

Ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann terek geodetikus leképezése

Készítette:

Horváth Zoltán, matematika szak,
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar
Főiskola

Küldő intézmény:

Debreceni Egyetem
Természettudományi és Technológiai Kar

Témavezető:

Dr. habil. Bácsó Sándor,
Debreceni Egyetem Informatikai Kar
Komputergrafika és Képfeldolgozás Tanszék

Lezárás dátuma:

2011. november 10.

BEVEZETÉS

Kutatásom során az általános metrikus terek közül az egyik legfontosabb, alkalmazásokban is jelentős szerepet játszó tértípussal, a Riemann terekkel foglalkoztam. Ezek a terek Georg Friedrich Bernhard Riemann német matematikus nevét viselik, aki rövid élete ellenére úttörő munkát végzett a matematikai analízis, a differenciálgeometria, a matematikai fizika és az analitikus számelmélet területén.

A speciális Riemann terek geodetikus leképezései nyitott témakör, melyek tanulmányozása során új tudományos eredmények szülehetnek. Ezért is választottam ezt a témakört a kutatásom témájául.

Megismerkedtem az affinösszefüggő- és Riemann terek fogalmával, tulajdonságaival, a metrikus terek geodetikus leképezéseivel, s néhány speciális Riemann tértípussal. Ezek után a ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann terek geodetikus leképezéseit tanulmányoztam. Vizsgálataim során új eredmények adódtak. Bebizonyítottam, hogy ha két Riemann tér között létezik geodetikus leképezés és az egyik Riemann tér ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér, annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a másik Riemann tér szintén ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér legyen a következő egyenlőség teljesülése:

$$(n-1)(\psi_{ij,k} + \psi_{jk,i} + \psi_{ki,j}) - 4(\psi_i(x)R_{jk} + \psi_j(x)R_{ki} + \psi_k(x)R_{ij}) - \\ - 4(n-1)(\psi_i(x)\psi_{jk} + \psi_j(x)\psi_{ki} + \psi_k(x)\psi_{ij}) = 0$$

Továbbá, ha a ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér Einstein tér is, akkor a leképezés affin.

1. AFFINÖSSZEFÜGGŐ- ÉS RIEMANN TEREK

1.1. Affinösszefüggő terek

Mielőtt az affinösszefüggő tér definícióját megadnánk, tekintsünk egy példát.

Az euklideszi sík tetszőleges egyenesét a Descartes-féle koordinátarendszerben a t paraméter lineáris függvényeként írhatjuk fel: $x = a \cdot t + c$ és $y = b \cdot t + d$, ahol a, b, c, d valós konstansok és az a és b egyszerre nem tűnhetnek el. Ebből következik, hogy az előbbi függvénynek a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásai. Ez az egyenletrendszer ugyanilyen alakú marad akkor is, ha x és y koordinátákra nemelfajuló lineáris transzformációt alkalmazunk. Általánosabb alakú koordináta-transzformáció esetén azonban a fenti egyenletrendszer alakja megváltozik. Görbevonalú koordinátarendszerben az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} = -\Gamma_{11}^1(x^1, x^2) \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^1(x^1, x^2) \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} - \Gamma_{22}^1(x^1, x^2) \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2,$$

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} = -\Gamma_{11}^2(x^1, x^2) \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^2(x^1, x^2) \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} - \Gamma_{22}^2(x^1, x^2) \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2.$$

Az egyenletrendszer jobb oldalán az első deriváltak homogén másodfokú polinomjai állnak. Az egyenletrendszert 6 darab kétváltozós $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ($i, j, k = 1, 2$), a koordinátarendszertől függő, ismert függvény adja meg. Könnyen igazolható, hogy az $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, x^2)$ lokális koordináta-transzformáció során a Γ_{jk}^i függvények a

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha}$$

szabály szerint transzformálódnak. Két affin összefüggés izomorf, ha az egyik a másiktól invertálható koordináta-transzformációval származtatható. A közönséges sík affin-összefüggése rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy alkalmas koordinátarendszerben minden komponens nulla. Az ilyet *affin koordinátarendszernek* nevezzük.

A fenti példában azt láttuk, hogy 6 (a dimenziószámmal kifejezve: $n^2(n+1)/2$) darab Γ_{jk}^i függvényt kellett megadnunk, amelyek rendelkeztek a j, k indexekben szimmetria tulajdonsággal. A belőlük invertálható koordináta-transzformációval származtatható újabb $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ függvények is szimmetrikusak lesznek az alsó indexekben. Az általánosítás felé haladva a térben a transzformációs szabálynak eleget tevő, n^3 darab Γ_{jk}^i függvényt adunk meg, és nem várjuk el az előbb említett szimmetriát.

1. Definíció: Az X^n n -dimenziós differenciálható sokaságot *affinösszefüggő térnek* nevezzük és a továbbiakban A^n -nel jelöljük, ha minden koordinátarendszerben van n^3 számú Γ_{jk}^i függvény úgy, hogy az (x) koordinátarendszerről az $(\bar{x})$ koordinátarendszerre való áttérés esetén a Γ_{jk}^i és $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ összefüggési koefficiensek közötti kapcsolat a

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \Gamma_{\beta\gamma}^k(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^j} \quad (1.1)$$

alakban adható meg.

2. Definíció: Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. A Γ_{jk}^i összefüggési koefficiensek felhasználásával *görbületi tenzort* (*Riemann tenzor*) definiálhatunk a következőképpen

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^\alpha(x) \Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha(x) \Gamma_{k\alpha}^h(x). \quad (1.2)$$

3. Definíció: Az $x(t)$ görbe mentén vett $\xi^i(t)$ vektormezőt akkor nevezzük *párhuzamosnak*, ha

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \xi^j(t) \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

4. Definíció: Egy $\xi^i(t)$ vektormezőt *abszolút párhuzamosnak* nevezzük, ha bármely görbe mentén párhuzamos vektormezőt határoz meg.

1. Tétel: Az abszolút párhuzamos vektormezők korlátlan létezésének szükséges és elegendő feltétele a görbületi tenzor eltűnése.

5. Definíció: Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. Az $S_{jk}^i := \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$ tenzort az A^n *torzió tenzorának* nevezzük.

Az affinösszefüggő tér az affin tér általánosítása. Az affin terekben az összefüggési koefficiensek a j, k indexekben szimmetrikusak (azaz $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$), valamint létezik olyan koordinátarendszer, melyben $\Gamma_{jk}^i = 0$. Az tereket a görbületi tenzor és a torzió tenzor eltűnése jellemzi.

6. Definíció: Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. Az $x(t)$ görbét *pályának* nevezzük, ha kanonikus paraméterben (vagy kitüntetett paraméter esetén) az egyenlete

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (1.4)$$

alakú, ahol a Γ_{jk}^i a tér összefüggési koefficiensei.

1.2. Riemann terek

7. Definíció: Az X^n n -dimenziós differenciálható sokaságot *Riemann térnek* nevezzük és a továbbiakban V^n -nel jelöljük, ha megadunk rajta egy kétszer kovariáns, szimmetrikus g_{ij} tenzormezőt, ahol a $g_{ij}(x)$ tenzor egy pozitív definít kvadratikus forma együttható rendszere, azaz $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta > 0 \quad \forall dx^i \neq 0$ esetén.

Ezt a kvadratikus formát a Riemann tér *metrikus alapformájának* nevezzük. A $g_{ij}(x)$ a Riemann tér *metrikus tenzora*, amely meghatározza a mérés alapformuláit.

Legyen $x^i(t)$ ($t_1 < t < t_2$) egy görbe V^n -ben. A görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai közötti ívnek *ív hossza*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x(t))x^\alpha(t)x^\beta(t)} dt.$$

A $g_{ij}(x)$ felhasználásával a V^n érintőterében belsőszorzatot definiálunk

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \eta^\beta,$$

ahol ξ és η az x pontból induló tetszőleges vektorok. A belsőszorzatból meghatározható a ξ hossza:

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta}.$$

Az x pontból induló ξ és η vektorok által bezárt szög cosinusát a

$$\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \|\eta\|} = \frac{g_{\rho\sigma}(x) \xi^\rho \eta^\sigma}{\sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta} \sqrt{g_{\chi\delta}(x) \eta^\chi \eta^\delta}}$$

képlet adja meg.

Legyen $B(x)$ a V^n egy korlátos, zárt, mérhető tartománya. A $B(x)$ mértéke

$$A = \iint_{B(x)} \dots \int \sqrt{\det(g)} dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

A fenti integrál $n = 2$ esetben a felületet, $n = 3$ esetben a térfogatot adja.

Tehát az X^n sokaságon úgy adhatunk meg egy Riemann-metrikát, hogy az X^n sokaság érintőnyalábján megadunk egy euklideszi, vagy pszeudoeuklideszi struktúrát, mely differenciálható módon függ az $x \in X^n$ ponttól.

A legegyszerűbb példa a Riemann-térre az n -dimenziós euklideszi-tér. Ebben az esetben tetszőleges e_i bázist választhatunk az affin koordinátarendszer megszerkesztéséhez. Az affin koordinátatér pontjaiban a g_{ij} metrikus tenzor komponensei állandók: $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, a bázisvektorok páronként vett belsőszorzatai adják, ahol $\det(g_{ij}) \neq 0$, $(i, j = 1, \dots, n)$. A Riemann tér az euklideszi tér általánosítása. Az Euklideszi teret jellemzi olyan koordinátarendszer létezése, ahol $g_{ij} = \delta_{ij}$. (A δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólum.)

Egy másik példa az n -dimenziós euklideszi térre az $(n+1)$ -dimenziós euklideszi tér egy hiperfelületének belső geometriája.

8. Definíció: Legyen V^n egy Riemann tér. A g_{ij} metrikus tenzor felhasználásával

$$\Gamma_{hij} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ih} + \partial_i g_{jh} + \partial_h g_{ij}), \quad (1.5)$$

melyeket a V^n elsőfajú Christoffel-féle szimbólumainak nevezünk, és másik n^3 számú skalár származtatható a következőképpen:

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{h\alpha} (\partial_j g_{i\alpha} + \partial_i g_{j\alpha} + \partial_\alpha g_{jh}), \quad (1.6)$$

melyeket a V^n másodfajú Christoffel-féle szimbólumainak nevezünk.

A V^n Riemann tér másodfajú Christoffel-féle szimbólumai kielégítik az összefüggési egyenletek (1.1) transzformációs formuláit, ezért minden Riemann tér egyben affinösszefüggő tér is.

9. Definíció: Adjunk meg a V^n Riemann térben egy görbét az $x = x(t)$ egyenlettel és a görbe mentén egy $v = v(t)$ vektormezőt. Egy vektormezőt az adott görbe mentén párhuzamosnak (párhuzamosan eltolhatónak) nevezünk, ha a görbe mentén vett kovariáns differenciálja eltűnik, azaz $\delta v^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j dx^k = 0$.

Ellenőrizhető, hogy a görbe menti párhuzamos eltolásnál nem változik a vektorok hossza és a vektorok által bezárt szög sem, illetve ezekből következően a belsőszorzat sem.

10. Definíció: Legyen T egy (r, s) típusú tenzora a V^n Riemann térnek. A T x^k szerinti kovariáns deriváltja a

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s, k} = \partial_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \Gamma^i_{k\alpha} T^{\alpha \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \dots + \Gamma^{i_r}_{k\alpha} T^{i_1 \dots \alpha}_{j_1 \dots j_s} - \\ - \Gamma^\beta_{kj_1} T^{i_1 \dots i_r}_{\beta \dots j_s} - \dots - \Gamma^\beta_{kj_s} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots \beta}$$

összefüggéssel értelmezett $(r, s+1)$ típusú tenzor.

11. Definíció: Legyen V^n egy Riemann tér. Az

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik}(x) + \Gamma^\alpha_{ik}(x) \Gamma^h_{j\alpha}(x) - \partial_k \Gamma^h_{ij}(x) - \Gamma^\alpha_{ij}(x) \Gamma^h_{k\alpha}(x) \quad (1.7)$$

(1,3) típusú tenzort a V^n Riemann tér *görbületi tenzorának* nevezzük.

Egy tetszőleges V^n Riemann tér R^h_{ijk} görbületi tenzora az utolsó két kovariáns indexében antiszimmetrikus, azaz:

$$R^h_{ijk} + R^h_{ikj} = 0.$$

A görbületi tenzor komponensei kielégítik a Ricci-azonosságot:

$$R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0.$$

A görbületi tenzor komponenseinek kovariáns deriváltjai kielégítik a Bianchi-azonosságot:

$$R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0,$$

ahol a „ $,$ ” szimbólum a Levi-Civita konnexióra vonatkozó kovariáns deriválást jelöli.

Fontosak lehetnek azok a Riemann terek, melyekben az R^h_{ijk} görbületi tenzor csak egy K konstans szorzóban tér el a $\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}$ tenzortól.

12. Definíció: Azokat a Riemann tereket, melyek R^h_{ijk} görbületi tenzora a metrikus tenzor segítségével az

$$R^h_{ijk} = K(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij})$$

képlet szerint fejezhető ki, ahol K egy konstans érték, *konstans görbületű tereknek* nevezzük. A K értéket a *tér görbületének* nevezzük.

Például az $(n+1)$ -dimenziós euklideszi térben az $(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = R^2$ egyenletű gömbfelületen egy konstans pozitív görbületű tér indukálódik, ahol a görbület: $K = 1/R^2$.

13. Definíció: Legyen R^h_{ijk} a V^n Riemann tér görbületi tenzora. Ekkor az $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ összefüggéssel értelmezett (0,2) típusú szimmetrikus tenzor a Riemann tér *Ricci-tenzora*, és az $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ skalármező a tér *skalár görbulete*, ahol az α indexekre összegzés történik.

Az általános relativitáselmélet alapfeladata, hogy megadja a gravitációs mezőnek az anyag eloszlásától és mozgásától való függést. Hosszas kutatások után a gravitációs mező egyenletét Einstein 1915-ben az alábbi alakban írta fel:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = -\lambda T_{ij},$$

ahol T_{ij} jelöli az energia-impulzus tenzort, λ egy állandó, R_{ij} a Ricci-tenzor, R a tér skalárgörbülete. Az egyenlet érdekessége, hogy az egyenlet bal oldalát a téridő geometriája határozza meg, míg a jobb oldal a λ állandó mellett a fizikai megfontolásokkal definiált T_{ij} tenzort tartalmazza.

Ha az energia-impulzus tenzor zérus, akkor a mezőegyenlet a következő alakú:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0.$$

Ennek a mezőegyenletnek az általánosítása az

$$R_{ij} = \rho g_{ij}$$

alakú egyenlet, ahol ρ egy állandó mennyiség. Ekkor a Ricci-tenzor csak egy arányosságban tér el a metrikus tenzortól. Ilyen mezőmodell lehet egy olyan tér, amely mindenütt homogén, az anyagsűrűség az egész térben állandó.

14. Definíció: Egy Riemann teret *Einstein térnek* nevezünk, ha van olyan ρ skalármező, hogy

$$R_{ij} = \rho g_{ij}. \quad (1.8)$$

15. Definíció: Egy Riemann teret *ekvidisztánsnak* nevezünk, ha van olyan $\varphi_i \neq 0$ kovariáns vektormező, $\varphi_i \neq 0$ és ρ skalármező, hogy

$$\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}. \quad (1.9)$$

Így a φ_i szükségképpen gradiens, meghatároz a V^n térben egy normál kongruenciát, amit ekvidisztánsnak nevezünk. A tér $\rho \neq 0$ esetén alaptípusú, $\rho = 0$ esetén szinguláris.

16. Definíció: Legyen V^n egy Riemann tér. Az $x(t)$ görbét *geodetikus vonalnak* nevezzük, ha kanonikus paraméterben (vagy kitüntetett paraméter esetén) az egyenlete

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (1.10)$$

alakú, ahol a Γ_{jk}^i a tér másodfajú Christoffel-féle szimbólumai.

2. GEODETIKUS LEKÉPEZÉS

2.1. Affinösszefüggő terek geodetikus leképezése

Legyenek A^n és $\bar{A}^n$ affinösszefüggő terek.

17. Definíció: Az A^n térnek az $\bar{A}^n$ térre történő geodetikus leképezésén értjük azt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a pontjaik között, amelynél az A^n tér minden geodetikus vonala az $\bar{A}^n$ tér geodetikus vonalaiba megy át.

Vonatkoztassuk az A^n teret az $x^1, x^2, \dots, x^n$ koordinátarendszerre, $\bar{A}^n$ teret az $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ koordinátarendszerre. Legyen $x^i = x^i(\bar{x})$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a két tér között. Ezzel $\bar{A}^n$ -ben olyan koordináta-transzformációt hajtunk végre, amely során a két tér egymásnak megfelelő pontjai azonos koordinátákkal rendelkeznek. A továbbiakban ezt a közös koordinátarendszert fogjuk használni.

18. Definíció: Tekintsük a két tér Γ_{ij}^h és $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ összefüggési koefficienseit. Ezeket szimmetrikusnak tekintve az affinösszefüggés deformációját

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + P_{ij}^h \quad (h, i, j = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

alakban adhatjuk meg, ahol $P_{ij}^h(x)$ szintén szimmetrikus, (1,2) típusú tenzor, amelyet *deformációs tenzornak* nevezünk.

Legyen L az A^n térben egy görbe, amely paraméteres formában

$$x^h = x^h(t) \quad (2.2)$$

alakú. Mint ahogy azt korábban definiáltuk, az L görbe akkor és csak akkor geodetikus, ha

$\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t), \quad (2.3)$$

ahol $\rho(t)$ egy skalárfüggvény.

Ha az L görbének az $\bar{A}^n$ térben az $\bar{L}$ görbe felel meg, s mivel a két teret ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkoztattuk, így az $\bar{L}$ paraméteres alakja is (2.2) alakú.

Ha f geodetikus leképezés, és L A^n -ben geodetikus, akkor $\bar{L}$ $\bar{A}^n$ -ben geodetikus lesz, azaz λ^h kielégíti

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \bar{\rho}(t)\lambda^h(t) \quad (2.4)$$

egyenletet.

A (2.4) és (2.3) különbségét véve, majd a (2.1)-et felhasználva és a $2\psi(t) = \bar{\rho}(t) - \rho(t)$ jelölést bevezetve

$$P_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = 2\psi(t)\lambda^h(t). \quad (2.5)$$

Az A^n tér minden geodetikus vonalának ki kell elégítenie ezeket a feltételeket. A (2.5)-ös azonosság x^i -ben és λ^i -ben, mivel az A^n térben minden pontból minden irányba pontosan egy geodetikus vonal indul ki, a (2.5)-ös feltételnek minden $x^1, x^2, \dots, x^n$ és $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ -re fenn kell állnia.

A (2.5)-ben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\psi(t)$ homogén lineáris λ^h -ban, azaz ha $\psi(t) = \psi_\alpha(t)\lambda^\alpha(t)$ alakú. Ezt felhasználva

$$P_{ij}^h = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h, \quad (2.6)$$

ahol ψ_i kovariáns vektor.

Ez a feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy f geodetikus leképezés legyen. Valóban, ha a (2.6) teljesül, akkor (2.5) azonosság $x^1, x^2, \dots, x^n$ és $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ -ben. Ezért a

(2.3)-as egyenlet minden megoldása megoldása lesz (2.4)-nek is. Következésképpen az A^n tér minden geodetikus vonala geodetikus lesz az $\bar{A}^n$ térben is, mert a megfelelő pontok azonos koordinátákkal rendelkeznek.

Ez alapján érvényes a következő tétel:

2. Tétel: Ahhoz, hogy az $f : A^n \rightarrow \bar{A}^n$ leképezés geodetikus legyen szükséges és elegendő, hogy az összefüggés $P_{ij}^h(x)$ deformációs tenzora (2.6) alakú legyen.

A deformációs tenzort egy ψ_i kovariáns vektor határozza meg, ezért a (2.6) figyelembevételével a (2.1) a következő alakban írható fel:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \quad (2.7)$$

Ez alapján láthatjuk, hogy minden f geodetikus leképezéshez tartozik egy ψ_i vektor. Az $f^{-1} : \bar{A}^n \rightarrow A^n$ inverz leképezéshez a $-\psi_i$ vektor tartozik.

Ha $\tilde{A}^n$ affinösszefüggő tér és $f : \bar{A}^n \rightarrow \tilde{A}^n$ geodetikus leképezés, akkor ehhez tartozik egy $\bar{\psi}_i$ vektor és teljesül:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) + \bar{\psi}_i(x)\delta_j^h + \bar{\psi}_j(x)\delta_i^h;$$

(2.7) felhasználásával

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + (\psi_i(x) + \bar{\psi}_i(x))\delta_j^h + (\psi_j(x) + \bar{\psi}_j(x))\delta_i^h,$$

azaz $\tilde{f} : A^n \rightarrow \tilde{A}^n$ leképezés is geodetikus, és a hozzá tartozó vektor $\tilde{\psi}_i = \psi_i + \bar{\psi}_i$.

Ezzel az adott tér összes geodetikus leképezéseinek halmaza csoportot alkot. Az affinösszefüggő terek halmazában a geodetikus leképezések egy osztályozást indukálnak, egy osztályban azok a terek vannak, amelyeknek van ugyanarra az A^n affinösszefüggő térre geodetikus leképezésük.

Ezt az osztályt az A^n tér *geodetikus osztályának* nevezzük.

19. Definíció: Azokat az $\bar{A}^n$ affinösszefüggő tereket, amelyek egy affin térre geodetikus leképezhetők síkprojektív tereknek nevezzük.

Mivel az affin terek esetén létezik olyan koordinátarendszer, amelyben az összefüggési egyenletek eltűnnek, ezért a (2.7) a következő alakban adható meg:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \quad (2.7')$$

Ezért a síkprojektív tereket jellemzi egy olyan speciális koordinátarendszer létezése, ahol az összefüggési egyenletek a (2.7') alakban adhatók meg, ahol ψ_i egy kontravariáns vektor. Az ilyen speciális koordinátarendszer létezése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az adott tér síkprojektív legyen, de meg kell jegyezni, hogy a (2.7') koordináta-transzformációra nézve nem invariáns.

2.2. Riemann terek geodetikus leképezése

Tekintsünk két Riemann teret, melyeket V^n és $\bar{V}^n$ jelöl. A Riemann tereket a $g_{ij}(x)$ és $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzorokkal adjuk meg. Mivel a Riemann terek egyben affinösszefüggő terek is, érvényesek az előző alfejezetben mondottak. A $\Gamma_{ij}^h(x)$ és a $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ összefüggési egyenletek most a másodfajú Christoffel-féle szimbólumok, amelyek a metrikus tenzor segítségével vannak meghatározva az (1.6) által.

Minden Riemann tér metrikus tenzora abszolút párhuzamos, ezért $\bar{V}^n$ -ben a $\bar{g}_{ij}(x)$ -re teljesül

$$\bar{g}_{ij,k}(x) = \partial_k \bar{g}_{ij}(x) - \bar{\Gamma}_{ki}^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha j}(x) + \bar{\Gamma}_{kj}^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha i}(x) = 0,$$

ahol a „ ∂_k ” $\bar{V}^n$ -beli kovariáns deriváltat jelöli. Ekkor a (2.7) felhasználásával:

$$\bar{g}_{ij,k}(x) = 2\psi_k(x) \bar{g}_{ij} - \psi_i(x) \bar{g}_{kj} + \psi_j(x) \bar{g}_{ki}. \quad (2.8)$$

Könnyen belátható, hogy szimmetrikus reguláris $\bar{g}_{ij}(x)$ tenzor esetén a (2.8)-ból következik (2.7), amelyben a $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ másodfajú Christoffel-féle szimbólum. Ezért kimondhatjuk a következő tételt:

3. Tétel: Az $f: V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezés akkor és csak akkor geodetikus, ha a másodfajú Christoffel-féle szimbólumaik között a (2.7) fennáll, és ami ezzel ekvivalens, ha a $\bar{V}^n$ tér $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzora V^n -ben kielégíti a (2.8)-at.

20. Definíció: A (2.7) és (2.8) a Riemann terek geodetikus leképezéseinek alapegyenletei és ezeket *Levi-Civita féle egyenleteknek* nevezzük.

A (2.7)-ben végezzünk kontrakciót a h, j indexekre:

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha(x) = \Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) + (n+1)\psi_i(x). \quad (2.9)$$

Minden Riemann térben

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) = \frac{1}{2} \partial_i \ln|g|,$$

ahol $g = \det(g_{ij})$. Ezeket felhasználva

$$2(n+1)\psi_i(x) = \partial_i \ln|\bar{g}/g| \quad (2.10)$$

a $\bar{g}/g$ invariáns és ebből következik, hogy a ψ_i gradiens vektor.

A Riemann terek esetén az affinösszefüggő terekhez hasonló módon értelmezhetjük a geodetikus osztály fogalmát.

A Riemann terek geodetikus leképezéseinek vizsgálata során két problémakörrel találkozhatunk:

1. Adott két Riemann tér és azt kell eldöntenünk, hogy ugyanabba a geodetikus osztályba tartoznak, azaz, hogy létezik-e közöttük geodetikus leképezés.
2. Egy adott Riemann térről el kell döntenünk, hogy létezik-e nem triviális geodetikus leképezése valamilyen másik Riemann térre, és ha igen, akkor meghatározni az összes olyan teret, amelyre leképezhető geodetikusan.

Invariáns mennyiségeket keresünk a geodetikus leképezések esetén. A következő megfontolásokat affinösszefüggő terekben tesszük, de természetesen ezek érvényesek a Riemann terekben is.

A (2.7) felhasználásával az $f: A^n \rightarrow \bar{A}^n$ geodetikus leképezésnél a Riemann tenzorokra a következő egyenlet teljesül:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_i^h (\psi_{kj} - \psi_{jk}) + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}, \quad (2.11)$$

ahol

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j.$$

A (2.11)-ben kontrakciót végrehajtva a h, k indexekre kapjuk, hogy

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \psi_{[ij]} + (n-1)\psi_{ij}, \quad (2.12)$$

ahol $\psi_{[ij]} = \psi_{ij} - \psi_{ji}$.

A Riemann terek geodetikus leképezései esetén (2.10) és (2.11) felhasználásával igaz a következő egyenlőség:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}. \quad (2.13)$$

A h, k indexekre kontrakciót végrehajtva a Ricci-tenzorokra kapjuk:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\psi_{ij}. \quad (2.14)$$

Az összefüggési koefфициensek között fennáll (2.7) és annak következménye (2.9). (Mindez a leképezés által meghatározott közös koordinátarendszerben érvényes.)

A (2.9) átrendezésével

$$\psi_j(x) = \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha(x) - \Gamma_{j\alpha}^\alpha(x)).$$

Ezt behelyettesítve a (2.7)-be

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) \delta_j^h + \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^\alpha) \delta_i^h. \quad (2.15)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n+1} (\delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha). \quad (2.16)$$

A (2.15)-öt átrendezve, majd a fenti jelölést alkalmazva adódik, hogy

$$\bar{T}_{ij}^h(x) = T_{ij}^h(x), \quad (2.17)$$

ahol a $\bar{T}_{ij}^h(x)$ a (2.16)-nak megfelelő, csak az $\bar{A}^n$ tér összefüggési koefфициenseit felhasználó összefüggés.

Belátható, ha az $f : A^n \rightarrow \bar{A}^n$ estén a (2.17) teljesül, akkor f geodetikus leképezés.

21. Definíció: A $T_{ij}^h(x)$ mennyiséget *Thomas-féle projektív paraméternek* nevezzük.

4. Tétel: Az $f : A^n \rightarrow \bar{A}^n$ leképezésnél, ahol a tereket ugyanarra a koordináta-rendszerre vonatkoztattuk, a Thomas-féle projektív paraméter invarianciája szükséges és elegendő ahhoz, hogy az f geodetikus leképezés legyen.

A Thomas-féle projektív paramétert minden koordináta-rendszerben az affin összefüggés határozza meg, így ha koordináta-transzformációt hajtunk végre, akkor a projektív paraméterek is transzformálódnak. Tekintsük az $x^1, \dots, x^n$ koordináta-rendszerben a Γ_{ij}^h , és az $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ koordináta-rendszerben a $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ koefficienseket. A koefficiensek közötti kapcsolatot az (1.1) írja le. Ennek a felhasználásával a Thomas-féle paraméterek transzformációja

$$\bar{T}_{ij}^\alpha \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^\alpha} = T_{\alpha\beta}^h \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} \right) + \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$$

szabály alapján történik, ahol $\Delta = \det(\partial x^i / \partial \bar{x}^j)$.

A (2.12) egyenlőséget az i, j indexekre alternálva kapjuk, hogy

$$\bar{R}_{[ij]} - R_{[ij]} = (n+1)\psi_{[ij]}. \quad (2.18)$$

A (2.12)-t $(n+1)$ -gyel szorozva és átrendezve, majd a (2.18)-at behelyettesítve adódik a következő egyenlőség:

$$(n+1)(n-1)\psi_{ij} = (n\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji}) - (nR_{ij} + R_{ji}).$$

Ebből ψ_{ij} -t kifejezzük és a (2.11)-be behelyettesítjük. Vezessük be a

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{n+1} \delta_i^h R_{[kj]} - \frac{1}{n^2-1} \left[(nR_{ij} + R_{ji}) \delta_k^h - (nR_{ik} + R_{ki}) \delta_j^h \right] \quad (2.19)$$

jelölést. Ekkor

$$\bar{W}_{ijk}^h(x) = W_{ijk}^h(x) \quad (2.20)$$

teljesül, ahol a $\bar{W}_{ijk}^h(x)$ a (2.19)-nek megfelelő, de az $\bar{A}^n$ tér megfelelő mennyiségeit felhasználó összefüggés.

22. Definíció: A $W_{ijk}^h(x)$ (1,3) típusú tenzor, melyet az A^n tér Weyl-tenzorának vagy projektív görbületi tenzorának nevezünk.

5. Tétel: A Weyl-tenzor invariáns az affinösszefüggő terek geodetikus leképezéseire nézve.

Riemann terek esetén a Weyl-tenzor a következő alakú:

$$W_{ijk}^h(x) = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (R_{ij} \delta_k^h - R_{ik} \delta_j^h) \quad (2.21)$$

23. Definíció: Egy A^n teret *síkprojektív*nek nevezzük, ha létezik geodetikus leképezése az $\bar{A}^n$ affin térre.

Az affin terek esetén a Riemann tenzor azonosan nulla, ezért $\bar{W}_{ijk}^h(x) = 0$ és a (2.20)-ból a

$$W_{ijk}^h(x) = 0 \quad (2.22)$$

feltételt kapjuk.

6. Tétel: Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az A^n ($n > 2$) affinösszefüggő tér *síkprojektív* legyen az, hogy a (2.22)-es feltétel teljesüljön.

A tételt Riemann terekre is kimondhatjuk.

7. Tétel: A V^n ($n > 2$) Riemann térnek akkor és csak akkor létezik geodetikus leképezése egy euklideszi térre, ha a (2.22)-es feltétel teljesül.

A (2.21)-ben a (2.22) felhasználása után a h indexet lehozzuk és átrendezzük:

$$R_{hijk} = \frac{1}{n-1} (R_{ij} g_{hk} - R_{ik} g_{hj}). \quad (2.23)$$

Kontraháljuk g^{ij} -vel

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk} , \quad (2.24)$$

azaz V^n -nek konstans görbületűnek kell lennie.

A konstans görbületű Riemann terek és csak azok a síkprojektív terek.

Beltrami tétele: Ha létezik $f : V^n \rightarrow \bar{V}^n$ ($n > 2$) geodetikus leképezés, ahol V^n konstans görbületű, akkor $\bar{V}^n$ is konstans görbületű. Bármely konstans görbületű V^n ($n > 2$) térenk létezik bármely konstans görbületű $\bar{V}^n$ térre geodetikus leképezése.

Bizonyítás: Az $f : V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezést vizsgáljuk. Mivel $\bar{V}^n$ konstans görbületű teljesül, hogy

$$\bar{R}_{ikl}^h = \bar{R}(\bar{g}_{ik} \delta_l^h - \bar{g}_{il} \delta_k^h), \quad (2.25)$$

valamint a leképezés geodetikus volta miatt a (2.13) is. A (2.13) és (2.25) összevetéséből kapjuk, hogy

$$(\bar{R}\bar{g}_{ik} - \psi_{ik})\delta_l^h - (\bar{R}\bar{g}_{il} - \psi_{il})\delta_k^h = \bar{R}_{ikl}^h. \quad (2.26)$$

A (2.26)-ot g_{hj} -vel kontrahálva adódik, hogy

$$R_{ijkl} = \bar{R}A_{ik}g_{lj} - \bar{R}A_{il}g_{kj}, \quad (2.27)$$

ahol $A_{ik} = \bar{g}_{ik} - \psi_{ik}$, továbbá felhasználjuk, hogy

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0. \quad (2.28)$$

A (2.28)-ba a (2.27)-et behelyettesítve a következő adódik:

$$\bar{R}(A_{ik}g_{lj} - A_{il}g_{kj} + A_{jk}g_{li} - A_{jl}g_{ki}) = 0. \quad (2.29)$$

Mivel $\bar{R} \neq 0$, ezért csak a zárójelben lévő kifejezés lehet nulla. A zárójelben lévő kifejezést g^{jl} -el kontraháljuk:

$$nA_{ik} - A_{jl}g^{jl}g_{ki} = 0. \quad (2.30)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\mu(x) = A_{jl}g^{jl}.$$

Ekkor

$$A_{ik} = \frac{\mu}{n} g_{ik}. \quad (2.31)$$

A (2.31)-et helyettesítsük vissza a (2.27)-be

$$R_{ijkl} = \frac{\bar{R}\mu}{n} (g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{kj}). \quad (2.32)$$

Felhasználjuk a következő tételt:

Schur tétele: Ha V^n Riemann tenzora előállítható

$$R_{ijkl} = K(x)(g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{kj})$$

alakban, ahol $K(x)$ x -től függ és g_{ik} a V^n metrikus tenzora, akkor a $K(x)$ függvény konstans, azaz V^n konstans görbületű.

Ekkor a Schur tétel alapján a $K(x) = \frac{\bar{R}\mu}{n}$ függvény konstans, azaz $\mu(x)$ függvény konstans. Ekkor V^n konstans görbületű. Ezzel a tétel állítását beláttuk.

3. SPECIÁLIS RIEMANN TEREK

3.1. Gyengén szimmetrikus Riemann terek

24. Definíció: A V^n Riemann teret *gyengén szimmetrikusnak* nevezzük, ha a görbületi tenzora kielégíti a következő feltételt:

$$R_{hijk,l} = \alpha_l R_{hijk} + \beta_h R_{lijk} + \gamma_i R_{hljk} + \sigma_j R_{hilk} + \mu_k R_{hijl} , \quad (3.1)$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu$ egyszerre el nem tűnő kovariáns vektormezők, a „ , , ” kovariáns deriváltat jelöl V^n -ben.

A továbbiakban a gyengén szimmetrikus Riemann teret $(WS)_n$ -nel jelöljük az angol elnevezés alapján (weakly symmetric Riemannian space).

3.2. Pszeudoszimmetrikus Riemann terek

25. Definíció: A V^n Riemann teret *pszeudoszimmetrikusnak* nevezzük, ha a görbületi tenzora kielégíti a következő feltételt:

$$R_{hijk,l} = 2\alpha_l R_{hijk} + \alpha_h R_{lijk} + \alpha_i R_{hljk} + \alpha_j R_{hilk} + \alpha_k R_{hijl} , \quad (3.2)$$

ahol α el nem tűnő kovariáns vektormező, a „ , , ” kovariáns deriváltat jelöl V^n -ben.

A továbbiakban a pszeudoszimmetrikus Riemann teret $(PS)_n$ -nel jelöljük az angol elnevezés alapján (pseudo symmetric Riemannian space).

Az α -t a $(PS)_n$ asszociált vektormezőjének nevezzük.

A pszeudoszimmetrikus név választása azzal indokolható, hogy ha a (3.2)-ben α_i -t zérusnak választanánk, akkor $R_{hijk,l} = 0$, amely a (lokális) szimmetria feltétele.

A (3.2) feltételből a $(PS)_n$ Ricci-tenzorára teljesül

$$R_{ij,l} = 2\alpha_l R_{ij} + \alpha_i R_{lj} + \alpha_j R_{il} + \alpha^k R_{lijk} + \alpha^h R_{hijl} \quad (3.3)$$

ahol $\alpha^k = g^{hk} \alpha_h$.

A (3.3)-at g_{ij} -vel szorozva a skalár görbületre a következő egyenlőséget kapjuk:

$$R_{,l} = 2\alpha_l R + 4\alpha^h R_{hl} . \quad (3.4)$$

3.3. A pszeudoszimmetrikus Riemann terek felbonthatósága

26. Definíció: A V^n Riemann teret *felbonthatónak* nevezzük, ha előállítható $V^r \times V^{n-r}$ alakban valamely $r < n$ esetén, azaz találhatók olyan koordinátarendszerek V^r -ben és V^{n-r} -ben, hogy a metrikus tenzorokkal a következő forma képezhető V^n -ben:

$$ds^2 = \sum_{a,b=1}^r g_{ab} dx^a dx^b + \sum_{\alpha,\beta=r+1}^n g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.5)$$

Tegyük fel, hogy $(PS)_n$ ($n > 2$) felbontható V^r és V^{n-r} terekre. A (3.2)-ből azt kapjuk, hogy

$$R_{abcd,\alpha} = 2\lambda_\alpha R_{abcd} + \lambda_a R_{\alpha bcd} + \lambda_b R_{a\alpha cd} + \lambda_c R_{ab\alpha d} + \lambda_d R_{abc\alpha},$$

ahol λ jelöli az asszociált vektort.

Mivel a görbületi tenzor és deriváltja is szorzattenzor, ezért az előbbi egyenlőségből a következőt kapjuk:

$$\lambda_\alpha R_{abcd} = 0. \quad (3.6)$$

Hasonlóan

$$\lambda_a R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \quad (3.7)$$

Mivel λ nem zérusvektor, ezért minden komponense nem tűnhet el. Tegyük fel, hogy $\lambda_\alpha \neq 0$ valamely α -ra. A (3.6)-ból következik, hogy $R_{abcd} = 0$, amely azt jelenti, hogy a V^r tér euklideszi. Ha $\lambda_a \neq 0$ valamely a -ra, akkor a (3.7)-ből a $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ feltételt kapjuk, ekkor V^{n-r} euklideszi tér. Tegyük fel, hogy $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Ekkor $R_{abcd} \neq 0$, mert feltettük, hogy $(PS)_n$ nem euklideszi. Ekkor a (3.6)-ból azt kapjuk, hogy $\lambda_\alpha = 0$. Mivel λ nem zérusvektor, ezért $\lambda_a \neq 0$ valamely a -ra. Ekkor a (3.2)-ből:

$$R_{abcd,e} = 2\lambda_e R_{abcd} + \lambda_a R_{ebcd} + \lambda_b R_{aecd} + \lambda_c R_{abed} + \lambda_d R_{abce}, \quad (3.8)$$

amely azt jelenti, hogy V^r pszeudoszimmetrikus, azaz $(PS)_r$.

Ezzel beláttuk a következő tételt:

8. Tétel: Ha a $(PS)_n$ felbontható és $V^r \times V^{n-r}$ ($r \geq 2; n-r \geq 2$) alakban előállítható, akkor az egyik komponens tér sík (flat), a másik pszeudoszimmetrikus.

3.4. Ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező $(PS)_n$ ($n > 3$)

27. Definíció: A V^n Riemann tér *ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkezik*, ha

$$R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0. \quad (3.9)$$

A (3.9)-et g^{ij} -vel kontrahálva azt kapjuk, hogy $R_{,k} = 0$, amely azt jelenti, hogy a skalár görbülete konstans. Ekkor a (3.4)-ből az adódik, hogy

$$\alpha_k R + 2\alpha^h R_{hk} = 0, \quad (3.10)$$

ahol az α az asszociált vektor.

Tegyük fel, hogy $(PS)_n$ ($n > 3$) ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkezik. A (3.3)-at felhasználva kapjuk:

$$R_{ij,l} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 4(\alpha_i R_{kj} + \alpha_j R_{ki} + \alpha_k R_{ij}). \quad (3.11)$$

A (3.9) miatt ez egyenértékű a következő kifejezéssel:

$$\alpha_i R_{kj} + \alpha_j R_{ki} + \alpha_k R_{ij} = 0.$$

α_i -vel szorozva és felhasználva a (3.10)-et

$$\alpha^i \alpha_i R_{kj} = R \alpha_j \alpha_k \quad (\alpha^i = g^{ij} \alpha_j). \quad (3.12)$$

Ha a tér metrikája pozitív definit, akkor $\alpha^i \alpha_i \neq 0$. Legyen $\alpha^i \alpha_i = \theta$. Ekkor a (3.12) a következő alakú:

$$R_{kj} = \frac{R}{\theta} \alpha_j \alpha_k. \quad (3.13)$$

A (3.13)-at α^k -val szorozva és a (3.10)-et felhasználva

$$\frac{3}{2} R \alpha_j = 0. \quad (3.14)$$

Mivel $\alpha_j \neq 0$, ezért $R = 0$. Ekkor a (3.13)-ból azt kapjuk, hogy $R_{kj} = 0$, azaz a tér Einstein tér, amelynek a skalár görbülete zérus. A 3 dimenziós Einstein tér konstans görbületű. $(PS)_n$ ($n > 2$) nem lehet konstans görbületű, ezért 3 dimenziós pszeudoszimmetrikus Einstein tér nem létezik.

Ezzel beláttuk a következő tételt:

9. Tétel: Ha $(PS)_n$ ($n > 3$) pozitív definít metrikával és ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkezik, akkor olyan Einstein tér, amely skalár görbülete zérus.

4. CIKLIKUS RICCI (SZIMMETRIKUS) TENZORRAL RENDELKEZŐ RIEMANN TEREK GEODETIKUS LEKÉPEZÉSE

Az alábbiakban megvizsgáljuk a ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann terek geodetikus leképezését.

Legyen $\bar{V}^n$ ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér, V^n pedig tetszőleges Riemann tér, továbbá legyen $f: \bar{V}^n \rightarrow V^n$ a $\bar{V}^n$ térnek a V^n térre történő geodetikus leképezése.

Vizsgálatainkhoz felhasználjuk a következő, már korábban leírt összefüggéseket:

Az affinösszefüggés deformációja:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h \quad (4.1)$$

A Riemann terek geodetikus leképezései esetén igaz a következő egyenlőség:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1) \psi_{ij} \quad (4.2)$$

A feltételünk szerint $\bar{V}^n$ ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér, tehát:

$$\bar{R}_{ij,k} + \bar{R}_{jk,i} + \bar{R}_{ki,j} = 0 \quad (4.3)$$

A kovariáns deriválás szabálya a következőképpen írható le:

$$\bar{R}_{ij,k} = \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x^k} - \bar{\Gamma}_{ik}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha j} - \bar{\Gamma}_{jk}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha i} \quad (4.4)$$

A (4.4)-es szabályt alkalmazva a (4.3) felírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x^k} - \bar{\Gamma}_{ik}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha j} - \bar{\Gamma}_{jk}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha i} + \\ & + \frac{\partial \bar{R}_{jk}}{\partial x^i} - \bar{\Gamma}_{ji}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha k} - \bar{\Gamma}_{ki}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha j} + \\ & + \frac{\partial \bar{R}_{ki}}{\partial x^j} - \bar{\Gamma}_{kj}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha i} - \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha(x) \bar{R}_{\alpha k} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Felhasználva a (4.1)-es és (4.2)-es összefüggéseket, a feltételünket így írhatjuk át:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (R_{ij} + (n-1)\psi_{ij})}{\partial x^k} - (\Gamma_{ik}^\alpha(x) + \psi_i(x)\delta_k^\alpha + \psi_k(x)\delta_i^\alpha)(R_{\alpha j} + (n-1)\psi_{\alpha j}) - \\ & - (\Gamma_{jk}^\alpha(x) + \psi_j(x)\delta_k^\alpha + \psi_k(x)\delta_j^\alpha)(R_{\alpha i} + (n-1)\psi_{\alpha i}) + \\ & + \frac{\partial (R_{jk} + (n-1)\psi_{jk})}{\partial x^i} - (\Gamma_{ji}^\alpha(x) + \psi_j(x)\delta_i^\alpha + \psi_i(x)\delta_j^\alpha)(R_{\alpha k} + (n-1)\psi_{\alpha k}) - \\ & - (\Gamma_{ki}^\alpha(x) + \psi_k(x)\delta_i^\alpha + \psi_i(x)\delta_k^\alpha)(R_{\alpha j} + (n-1)\psi_{\alpha j}) + \\ & + \frac{\partial (R_{ki} + (n-1)\psi_{ki})}{\partial x^j} - (\Gamma_{kj}^\alpha(x) + \psi_k(x)\delta_j^\alpha + \psi_j(x)\delta_k^\alpha)(R_{\alpha i} + (n-1)\psi_{\alpha i}) - \\ & - (\Gamma_{ij}^\alpha(x) + \psi_i(x)\delta_j^\alpha + \psi_j(x)\delta_i^\alpha)(R_{\alpha k} + (n-1)\psi_{\alpha k}) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Felbontsuk a zárójeleket és rendezzük az egyenletünket:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & \frac{\partial R_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha(x) R_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha(x) R_{\alpha i} + \\ & + \frac{\partial R_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^\alpha(x) R_{\alpha k} - \Gamma_{ki}^\alpha(x) R_{\alpha j} + \\ & + \frac{\partial R_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma_{kj}^\alpha(x) R_{\alpha i} - \Gamma_{ij}^\alpha(x) R_{\alpha k} + \end{aligned} \right\} R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} \\
& + (n-1) \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x^k} - (n-1) \Gamma_{ik}^\alpha(x) \psi_{\alpha j} - \psi_i(x) R_{kj} - (n-1) \psi_i(x) \psi_{kj} - \psi_k(x) R_{ij} - (n-1) \psi_k(x) \psi_{ij} - \\
& - (n-1) \Gamma_{jk}^\alpha(x) \psi_{\alpha i} - \psi_j(x) R_{ki} - (n-1) \psi_j(x) \psi_{ki} - \psi_k(x) R_{ji} - (n-1) \psi_k(x) \psi_{ji} + \\
& + (n-1) \frac{\partial \psi_{jk}}{\partial x^i} - (n-1) \Gamma_{ji}^\alpha(x) \psi_{\alpha k} - \psi_j(x) R_{ik} - (n-1) \psi_j(x) \psi_{ik} - \psi_i(x) R_{jk} - (n-1) \psi_i(x) \psi_{jk} - \\
& - (n-1) \Gamma_{ki}^\alpha(x) \psi_{\alpha j} - \psi_k(x) R_{ij} - (n-1) \psi_k(x) \psi_{ij} - \psi_i(x) R_{kj} - (n-1) \psi_i(x) \psi_{kj} + \\
& + (n-1) \frac{\partial \psi_{ki}}{\partial x^j} - (n-1) \Gamma_{kj}^\alpha(x) \psi_{\alpha i} - \psi_k(x) R_{ji} - (n-1) \psi_k(x) \psi_{ji} - \psi_j(x) R_{ki} - (n-1) \psi_j(x) \psi_{ki} - \\
& - (n-1) \Gamma_{ij}^\alpha(x) \psi_{\alpha k} - \psi_i(x) R_{jk} - (n-1) \psi_i(x) \psi_{jk} - \psi_j(x) R_{ik} - (n-1) \psi_j(x) \psi_{ik} = 0
\end{aligned}$$

Csoportosítjuk a megfelelő tagokat:

$$\begin{aligned}
& (n-1) \left(\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha(x) \psi_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha(x) \psi_{\alpha i} \right) + \\
& + (n-1) \left(\frac{\partial \psi_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^\alpha(x) \psi_{\alpha k} - \Gamma_{ki}^\alpha(x) \psi_{\alpha j} \right) + \\
& + (n-1) \left(\frac{\partial \psi_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma_{kj}^\alpha(x) \psi_{\alpha i} - \Gamma_{ij}^\alpha(x) \psi_{\alpha k} \right) - \\
& - 4\psi_i(x) R_{jk} - 4\psi_j(x) R_{ki} - 4\psi_k(x) R_{ij} \\
& - (n-1) (4\psi_i(x) \psi_{jk} + 4\psi_j(x) \psi_{ki} + 4\psi_k(x) \psi_{ij}) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ezt tovább egyszerűsítve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
& (n-1) (\psi_{ij,k} + \psi_{jk,i} + \psi_{ki,j}) - \\
& - 4(\psi_i(x) R_{jk} + \psi_j(x) R_{ki} + \psi_k(x) R_{ij}) - \\
& - 4(n-1) (\psi_i(x) \psi_{jk} + \psi_j(x) \psi_{ki} + \psi_k(x) \psi_{ij}) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

10. Tétel: Legyen megadva két, $\bar{V}^n$ és V^n Riemann tér, továbbá $\bar{V}^n$ legyen ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy V^n szintén ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér legyen a következő egyenlőség teljesülése:

$$\begin{aligned}
& (n-1)(\psi_{ij,k} + \psi_{jk,i} + \psi_{ki,j}) - \\
& - 4(\psi_i(x)R_{jk} + \psi_j(x)R_{ki} + \psi_k(x)R_{ij}) - \\
& - 4(n-1)(\psi_i(x)\psi_{jk} + \psi_j(x)\psi_{ki} + \psi_k(x)\psi_{ij}) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Speciális esetek:

1. Ha $\psi_{ij} = 0$, azaz $\bar{R}_{ij} = R_{ij}$, $\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j$, így a mi tételünk a következő

$$\psi_i(x)R_{jk} + \psi_j(x)R_{ki} + \psi_k(x)R_{ij} = 0 \tag{4.9}$$

feltétel mellett teljesül.

2. Ha továbbá a ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann tér Einstein tér is, akkor $R_{ij} = \rho g_{ij}$, így

$$\rho\psi_i(x)g_{jk} + \rho\psi_j(x)g_{ki} + \rho\psi_k(x)g_{ij} = 0$$

vagyis

$$\psi_i(x)g_{jk} + \psi_j(x)g_{ki} + \psi_k(x)g_{ij} = 0. \tag{4.10}$$

Kontraháljuk a (4.10)-es egyenletet g_{ik} -val, akkor kapjuk, hogy

$$n\psi_i(x) + \psi_i(x) + \psi_i(x) = 0,$$

összevonva az egyenlet bal oldalán álló tagokat:

$$(n+2)\psi_i(x) = 0. \tag{4.11}$$

Ez azt jelenti, hogy:

11. Tétel: A $\bar{V}^n$ ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann - Einstein tér V^n ciklikus Ricci (szimmetrikus) tenzorral rendelkező Riemann térre történő leképezése csak triviális (affin) geodetikus leképezés lehet.

A dolgozatomban szereplő 10. Tétel és 11. Tétel saját eredmény.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. СИНЮКОВ Н. С.: *Геодезическое отображение римановых пространств*, Москва, Наука, 1979
2. A. L. BESSE: *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987
3. HRASKÓ PÉTER: *Relativitáselmélet*, Typotex Kiadó, Budapest, 2002
4. I. P. JEGOROV: *Geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
5. M. C. CHAKI – U. C. DE: *On pseudo symmetric spaces*, Acta Math. Hung. 54, 1989. 185.-190. o.
6. PAPP ILDIKÓ: *Metrikus terek pályatartó leképezései*, doktori (PhD) értekezés, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005
7. RAPCSÁK ANDRÁS – TAMÁSSY LAJOS: *Differenciálgeometria I.-III.*, Tankönyvkiadó, 1990
8. T. Q. BINH: *On weakly symmetric Riemannian spaces*, Publ. Math. Debrecen 42/1-2 (1993) 103.-107. o.