tiszta stratégiaprofil. Stratégiák is lehetnek szigorúan domináltak, sőt stratégiák is dominálhatnak akciókat, ugyanolyan következményekkel, mint amit az akciókról mondtunk.

2.1.4. definíció (Teljes információs játék). Egy G játék teljes információs, amennyiben minden paramétere köztudott.

Ezen fogalmak ismeretében kijelenthetjük, hogy a fentebb leírt fogolydilemma játék teljes információs játék, és racionális szereplők esetén (Vall, Vall)-t fognak játszani. Természetesen, ha bármelyik

feltételt gyengítjük, más eredménnyel fogunk szembesülni. A racionalitással ebben a dolgozatban nem fogunk kiterjedten foglalkozni, helyette rátérünk azokra a játékokra, amik nem teljes információsak, ugyanis elsősorban ezeket tudjuk felhasználni a pénzügyi élet modellezéséhez.

2.2. Nem teljes információs játékok

A nem teljes információs játékok egyik problémája, hogy még ha a paraméterek száma nem is olyan nagy, akkor is bonyolult és hosszadalmas lehet specifikálni magát a játékot. Aumann kétféle megközelítést javasolt a tudás leírására Aumann [1999a] alapján. Az egyik, a szemantikai leírás, mely az információs helyzeteket halmazokként írja le, majd a halmaz elemein helyez el valószínűségi mértékeket a vételek leírására. A másik megoldás, a szintaktikai megközelítés, mely logikai állításokkal és operátorokkal dolgozik, értelmes mondatokkal leírva a játékosok információs helyzetét. Értelemszerűen a kettő összhangban van egymással, minden helyzetet egyértelműen le lehet írni mindkét módszerrel. Dolgozatunk nem foglal állást a kettő között, azonban igyekszik kihasználni mindkét leírás előnyeit. Szemantikai leírást fogunk használni a tételek kimondásához, viszont a példákban igyekszünk világosan mondatokba foglalni a játékosok informáltságát. Most bevezetjük azokat a fogalmakat, amik a szemantikai leíráshoz szükségesek.

A nem teljes információs játékok kezelésére Harsányi adta meg az útmutatást. A kiinduló koncepció az, hogy minden játékosnak vannak tulajdonságai, amik befolyásolják a játék paramétereit (pl. a kifizetések). A fogolydilemmában ilyen példa lehet, ha egy fogoly „lelkiismeretes”. Egy lelkiismeretes fogolynak negatív hasznosságot hoz, ha elárulja társát, esetleg nem is játszhatna Vall-t. A feltétel az, hogy minden játékos tudja magáról, hogy milyen tulajdonságai vannak (a fogoly tudja, hogy ő lelkiismeretes-e vagy sem), azonban nem ismeri a többi játékos tulajdonságait.

2.2.1. definíció (Világállapot). *Világállapotnak nevezzük a természet és a játékosok összes lehetséges és a G játék szempontjából releváns tulajdonságainak egy kombinációját. A világállapotokat ω -val jelöljük, halmazukat Ω -val.*

A lelkiismerettel kibővített fogolydilemmában az egyes ω -k nem csak azt tartalmazzák, hogy melyik fogoly lelkiismeretes és melyik nem, hanem azt is, hogy mit gondolnak egymásról. Amennyiben a két fogoly nem tud egymásról semmit, és elképzelésük sincs a másik „lelkiismeretességéről”, ez az Ω egy négyelemű halmaz, elemei az $\omega_1 = [\text{Lelkiismeretes}, \text{Lelkiismeretes}]$, $\omega_2 = [\text{Lelkiismeretes}, \text{Nem lelkiismeretes}]$, $\omega_3 = [\text{Nem lelkiismeretes}, \text{Lelkiismeretes}]$ és az $\omega_4 = [\text{Nem lelkiismeretes}, \text{Nem lelkiismeretes}]$. A foglyok tudják magukról, hogy lelkiismeretesek-e, de nem tudják azt másik fogolyról. Azaz, Első fogoly meg tudja mondani, hogy $\{\omega_1, \omega_2\}$ -ben vagyunk-e vagy $\{\omega_3, \omega_4\}$ -ben, de hogy azon belül melyik világállapot következett be, azt nem tudja.

2.2.2. definíció (Információs partíció). *Legyen P_Ω az összes lehetséges partíció Ω -n. Ekkor I_j -t j játékos információs partíciójának nevezzük, ahol $I_j \in P_\Omega$. $I_j(\omega)$ -val fogjuk jelölni j játékos információs partíciójának azt az elemét, ami tartalmazza ω -t. Legyen továbbá $I := \times_{j \in N} I_j$.*

I_j -vel kapcsolatban a következő elnevezéseket vezetjük be:

- Ha $I_j(\omega_1) = I_j(\omega_2)$, akkor azt mondjuk, hogy j játékos nem tud különbséget tenni ω_1 és ω_2 világállapotok között.
- Ha $I_j(\omega_1) \neq I_j(\omega_2)$, akkor j játékos meg tudja különböztetni ω_1 és ω_2 világállapotokat.

Részletesebben kifejtve a világállapotok megkülönböztetésének elvét, a következőt mondhatjuk: tegyük fel, hogy a világ helyzetét épp egy ω világállapot írja le. Az információs partíció j játékosra azt fogja megadni ebben az esetben, hogy j mely világállapotokról tudja, hogy bekövetkezhettek, és melyekről tudja, hogy azok biztosan nem következhettek be. Az $I_j(\omega)$ partíció adja meg, hogy ez a játékos ebben a világállapotban milyen eseteket tart elképzelhetőnek. Minden, ami ezen kívül esik, az nem következhetett be j szerint.

2.2.3. következmény. *Minden $j \in N$ -re és $\omega \in \Omega$ -ra igaz, hogy j játékos sosem tartja lehetetlennek ω világállapotot, amennyiben az bekövetkezett.*

Mivel definíció szerint $\omega \in I_j(\omega)$, a játékosok tudása ily módon nem lehet félrevezető.

Ezek alapján, amennyiben egy játékos nem tudja megkülönböztetni ω_1 és ω_2 világállapotokat, azt fogja jelenteni, hogy bármely világállapotban vagyunk, j játékos soha nem fogja pontosan tudni, hogy ez biztosan ω_1 vagy ω_2 . Azt viszont esetleg tudhatja, hogy ezek biztos nem következhettek be. Vegyük a lelkiismerettel bővített fogolydilemmát példaként. Itt Első fogoly nem tudja megkülönböztetni azokat a világállapotokat, amikben ő lelkiismeretes, ahogyan azokat sem, amiben ő nem lelkiismeretes, mivel ő csak a saját tulajdonságait ismeri. Ebben az esetben az ő információs partíciója a következő lesz: $I_{\text{Első fogoly}} = \{\{\omega_1, \omega_2\}\{\omega_3, \omega_4\}\}$. Hasonlóan Második fogolyra: $I_{\text{Második fogoly}} = \{\{\omega_1, \omega_3\}\{\omega_2, \omega_4\}\}$.

Ahhoz, hogy a partíciókat összekapcsoljuk a játékosok lehetséges tulajdonságaival, bevezetünk egy új fogalmat, a játékosok típusát.

2.2.4. definíció (Típus). *Minden j játékosra az I_j partícionált halmaz elemeit j kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük egy T_j típusalmazzal. Az eddigiekhez hasonlóan $T := \times_{j \in N} T_j$.*

A típusok mögötti Harsányi [1967-68] által felvetett alapkoncepció a következő: racionális játékosok, akik szimmetrikusak kifizetéseikben és választható akciókban, és ugyanolyan információval rendelkeznek, ugyanúgy fognak játszani is. Így, amennyiben megadjuk egy játékosra, hogy mely világállapotokat tartja elképzelhetőnek, 2.2.3 következmény miatt megadtuk minden tulajdonságát is, ami releváns lehet a játékban. Ezeket az információs helyzeteket típusoknak fogjuk mostantól nevezni, a játékos típusa tehát elmond mindent a játékosról. A típusalmaz elemeit akárhogy elnevezhetjük, de általában összhangban lesznek a vizsgált játékos lehetséges tulajdonságaival (például: lelkiismeretes - nem lelkiismeretes).

Harsányi úgy kezeli a nem teljes információs játékokat, hogy bevezet egy új játékot, ezt nevezzük természetnek, aki az összes többi játékos lépése előtt „kiosztja” a játékosoknak, hogy milyen típusúak egy természeti prior eloszlás alapján. A játékosok a saját típusuk ismeretében döntenek ezután. Amennyiben a természet prior eloszlása köztudott, a játékosok a Bayes-szabály alapján ki tudják számolni az összes elképzelhetőnek tartott világállapot valószínűségét, ezért a nem teljes információs játékok eféle transzformációjának eredményét Bayesi-játéknak nevezzük.

Fontos, hogy a nem teljes információs játékok ilyen átírásakor a játék paramétereinek egyértelműsége megszűnik, azaz minden világállapotra meg kell adnunk a játékosok akcióit és kifizetéseit. Az új jelöléseink a következők:

- $C_i \subseteq A_i \times T_i$ jelzi i játékos T_i típusban elérhető akcióinak halmazát, $C := \times_{i \in N} C_i$
- A kifizetőfüggvényt mostantól világállapotokra adjuk meg, a továbbiakban $u_i: \Omega \times A \rightarrow \mathbb{R}$
- A játékosoktól független, játék szempontjából releváns állapotokat a természet állapotainak nevezzük és H -val jelöljük. Ez alapján $\Omega = H \times (\times_{i \in N} T_i)$.

- A természet prior eloszlása egy valószínűségi mérték Ω fölött, és Δ_0 -al jelöljük.

Mostanra sikerült megadnunk a játékot úgy, hogy a játékosokat beosztottuk típusokba és átírtuk a meglévő paramétereket az új fogalmaknak megfelelően. Azonban az informáltságból még hiányzik valami, mégpedig az, hogy hogyan vélekednek egymás és a természet állapotairól, az egyes típusokban. Ezt a tulajdonságot vezetjük be most, Aumann [1999b]-nek megfelelően.

2.2.5. definíció (Elsőrendű Vélekedés). Jelölje $\Delta(\Omega)$ a világállapotokon vett összes valószínűségi mérték halmazát. Ekkor az $f_i^1: T_i \rightarrow \Delta(\Omega)$ függvényt nevezzük i játékos elsőrendű vélekedésének. Az eddigiekhez hasonlóan $f^1 := \times_{i \in N} f_i^1$.

Ez a függvény minden játékosra megadja, hogy milyen valószínűséggel hiszi az egyes világállapotokról, hogy azok bekövetkeztek. A vélekedés lehet egy kutatás eredménye, egy megérzés, minden, amit a játékosok felhasználhattak, hogy következtessenek a többi játékos és a természet tulajdonságaira. Vegyük azonban észre, hogy ezzel nem adtunk meg minden információt a játékosokról. Behoztunk a játékba egy következtetési módszert, hogy a játékosoknak legyen elképzelése a típusokról, hiszen ez döntően befolyásolja a racionális játékosok lépéseit. Azonban így már az is befolyásolja a játékosok lépéseit, hogy mit gondolnak egymás vélekedéseiről, hiszen ha a vélekedés hatással van egy játékosra, akkor hatással van az összes többire is. Ezért aztán vizsgáljuk a játékosok vélekedését a többi játékos vélekedéséről is. A vélekedés nem mondhat ellen annak, amit a játékos az információs partíciók alapján tud mondani, tehát ha ω világállapot következett be, i játékos minden olyan E halmazhoz, amire $E \subset \Omega$ de $E \cap I_i(\omega) = \emptyset$ 0 valószínűséget fog rendelni.

2.2.6. definíció (Másodrendű vélekedés). $f_i^2: T_i \rightarrow \Delta(\Delta(\Omega))$, ahol $\Delta(\Delta(\Omega))$ a világállapotokon értelmezett valószínűségi mértékek fölött értelmezett valószínűségi mértékek halmaza. $f^2 := \times_{i \in N} f_i^2$.

Hasonlóképp definiálható a harmadrendű, negyedrendű, stb. vélekedés. Bármilyen nagy véges egész n -re igaz, hogy ha az n -edrendű vélekedés hatással van a játékra, akkor az $n+1$ -edrendű is, így nincs olyan magas rendű vélekedés, mely ne lenne hatással a játékosok döntésére.

2.2.7. definíció (Véleményrangsor). Egy i játékos vélekedéseinek összességét, az $f_i = \times_{n=0}^{\infty} f_i^n$ szorzatot a játékos véleményrangsorának nevezzük. Továbbá legyen $f := \times_{i \in N} f_i$.

A magasabb rendű vélekedések itt szereplő definíciója nem tökéletesen vág egybe a bevett fogalmakkal, didaktikai okokból azonban nem pontosítjuk őket tovább, a dolgozatban lévő használatuk ugyanis nem követel meg jobb leírást (a pontosabb definíció több, itt nem használt fogalmat követelne meg). Értelemszerűen a pontosabb definíciók is működnének a dolgozatban.

Ekkor formálisan G nem teljes információs játék felírható $\Gamma = (N, A, u, I, H, C, f)$ alakban. Az ilyen, vagy ezzel ekvivalens alakokat nevezzük Bayesi-játéknak. Az elnevezés mögötti alapkoncepció az, hogy minden játékosnak van egy kiinduló apriori vélekedése a világállapotok fölött, és ennek függvényében lesz egy poszteriori vélekedése, miután megkapta a típusát. A mi felírásunkban nem szerepel a játékosok apriori vélekedése, de a véleményrangsorokban megadtunk minden lehetséges poszteriori vélekedést. A világállapotok csak a természet és a játékosok tulajdonságaitól függenek, ezért nem kell őket külön megadni Bayesi-játék formájában. Vegyük észre, hogy a Bayesi-játék teljes információs.

Egy Γ Bayesi-játék normalizált formájának nevezzük azt a $\widehat{G} = (N, \widehat{S}, u)$ játékot, melyben a normalizált játék stratégiaprofiljaira igaz, hogy $\widehat{S}_i: T_i \times S_i$, azaz minden típusra megadunk egy stratégiát az eredeti játék szerint.

2.2.8. definíció (Bayesi-Nash-egyensúlypont). Γ Bayesi-játék Bayesi-Nash-egyensúlya az az $\hat{S}$ stratégiaprofil, mely $\hat{G}$ normalizált formájú játékban Nash-egyensúly.

Ilyen mindig létezik, Nash [1950] alapján.

3. fejezet

Az Allen-Morris játék egy formája

3.1. Az alapjáték

A következőkben stilizált gazdasági szereplők eszközkezelését fogjuk ábrázolni. Kezdeti modellünkben, mely a Allen and Morris [1998]-beli modell diszkrét és korlátos változata, két játékos lesz, ezek a illetve b vállalatok, akik mindketten egyazon bankban tartják minden befektethető vagyonukat. A két játékosnak két akció közül kell döntenie: egy kérdéses időszakban vagy kiveszik minden pénzüket a bankból (W) vagy bennhagyják (R). Legyen a betétek nagysága mindkét vállalatnak 10000 dollár. Amennyiben mindkét vállalat úgy dönt, hogy a bankban hagyják a pénzüket, az időszak végén a bank mindkettejüknek fizet kamatot, ennek mértéke legyen most 35%. A bank betétbiztosítást kötött mindkét ügyfelére, a biztosító a bank helyett kifizeti a betéteseket, amennyiben a bank fizetéseképtelenné válik. A banknak csak ez a két ügyfele van, és ezek egyesével is olyan nagy erőt képviselnek a bank eszkozsodalán, hogy amennyiben bármelyikük kiveszi a pénzét, a bank csődbe megy, és az a betétes, aki kivette a pénzét (tehát W -t játszott), a szerződés értelmében 10000 dollárral távozzhat. Ez akkor is igaz, ha csak az egyik betétes akarta kivenni a pénzét, és akkor is, ha mindkettő. Ha azonban csak egy vállalat játszott W stratégiát, a biztosító - látva a bank csődhelyzetét - sietve felbontja a bankkal kötött szerződését, és annak a betétesnek, aki R stratégiát választott, már nem fog fizetni, mivel a bank is fizetéseképtelen, ez a vállalat hoppon marad, és elveszti minden pénzét. A játék paraméterei tehát:

- $N = \{a, b\}$.
- $A_a = A_b = \{R, W\}$.
- A játékosok kifizetéseit a 3.1 táblázat mutatja.

		b játékos	
		u	W
a játékos	R	13500; 13500	0; 10000
	W	10000; 0	10000; 10000

3.1. táblázat. Az alapjáték kifizetőmátrixa

A bal oldalon az a vállalat (sorjátékos), a jobb oldalon a b vállalat (oszlopjátékos) kifizetései láthatók, eddigi modellünkben minden paraméter, valamint a játékosok racionalitása is köztudott.

Ebben a játékban mindkét vállalat szabadon választhatja, hogy kiveszi vagy bennhagyja a pénzét, mindkét stratégiának vannak kockázatai, (ha R -t játszik, elveszítheti minden pénzét, ha W -t, akkor nem kaphat kamatokat) azonban érezzük, hogy a valóságban egy vállalat nem mindig áll olyan jól, hogy hosszú távú betétet helyezhet el. Előfordulhat, hogy a vállalatnak likvid eszközökre van szüksége, ami azonnal hozzáférhető, és nincs befektethető vagyona.

A valósághoz lehetőleg közelítve azzal az alapfeltevéssel fogunk élni, hogy az egyes szereplők (magánszemélyek, vállalatok) befektetési viselkedései két dologtól függenek: az aktuális vagyoni helyzetüktől, és a többiek viselkedéséről való vélekedésüktől. Az előbbi leírására minden szereplőnél bevezetünk egy szignálfüggvényt (L_a , illetve L_b), mely a $[0, 7]$ intervallumba eső egész számokon mozog, és minden időszakban jelzi, hogy az adott vállalatnak van-e likviditási igénye. A függvény idő szerinti dinamikája nem képezi a dolgozat témáját, mindössze annyit mondunk róla, hogy döntés előtt a vállalatnak figyelembe kell vennie, a szignál pillanatnyi állását, és amennyiben az adott időszakban $L \in \{0, 1\}$, az illető szereplő elért egy kritikus likviditási pontot, és mindenképp ki kell vennie a pénzét a bankból. Amennyiben $L \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a szereplő jól áll anyagilag, és bármit dönthet a vagyonáról.

A vállalatok azonos gazdasági környezetben működnek, ezért feltételezzük, hogy likviditásuk hasonlóan fog alakulni, azaz, ha egy időszakban az egyik vállalatnak éppen jól megy az üzlet, feltételezzük, hogy a másik sem teljesít rosszul, és fordítva, ha az egyik vállalat csődközel állapottban van, a másik sem állhat túl jól. Ezt a modellben úgy jelöljük, hogy a szignálfüggvényekre kikötjük a $|L_a - L_b| \leq 1$ összefüggést, azaz azonos időszakban a két likviditásmutató közti különbség nem lehet nagyobb 1-nél. A likviditási mutatók nem közismertek, ezért a játékot nem tudjuk teljes információs játékként kezelni.

A Harsányi [1967-68]-féle transzformációnak megfelelően bevezetjük a természet nevű játékost, aki a játék kezdetekor kisorsolja a játékosok állapotait. A példában a vállalatoknak egyetlen tulajdonsága van, ez pedig a likviditási mutatójuk, ezek lesznek tehát a vállalatok típusai. Így $T_a = T_b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. A természetnek ezen felül nincs szerepe, egyetlen állapotot vehet fel, így állapotai semmilyen formában nem hatnak a játékra, ezért H -t nem érdemes a modellben szerepeltetni. $\Omega = T_a \times T_b$ miatt tehát összesen 64 világállapotunk lesz, a két játékos nyolc-nyolc típusa miatt. A természet apriori eloszlását (ami alapján a világállapotok közül sorsol) a 3.2 táblázat mutatja.

$\Delta_0(\omega)$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{8}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$\sum$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3.2. táblázat. A természet apriori eloszlása

A táblázatot a következőképp értelmezzük. A 4. sor 5. eleme (a számozások 0-val kezdődnek) megmutatja, hogy a természet $\frac{1}{24}$ valószínűséggel oszt a játékosnak 4-es, b játékosnak pedig 5-ös típust. A táblázatban láthatjuk, hogy noha a világállapotok között megjelennek az eddig lehetetlennek tartott esetek ($|L_a - L_b| > 1$), ezeknek így már 0 valószínűséget adunk. Az utolsó sor és az utolsó

oszlop jelzi, hogy a játékosok külön-külön milyen valószínűséggel lesznek beosztva az egyes típusokba. Ez minden esetben $\frac{1}{8}$ lesz.

Így az episztemológiai jellemzőkön kívül összeszedtünk minden paramétert, kivéve a C -t, ami a világhelyzetekben mutatja a játékosok akcióhalmazát. Az eddigieknek megfelelően:

$$C_a = \begin{cases} \{R, W\} & \text{, ha } T_a > 1 \\ \{W\} & \text{különben} \end{cases}$$

Ugyanez b játékosra:

$$C_b = \begin{cases} \{R, W\}, & \text{ha } T_b > 1 \\ \{W\} & \text{különben} \end{cases}$$

Mielőtt a játékosok episztemológiai tulajdonságaival kezdenénk foglalkozni, vegyünk egy pillantást a játékokra. Ha a játékos bőrébe bújunk, és azt hisszük, hogy b játékos R -t fog játszani, ha megtehetjük, mi is R -t fogunk játszani, hiszen akkor kamatos kifizetést kapunk, nem pedig csak a betétünk összegét. Amennyiben azt hisszük, hogy b játékos W -t játszik, mi is ki akarjuk venni a pénzt, különben 0 kifizetéssel távozzunk 10000 helyett. Láthatjuk, hogy az elsőrendű vélekedések fontos szerepet fognak kapni. Amennyiben azonban mi azt hisszük, hogy b azt hiszi rólunk, hogy ki akarjuk venni a pénzt (vagy ki kell vennünk a pénzt), ő is W -t fog játszani, mely esetben nekünk is azt kell. Így a másodrendű vélekedéseknek is szerepet fognak kapni és így tovább. Tehát a véleményrangsorokat kell majd vizsgálnunk.

A fejezet és a dolgozat témája a különböző információs esetek összehasonlítása. Ennek elérése érdekében megvizsgáljuk, mi történik a példában, ha a Bayesi játékban tökéletes informáltságot teszünk fel, azaz nem lesz bizonytalanság a játékosok vélekedéseiben. Kiszámoljuk, hogyan érdemes dönteni a vállalatok vagyonáról, és ennek megfelelően milyenek lesznek az átlagos kifizetések. Ezután a többi paraméter változatlanul hagyása mellett megváltoztatjuk az episztemológiai jellemzőket (információs partíció, vélekedés), és megnézzük, milyen hatást értünk el. Megmutatjuk továbbá azt is, hogy a Bayesi Nash-egyensúly milyen problémákba ütközik a racionalitás definíciója szerint.

3.2. A tökéletes információs eset

A következőkben a tökéletes információs esetet vizsgáljuk meg. A tökéletes információs játékok tulajdonsága, hogy minden paraméter teljes bizonyossággal ismert, ez pedig már előrevetíti az információs helyzeteket, hiszen a vélekedések már egyfajta bizonytalanságot tartalmaznak.

Ennek megfelelően két alapfeltevéssel élünk. Az első, hogy mind a két játékos ismeri a saját típusát, vagyis a saját likviditási mutatóját. A másik, hogy pontosan ismerik a másik játékos típusát is. Ez információs partíciókra lefordítva $I_a(\omega) = \{\omega\}$, és $I_b(\omega) = \{\omega\}$ formát jelent, azaz minden partíció egyelemű lesz, a játékosok tudni fogják melyik világhelyzetben van a játék.

Itt tehát két dolgot kell az a játékosnak megvizsgálni. Ha az ő likviditási mutatója a kritikus tartományban van, akkor ki kell vennie a pénzét (már csak azért is, mert ezt b is tudja és ezért ő is kiveszi a sajátját). Ha pedig b likviditási mutatójáról tudja, hogy a kritikus tartományban van, akkor szintén ki kell vennie a pénzét, hiszen ha másképp dönt, rosszabbul jár. Innen tehát látható, hogy ha legalább az egyik vállalat likviditási mutatója a kritikus tartományban van, a játék pénzkivétellel fog véget érni mindkét játékos részéről. Ha mind a két vállalat mutatója egyszerre a biztonságos tartományban van, akkor bent hagyják a pénzüket a bankban. Ez azért fog teljesülni, mivel ha a

racionalitás köztudott, és az (R, R) akcióprofil nyilván nagyobb kifizetést hoz, mint a (W, W) , így ha nincs oka a játékosoknak kivenni a pénzüket, tökéletes információban nem is veszik ki.

Így a játékosok döntési függvényei a és b sorrendben a következők:

$$D_a(T_a, T_b) = \begin{cases} W, & \text{ha } T_b \in \{0, 1\}, \text{ vagy } T_a \in \{0, 1\} \\ R & \text{egyébként} \end{cases}$$

Továbbá,

$$D_b(T_a, T_b) = \begin{cases} W, & \text{ha } T_a \in \{0, 1\}, \text{ vagy } T_b \in \{0, 1\} \\ R & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ez alapján számoljuk ki a játékosok átlagos kifizetéseit. A átlagos kifizetés az az érték, amit a játékosok várhatóan kapnak, ha nem ismernek semmit, csupán a természet apriori eloszlását és a játék szabályait. Ezt úgy számoljuk ki, hogy az összes lehetséges állapotpárra meghatározzuk a játék kimenetelét, és az ekkori kifizetés értékeket mindkét játékosra az előfordulási valószínűségeikkel súlyozva átlagoljuk. A döntési függvény miatt, csupán a (W, W) és az (R, R) stratégiapárok fordulhatnak elő. Ha például $T_a = 2$ és $T_b = 1$, akkor olyan világállapotban vagyunk, melyre mindkét játékos W -t fog játszani (b nem is játszhat mást, a pedig ezt tudja róla). Ennek a világállapotnak a valószínűsége a természet apriori eloszlása alapján $\frac{1}{24}$, a kifizetések pedig $u_a = u_b = 10000$. A 3.3 táblázat mutatja a lehetséges kimeneteket. A nem 0 valószínűségű világállapotok közül kiemeltük azokat, amikor pénzkivétellel végződik a játék, a többinél mindkét játékos benntart.

$D(\omega)$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
4	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{8}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$\sum$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3.3. táblázat. A játék kimenetele

Mivel a táblázatban kijelölt hat esemény független, a valószínűségeik összeadhatók, ez $\frac{7}{24}$. Ez azt jelenti, hogy a természet $\frac{7}{24}$ valószínűséggel sorsol úgy, hogy a játék kimenetele pénzkivétel lesz, míg $\frac{17}{24}$ valószínűséggel úgy, hogy az eredmény a pénz bent tartása lesz. Vagyis a játékosok várható kifizetése a játék kezdete előtti információkkal $\frac{7}{24}10000 + \frac{17}{24}13500 = 12479,167$ lesz. Ez az érték alkalmas arra, hogy összehasonlítsuk a hasonló tartalmú, nem tökéletes információk mellett számított értékkel.

Most vonatkoztassunk el néhány kikötéstől. Legyen mindkét játékosnak $l \in \mathbb{Z}^+$ darab különböző lehetséges állapota, vagyis $t - a$ és $t_b \in [0, n - 1]$. Továbbra is feltesszük, hogy a gazdasági környezet egyezősége miatt, a likviditási mutató értékek legfeljebb eggyel térnek el egymástól, vagyis $|t_a - t_b| \leq 1$. Természetesen a szereplők információs partíciói továbbra is a tökéletes információt tükrözik, minden világállapotot meg tudnak különböztetni.

A világállapotok természetben előforduló eloszlását a 3.4 táblázat mutatja.

Legyen K az az intervallum, ami összes pontja azt jelenti, hogy a játékos csődhelyzetben van, vagyis ki kell vennie pénzét a bakból. Határozzuk meg $k \in \mathbb{Z}^+$ számot, ami a legmagasabb még

Δ_0	0	1	2	$\dots$	$k-2$	$k-1$	k	$\dots$	$n-2$	$n-1$	Σ
0	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
1	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
2	0	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	0	0	0	$\dots$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	0	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
$k-1$	0	0	0	$\dots$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
k	0	0	0	$\dots$	0	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\dots$	0	0	$\frac{1}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{n}$
$n-1$	0	0	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{n}$
Σ	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	1

3.4. táblázat. A lehetséges állapotok és azok előfordulási valószínűségei

csődhelyzetnek ítélt állapotot jelenti. Könnyen belátható, hogy $k \leq l$, hiszen a maximális likviditási mutatószámánál nagyobb értékek nem léteznek. Ekkor tehát $K = [0, k-1]$, vagyis k darab olyan likviditási értéke lehet a játékosoknak, ami csődhelyzetet jelent.

A következőkben meghatározzuk ebben az általánosabb játékban a várható kifizetést. Itt is hasonlóan kell eljárunk, mint a konkrétabb esetben, meg kell határozni a kivétellel végződő játékok előfordulási valószínűségét, majd a játékosok kifizetéseivel várható értéket számolni belőle. A természeti eloszlás alapján, ha k darab csődhelyzetet jelző érték van, akkor annak a valószínűsége, hogy mindkét vállalat a pénzkivétel mellett dönt $k\frac{1}{l} + \frac{1}{3l}$, míg a komplementer eseményé $(l-k)\frac{1}{l} - \frac{1}{3l}$. Ekkor tehát az eddigi jelöléseket alkalmazva a vállalatok várható kifizetése a $D\frac{3k+1}{3l} + D(1+r)\frac{3l-3k-1}{3l}$ összefüggéssel számolható, ahol D jelöli a betétek nagyságát, r pedig a betéti kamatlábat.

Az $k = l$ eset azt jelenti, hogy az összes lehetséges típus csődhelyzetet jelent, vagyis a pénz bent tartásának valószínűsége pontosan nulla. Ebből egyértelműen következik, hogy a komplementer esemény valószínűsége pontosan egy, hiszen ekkor mindkét vállalat biztosan kiveszi pénzét a bankból. Így a vállalatok várható kifizetése pontosan D .

3.3. A nem tökéletes információs eset

Vizsgáljuk meg mi történik, amennyiben a két vállalat nem rendelkezik tökéletes információkkal. A játékosok ismerik a saját szignálfüggvényük alakulását, azonban semmilyen időszakban nem tudják biztosan megmondani a másik vállalat likviditási igényét, sem azt, hogy kritikus pont alatti-e, sem a pontos értéket. Helyette kikötjük, a különféle vállalatok (apriori) eloszlása a természetben köztudott. Az, hogy egy játékos ismeri a saját likviditását, információs partíciókban a következőképp írható fel:

$$I_a(L_a = x) = \{\{L_a = x, L_b = 0\}, \{L_a = x, L_b = 1\}, \dots, \{L_a = x, L_b = 7\}\}$$

minden $x \in \{0, 1, \dots, 7\}$ -re. Ugyanez b játékosra:

$$I_b(L_b = y) = \{\{L_a = 0, L_b = y\}, \{L_a = 1, L_b = y\}, \dots, \{L_a = 7, L_b = y\}\}$$

minden $y \in \{0, 1, \dots, 7\}$ -re. Így minden világállapotot beosztottunk mindkét játékos partíciójába, pontosan egyszer. Úgy adtuk meg az informáltságot, hogy a partíciók pont azt fogják mondani, hogy

a két vállalat meg tudja különböztetni azokat a világállapotokat, a likviditása szerint, de azok között, amikben a likviditás megegyezik, már nem tudnak különbséget tenni. A típusfüggvényünk legyen egyszerűen a $T_a = L_a$ és a $T_b = L_b$ függvény, azaz például, ha egy játékosnak 4 a likviditási szignálja, akkor 4-es típusba soroljuk. Ezek alapján már össze tudjuk rakni a és b játékos véleményrangsorát, és ezzel megadtuk az egész játékot. Vegyük az elsőrendű vélekedéseket.

A játékosok elsőrendű (posztteriori) vélekedését a feltételes valószínűségekre vonatkozó szabályok alapján számolhatjuk. Legyen a típusának értéke t_a , b -é pedig t_b . Jelölje $\Delta_0(t_a)$ annak a valószínűségét, hogy a játékosnak a természet t_a típust sorsol és $\Delta_0(t_b)$ azt, hogy b -nek t_b -t. Ekkor a játékos elsőrendű vélekedése minden $\omega \in \Omega$ világállapotról:

$$f_a^1(t_a) = \frac{\Delta_0(\omega)}{\Delta_0(t_a)}$$

ugyanaz b játékosra:

$$f_b^1(t_b) = \frac{\Delta_0(\omega)}{\Delta_0(t_b)}$$

Azaz egy ω világállapotról a két játékos úgy fog vélekedni, ahogyan a természet, de mivel ismerik a saját típusukat, lenormálják a típusuk valószínűségével. Amennyiben $T_a = 3$, a játékos a következőképp fog vélekedni a $(T_a = 3, T_b = 4)$ világállapotról:

$$f_a^1(T_a = 3, T_b = 4) = \frac{\Delta_0(T_a = 3, T_b = 4)}{\Delta_0(T_a = 3)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$$

Ha b játékos típusa 0, ő a következőképp fog vélekedni a $(T_a = 0, T_b = 0)$ világállapotról:

$$f_b^1(T_a = 0, T_b = 0) = \frac{\Delta_0(T_a = 0, T_b = 0)}{\Delta_0(T_b = 0)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

Utolsó példaként nézzünk meg egy „lehetetlen” világállapotot (itt a lehetetlen a 0 valószínűséget fogja jelenteni, ami természetesen messze áll a lehetetlen esemény fogalmától). Ha a típusa 5, akkor a következőképp vélekedik a $(T_a = 5, T_b = 1)$ állapotról:

$$f_a^1(T_a = 5, T_b = 1) = \frac{\Delta_0(T_a = 5, T_b = 1)}{\Delta_0(T_a = 5)} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$$

Az elsőrendű vélekedés definíciója szerint azokról a világállapotokról, melyben a játékosok típusa nem egyezik meg a tapasztalattal, a játékosok vélekedése 0 lesz. Például, ha $T_b = 4$, akkor:

$$f_b^1(T_a = 4, T_b = 5) = 0$$

mivel a $(T_a = 4, T_b = 5)$ világállapot kívül esik $I_b(T_b = 4)$ -en. Fontos még megjegyezni, hogy ezek a definíciók nem működnek abban az esetben, amikor egy típust a természet 0 valószínűséggel oszt ki. Mivel a modellünkben ilyen nincs, ezért nem vettük bele ezt az esetet szintén didaktikai okokból, de esetünkben használhatók a feltételes valószínűségekre vonatkozó feltevések is. A 3.5 táblázat mutatja az elsőrendű vélekedéseket minden releváns világállapotra (amikor a játékosok olyan világállapotról vélekednek, melyben a típusuk eltér a tapasztalattól, nem szerepeltettük a táblázatban).

Mivel az elsőrendű vélekedések megegyeznek a két játékosra, egy táblázatba sűrítettük őket. A táblázat értelmezése a következő: Amennyiben $T_a = 3$, a harmadik sor mutatja a játékos (releváns) véleményeloszlását b játékos típusáról. Látható, hogy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel fogja hinni b -ről, hogy a típusa, 2, 3 illetve 4, minden más esethez 0 valószínűséget rendel.

f^1	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3.5. táblázat. Az elsőrendű vélekedések mátrixa

A magasabb rendű vélekedéseket a játék megoldása során fogjuk megadni, a jobb érthetőség kedvéért. Egyelőre oldjuk meg az alapjátékot, számoljuk ki az egyes akciók várható hasznosságát először az a játékosra. Ehhez jelöljük p -vel azt a valószínűséget, hogy b játékos R akciót választ. Ekkor $1-p$ valószínűséget rendel a W stratégiához, tehát a várható kifizetéseit pedig a következőképp írhatjuk fel:

$$u_a(R) = 13500p + 0(1-p) = 13500p$$

$$u_a(W) = 10000p + 10000(1-p) = 10000$$

Ekkor a racionális játékos akkor hagyja benn a pénzét, ha $u_a(R) \geq u_a(W)$, azaz:

$$13500p \geq 10000$$

$$p \geq \frac{20}{27}$$

b játékosra analóg a levezetés. Ezek alapján össze tudjuk rakni a és b játékosok döntési függvényeit:

$$D_a(p) = \begin{cases} R, & \text{ha } p \geq \frac{20}{27} \\ W & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Illetve:

$$D_b(p) = \begin{cases} R, & \text{ha } p \geq \frac{20}{27} \\ W & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel a játék szimmetrikus, a két függvény argumentumaként ugyanazt a p -t használjuk, mely szakban kifejezve annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy egy játékos befekteti a pénzét. A továbbiakban arra vagyunk kíváncsiak, hogy ez a valószínűség hogyan függ a pillanatnyi likviditástól, azaz L_a és L_b szignálfüggvények helyzetétől.

Becsüljük meg p -t, azzal a modellbeli és feltételezéssel élve, hogy a játékosok viselkedése kizárólag a saját likviditásuktól, valamint a többiek viselkedéséről való vélekedéstől függ. Így p -re kaphatunk egy értéket és van esélyünk megjósolni, hogy az egyes gazdasági helyzetekben milyen esélye van a bank csődjének. Tegyük fel, hogy a vállalat igazgatója helyében vagyunk, és azt jelentettük pénzügyi osztályról, hogy a likviditási mutatónk 3. Megéri-e nekünk kilépni a bankból?

Nulladik lépés: Látjuk, hogy a játék szabályai szerint nincs akadálya az R stratégiának, hiszen $3 > 1$, tehát likviditásunk megengedi a maradást, de nem biztos, hogy megéri.

Első lépés: Tudjuk, hogy ha b játékos W -t játszik, nekünk nagyon nem éri meg bennmaradnunk, hiszen nulla lesz a kifizetésünk. Azt is tudjuk továbbá, hogy b játékosnak W -t kell játszania, ha 2-nél

kisebb a likviditása. f^1 mátrixból le tudjuk olvasni, hogy b -nek csak 2, 3 vagy 4 lehet a likviditása (típusa), mindegyik $\frac{1}{3}$ valószínűséggel. Ez alapján azt látjuk, hogy b -nek sem kötelező kivenni a pénzét, tehát első becslésünk a döntési függvény p változójára a $p_1 = 1$ lesz. Ez esetben pedig a racionális választásunk az R stratégia, tehát egyelőre maradunk.

Második lépés: Természetesen itt még nem ér véget a számolás, hiszen az, hogy b -nek nem kell kivennie a pénzét a bankból, nem jelenti azt, hogy esetleg nem érheti meg neki. Mivel ha az egyik játékos kiveszi a pénzét, a másik pedig nem, ez utóbbi 0 kifizetést kap, igaz lesz az is, hogy amennyiben b játékos azt gondolja rólunk, hogy kivesszük a pénzt, ő is W stratégiát fog játszani, amennyiben erre képes. Tudjuk, hogy b játékos $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2-es típusú. Amennyiben ő tényleg 2-es, ő $\frac{1}{3}$ valószínűséget fog ahhoz rendelni, hogy mi, az a játékos, 1-es típusúak vagyunk. Tehát, amikor ő dönt, minimum $\frac{1}{3}$ valószínűséget rendel ahhoz, hogy kiveszi-e a pénzt és ezt fogja behelyettesíteni a döntési. Mi ugyan tudjuk, hogy a mi típusunk 3, de ő nem, és nekünk csak ez számít. Tehát ezen a szinten az az esemény, hogy ki akarjuk venni a pénzt megegyezik azzal, hogy mi azt hisszük b -ről, hogy szerinte $T_a \leq 1$. Ez jelen esetben akkor fordulhat elő, ha mi azt hisszük, hogy $T_b = 2$, b pedig azt, hogy $T_a = 1$. Vegyük észre, hogy itt kerülnek elő a másodrendű vélekedések. A játékosok ismerik egymás elsőrendű vélekedéseit, hiszen azt a természeti eloszlásból vezettük le, ami köztudott volt. Ezért, továbbá Aumann [1976] alapján a szereplőkre igaz lesz, hogy:

$$f_a^2 = f_a^1 \times f_b^1$$

és

$$f_b^2 = f_b^1 \times f_a^1$$

Ez szintén köztudott, hiszen köztudott volt a természeti eloszlás, köztudottak az elsőrendű vélekedések is, a játékosok másodrendű vélekedése nem lehet más, mint ez. Tudjuk, hogy $f_a^1 = f_b^1$, mert minden szimmetrikus a két játékosra. Amennyiben az elsőrendű vélekedések 3.5 táblázatban szereplő alakját elnevezük M -nek, és alkalmazzuk a független eseményekre vonatkozó szabályokat, a következőt kapjuk mindkét játékosra.

$$f_a^2 = f_b^2 = M^2$$

Itt már az M^2 alak a mátrix második hatványát jelenti, nem pedig indexet. Nevezzük M_i -nek a mátrix i -edik oszlopvektorát (sorvektor is lehet, hiszen $M = M^T$). Ekkor az eddigiek alapján:

$$f_a^2(T_a = 3) = M_3 \times M$$

Ahol a szorzás mátrixszorzást jelent. A példában a baloldal (a másodrendű vélekedés) leírható egy vektorként, hiszen véges sok világállapotunk van, a jobboldal pedig egy vektor és egy mátrix szorzata, szintén egy vektort kapunk eredményül. Számoljuk ki a vélekedési vektort.

$$M_3 \times M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Amit eredményül kaptunk, az éppen az M_3^2 vektor. Ennek jelentését a 3.6 táblázatban foglaltuk össze.

M_3^2	T
0	0
$\frac{1}{9}$	1
$\frac{2}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{2}{9}$	4
$\frac{1}{9}$	5
0	6
0	7

3.6. táblázat. A másodrenű vélekedések $T_a = 3$ esetén

Azaz, ha $t_a = 3$, σ azt fogja hinni b -ről, hogy σ $\frac{1}{9}$ valószínűséggel hiszi rólunk, hogy 1-es típusba tartozunk, $\frac{2}{9}$ -el, hogy 2-esbe és így tovább. Kiemeltük az 1-es típushoz tartozó értéket, mivel az mutatja, hogy milyen valószínűséget rendelünk legalább ahhoz, hogy b azt hiszi rólunk, hogy csődösök vagyunk. Ebben az esetben legalább ennyi valószínűséget kell rendelnünk ahhoz, hogy kiveszi a pénzt, hiszen csak a második lépés alapján ez $\frac{1}{9}$ valószínűség (kevesebb nem lehet, mert ellentmondana a köztudott racionalitásnak), de több lehet a magasabb rendű vélekedések alapján. Azaz, tudjuk, hogy $1 - p \geq \frac{1}{9}$, tehát $p \leq \frac{8}{9}$. Tehát $p_2 = \frac{8}{9} \geq \frac{20}{27}$, azaz még nem kell kivennünk a pénzt.

Harmadik lépés: Most tartunk ott, hogy számba vettük a saját helyzetünket, a saját vélekedésünket b vállalatról, és a vélekedésünket b vállalat vélekedéséről. Ezzel azonban nem zártunk ki minden esetet, amikor ki kell vennünk a pénzünket a bankból. A következő lépéshez meg kell vizsgálnunk, mi a vélekedésünk arról, hogyan vélekedik b vállalat a mi vélekedésünkről. Hiszen, amennyiben a mi szignálmutatónk 4 lenne, hihetnénk azt, hogy b -é 3. Ő ekkor hihetné, hogy a miénk 2, ami még nem lenne gond, azonban, ha σ azt hiszi rólunk, hogy a miénk 2, mi (szerinte) hihetjük, hogy az övé 1. Mely esetben ismét mindkét játékos ki akarná venni a pénzét.

Ez a folyamat a következőképp néz ki $t_a = 3$ esetén:

a szignálja	a vélekedése	b vélekedése a szerint	b vélekedése a vélekedéséről, a szerint
3	3	2	1
3	2	2	1
3	2	1	1
3	2	1	0

A többi esetben nincs gond a likviditással egyik játékos szerint sem.

Ez 4 lehetőség, mindegyik valószínűsége egyenként $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, a valószínűségi mértékek tulajdonsága alapján, tehát mindösszesen $\frac{4}{27}$. Ekkor $p_3 = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$, tehát továbbra is maradunk a

bankban.

A lépéseket akármeddig folytathatjuk. Könnyen belátható, hogy bármilyen nagy n -re létezik olyan n rendű álló egymásra épülő vélekedéssorozat (a azt hiszi b -ről, hogy ő azt hiszi a -ról, hogy ő azt hiszi b -ről...), aminek a végén, ha az az esemény bekövetkezik, a -nak jobban megérné kivenni a pénzt a bankból, mint benttartani. Amennyiben a vélekedéseket megfeleltetjük egy Markov-folyamatnak, ahol a különböző típusok az egyes állapotokat jelentik, míg a (szimmetrikus) poszterior vélekedések mátrixa a folyamat átmenetmátrixának felel meg, az n -ed rendű vélekedésre vonatkozó vélekedéseket az M^n mátrix írja le. Erre a játékra a negyedik lépéshez az M^4 mátrix tartozik, amit a 3.7 táblázatban foglaltunk össze.

M^4	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0,4321	0,321	0,1728	0,0617	0,0123	0	0	0
1	0,321	0,284	0,2099	0,1235	0,0494	0,0123	0	0
2	0,1728	0,2099	0,2346	0,1975	0,1235	0,0494	0,0123	0
3	0,0617	0,1235	0,1975	0,2346	0,1975	0,1235	0,0494	0,0123
4	0,0123	0,0494	0,1235	0,1975	0,2346	0,1975	0,1235	0,0617
5	0	0,0123	0,0494	0,1235	0,1975	0,2346	0,2099	0,1728
6	0	0	0,0123	0,0494	0,1235	0,2099	0,284	0,321
7	0	0	0	0,0123	0,0617	0,1728	0,321	0,4321

3.7. táblázat. A negyedrendű vélekedések

A táblázat alapján azt mondhatjuk, hogy amennyiben tudjuk, hogy a játékos i típusú, akkor M_{ij}^4 valószínűséggel hiszi b játékosról, hogy ő azt hiszi a játékosról, hogy ő azt hiszi b játékosról, hogy ő azt hiszi a játékosról, hogy a típusa j .

A táblázatban félkövérrel vannak jelölve az M_{30}^4 és az M_{31}^4 elemek. Ezek összege mutatja, hogy amennyiben a kizárólag a negyedrendű vélekedése alapján döntene, milyen valószínűséget rendelne ahhoz, hogy b -nek ki kell vennie (vagy megéri neki kivenni) a pénzt. Ez alapján $p_4 = 1 - 0,0823 - 0,1276 = 0,7901$. Tehát továbbra se vesszük ki a pénzt a bankból.

Ahelyett, hogy tovább számolnánk, próbáljuk meg meghatározni a $p_n = 1 - M_{30}^n - M_{31}^n$ sorozat viselkedését. Azért lesz szükségünk éppen erre, mivel mindig a 3-as típusból indulunk és mindig arra leszünk kíváncsiak, hogy milyen valószínűséggel érjük el a 0-s vagy az 1-es állapotot. Sejtjük, hogy minél tovább lépünk a vélekedésekkel, annál kevesebb információnk marad a másik játékos típusáról, előbb-utóbb el kell jutnunk oda, hogy az újabb vélekedés bevonása a játékba nem fog változtatni a viselkedésünkön.

Legyen $M^* = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$. Ilyennek léteznie kell, mert M mátrix irreducibilis és a sorok és az oszlopok összege 1. Ezt nevezzük a játék egyensúlyi vélekedésének. Ebből az következik, hogy p_n sorozat konvergens, tehát van alsó korlátja. Számoljuk ki az egyensúlyi vélekedést ebben a játékban.

M szimmetrikus, ezért M^* is az lesz. Tudjuk továbbá, hogy $M^*M = M^*$ definíciószerűen. Ezért aztán felírhatjuk a nulladik oszlop elemeit a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned} M_{00}^* &= \frac{2}{3}M_{00}^* + \frac{1}{3}M_{01}^* \\ M_{01}^* &= \frac{1}{3}M_{00}^* + \frac{1}{3}M_{01}^* + \frac{1}{3}M_{02}^* \\ M_{02}^* &= \frac{1}{3}M_{01}^* + \frac{1}{3}M_{02}^* + \frac{1}{3}M_{03}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{03}^* &= \frac{1}{3}M_{02}^* + \frac{1}{3}M_{03}^* + \frac{1}{3}M_{04}^* \\
M_{04}^* &= \frac{1}{3}M_{03}^* + \frac{1}{3}M_{04}^* + \frac{1}{3}M_{05}^* \\
M_{05}^* &= \frac{1}{3}M_{04}^* + \frac{1}{3}M_{05}^* + \frac{1}{3}M_{06}^* \\
M_{06}^* &= \frac{1}{3}M_{05}^* + \frac{1}{3}M_{06}^* + \frac{1}{3}M_{07}^* \\
M_{07}^* &= \frac{1}{3}M_{06}^* + \frac{2}{3}M_{07}^* \\
\sum_{i=0}^7 M_{0i}^* &= 1
\end{aligned}$$

Ennek egyetlen megoldása az $M_{00}^* = M_{01}^* = \dots = \frac{1}{8}$. Ha ezt minden oszlopra felírjuk, megkapjuk az egyensúlyi vélekedés mátrixát, melynek minden sorának mindegyik elemében $\frac{1}{8}$ fog állni. Azaz, bárhonnan is induljunk, ha végtelen messze vagyunk kíváncsiak a feltételes vélekedésre, akkor visszajutunk az egyenletes eloszláshoz, ami azt jelenti esetünkben, hogy semmit sem tudunk a másik játékos típusáról. Ez alapján mondhatjuk, hogy a végtelenben annak a valószínűsége, hogy a azt hiszi b -ről, hogy b azt hiszi a -ról... hogy a típusa 0 vagy 1, az $M_{30}^* + M_{31}^* = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Amennyiben a lépéseket folytatjuk, egy konvergens sorozatot fogunk kapni p becslésére, melynek határértéke $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ lesz. Esetünkben a p_n sorozat alakulását $n = 20$ -ig a 3.3 táblázat mutatja.

n	p_n	q_n	10	0,7323	0,2677
0	1	0	11	0,7281	0,2719
1	1	0	12	0,7251	0,2749
2	0,8889	0,1111	13	0,7231	0,2769
3	0,8519	0,1481	14	0,7218	0,2782
4	0,8148	0,1852	15	0,7212	0,2788
5	0,7901	0,2099	16	0,7209	0,2791
6	0,7709	0,2291	17	0,7211	0,2789
7	0,7567	0,2433	18	0,7214	0,2786
8	0,7461	0,2539	19	0,722	0,278
9	0,7381	0,2619	20	0,7227	0,2773

A táblázatban q_n -nel jelöltük az $1 - p_n$ sorozatot, illetve kiemeltük p_{16} -ot, ahol p_n -nek minimuma, q_n -nek pedig maximuma van. Innentől a két sorozat monoton növekvő illetve csökkenő módon tart 0,75-höz és 0,25-höz, a végtelenben vett vélekedésekhez. Ennek bizonyítása részletesen a függelékben olvasható, itt nem tárgyaljuk. Vizsgáljuk most a 16. rendű vélekedést.

Láthatjuk, hogy ez esetben a játékos legalább 0,2791 valószínűséggel hiszi b -ről, hogy ő hiszi a -ról... hogy kiveszi a pénzt. Ez alapján szigorúan a 16. rendű vélekedés szerint a várható kifizetések a következőképp alakulnak:

$$u_a(R) = 0,7209 * 13500 + 0,2719 * 0 = 9732,15$$

$$u_a(W) = 0,7209 * 10000 + 0,2719 * 10000 = 10000$$

Ebben az esetben a döntés természetesen az, hogy kivesszük a pénzünket, hiszen $10000 > 9732,15$. Ha nem így tennénk, sértenénk a racionalitási feltételeket, hiszen az biztos, hogy $p \leq p_{16}$, mi pedig még p_{16} esetén sem tudnánk benntartani a pénzünket.

q_n	T	0	1	2	3	4	5	6	7
q_0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
q_1	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0	0	0
q_2	0,1111	0	0,1111	0,2222	0,3333	0,2222	0,1111	0	0
q_3	0,1481	0,037	0,1111	0,2222	0,2593	0,2222	0,1111	0,037	0
q_4	0,1852	0,0617	0,1235	0,1975	0,2346	0,1975	0,1235	0,0494	0,0123
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
q_{16}	0,2791	0,1392	0,1399	0,1395	0,1358	0,1275	0,1159	0,1046	0,0976
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
q^*	0,25	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125

A 3.3 táblázatban megmutatjuk, milyen számolások után jutottunk az egyes p_n, q_n értékekhez.

A táblázatban minden elem a közvetlen fölötte lévő három elem (a fölötte lévő és annak két szomszédja) átlaga. A szélső elemeknél közvetlen fölötte lévő elemek kétszeres súlyt kaptak.

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy amennyiben a típusunk 3, kivesszük a pénzünket a bankból. A játék szimmetrikus játékosai, tehát ha $t_b = 3$, szintén köztudott racionalitás miatt ugyanezt várjuk b játékosától is, ha 3-as a likviditása. Most nézzük meg a $t_a = 4$ esetet. A számolást nem vezetjük ilyen részletesen végig, a p_n sorozat 1-ből indul és szigorúan monoton csökkenve fog tartani 0,75-höz, és így q_n 0-ból indul és szigorúan monoton növe tart 0,25-höz. Ennek bizonyítása szintén a függelékben található. Ez alapján $p_{inf} = 0,75$, lesz p_n sorozat legkisebb felső korlátja és $q_{sup} = 0,25$ lesz q_n legnagyobb alsó korlátja. A várható kifizetések ebben az esetben:

$$u_a(R) = 0,75 * 13500 + 0,25 * 0 = 10125$$

$$u_a(W) = 0,75 * 10000 + 0,25 * 10000 = 10000$$

Ebből következik, hogy minden rendű vélekedésre $u_a(R) > u_b(W)$, hiszen a többi esetben annak a valószínűsége, hogy b játékos bennmarad a bankban csak ennél nagyobb lehet, mely még tovább növelné $u_a(R)$ -t. Amennyiben nincs olyan rendű vélekedés, melyre W -t kellene játszani, a racionális játékos bennhagyja a pénzét a bankban.

Noha ebben az esetben a minden esetben megegyezik a különböző rendű vélekedésekből kapott optimális akció, mégis itt tesszük a nagyobb feltételeket, hiszen azt mondtuk, hogy $p \leq p_{inf}$, nem azt, hogy $p = p_{inf}$. Mégis, amennyiben az egész véleményrangsor azt mondja, hogy nem kell félnünk attól, hogy b esetleg azt hiszi, hogy mi azt hisszük, hogy s.i.t., akkor a köztudott racionalitás miatt b sem fél ettől, tehát bennhagyhatjuk a pénzt.

Abban az esetben, amikor a különböző vélekedések ellentmondanak egymásnak (például a $t_a = 3$ esetben az első pár vélekedés azt mondta, R stratégia a jobb, a 16. rendű pedig azt, hogy W , majd később és a végtelenben is R), a döntésünk az ellentmondás ellenére tisztább, hiszen $p \leq p_n$ minden n -re, és ha már van olyan n , amire ki kell vennünk a pénzt, akkor nem lenne racionális bennhagyni. Így a táblázatban közölt döntések nem mondanak ellent a racionalitási feltételeknek, sőt, akármi mást döntenénk a játékos helyében, sérténénk a feltételt.

A többi lehetséges típusra ezt a számolást nem vezetjük végig, csak az egyes q_n sorozatok maximumait, illetve szuprimumait közöljük. Ugyanezt a döntési szabályt használva minden más típusra, a 3.8 táblázatban olvasható, hogy milyen típusra milyen akciót kell követni.

Egy pillanatra vizsgáljuk paraméteresen a játékot. Legyen az intervallum legkisebb eleme 0, a legnagyobb $l - 1$, így a hossza l (a példában ez $l = 8$ volt), a kritikus tartomány (ahol ki kell venni a

τ_A	0	1	2	3	4	5	6	7
q_{sup}	1	1	0,3937	0,2791	0,25	0,25	0,25	0,25
Döntés	W	W	W	W	R	R	R	R

3.8. táblázat. Az egyes típusokhoz tartozó döntések

pénzt) legnagyobb eleme $k - 1$, ennek hossza pedig k (a példában $k = 2$). Tegyük fel továbbá, hogy a kritikus tartomány rövidebb, mint az intervallum hosszának fele.

3.3.1. Tétel. *A sorozatokra és a döntésekre vonatkozóan az alábbi tulajdonságok teljesülnek paramétereiktől függően:*

1. Ha $i \geq \frac{l}{2}$, akkor $q_{sup} = \frac{k}{l}$.
2. Ha $i > j$, és j típusban R a racionális döntés, akkor i típusban is R .
3. Ha $i > j$, és i típusban W a racionális döntés, akkor j típusban is W .

BIZONYÍTÁS: Ld. függelék. A 2. és a 3. pont bizonyításánál az alapkoncepció az, hogy egy ilyen formában megadott Markov-folyamatnál minél távolabbról indulunk, annál kisebb valószínűséggel érünk el egy állapotba.

Ahhoz, hogy egy játékosnak megadjuk a racionális döntését, a Bayesi-játék koncepcióinak megfelelően meg kell adnunk minden típusára, hogy milyen stratégiát követ. 3.3.1 tétel miatt élhetünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy amikor megadjuk a és b játékosra az optimális S^* stratégiákat, csak azt adjuk meg, hogy melyik lesz az a típus, amire elsőként R akciót játszanak. Ami ennél nagyobb típus, arra is R -t fognak játszani, ami kisebb, arra W -t. Ez a példában szereplő játékokra $S_a^* = S_b^* = R_4$ volt a 3.8 táblázat alapján. Azt a stratégiát, mely minden típusban W -t játszik W_0 -al jelöljük. Tekintsük meg mi történik az egyes világállapotokban, ha mindkét játékos az itt kiszámolt $S^* = R_4$ stratégiát játsza.

u_a	0	1	2	3	4	5	6	7
0	10	10						
1	10	10	10					
2		10	10	10				
3			10	10	0			
4				10	13,5	13,5		
5					13,5	13,5	13,5	
6						13,5	13,5	13,5
7							13,5	13,5
$\bar{u}_a = 11,1875$	10	10	10	10	9	13,5	13,5	13,5

3.9. táblázat. A játék lejátszása (R_4, R_4) stratégiapár esetén

Az oszlopokban a játékos lehetséges típusát jelöltük, a sorokban b játékosét. Azokat a világállapotokat, amiknek 0 a valószínűsége, nem tüntettük fel. A legelső sorban szereplő $\bar{u}_a$ átlagos várható kifizetést a természeti apriori eloszlás alapján számoltuk az. Vegyük észre, hogy $t_a = 4$ -re a várható kifizetés ezzel a stratégiával 9000. Azonban, ha ebben a típusban is W -t játszanánk, biztosan 10000 kifizetéshez jutunk. Ez alapján láthatjuk, hogy a most kapott lejátszás nem Bayesi-Nash-egyensúly,

megéri tőle egyoldalúan eltérni (például R_5 -re, ha b továbbra is R_4 -et játszik, jobb kifizetést kapunk, hiszen sose kapnánk 0-t). Amennyiben azonban mindkét játékos eltér ebbe az irányba, az mindkettjüknek rontja a várható kifizetését és továbbra sem kapunk Nash-egyensúlyt. (R_5, R_5) -től megéri egyoldalúan eltérni R_6 -al, és így tovább.

Az egyetlen egyensúlyi stratégia, amitől nem érdemes egyoldalúan eltérni, az a W_0 , amikor mindig kivesszük a pénzt, ami egységesen 10000 – 10000 átlagos várható kifizetést juttat a játékosoknak, tehát mindketten rosszabbul járnának. A probléma kicsit emlékeztet a fogolydilemmánál látottakra. Itt, amennyiben 4-es típusúak vagyunk, van csábítás, hogy eltérjünk, hiszen már a természeti eloszlás miatt is 9000 várható kifizetésünk van biztos 10000 helyett. A félelem is nagy, hiszen ezt a másik játékos is tudja. De, ellentétben a fogolydilemmával, itt kaptunk egy olyan stratégiapárt az (R_4, R_4) -et, melyről beláttuk, hogy nincs más racionális stratégia a véleményrangsor szerint.

Következő észrevételünk, hogy a várható kifizetést tudjuk növelni úgy is, hogy mindkét játékos eltér, mégpedig ugyanúgy, ez pedig az lenne, ha (R_3, R_3) stratégiát játszanának. Ekkor, a 4-es típusnak is 13500 lenne a várható kifizetése, a 3-asnak lenne 9000, minden más változatlan, tehát egy 10000-et cseréltünk 13500-ra, az átlagos várható kifizetés 11625-re nőne. Ez bár már a véleményrangsorok szerint sem lenne racionális lépés, felveti a kérdést: ha már áthágjuk a racionalitás fogalmát valahol (vagy a Bayesi-Nash-egyensúllyal, vagy az általunk levezetett megoldással), akkor áthághatnánk olyan formában, hogy az növelje a játékosok kifizetését, hiszen ez lenne a racionalitás lényege. Sőt, még az (R_2, R_2) stratégiapárral ezt is tovább javíthatnánk, egészen 12062,5-ig.

Megmutattuk, hogy ha mozgatjuk az információs helyzeteket, az nagyban befolyásolja a játékosok átlagos várható kifizetését, azt a kifizetést, amire a játék megkezdése, azaz a természet sorsolása előtt számíthatnának. A tökéletes információs esetben ez biztosan 12479,167 volt. Ha az informáltság nem tökéletes, csak a természet apriori eloszlását ismerik a játékosok, akkor már több megoldás is elképzelhető. Bayesi-Nash-egyensúlyban biztosan 10000, (R_4, R_4) esetén 11187,5, (R_2, R_2) esetén 12062,5. Minél jobban ragaszkodunk a teljes racionalitáshoz (már (R_4, R_4) -nél is kissé szabadabban kezeltük), annál nagyobb várható hasznosságot veszít a két játékos, de az biztos, hogy veszítünk a hasznosságból, durván fogalmazva azért, mert ha kevesebb világállapotot tudunk megkülönböztetni, kisebb a két játékos mozgástere.

Harsányi szerint a véleményrangsorokkal foglalkozni túl hosszadalmas és felesleges, hiszen a végtelenben vett vélekedések tartalmazznak minden információt, amit a játékosok felhasználnak döntéshozáshoz. Ez akkor lenne igaz, ha a különböző akciókról vett vélekedések (itt a kötelező W) monoton módon változnának. Azonban láthattuk $t_a = 3$ esetén, hogy ha elég közletről indulunk a kritikus tartományhoz, a vélekedés nem monoton módon változik, így kizárólag a végtelenben vett vélekedés szerint döntenem nem lenne racionális.

A következő fejezetben életre keltjük a bankot, aki a betéti kamatlábakról fog döntenem. Azt akarjuk megmutatni, hogy egy hasznosságmaximalizáló bank kamatképzése nagyban függ a betéteseinek információs helyzetétől.

4. fejezet

A bank játéka

4.1. A bank, mint új játékos

Ebben a fejezetben a fentebb megismertetett, Allen and Morris [1998] alapján felírt játékot vizsgáljuk meg egy, az eddigiektől kissé eltérő szemszögből. A fejezet arra szolgál, hogy a már megismertetett játékelméleti modell egy lehetséges pénzügyi alkalmazását bemutassuk. A játék megoldása közben, eltekintve a játékosok rendelkezésére álló információktól, felmerül a kérdés, hogy a játék során adottnak vett r , betéti kamatláb milyen keretek között lehet döntési változó. Természetesen a betéti kamatláb a betétesekre, vagyis a játék eddigi szereplőire nézve szükségszerűen külsőleg adott, hiszen ennek ellenkezőjének feltétele közgazdaságilag nem megalapozott. Ebből a gondolatmenetből egyértelműen következik, hogy egy új játékos, a bank bevezetésével a felírt modell alkalmas lehet a betéti kamatláb optimális értékének meghatározására. A modellből számított értékek alapján összehasonlíthatók különböző információs helyzetek is. A fejezetben két információs helyzet összevetése szerepel, majd ebből vonunk le fontosabb következtetéseket. A fejezet célja, hogy megállapítsa milyen kapcsolat van a betétesek informáltsága és a bank kamatképzése között. A fentebb leírt játék alapjai nem változnak meg, ott ahol mégis eltérnénk attól, külön felhívjuk erre a figyelmet.

A banknak, mint új játékosnak természetesen szükséges megadni a tulajdonságait, illetve a kerekeit, amikben mozoghat. Mostantól a bank a c jelű játékos. A legalapvetőbb feltevés, hogy a bank egy racionális játékos, minden rendelkezésére álló információt felhasznál döntése meghozatalához. A bank tisztában van a játékkal, ismeri a játékosokat ($N = \{a, b, c\}$), tudja a játszható cselekvéseket ($A_a = \{R, W\}$, $A_b = \{R, W\}$, $A_c = r \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}$), ismeri a kifizetéseket és tisztában van a két betétes típusainak a priori eloszlásával. Játéka egyetlen változó értékének változtatgatása, a betéti kamatlábnak. Ezt úgy kell érteni, hogy a bank saját ismereteit felhasználva hoz egy kamatdöntést, vagyis közli a játékosokkal, hogy mekkora a betéti kamatláb értéke. A két betétes csupán ez után hozza meg döntését a pénzüket illetően. A bank racionalitása és minden egyéb ismerete a játékról köztudott.

Az alapjáték egyik fontos eleme az, hogy feltettük, a bank csődbe megy, ha legalább egy betétese kiveszi a pénzét. Ennek a kitételnek értelemszerűen a bankban lévő pénz mennyiségére van kihatása, hiszen abban az esetben, ha mindkét játékos a pénze bent tartása mellett dönt, ez az érték a két betét nagyságának összege, minden más esetben ez az érték nulla. Jelölje e a bankban lévő pénz mennyiségét, ekkor (a régi jelöléseket megtartva) $e = 2D$, ha mindkét játékos R -t játszik, $e = 0$ különben.

Feltesszük, hogy a bank számára csak és kizárólag a pénzpiaci műveletei után kapott bevételei jelentenek hasznosságot. Ekkor az itt definiált hasznossági függvény gyakorlatilag meg fog egyezni a

játékelméletben használt kifizetőfüggvénnyel. A hasznossági függvényben a döntési változó a betéti kamatláb r , hiszen a bank csak és kizárólag ezt képes változtatni. A betéti kamatláb a bank számára első sorban egy olyan tényező, ami a kiadásait jeleníti meg. Minden a bankban elhelyezett pénzegység után a bank pontosan r pénzegység kamatot fizet. Bevételt, vagyis hasznosságot a banknak a nála elhelyezett pénzek továbbhitelezése jelent. Ez úgy képzelhető el, hogy a bank egy fix, számára exogén kamatlábon például hiteleket nyújt. Erre minden nála levő betétet felhasznál. Könnyen belátható, hogy a racionális bank minden forrását továbbhitelezi, hiszen ha nem így tenne ceteris paribus kevesebb bevétele lenne. Itt fontos megjegyezni, hogy a bank a fizikailag nála jelen lévő pénzmennyiség nagyságától függetlenül csődbe megy, ha valamely játékos kiveszi a pénzét, továbbá szerepel a modellben a betétbiztosítás is, ami még inkább ebbe az irányba tereli a bankot. Jelölje r^* a bank számára exogén továbbhitelezési kamatlábat. Így a bank hasznossági függvénye általánosan a következő alakot ölti.

$$u_c(r) = f(e; r; r^*)$$

Feltesszük, hogy a hasznossági függvény minden pontjában differenciálható, és az r változó szerinti parciális deriváltjára $\frac{\partial f(e; r; r^*)}{\partial r} \leq 0$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a hasznossági függvény r -ben csökkenő, vagyis a bank kamatemelése lecsökkenti a függvény értékét. Nagyon fontos megjegyezni, hogy az itt szereplő kitétel csak arra az esetre vonatkozik, amikor a bank számára e értéke is konstans, vagyis nem függ r -től. A függvénytől elvárt, hogy valós számba képezzen valós, nemnegatív kamatszintekből.

A következőkben a hasznossági függvény specifikált alakját fogjuk használni, természetesen erre az alakra minden elvárás és kitétel teljesül, amit a bank hasznossági függvényétől elvártunk. A hasznossági függvény mostantól a $u_c(r) = e(r^* - r)$ alakot ölti a fejezet minden alfejezetében.

4.2. A bank és a betétesek sem tökéletesen informáltak

Ebben a részben az előbb tárgyalt kitételek mellett újabbak bevonásával vizsgálódunk. Most a bank nem ismer semmit a játékosok típusairól, csupán a típusok a priori eloszlását. Ez azt jelenti, hogy pontosan tudja, hogy a két betétes milyen típusú lehet és minden típuspárhoz tud mondani egy valószínűséget, amivel az bekövetkezhet. A két betétes az alapjáték szerinti tulajdonságokkal rendelkezik, a fontosabbakat itt is kiemeltük. A két betétes jelen esetben szintén bizonytalanságban van, ugyanis ők csupán saját típusukat ismerik, míg a másik típusáról csupán egy valószínűségeloszlást ismernek. A betétesek véleményrangsorai jelen esetben kiemelt szerepben vannak, hiszen az azok alapján becsült p_{inf} valószínűség alapján döntenek. A bank minden tulajdonsága és ismerete a játékról továbbra is köztudott. Az információs partíciók felírhatóak általánosan, $I_a(L_a = x) = \{\{L_a = x, L_b = 0\}, \{L_a = x, L_b = 1\}, \dots, \{L_a = x, L_b = l\}\}$ minden $x \in \{0, l\}$ -re, $I_b(L_b = y) = \{\{L_a = 0, L_b = y\}, \{L_a = 1, L_b = y\}, \dots, \{L_a = l, L_b = y\}\}$ minden $y \in \{0, l\}$ -re, $I_c(\omega) = \{\Omega\}$.

Az alfejezetben kiszámítjuk a bank által adott optimális betéti kamatlábat és az e melletti várható hasznosságát. Először ezt egy konkrét számpéldán keresztül mutatjuk be, majd pedig megadjuk az általános megoldás lépéseit.

Vegyünk egy olyan játékot, ahol a és b játékosok lehetséges típusai a $[0, 7]$ intervallum egész elemei lehetnek és a kritikus tartomány, ahol a játékosok csődhelyzetben vannak $K = [0, 1]$. Legyen továbbá a betétesek által összesen elhelyezett pénz mennyisége $e = 2D = 20000$, a külsőleg adott továbbhitelezési kamatláb pedig $r^* = 0,65$. A számpélda végén, az összehasonlítás kedvéért több r^* értékkel is meg van oldva a feladat.

A bank legelső feladata, hogy meghatározza, a betétese hogyan reagálnak az egyes betéti kamatokra. Nyilvánvaló, hogy mivel a bank bizonytalan helyzetben van, ezért a hasznossági függvényében szereplő rendelkezésre álló pénzmennyiség (e), a kamatdöntés meghozatalakor nem biztos. Kicsit átfogalmazva ez azt jelenti, hogy e értékére nézve a döntés pillanatában csupán egy várakozása (jelölje $E(e)$) van, hiszen túl alacsony kamatszint esetén a betétesek nagyobb valószínűséggel fognak a távozás mellett dönteni. Kijelenthető tehát, hogy míg e értéke nem, $E(e)$ értéke már függeni fog r -től érezhetően pozitív irányban. A bank tehát először egy olyan függvényt keres, ami minden kamatszint mellett megadja a várható rendelkezésre álló pénzmennyiséget ($E(e)$).

A bank az alapjáték felírásából indul ki, amit a 4.1 táblázat mutat. A táblázat a két betétes kifizetéseit is mutatja.

		b játékos	
		R	W
a játékos	R	$D(1+r); D(1+r)$	$0; D$
	W	$D; 0$	$D; D$

4.1. táblázat. Az alapjáték paraméteresen felírva

A 4.1 táblázat alapján számítható mind a két játékosra a különböző akcióik esetén kapott várható kifizetés, vagyis az az érték, ami az R , illetve a W cselekvések esetén kapható. Ezek összevetéséből kapjuk a következő egyenlőtlenséget. Fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben az alábbi egyenlőtlenséget az r változóra rendezve alkalmazzuk.

$$D(1+r)p \geq D$$

$$r \geq \frac{1}{p} - 1$$

A játékosok véleményrangsorából számított p_{inf} értékeket, amik azt mutatják meg, hogy a játékosok típusaiktól függően mekkora valószínűséget tulajdonítanak annak, hogy a másik betétes továbbra is bent hagyja a pénzét a bankban, használja fel a bank az előző egyenlőtlenség rendezéséhez.

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_{inf}	0	0	0,6063	0,7209	0,75	0,75	0,75	0,75
$r \geq$	∞	∞	0,6493	0,3872	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333

4.2. táblázat. A vélekedésekből származó valószínűségek

A 4.2 táblázat alapján a bank által adható összes kamatot, amiről gyakorlatilag csupán annyi a kikötésünk, hogy pozitív legyen, négy különböző kategóriába sorolhatjuk. Jól látható, hogy az utolsó négy típushoz tartozó valószínűségek megegyeznek, a függelékben szerepel a megfigyelés pontosabb leírása. A kategóriákat g_i -k jelölik.

$$g_1: 0,6493 \leq r$$

$$g_2: 0,3872 \leq r < 0,6493$$

$$g_3: 0,3333 \leq r < 0,3872$$

$$g_4: 0 \leq r < 0,3333$$

Érdekes meggondolni, hogy az egyes kategóriákon belül milyen kamatszintet éri meg a banknak választani. Észrevehető, hogy a négy kategóriát pontosan úgy állítottuk össze, hogy az azon belüli

összes értékre a betétesek válasza ne változzék. Vagyis például, ha a kamat, $r = 0,4$, ami a g_2 kategória eleme, akkor a játékosok típusaitól függetlenül ugyanazt döntenek, mint például $r = 0,3872$ esetén, ami szintén ugyanezen kategória eleme. Továbbá, ha $t_a = 3$ és $t_b = 2$, akkor mindkét esetben az a játékos az R akciót választja, a b pedig W -t. Ezek alapján levonható az a következtetés, hogy mivel a banknak a betétek után fizetett kamat önmagában negatív hasznosságot jelent, ezért minden kategória esetén a kategória alsó határával fog számolni.

A következő lépés, hogy megvizsgáljuk, a bank ismeretei mellett hogyan reagálnak a játékosok a különböző kamatszintekre. Már tudjuk, hogy a különböző kategóriákon belül a döntésük semmi esetben sem változik. A játékosok négy eltérő módon reagálhatnak, mind a ketten maradhatnak a banknál, mind a ketten kiléphetnek, vagy cselekedhetnek ellentétesen. A banknak a három utóbbi azt jelenti, hogy $e = 0$ felhasználható pénze marad, hiszen feltettük, hogy csődbe megy. Ha mind a két játékos bent kívánja tartani a pénzét, akkor a bankban összesen a két betét összege, $e = 2D$ pénz halmozódik fel. Tehát a banknak meg kell vizsgálni, hogy a különböző kamatszintek mellett mekkora $E(e)$ érhető el. A 4.3 táblázat mutatja meg, hogy a négy kategória kamatjaira mekkora valószínűséggel érkezik a négy különböző válasz.

	$(W; W)$	$(W; R)$	$(R; W)$	$(R; R)$
g_1	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{17}{24}$
g_2	$\frac{8}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{14}{24}$
g_3	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$
g_4	1	0	0	0

4.3. táblázat. A játékosok egyes kategóriákra adott válaszai

Innen már számolható a várható pénzmennyiség mind a négy kategóriában. A különböző válaszok mellett elért betétnagyságokat súlyozzuk a válaszok előfordulási valószínűségével. A táblázat alapján felírható a várható pénzmennyiség és a kamat közötti összefüggés. A bank ezt az összefüggést kívánja felhasználni a hasznossági függvényének optimalizálásához.

$$E(e) = \begin{cases} 2D\frac{17}{24}, & \text{ha } 0,6493 \leq r \\ 2D\frac{14}{24}, & \text{ha } 0,3872 \leq r < 0,6493 \\ 2D\frac{11}{24}, & \text{ha } 0,3333 \leq r < 0,3872 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Jól látható, hogy a két változó, r és $E(e)$ közötti kapcsolat megfelel az előzetes elvárásnak, pozitív, r csökkenésére $E(e)$ is csökkenéssel reagál.

A bank hasznossági függvénye a $u_c(r) = e(r^* - r)$ alakban adható meg. Innen már a bank problémájának megoldása egyszerű, hiszen csupán meg kell vizsgálnia a lehetséges kamatszintek mellett a várható hasznosságát, és amelyik kamattal a maximális, azt a kamatot kell választania. A feladat eredményét a 4.4 táblázat tartalmazza.

r_{opt}	$\bar{u}_c(r)$, ha $r^* = 1,9$	$\bar{u}_c(r)$, ha $r^* = 0,65$	$\bar{u}_c(r)$, ha $r^* = 0,5$
0,6493	17718,25	9,9167	-2115,1
0,3872	17649,33	3066	1316
0,3333	14361,11	2902,8	1527,8
0	0	0	0

4.4. táblázat. A speciális eset megoldása

A vastagon kiemelt értékek a maximumok. Jól látszik, hogy a végeredmény r^* értékétől nagyban függ. Ha $r^* = 0,65$, akkor a bank $r_{opt} = 0,3872$ kamatszintet állít be és várhatóan 3066 lesz a haszna. Ha $r^* = 0,5$, akkor a bank a $r_{opt} = 0,3333$ kamatszint mellett dönt, mert akkor a várható haszna 1527,8.

Változtassuk meg most a játékot úgy, hogy a két játékos lehetséges típusai a $[0, l-1]$ intervallum egész elemei lehetnek, továbbá a kritikus tartomány legyen $K = [0, k-1]$. Ekkor l féle típus lehetséges és k különböző csődhelyzetet jelentő típus létezik, ahol $l-1$ a lehető legmagasabb típus, míg $k-1$ a legmagasabb még csődhelyzetet jelölő típus. A bank továbbra is csak a típusok a priori eloszlást ismeri, és feltesszük róla, hogy racionális. Minden, a bank által tudott információ köztudott a játék minden szereplőjére nézve. A bank most is egy olyan r értéket keres, ami mellett várható hasznossága maximális.

Az alapjáték továbbra sem változik meg, azt a 4.5 táblázat mutatja.

		b játékos	
		R	W
a játékos	R	$D(1+r); D(1+r)$	$0; D$
	W	$D; 0$	$D; D$

4.5. táblázat. Az alapjáték paraméteresen

Természetesen a táblázat alapján számolt egyenlőtlenség sem fog megváltozni, az a következő.

$$D(1+r)p \geq D$$

$$r \geq \frac{1}{p} - 1$$

Az általánosított játékban a játékosok vélekedései alapján számolt, összehasonlításra szánt valószínűségek nagyban függenek l és k értékeitől. Először feltesszük, hogy $k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$, ami azt szolgálja, hogy a megoldás közben r kettőnél több különböző intervallumba lesz sorolható. Könnyen belátható, hogy a $[0, k-1]$ intervallumban található típusokhoz tartozó valószínűségek pontosan minden esetben nullák lesznek, ugyanis egy csődhelyzetben lévő vállalat biztosan kiveszi a pénzét a bankból, függetlenül a vélekedéseitől. A függelékben leírtak alapján kijelenthető, hogy a $[k, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1]$ intervallumban lévő típusoknál a valószínűség számolható, azonban mivel nem sikerült zárt alakot találni a kiszámítására (ami feltehetően nem is létezik), csupán a $p_{inf_i} \leq \frac{l-k}{l}$ kikötés adható meg. A későbbiekben csupán p_{inf_i} -ként jelennek meg, ahol i egy típust jelöl a $[k, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1]$ intervallumban. A többi típusra, vagyis az $[\lfloor \frac{l}{2} \rfloor, l-1]$ szakaszon a véleményrangsorokból számolt valószínűség pontosan $\frac{l-k}{l}$. Tehát ezeket a valószínűségeket a fentebbi egyenlőtlenségbe beírva a 4.6 táblázatban látható megkötéseket kapjuk a kamatra.

t_i	0	1	$\dots$	$k-1$	k	$k+1$	$\dots$	$\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$	$\dots$	$l-2$	$l-1$
p_{inf}	0	0	$\dots$	0	p_{inf_k}	$p_{inf_{k+1}}$	$\dots$	$p_{inf_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1}}$	$\frac{l-k}{l}$	$\dots$	$\frac{l-k}{l}$	$\frac{l-k}{l}$
$r \geq$	∞	∞	$\dots$	∞	r_k	r_{k+1}	$\dots$	$r_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1}$	$\frac{k}{l-k}$	$\dots$	$\frac{k}{l-k}$	$\frac{k}{l-k}$

4.6. táblázat. A vélekedésekből származó valószínűségek általános esetben

A függelékben leírtak alapján látható, hogy $p_{inf_k} \leq p_{inf_{k+1}} \leq \dots \leq p_{inf_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1}} \leq \frac{l-k}{l}$. Ebből pedig egyértelműen következik, hogy $r_k \geq r_{k+1} \geq \dots \geq r_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} \geq \frac{k}{l-k}$. Vagyis a különböző r_i értékekből lehetséges egymást kizáró szakaszokra osztani a számegeyenest.

A 4.6 táblázat alapján észrevehető, hogy legfeljebb $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k + 2$ darab különböző intervallumba eshet bele r . Ez úgy áll össze, hogy ha a játékosok típusa a $[0, k-1]$ intervallumban van, ez r -re nem jelent megkötést, a $[k, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1]$ intervallumba eső típusok esetén pontosan $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k$ darab különböző p_{inf} értékhez ugyanennyi r érték és így ugyanennyi felfelé nyitott félegyenes tartozik. A típusok megmaradt értékeinél, vagyis az $[\lfloor \frac{l}{2} \rfloor, l-1]$ intervallumban csupán egy p_{inf} és így egy r érték létezik, így ez is egy újabb szakaszt jelent. A le nem fedett számok alkotják az utolsó kategóriát, hiszen ez tartalmazza a legutolsó, $\frac{k}{l-k}$ -nál kisebb kamatokat. Ez összeadva pontosan a megadott darabszámot adja ki.

$$\begin{array}{rclclcl}
g_1: & r_k & \leq & r & & \\
g_2: & r_{k+1} & \leq & r & < & r_{k+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_i: & r_{k+i-1} & \leq & r & < & r_{k+i-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k + 1}: & \frac{k}{l-k} & \leq & r & < & r_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} \\
g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k + 2}: & 0 & \leq & r & < & \frac{k}{l-k}
\end{array}$$

Természetesen a különböző kategóriákra még mindig áll az a megállapítás, hogy az azokon belüli kamatváltás nem befolyásolja a játékosok döntését. Vagyis, ha az egyik betétes egy adott kategória legalacsonyabb kamatszintje mellett úgy határoz, hogy W -t játszik, akkor a kategória magasabb értékeinél is így döntene, vagyis a racionális banknak, mivel r növelése költséget jelent, csak az adott kategória alsó határát éri meg vizsgálni. A különböző kategóriákra a betétesek típusaitól függően különböző reakciók érkezhetnek. A bank, mivel nem ismeri a játékosok típusait, az általa ismert típusok a priori eloszlásával számol és meghatározhatja a különböző kamatok esetén a betétesek különböző válaszainak valószínűségét.

	$(W; W)$	$(W; R)$	$(R; W)$	$(R; R)$
g_1	$\frac{3k-1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{3l-3k-1}{3l}$
g_2	$\frac{3k+1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{3l-3k+1}{3l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_i	$\frac{3k-1+2(i-1)}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{3l-3k-1-2(i-1)}{3l}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k + 1}$	$\frac{3k-1+2(\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k)}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{1}{3l}$	$\frac{3l-3k-1-2(\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k)}{3l}$
$g_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k + 2}$	1	0	0	0

4.7. táblázat. A játékosok válaszainak valószínűsége általánosan

A 4.7 táblázatot felhasználva a bank megállapíthatja, hogy milyen kapcsolat van a különböző kamatok és a bankban várhatóan meglévő pénzmennyiség között. Ezt az összefüggést a következő függvény írja le. Láthatóan r és $E(e)$ kapcsolata továbbra is pozitív.

$$E(e) = \begin{cases} 2D \frac{3l-3k-1}{3l}, & \text{ha } r_k \leq r \\ 2D \frac{3l-3k+1}{3l}, & \text{ha } r_{k+1} \leq r < r_k \\ \dots & \\ 2D \frac{3l-3k-1-2(i-1)}{3l}, & \text{ha } r_{k+i-1} \leq r < r_{k+i-2} \\ \dots & \\ 2D \frac{3l-3k-1-2(\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - k)}{3l}, & \text{ha } \frac{k}{l-k} \leq r < r_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A bank mindez után optimalizálja hasznossági függvényét, felhasználva az $E(e)$ és r közötti kapcsolatot ($\bar{u}_c(r) = E(e)(r^* - r)$). Mivel a véleményrangsorok alapján számolt valószínűségek kiszámítására nem lehet zárt alakot megadni, az optimalizálás elvégzése matematikai korlátokba ütközik, azonban most általánosabb keretek között tárgyaljuk a bank játékát, ezért az nem is célunk. Feltehetjük tehát, hogy létezik egy $r_{opt} \geq 0$ optimális betéti kamatláb, ami maximalizálja a bank hasznossági függvényét és valamely megadott r_{inf_i} -vel egyezik meg. A felírt összefüggésekből az is látszik, hogy konkrét számokkal az optimalizálás elvégezhető.

Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor $l > k > \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$. Ez a feltétel egyrészt azt garantálja, hogy mivel a kritikus értékek az összes lehetséges típus felénél nem kevesebb típust fednek le, ezért csupán egy kritikus valószínűség létezik, $\frac{l-k}{n}$, másrészt pedig azt, hogy az összes típus nem jelent csődhelyzetet. Ebből az következik, hogy r értékét pontosan két intervallumba tudjuk sorolni, nyilván az előbbi valószínűség alapján számolt $\frac{k}{l-k}$ kamatszint szolgál választópontként. Az a megállapítás továbbra is érvényes, hogy az intervallumokon belül a bank az intervallum minimális kamatszintjével optimalizál. A bank választása tehát leszűkül a 0 és az $\frac{k}{l-k}$ kamatszintek közötti döntésre. A várhatóan a bank rendelkezésére álló pénzmennyiség számítása nem változik, ha a bank megadja a nagyobb kamatot, akkor $E(e) = 2D \frac{3l-3k-1}{3l}$, különben pedig $E(e) = 0$. A bank várható hasznossága $\bar{u}_c(r) = E(e)(r^* - r)$, amit felhasználva kijelenthető, hogy ha $r^* > \frac{k}{l-k}$, akkor $r_{opt} = \frac{k}{l-k}$, különben $r_{opt} = 0$. A maximális várható hasznosság az első esetben $\bar{u}_c(\frac{3n-3m-4}{3n}) = 2D \frac{3l-3k-1}{3l}(r^* - r)$, a másodikban pedig $\bar{u}_c(0) = 0$.

Abban az esetben, amikor $k = l$, minden lehetséges típus csődhelyzetet jelent, vagyis a betétesek a betéti kamattól függetlenül a W cselekvés mellett döntenek. Ekkor a banknak teljességgel mindegy, hogy milyen kamatszintet ajánl fel. Ezt a megállapítást erősíti meg az is, hogy ebben az esetben a bankban várhatóan rendelkezésre álló pénzmennyiség értéke pontosan nulla, vagyis a maximális várható hasznosság is ugyanennyi r értékétől függetlenül.

4.3. A betétesek tökéletesen informáltak

Ebben az alfejezetben az előzővel való összehasonlítás céljából kicsit megváltoztatjuk a modell feltevéseit. Az előbbiektől eltérően most a két betétes több információval rendelkezik. Nagyon fontos megjegyezni, hogy az előzőekben felírt minden tulajdonság és feltétel megmarad, kivéve azt, hogy a betétesek nem ismerik egymás típusát, továbbá bevezetünk egy új lehetőséget is. Jelen esetben a játékosok típusai köztudottak, tehát a betétesek ismerik a saját és a másik betétes típusát is, és tudják, hogy a másik is ismeri azokat és így tovább a végtelenségig. A bankról feltesszük, hogy kezdetben nem ismeri a betétesek típusait, csupán az a priori eloszlást. Ez a valóságtól nem áll távol, hiszen elképzelhető, hogy a bank nem kér jelentést a betétesek likviditási állapotáról, amikor azok elhelyezik nála pénzüket, vagy akár később. Az információs partíciók felírhatók általánosan, $I_a(\omega) = I_b(\omega) = \{\omega\}$ és $I_c(\omega) = \{\Omega\}$.

A megváltoztatott modellt úgy is lehet értelmezni, hogy a bank számára adódik egy új lehetőség, miszerint saját költségén megbízást ad egy cégnek, hogy derítse ki a két betétes likviditási mutatóit és ezeket az információkat ossza is meg velük és a bankkal. A banknak nem feltétlenül szükséges ezeket az információkat megtudnia, ugyanis az optimalizálást még azok kiderítése előtt végzi, azonban a későbbi eredményt ez a többlettudás nem befolyásolja, vagyis feltehetjük azok megszerzését. Ez nagyjából azt jelenti, hogy a bank a játék kezdetekor annyit tud, hogy ha megbízza a céget, akkor a két betétese között egymás típusai köztudottak lesznek. Fontos kérdés, hogy a banknak megéri-e ezért a szolgáltatásért fizetni és ha igen akkor mennyit. Erre a választ a két modell összehasonlítása adja meg.

Ebben az alfejezetben követjük az előző felépítését. Először egy konkrét számpéldán keresztül mutatjuk be a problémát, majd egy általános megoldást is adunk, amivel számolva bármilyen felírásban számolhatóak az ilyen feladatok.

Kezdetnek tehát vegyünk egy olyan játékot, ahol a és b játékosok lehetséges típusai a $[0, 7]$ intervallum egész elemei lehetnek és a kritikus tartomány, ahol a játékosok csődhelyzetben vannak $K = [0, 1]$. Legyen továbbá a bank rendelkezésére álló pénzmennyiség $e = 2D = 20000$, a külsőleg adott továbbhitelezési kamatláb pedig $r^* = 0,65$. A banknak továbbra is $u_c(r) = e(r^* - r)$ alakú a hasznossági függvénye, ezt kívánja maximalizálni.

Elsőként azt az észrevételt tehetjük, hogy a betétesek döntése, miszerint R vagy W cselekvést választanak, a betéti kamatláb értékétől független. A két betétes akkor és csak akkor veszi ki pénzét a bankból, ha legalább egyikük csődhelyzetben van. Minden más esetben mind a ketten R -t játszanak. Ez azt jelenti, hogy a bank rendelkezésére álló várható elhelyezett pénzmennyiséget r értéke nem befolyásolja. $E(e)$ értékét a bank ismét a közös prior eloszlás alapján számolni, amit ismer. Ez alapján meghatározhatja, hogy annak a valószínűsége, hogy egy betétese kiveszi a pénzt $\frac{7}{27}$, míg annak, hogy ezt nem teszi meg $\frac{17}{24}$. Innen folytatva a számolást látható, hogy $E(e) = 2D \frac{7}{27}$.

A várható hasznosság kiszámítása tehát egyszerűsödik, az $\bar{u}_c(r) = 2D \frac{17}{24}(r^* - r)$ alakra. Ebből $e = 2D$ és r^* értéke ismert és adott, vagyis a maximalizálási feladat triviális, $r_{opt} = 0 + \epsilon$, ahol $\epsilon \searrow 0$. A maximális várható hasznosság pedig 9208,33.

Változtassuk meg most a játékot úgy, hogy a két játékos lehetséges típusai a $[0, l - 1]$ intervallum egész elemei lehetnek, továbbá a kritikus tartomány legyen $K = [0, k - 1]$. A bank továbbra is csak a közös prior eloszlást ismeri, azzal számol tovább. A bank most is egy olyan r értéket keres, ami mellett várható hasznossága maximális.

Kezdetben legyen $k < l$. A konkrét példához hasonlóan, r értéke nem befolyásolja $E(e)$ értékét, hiszen a játékosok döntésüket nem a betéti kamatláb, hanem a saját és a másik betétes típusa alapján hozzák meg. A korábbi közös priorra vonatkozó számítások alapján kijelenthető, hogy a várható hasznosság $\bar{u}_c(r) = a \frac{3l-3k-1}{3l}(r^* - r)$ alakban optimalizálható. A függvény maximalizálása ismét triviális, $r_{opt} = 0 + \epsilon$ lesz, ahol $\epsilon \searrow 0$. A maximális várható hasznosság ebből kifolyólag pedig $e \frac{3l-3k-1}{3l} r^*$ alakból számítható.

Ha $k = l$, akkor minden lehetséges típus csődhelyzetet jelent. Ekkor a betétesek a felajánlott kamat értékétől függetlenül a W akció mellett döntenek, vagyis a betéti kamat értéke nem hat $E(e)$ értékére. Mivel a betétesek pontosan egy valószínűséggel a pénzkivétel mellett döntenek, $E(e) = 0$ lesz, és a bank várható hasznossága is pontosan ugyanekkora értéket vesz fel. A betéti kamat értéke itt sem változtat meg semmit, vagyis annak optimális értéke bármi lehet.

4.4. Általános megállapítások

Ez az alfejezet arra szolgál, hogy bemutassuk az előző két részben tárgyaltak összehasonlítását. Először a konkrét számpélda összevetése szerepel, majd pedig megteesszük ugyanezt a nem specifikált eredményekkel is. A rész szerves részét képezik a következtetések alapján felírt tételek is, amik természetesen igyekeznek a modell keretein belül a lehető legáltalánosabbak lenni.

A konkrét számokkal felírt két modell eredményeit a 4.8 táblázat mutatja. Az a probléma, amikor a bank és a betétesei sem rendelkeznek tökéletes információval, első helyzet, míg az, amikor a betétesek rendelkeznek tökéletes információval második helyzet néven szerepel a táblázatban.

	1. helyzet	2. helyzet
r_{opt}	0,3872	≈ 0
$\overline{u}_c(r_{opt})$	3066	9208,33

4.8. táblázat. A specifikált eredmények összevetése

Az eredmények alapján jól látható, hogy a konkrét példában a bank magasabb várható hasznosságot ért el pusztán annak köszönhetően, hogy a betétesei több információval rendelkeztek egymásról. A táblázat választ ad arra a kérdésre is, hogy mennyit hajlandó azért fizetni a bank, hogy például egy hitelminősítő cég megtudja és el is árulja a betéteseknek a típusaikat. Evidens, hogy a banknak legfeljebb a két helyzetben várható hasznosság különbségét, vagyis maximum $9208,33 - 3066 = 6142,33$ pénzegységet éri meg fizetnie.

Az eredmények alapján megvizsgálható egy olyan helyzet is, amikor a bank beállít egy számára optimális kamatszintet az első eset alapján, majd csupán ez után tudatosan benne a lehetőség a hitelminősítő cég megbízására. Ez tömören az jelenti, hogy a bank az első eset alapján optimalizál, majd mikor kiderül, hogy a második alapján is tehette volna, akkor már nem képes változtatni a kamaton. A betétesek többletinformáció szerzése tehát ceteris paribus történik, még abban az értelemben is, hogy a betéti kamatláb értéke sem változik. Ekkor a bank az első eset alapján továbbra is 3066 várható hasznosságot ér el, azonban ha megbízza a hitelminősítő céget, akkor a 9208,33 várható hasznosság helyett csupán 3723 pénzegységet kap várhatóan. Ez tehát azt jelenti, hogy ha a banknak nincs lehetősége a betétesek informálása utáni kamatmódosításra, még akkor is megéri legfeljebb $3723 - 3066 = 657$ pénzegységet fizetnie a hitelminősítő cégnek.

Az általánosított modellek eredményeinek közzlése előtt fontos néhány megjegyzést tenni. Három esetet szükséges szétbontani és külön tárgyalni. Az első, amikor $k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$, a második, amikor $l > k > \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$ és a harmadik, amikor $k = n$. Ezeket az eseteket azért szükséges szétválasztani, mert a fentebbiek alapján látható, hogy mindegyik megoldása egyedi.

Az első esetben tehát $k \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$. A két információs helyzetet ismét megkülönböztetjük az előzőekhez hasonlóan. Az első helyzetben, mivel feltehetően nem létezik zárt alak a véleményrangsorokból számított valószínűségek megadására, általános megoldást nem lehetett adni. Összességében azonban elmondható annyi, hogy valamely $r_{k+i-1} = r_{opt}$ betéti kamatláb maximalizálja a bank hasznossági függvényét, és erre a betéti kamatlábra a bank várható hasznossága $\overline{u}_c(r_{opt}) = 2D^{\frac{3l-3k-1-2(i-1)}{3l}}(r^* - r)$. A második helyzetben az intervallum ezen leszűkítése nem jelentett problémát, az optimális kamatláb $r_{opt} \searrow 0$ lett, míg a maximális várható hasznosság az $\overline{u}_c(r_{opt}) = 2D^{\frac{3l-3k-1}{3l}}r^*$ alakot öltötte. A 4.9 táblázat összesítve tartalmazza az eredményeket.

Jól látható, hogy az első helyzetben a bank várható hasznossága nem lehet nagyobb a második helyzetben számoltnál. Mivel $0 \leq r_{opt} \leq r^*$ és $i \geq 0$, ezért $2D^{\frac{3l-3k-1}{3l}}r^* \geq 2D^{\frac{3l-3k-1-2(i-1)}{3l}}(r^* -$

	1. helyzet	2. helyzet
r_{opt}	r_{k+i-1}	≈ 0
$\overline{u}_c(r_{opt})$	$2D^{\frac{3l-3k-1-2(i-1)}{3l}}(r^* - r_{k+i-1})$	$2D^{\frac{3l-3k-1}{3l}}r^*$

4.9. táblázat. Az általános eredmények az első kikötés mellett

r_{k+i-1}). Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a bank nem járhat rosszabbul a hitelminősítő bevonásával. A banknak a két helyzet várható hasznosságának különbségét éri meg legfeljebb kifizetni a többletinformáció megszerzése és közlése érdekében.

A második eset az, amikor $l > k > \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1$. Az első információs helyzetben ekkor beláttuk, hogy két eset lehetséges. Ha $r^* > \frac{k}{l-k}$, akkor $r_{opt} = \frac{k}{l-k}$, ellenkező esetben $r_{opt} = 0$. Az eset specialitása miatt itt sikerült általánosan is elvégezni a maximalizálást. A második információs helyzetben a játékot leíró k és l paraméterekre tett kikötés nem jelentett különösebb változtatást, az eset az előző esettel megegyezően számolható. Az eredményeket összesítve a 4.10 táblázat mutatja be.

	1. helyzet, ha $r^* > \frac{k}{l-k}$	1. helyzet, ha $r^* \leq \frac{k}{l-k}$	2. helyzet
r_{opt}	$\frac{k}{l-k}$	0	≈ 0
$\overline{u}_c(r_{opt})$	$2D^{\frac{3l-3k-1}{3l}}(r^* - \frac{k}{l-k})$	0	$2D^{\frac{3l-3k-1}{3l}}r^*$

4.10. táblázat. Az általános eredmények a második kikötés mellett

A 4.10 táblázat alapján leszűrhető, hogy a bank várhatóan itt sem tehet szert alacsonyabb hasznosságra a második esetben, mint az elsőben, vagyis létezik egy nemnegatív haszon, vagy pénzmenyiség, amit a bank hajlandó feláldozni, hogy a betétesei többletinformációval rendelkezzenek egymásról.

A harmadik esetben, amikor $k = l$ a játék megoldása nagyban leegyszerűsödött, hiszen ezen kikötések azt garantálják, hogy minden lehetséges típus csődhelyzetet, vagyis biztos pénzkivételt jelent. Ez a megállapítás mind a két információs helyzetben igaz volt, tehát összevonhatóak a két esetből leszűrt következtetések. Ekkor tehát a bank által meghatározott kamatszint nem képes befolyásolni a betétesek döntését, vagyis minden egyes megadható kamatszint maximalizálja a várható hasznosságot, hiszen az mindig nulla. A második és az első helyzetben is nulla a maximális várható hasznosság, azonban itt is elmondható az, hogy a többletinformáció bevezetésével a bank nem járt rosszabbul, mint az első helyzetben, persze csak akkor éri meg azokat bevezetni, ha a banknak nem kell érte fizetni.

A következőkben néhány fontosabb tételt fogalmazunk meg, amik pusztán e fejezet megállapításaira támaszkodnak és értelemszerűen az itt tárgyalt modell keretein belül lettek belátva.

4.4.1. Tétel. *A megadott hasznossági függvény és az alapjáték által adott keretek között mindig létezni fog legalább egy optimális betéti kamatszint (r_{opt}). Az alapjátékban a bankhoz hasonlóan a betétesek sem ismerik egymás típusát.*

BIZONYÍTÁS: A bank specifikált hasznossági függvénye r értékét növelve csökkenő, míg kijelenthető, hogy a várhatóan a bank rendelkezésére álló pénzmenyiség r értékét növelve nő. A két hatás egymásnak ellentétes, vagyis biztosan létezik legalább egy olyan r_{opt} érték ami a két függvény összetételét, vagyis a várható hasznosságot maximalizálja. ■

4.4.2. Tétel. *A két információs helyzet összehasonlításakor a bank várható hasznossága nem lehet magasabb a kevesebb információt megengedő helyzet esetén.*

BIZONYÍTÁS: A tétel a fentebb leírtak alapján belátható, a fejezetben megtalálható a két helyzet általános összevetése, amiből ez egyértelműen látszik. Egy másik lehetséges bizonyítást is megadunk. Ha a két vállalat tökéletes információval rendelkezik, akkor $E(e)$ értéke maximális, hiszen ennél a helyzetenél csak bizonytalanabbak léteznek, a bizonytalanság pedig csökkenti $E(e)$ értékét. Nagyobb bizonytalanság esetén tehát a vállalatok nem vehetik ki kisebb valószínűséggel a pénzüket a bankból. Tökéletes informáltság mellett r értéke minimális, $r \approx 0$. E két állítás összetételéből következik, hogy a bank semmilyen más informáltság mellett nem járhat jobban, várható hasznossága nem lehet magasabb. ■

4.4.3. Tétel. *Ha a két információs helyzet vizsgálatánál a második helyzetben nem az ottani optimális értékkel számol a bank, hanem az első helyzet szerintivel, akkor sem járhat rosszabbul a második helyzetben. Ezt úgy is lehet értelmezni, hogy a ceteris paribus kikötést a kamatra is vonatkoztatjuk.*

BIZONYÍTÁS: A második információs helyzetben a bank számára várhatóan rendelkezésre álló pénzmennyiség sosem kisebb az első helyzetben számoltnál. Ez a típusok a priori eloszlásából és a kamat és $E(e)$ közötti kapcsolat feltárásából látható. A két érték közötti kapcsolat egy lépcsős függvény, ahol a legmagasabb kamatszint esetén jön ki a legmagasabb $E(e)$ érték. Ez a legmagasabb várható pénzmennyiség pontosan akkora, mint a második információs helyzetben számolt. Vagyis, ha az első helyzetben számolt r_{opt1} értéket a második helyzetben használt várható hasznosság függvénybe írjuk be, az nem adhat kisebb értéket az első helyzet várható hasznosságánál. A két érték akkor egyezik meg, ha a mind a két helyzet várható hasznossága nulla, vagy ha az első helyzetben a legmagasabb kamatszint az optimális. ■

4.4.4. Tétel. *Az információs helyzettől függetlenül, ha a bank az $u_c(r) = a(r^* - r)$ alakú hasznossági függvénnyel számol és $k \neq n$, akkor az optimális kamatszint nem lehet nagyobb a továbbhitelezési kamatszintnél, vagyis $r_{opt} \leq r^*$.*

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy az optimális kamatszint $r_{opt} > r^*$. Ekkor ezt behelyettesítve a hasznossági függvénybe biztosan negatív értéket kapunk. A $k \neq n$ kikötés garantálja, hogy a bankban várhatóan rendelkezésre álló pénzmennyiség ($E(e)$) nem lesz nulla. Ha azonban a bank $r = 0$ kamatszint mellett döntött volna, a várható hasznossága csupán nulla lett volna, ami nagyobb, mint a számolt optimális értékkel kapott. Ebből az következik, hogy $r_{opt} \leq r^*$ nem maximalizálja a hasznossági függvényt, tehát ellentmondásra jutottunk. Ilyen tulajdonságú érték tehát nem lehet a feladat optimális megoldása, $r_{opt} \leq r^*$. ■

A felírt tételek és az eredmények felhasználásával már bevezethető egy új fogalom, az információs prémium. A következő fejezetben ebben a témakörben végeztünk kutatást.

5. fejezet

Az információs prémium

A következő fejezetben bevezetünk néhány új fogalmat, melyek célja, hogy az episztemológiai fogalmakat össze tudjuk kapcsolni a megfigyelhető gazdasági paraméterekkel.

5.1. A fogalom

Az eddigiekben példákat láttunk arra a jólétsökkentő hatásra, amit az információ hiánya okoz a gazdasági életben. Ennek mértéke természetesen modelfüggő, azon belül pedig paraméterfüggő, így pontosan olyan nehézsgű a pontos kiszámítása, mint a teljes gazdasági élet lemodellezése. Láthattuk azt is, hogy a társadalmi jólét szempontjából lényeges, hogy az információ melyik szereplő kezében összpontosul.

Általában nem lesz igaz, hogy a nagyobb tudás a társadalomban magasabb jóléthez vezet, ahogyan az sem, hogy minden egyéb szempontból szimmetrikus játékosok közül a nagyobb tudású nagyobb kifizetést fog kapni. Noha a modellben azt kaptuk, hogy ha a vállalatoknak több információt adunk, az növeli a társadalmi összhasznosságot, építhettünk volna egy olyan modellt, amiben a fordítottja jött volna ki. A célunk ebben a fejezetben csak annyi, hogy összekapcsoljuk az episztemológiai fogalmakat közgazdasági és pénzügyi fogalmakkal, hiszen láthattuk, hogy a kamatlábak és a jólét függnek a szereplők informáltságától.

Tekintsünk egy G nem teljes információs játékot, $G = (N, A, u, H, C, I, f)$ paraméterekkel. Legyen F a stratégiaprofilok egy leképezése, mégpedig $F: S \rightarrow \mathbb{R}$. Az elv hasonlít a kifizetések definíciójához, azonban ez az F nem függ a világállapotoktól. F egyfajta externália, a játékosok döntése határozza meg, anélkül, hogy a játékosokat érdekelné az értéke. Amennyiben G játékot a gazdaság egy szegmensének modellezésére használjuk, ez az F megfelelő függvényválasztás esetén a gazdaság egy fontos paramétere is lehet. Az eddigi példáinkban a vizsgált paraméter a betéti kamatláb volt, mely kizárólag a bank döntésén múlott, tehát $F(S) = F(S_C) = r$ volt. Erre az általánosításra azért van szükség, mert gyakran találkozhatunk olyan gazdasági paraméterekkel, amiket nem egy szereplő határoz meg, hanem esetleg több, akár különböző súllyal is. Ilyen lehet egy részvény ára, vagy valamilyen devizaárfolyam. Jelölje továbbá $\bar{u}_i(S) = \int_{\Omega} u_i(S, \omega) \Delta_p(\omega)$ egy játékos várható hasznosságát adott S stratégiaprofil mellett. $\Delta_p(\omega)$ -val jelöltük egy ω világállapot súlyát a természet apriori eloszlásában. Amit kaptunk, tehát megmondja, hogy ha sokszor lejátszuk a játékot, a játékosok mindig S stratégiaprofil játszáka, de a természet újra meg újra sorsol a világállapotok közül, mekkora átlagos kifizetést kap i játékos. Legyen $\bar{U}(S) = \sum_{i \in N} \bar{u}_i(S)$ a társadalom átlagos várható kifizetése S stratégiaprofilban (itt ugyebár nem kell integrálni, véges sok játékosunk van, mind ugyanolyan súllyal).

Legyen S'_i egy olyan Bayesi-Nash-egyensúlybeli stratégia i játékosra, amire $\bar{u}_i$ a legmagasabb. Mivel a Bayesi-játékban az azonos játékosok különböző típusai külön játszanak (nem függ a kifizetésük egymástól), ez nem mond ellent a racionalitási feltevéseknek. Ekkor legyen $S' := \times_{i \in N} S'_i$. Legyen $\bar{U}' = \bar{U}(S')$, és $F' = F(S')$.

Konstruáljunk egy $G^* = (N, A, u, H, C, I^*, f^*)$ játékot, mely játékosaiiban, akcióiban, kifizetéseiben, természeti állapotokban és típusaiban megegyezik G játékkal, azonban más információs partíciókkal rendelkezik, és ennek megfelelően más véleményrangsorokkal. Legyen I^* olyan, hogy minden j -re és minden ω -ra $I_j(\omega) = \{\omega\}$, azaz minden játékos minden világállapotban pontosan tudja, hogy éppen az a világállapot következett be. Vegyük észre, hogy ebből a véleményrangsor definíciója miatt az elsőrendű, másodrendű, stb. vélekedések egyértelműen következnek, hiszen az információs partíciók elemei egyeleműek. A vélekedéseket a játékosok nem is fogják használni, hiszen minden játékos pontosan tudja az összes többi játékos típusát, pontosan tudja, hogy minden játékos tudja minden játékos típusát, stb. a természet paramétereire ez ugyanúgy igaz lesz. G^* -ot nevezzük G játék tökéletes információssá tételének.

A tökéletes információs átírás $\bar{U}'$ és F' értékét $\bar{U}^*$ -al és F^* -al jelöljük.

5.1.1. definíció (Információs prémium). Egy gazdasági paraméter információs prémiuma az a $\Pi \in \mathbb{R}$, amire $\Pi(F, I, f) = F' - F^*$.

5.1.2. definíció (Társadalmi információs veszteség). A társadalom információs vesztesége az a $\Lambda \in \mathbb{R}$, amire $\Lambda(I, f) = \bar{U}' - \bar{U}^*$.

Kezdjük a magyarázkodást a társadalom információs veszteségével. Ez megmutatja, hogy a társadalom mennyi átlagos várható összhasznosságot „veszít” amiatt, hogy I és f írják le a szereplők episztemológiai jellemzőit, nem pedig I^* és f^* , amik a tökéletes informáltságot jeleznék. Ha gazdasági környezetbe helyezzük a játékot, azt mondhatjuk, hogy a társadalom legfeljebb Λ összeget fizetne azért, hogy minden szereplője tökéletesen informált legyen. Természetesen, Λ negatív is lehet, ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy ennyit ér meg a társadalomnak, hogy a szereplők nem tökéletesen informáltak.

Az információs prémiumot kicsit nehezebb megfogni, hiszen egy absztraktul definiált gazdasági paraméterről nem tudjuk megmondani, hogy milyen értéke kívánatos gazdaságban. Nem tudjuk ránézésre megmondani, hogy a társadalomnak a 15%-os kamatláb tesz-e jobbat, vagy a 20%-os, szemben a hasznossággal, amiről tudjuk, hogy minél magasabb értéket akarunk elérni. Persze nem is ez a célunk vele, hanem az, hogy megmutassuk, a különböző episztemológiai szituációk hogyan változtatják az adott paramétert. Az a Π , amit kaptunk, meg fogja mondani, hogy F mennyivel lesz magasabb (vagy alacsonyabb) pusztán amiatt, hogy a szereplők nem tökéletesen informáltak. Noha a prémium nehezebben megfogható játékelméleti szempontból, hiszen jól kell megválasztani F -et, hogy a paraméterre értelmes eredményt kapjunk, mégis ez lesz nekünk a fontosabb, mivel a gazdasági paramétereket könnyű megfigyelni a valóságban. Vannak adataink a kamatlábakra, az árfolyamokra, ami egyszerűbbé teszi az információs prémium megbecslését a valós életben, ellentétben a szereplők hasznosságával, amit nehezebb megfigyelni, így a társadalom információs veszteségét nehezebb kiszámolni.

Eddig nem került említésre az, hogy mennyit érhet a játékosoknak egyesével a tökéletes informáltság. A társadalom egészének már tudjuk, azonban létrejöhet az az eset is, amikor csak a játékosok kisebb csoportja, vagy akár egyetlen játékos tesz szert tökéletes információkra. Ehhez újabb referencia-játékokra van szükségünk: legyen G^i játék az eddigiekhez hasonló, azaz az információs partíciókban és a véleményrangsorokon kívül G -vel mindenben egyező játék, melyre kizárólag i játékosra

$I_i^i(\omega) = \{\omega\}$ minden ω -ra, pedig $I_{-i}^i = I_{-i}$, tehát a többi játékos informáltságához nem nyúltunk. Véleményrangsorokra hasonló a helyzet, i játékos véleményrangsora (a tökéletes informáltsághoz képest) semmitmondó, a többieké maradt ugyanaz.

Ekkor az előzőekhez hasonlóan S' lesz G olyan Bayesi-Nash-egyensúlya, amiben minden $\bar{u}_i$ maximális, és S^i lesz ugyanez G^i -ben. Szintén hasonlóan $\bar{u}_i' := \bar{u}_i(S')$ és $\bar{u}_i^i := \bar{u}_i(S^i)$.

5.1.3. definíció (Információs veszteség). i játékos információs vesztesége az a $\lambda_i \in \mathbb{R}$, amire $\lambda_i(I, f) = \bar{u}_i' - \bar{u}_i^i$.

λ_i megmondja, hogy i játékos maximum mennyit nyerne vagy vesztené azzal, ha tökéletesen informált lenne, ahhoz az információs helyzethez képest, mint amit megadtunk neki I -ben és f -ben. Ennek természetesen szintén megvannak ugyanazok a nehézségei, mint a társadalom információs veszteségének.

5.2. Problémák és még nyitott kérdések

Látszólag elértük a célunkat, a játék paramétereit rögzítettük és csak az episztemológiai jellemzőket mozgattuk, és megfigyeltük, a racionális játékosok válaszát a különböző információs helyzetekre. Az információs prémium a stratégiák mozgását mutatja, az információs veszteség pedig a kifizetésekét.

Azonban az előző részben használt definíciókkal több elméleti és gyakorlati gond is felmerülhet. Láthattuk, hogy míg az információs prémium megfigyelhető a gyakorlatban is, nehéz optimalizálni az értékét a társadalom szempontjából. Ezzel szemben az információs veszteség értékét könnyű optimalizálni, de értékét a gyakorlatban nehéz mérni. Modellünk és elméleteink szempontjából ez még nem jelent gondot, az alkalmazásnál azonban figyelniünk kell ezekre.

Két elméleti problémát sorolunk itt fel, az egyik az egyértelműségben, a másik a megoldáskonceptióban keresendő. Egyértelműség alatt azt értjük, hogy a játék „megoldásának” azt a játékosok szempontjából parciális Bayesi-Nash-egyensúlyt tekintettük, melyben az egyes $\bar{u}_i$ -k a maximálisak. Azonban, ha ez egy játékosnál nem egyértelmű, akkor nem tudunk többet mondani arról, hogy mi fog történni a játékban, így a definícióink csak abban az esetben fognak működni, amikor ez egyértelmű. Már a Bayesi-Nash-egyensúlyok közötti választás is esetlegesnek tűnhet, azonban a kifizetésüket maximalizáló játékosokra működőképes.

A megoldáskonceptió problémája az, hogy – mint ahogy azt már dolgozatunkban is láthattuk – a Bayesi-Nash-egyensúly nem biztos, hogy megállja a helyét a nem teljes információs játékok között. Használatát azért fogadtuk el erre a fejezetre, mert a Bayesi-játékoknak ez a legismertebb és leginkább bevett megoldáskonceptiója, így bármi mást használtunk volna, csak növeltük volna a felmerülő kérdések számát. Amíg nincs olyan megoldáskonceptió, ami pontosan megmondja minden nem teljes információs játékban, hogy a racionális szereplők mit fognak választani, addig ezzel a problémával nem tudunk előre haladni, de láthatóan nem ez most a célunk. A célunk az volt, hogy modellezzük azt a hatást, amit az információs helyzetek mozgatása okoz a gazdasági életben.

Az információs prémium azon tulajdonsága, hogy nem mutatja a jólétet, azt eredményezi, hogy releváns gazdasági kérdést nem lehet feltenni róla, hiszen a gazdaság a jóléttel foglalkozik, ezt pedig az információs veszteség mutatja. Ahhoz, hogy a gyakorlatban optimalizálni tudjuk a mértékét, további kutatás szükséges a viselkedésével kapcsolatban. Így dolgozatunk talán legfontosabb nyitott kérdése, hogy milyen feltételeket kell tennünk ahhoz, hogy az információs veszteség pozitív legyen, azaz a több információ valóban nagyobb jólétet eredményezzen?

5.3. Alkalmazási lehetőségek

Végezetül szeretnénk szót ejteni az imént bevezetett fogalmak esetleges jövőjéről. Amennyiben a vázolt problémákat át tudjuk hidalni (már amennyiben érdemes tovább foglalkozni velük) az itt kapott modellt számos valós gazdasági problémára le lehet fordítani.

Banki betéti kamatképzés: A 4. fejezetben megmutattuk, hogy a betéti kamatlábak emelése helyett a banknak módja lehet úgy betéteseket csalogatni magához, ha nagyobb biztonságot garantál, valahogy elérni, hogy a betétesek ismerjék meg egymást és ne kelljen attól félniük, hogy csődbe megy a bank.

Kormányzati feladat: Amennyiben a társadalmi információs veszteség pozitív, úgy a társadalmat rosszul érinti a kialakult információs helyzet. A kormányzat feladata lenne ennek kezelése, hogy a veszteség kisebb legyen, és a gazdaság hatékonyabban tudjon működni. Az információs prémium megfigyelhető a gazdaságban, így segítséget nyújthat azoknak a szektoroknak a megtalálásában, ahol beavatkozásra van szükség.

Pénzügyi modellek: Ismét kamatlábakra alkalmazva az információs prémium koncepcióját, pontosíthatóak az ezt figyelmen kívül hagyó transzmissziós mechanizmusra építő modellek. Így például egy központi banki alapkamat csökkentés esetében megfelelő információs helyzetben elképzelhető, hogy a banki betéti kamatokra ez egyáltalán nincs hatással, és így a hitelkamatlábakra sem.

Véleményünk szerint a koncepció érdemes lehet további kutatásokra, noha sorsa erősen összefügg néhány régóta nyitott kérdéssel, így a megoldáskoncepciók kérdésével is, hogy alkalmazható legyen a gyakorlatban.

6. fejezet

Függelék - bizonyítások

A függelékben olyan bizonyítások, tételek, észrevételek és sejtések találhatók, amik nem képezik a kutatás fő irányát, azonban a célhoz való eljutásnak szerves részét képezik. Elsősorban a játékosok véleményrangsoraiból származó valószínűségekről tett megállapítások alátámasztását, illetve a felhasznált tételek kimondását foglalja magában ez a fejezet. Fontos előzetesen megjegyezni, hogy bizonyos helyeken olyan falakba ütköztünk, amit a felhasznált matematika nem képes átlépni.

A játék felírásából és a véleményrangsorok definíciójából látható, hogy a pénzkivétel valószínűségét egy úgynevezett zárt, egyre normált háromirányú Pascal-háromszög alapján számolhatjuk. A zártsága azt jelenti, hogy a megengedett típusok két egész szám között lehetnek és nem pedig a teljes számegyenesen. A háromirányú Pascal-háromszög a matematikában gyakran előforduló sztenderd Pascal-háromszög egyik specializálása, ahol minden sor összege a három megfelelő hatványa és az elemeket úgy kapjuk, hogy azok a felettük levő három elem összege. Zárt háromirányú Pascal-háromszög esetén az alakzat két szélén ez a szabály megváltozik, a szélső oszlopok értékei mindig a közvetlenül felettük levő elem kétszeresének és az amellet található elemek összege. Amennyiben a háromirányú Pascal-háromszög egyre van normálva, akkor minden sort leosztunk a sorösszeggel, így minden sor összege egy lesz.

A zárt, egyre normált háromirányú Pascal-háromszög koncepciója úgy feleltethető meg az alapjátékban leírtaknak, hogy a zárt háromszög pontosan annyi oszlopot tartalmaz, amennyi lehetséges típus van, és a két betétes a saját típusuknak megfelelő helyre az első (formálisan a nulladik) sorban beírnak egy egyest, minden más típus alá nullát. Ekkor a képzési szabály elszabadításával és a sorok számát megfelelően nagyra állítva számolhatók a valószínűségek. A véleményrangsorokat egyszerűen olvashatjuk ki a háromszögből. Az első sor azt mutatja, hogy a játékos milyen típusúnak tudja magát. A második azt, hogy milyen valószínűséggel gondolja azt, hogy a másik játékos a megfelelő típusú. A harmadik azt, hogy a játékos milyen valószínűséggel gondolja, hogy a másik játékos azt gondolja, hogy ő (az első játékos) valamilyen típusú. És ez így megy tovább a végtelenségig. Ennek működését részletesebben a 3.3 táblázatban láthattuk.

A játékok megadását paraméteresen le lehet szűkíteni három paraméterre. Az eddigi jelöléseket használva ezek l , a lehetséges típusok száma, k a csődös típusok száma és egy új elem, a kezdőpont, t_k vagyis a vizsgálandó játékos általa ismert típusa. Korábban feltettük, hogy az l darab lehetséges típus legyen mindig a $[0, l - 1]$ intervallum egész eleme. Ez csupán egy egyszerűsítés, a játékot magát nem változtatja meg.

A játék megoldása közben beláttuk, hogy egyetlen csődös típus esetén a racionális játékosok az egyetlen csődös, vagyis a bal oldali szélső oszlop elemeinek szuprémumát keresik. Ha egynél több

csődös típus is létezik, akkor az összes csődös típushoz tartozó oszlop elemeit soronként összeadva, az így kapott új sorozat elemeinek keresi a szuprémumát.

6.0.1. Tétel. *Ha minden lehetséges típus csődös, vagyis $k = l$, akkor a vizsgálandó sorozat szuprémuma egy, vagyis a racionális játékos kiveszi a pénzét a bankból.*

BIZONYÍTÁS: Ha $k = l$, akkor a racionális játékos az összes oszlop soronkénti összeadásából kapott sorozat szuprémumát keresi. A felhasznált háromirányú Pascal-háromszög tulajdonságaiból egyértelműen következik, hogy minden sor összege egy. Vagyis ekkor a vizsgált sorozat minden eleme pontosan egy, ennek szuprémuma is ugyanennyi. ■

6.0.2. Tétel. *A specializált háromirányú Pascal-háromszög minden oszlopából külön-külön sorozatot képezve a sorozatok pontosan $1/l$ -hez tartanak. Ezt felhasználva kijelenthető, hogy k darab csődös típus esetén, a balról számított első k oszlop összegéből képzett sorozat k/l -hez tart.*

BIZONYÍTÁS A háromirányú Pascal-háromszögben lejátszódó folyamat leírható egy Markov-lánccal, ahol a típusok poszterior eloszlása az átmenetvalószínűség mátrix. Arról beláttuk, hogy mivel $l \times l$ -es méretű, ezért a végtelenségig önmagával szorozgatva egy olyan mátrixhoz tart, aminek minden eleme $1/l$. ■

6.0.3. Tétel. *A bal oldali legszélső oszlop elemeiből alkotott sorozat elemei addig a sorig monoton nőnek, amíg az eggyel jobbra lévő oszlop megfelelő eleme nagyobb a sorozat megfelelő eleménél.*

BIZONYÍTÁS: A tétel a képzési szabály egyértelmű következménye. Legyenek a legszélső oszlop elemei a_i -k, míg a mellette levő oszlop elemei b_i -k, ahol i a megfelelő sor száma. Ekkor minden i -re igaz, hogy $a_i = \frac{2}{3}a_{i-1} + \frac{1}{3}b_{i-1}$. $a_i \geq a_{i-1}$ akkor teljesül, ha $\frac{2}{3}a_{i-1} + \frac{1}{3}b_{i-1} \geq a_{i-1}$, vagyis $b_{i-1} \geq a_{i-1}$. ■

6.0.4. következmény. *A jobb oldali legszélső oszlop elemeire is igaz a tétel, hiszen a képzési szabály ott is ugyanez, csupán a mellette balra lévő oszlop elemeivel kell számolni.*

6.0.5. Tétel. *A nem legszélső oszlopok elemeiből alkotott sorozatok mindaddig monoton nőnek, amíg a mellettük két oldalt lévő oszlopok azonos sorbeli elemeinek átlagánál nagyobb értékük van.*

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás ismét a képzési szabály következménye. Legyenek a vizsgált oszlop elemei e_i -k, a két oldalt mellette levőké pedig d_i -k és g_i -k, ahol i a megfelelő sort jelöli. Ekkor a képzési szabály alapján $e_i = \frac{1}{3}(d_{i-1} + e_{i-1} + g_{i-1})$. Az $e_i \geq e_{i-1}$ kitétel az előző szabály alapján $\frac{1}{2}(d_{i-1} + g_{i-1}) \geq e_{i-1}$ esetén teljesül. ■

Bevezetünk két új saját fogalmat, a reguláris és irreguláris szuprémum értékeket. Regulárisnak nevezünk egy számolt szuprémumot, ha annak értéke nem egy közbülső maximuma a sorozatnak, hanem az az érték ahova az a sorozat tart. Ebből kifolyólag irreguláris egy szuprémum, ha az a sorozat egy közbülső maximuma és nem az az érték, ahova a sorozat tart.

6.0.6. Tétel. *Ha $t_k \geq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$, akkor a szuprémum reguláris. Értéke számolható, $\frac{k}{l}$.*

6.0.7. Tétel. *Ha $t_k < \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$, akkor a szuprémum irreguláris. Ekkor a szuprémum értékére nincs általános képlet.*

Az irreguláris szuprémumok kiszámítására nincsen zárt alak.

Ez utóbbi két tétel csupán sejtés, amit az $l = 20$ -ig az összes lehetséges játékra végigszámolt értékekből vontunk le.

6.0.8. Tétel. *Az átmenetvalószínűségekre igaz, hogy ha $i > j > k$, akkor $M_{ik}^n \leq M_{jk}^n$, azaz ha messzebbi típusból indulunk, kisebb lesz a valószínűsége, hogy az n . lépésben k -ba jutunk.*

BIZONYÍTÁS: Nevezzük x -ből y -ba vezető útnak azoknak az állapotoknak a sorozatát, melyekbe eljutunk egy x állapotból egy y állapotba. Nevezzük n -t az út hosszának. Vegyük észre, hogy minden 1 hosszú út csak szomszédos elemek között vezethet az átmenetvalószínűségek definíciója miatt. Ekkor igaz lesz, hogy ha $i > j > k$, akkor minden út, ami i -ből vezet k -ba, átmegy j állapoton. Emiatt létezni fog egy olyan megfeleltetés, mely az i -ből k -ba vezető utakat egyértelműen megfelelteti egy j -ből k -ba vezető útnak. ■ A bizonyítás kis n -ekre működik jól, mivel ha elérjük az intervallum szélét, nem minden út valószínűsége lesz ugyanannyi. A tétel ettől még igaz lesz, de bizonyítása bonyolultabb a sok eset miatt, ami miatt ezt itt nem vezetjük végig.

Irodalomjegyzék

Franklin Allen and Stephen Morris. Finance applications of game theory. *Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series 98-23-B*, 1998.

Robert Aumann. Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics*, 4(6):1236–1239, 1976.

Robert J. Aumann. Interactive epistemology i: Knowledge. *International Journal of Game Theory*, 28:263–300, 1999a.

Robert J. Aumann. Interactive epistemology ii: Probability. *International Journal of Game Theory*, 28:301–314, 1999b.

Ferenc Forgó, Miklós Pintér, András Simonovits, and Tamás Solymosi. *Játékelmélet (elektronikus jegyzet)*. 2005.

András Gömöri. *Információ és interakció*. Typotex, 2001.

János Harsányi. Games with incomplete information played by bayesian players part i., ii., iii. *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502, 1967-68.

A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1995.

John Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1):48–49, 1950.

M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A course in game theory*. MIT Press, 1994.