

Budapesti Corvinus Egyetem
Élelmiszertudományi Kar
Fizika és Automatika Tanszék

Gumicukor reológiai modelljei

TDK dolgozat

Krisán Ágnes Olga
III. évf. BSc hallgató

Témavezető:
Dr. Vozáry Eszter
egyetemi docens



TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-
0005
TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0023

Budapest
2012.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	4
2. Irodalmi áttekintés	5
2.1. A reológia	5
2.1.1. Alapmodellek	5
2.1.1.1. Elasztikus test vagy Hooke-test (rugó elem)	6
2.1.1.2. Viszkózus test vagy Newton-test (dugattyú)	7
2.1.1.3. Plasztikus test vagy Saint-Venant-test	7
2.1.2. Két vagy többelemű, összetett modellek	8
2.1.2.1. Kelvin modell	8
2.1.2.2. Maxwell modell	9
2.1.2.3. Bingham modell	12
2.2. Gumicukor	12
2.2.1. Zselatin	13
2.2.2. Cukor (szacharóz vagy répacukor), glükóz szirup, invertcukor, dextróz	13
2.2.3. Fényező anyagok - karnauba viasz, méhviasz	14
2.2.4. Antioxidáns	14
2.2.5. Természetes színező-, és ízesítő anyagok	15
2.2.6. Gumicukrok reológiája	15
3. Munka célja	17
4. Anyag és módszer	18
4.1. Anyag	18
4.2. SMS típusú asztali penetrométer (Stable Micro System Texture Analyser)	18
4.3. Alapfüggvényes közelítés	19

4.4.	Általános többelemű Maxwell modell - sorozatos maradék-módszer	19
4.5.	Nyújtott exponenciális függvény	21
5.	Kísérleti eredmények és az eredmények értékelése	23
5.1.	A mért relaxációs görbék	23
5.2.	Közelítés alapfüggvényekkel és azok kombinációjával	26
5.3.	Közelítés sorozatos maradék módszerrel	32
6.	Összefoglalás	38
	Jelölések	39
	Táblázatok és ábrák jegyzéke	40
	Felhasznált irodalom	42

1. Bevezetés

A gumi-cukrok iránti érdeklődés az elmúlt években egyre csak növekedett. Ennek a növekedésnek köszönhetően a termékpaletta kibővült. Az újabb és újabb termékek gyártásához, illetve a már meglévő termékek fejlesztéséhez hozzátartozik a gumi-cukrok tulajdonságainak megismerése, a termék feltérképezése. Csak úgy alakíthatjuk a terméket számunkra kedvező tulajdonságúvá, ha ismerjük a terméket.

A növekvő kapacitás miatt, fontossá válik a tárolás kérdése. Hogyan, milyen körülmények között tároljuk a gumi-cukrot? Esetlegesen milyen változások mennek végbe a tárolás során?

A termék fogyasztóhoz való eljutásának ideje megnőtt, így fontos szempont lett a minőség megőrzés is. A gumi-cukrok fizikai tulajdonságai és minősége közötti kapcsolat megismerése a cél. A mechanikai, optikai, reológiai tulajdonságok változnak, ahogy a cukor minősége változik.

A különböző mérések segítségével jobban megismerhetjük a gumi-cukrokat, megtalálhatjuk a megfelelő modellt a leírásához, illetve megtalálhatjuk azokat a reológiai paramétereket, amelyekkel jellemezhető a gumi-cukrok minősége.

2. Irodalmi áttekintés

2.1. A reológia

Ha külső erők hatnak egy anyagi testre, akkor az erő hatására két lehetőség fordulhat elő:

- a test elmozdul az erők eredőjének irányába,
- a testet alkotó anyagrészek egymáshoz képest elmozdulnak.

Az előbbivel a kinetika foglalkozik, míg az utóbbival a reológia.

A reológia kifejezést Bingham, a Lafayette Egyetem professzora használta először. Az idő során bővült a reológia tárgyköre, de az eredeti definíció alapjaiban nem változott (Tóth, 2000).

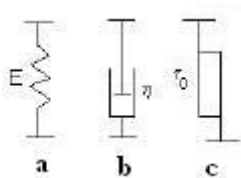
A reológia a deformációkkal, a deformációk és az őket előidéző erők közötti törvényszerűségekkal, a deformációk és az erők időfüggvényeivel, továbbá e törvényszerűségek és függvények külső hőmérséklettől és nyomástól való függésével foglalkozik. (Tóth, 2000)

2.1.1. Alapmodellek

A vizsgálatok azt mutatták, hogy három alapvető tulajdonság alapján lehet az anyagok reológiai viselkedését leírni, ezek az elaszticitás (vagyis rugalmasság), a plaszticitás és a viszkozitás.

Három alapvető modell (1.ábra) segítségével igyekszünk leírni az anyagok tulajdonságait a reológián belül (Sitkei, 1981; Tóth, 2000; Figura L. O. et al, 2010):

- elasztikus vagy Hooke-test
- viszkózus vagy Newton-test
- plasztikus vagy Saint-Venant-test



1.ábra Reológiai alapmodellek (a: Hooke-test, b: Newton-test, c: Saint-Venant-test)

A reológiában használatos fizikai mennyiségek jelei és összefüggéseik:

- F – erő
- A – keresztmetszet
- σ – mechanikai feszültség
- l – test eredeti mérete
- dl – deformáció
- ε – relatív deformáció
- t – idő
- E – rugalmassági modulus
- η – dinamikai viszkozitás

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

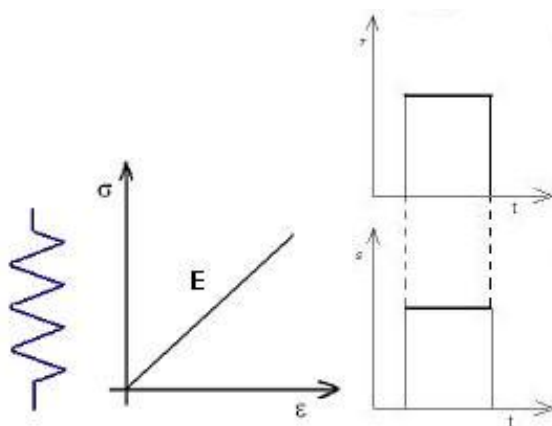
$$\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

2.1.1.1. Elasztikus test vagy Hooke-test (rugó elem)

Azokat a testeket hívjuk elasztikus testeknek, amelyek relatív alakváltozása arányos a testre ható mechanikai feszültség értékével. Feltételezzük, hogy csak egy térbeli irányban hat a feszültség és ez csak ugyanabban az irányban okoz alakváltozást. Az alakváltozás a feszültséggel egy időben jelenik meg. A Hooke-testre jellemző a rugalmassági modulus, jele: E . A 2.ábrán látható függvény meredeksége a rugalmassági modulus.

Hooke-törvény:

$$F_n = E \frac{\Delta l}{l} A, \text{ illetve } \sigma = E\varepsilon \quad (1)$$

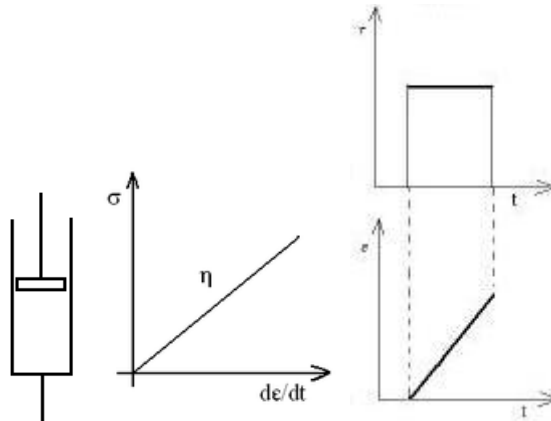


2.ábra A rugó elem szimbóluma és feszültség-relatív deformáció függvénye

2.1.1.2. Viszkózus test vagy Newton-test (dugattyú)

Azt a testet hívjuk viszkózus testnek, amelyen állandó τ nyírófeszültség állandó $d\varepsilon/dt$ sebességű folyási jelenséget hoz létre. Az alakváltozás folyamatosan növekszik a feszültség megjelenése után. A 3.ábrán található függvény meredeksége a dinamikai viszkozitási együttható vagyis η .

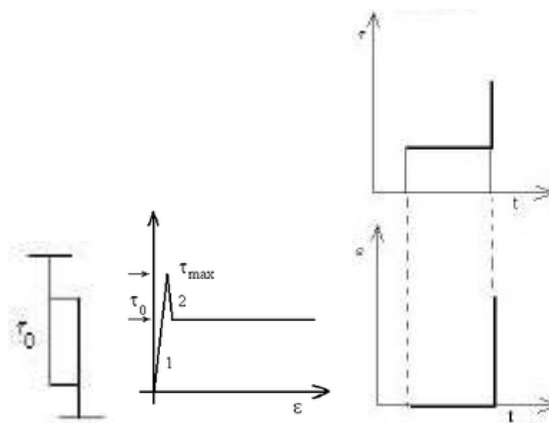
Newton-törvény:
$$\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2)$$



3.ábra A dugattyú szimbóluma és feszültség-sebesség függvénye

2.1.1.3. Plasztikus test vagy Saint-Venant-test

Ennél a testnél egy τ_0 határfeszültségnél nagyobb feszültség hatására folyamatos deformáció jön létre (4.ábra).



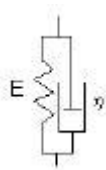
4.ábra A Saint-Venant-test szimbóluma és nyírófeszültség-relatív deformáció függvénye

2.1.2. Két vagy többelemű, összetett modellek

Ahhoz, hogy a valóságos anyagok viszkoelasztikus és plasztikus tulajdonságait leírassuk az alapmodellekből kettő-, illetve többelemű modelleket építünk fel. Ilyen modellek a Maxwell modell, a Kelvin modell és a Bingham modell (Sitkei, 1981; Tóth, 2000).

2.1.2.1. Kelvin modell

Egy rugó elem és egy viszkózus elem párhuzamos kapcsolásával jön létre (5.ábra).



5.ábra Kelvin modell

Ennél a modellenél a teljes feszültség az elasztikus és a csillapító elem között oszlik meg, a deformáció az egyes elemeknél azonos:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_v, \text{ illetve } \varepsilon = \varepsilon_r = \varepsilon_v, \quad (3) \text{ és } (4)$$

ahol az r index a rugó elemre, a v index pedig a viszkózus elemre utal.

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon + T_r \frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ ahol } T_r = \frac{\eta}{E} \text{ a késleltetési vagyis retardációs idő.} \quad (5) \text{ és } (6)$$

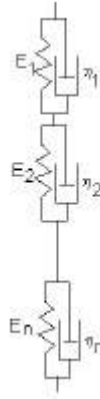
Az előző egyenletet átalakítva megkapjuk a Kelvin modell differenciál egyenletét:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (7)$$

A deformáció változást a feszültség függvényében leíró differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\varepsilon = e^{-\frac{E}{\eta}t} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma e^{\frac{E}{\eta}t} dt \right) \quad (8)$$

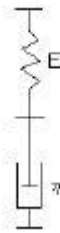
Ahhoz, hogy a valódi anyagok viselkedését leírassuk, több elemet kell sorba kötni, így kapjuk az általánosított Kelvin modellt (6.ábra).



6.ábra Általánosított Kelvin modell

2.1.2.2. Maxwell modell

Egy elasztikus és egy viszkózus test soros kapcsolásával jön létre (7.ábra). Az elasztikus testet E rugalmassági modulussal, míg a viszkózus testet η dinamikai viszkozitással jellemezhetjük.



7.ábra Maxwell modell

A két elemen azonos feszültség van, így felírható a következő egyenlet: $\sigma = \sigma_r = \sigma_v$, továbbá a relatív deformációk összeadódnak: $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_v$, ahol az r index a rugó elemre, a v index pedig a viszkózus elemre utal.

Az egyes relatív deformációk idő szerinti differenciálhányadosinak összege megadja a Maxwell modell relatív deformációját.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_r}{dt} + \frac{d\varepsilon_v}{dt} \quad (9)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \text{ és } \frac{d\varepsilon_v}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}, \text{ így} \quad (10) \text{ és } (11)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (12)$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\sigma = e^{\frac{E}{\eta}t} \left(\sigma_0 + E \int_0^t \varepsilon e^{-\frac{E}{\eta}t} dt \right). \quad (13)$$

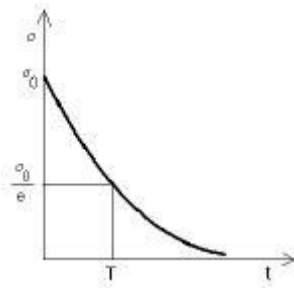
Egyszerűbb a modell vizsgálata, ha állandó deformációt hozunk létre a modellen, vagyis az $\varepsilon = \text{állandó}$ és a feszültség változását vizsgáljuk. Mivel $\varepsilon = \text{állandó}$, ezért $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ és a megoldandó egyenlet átrendezve:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt \quad (14)$$

A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldás a következő:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}, \quad (15)$$

ahol σ_0 a $t=0$ időpontban a feszültség értéke és $T = \frac{\eta}{E}$ a relaxációs idő. A relaxációs idő megadja, hogy a kezdeti feszültség mennyi idő alatt csökken az e-ad részére (8.ábra).



8.ábra A Maxwell modell feszültség relaxációja állandó deformációnál

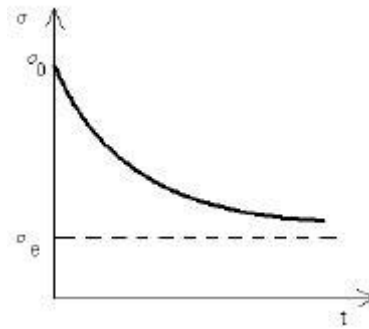
Egy Maxwell elemből és egy rugó elemből álló háromelemű modell esetén a feszültség változást a következő egyenlet írja le:

$$\sigma = E_e \varepsilon + ET \frac{d\varepsilon}{dt} - T \frac{d\sigma}{dt} \quad (16),$$

ahol az E a pillanatnyi rugalmassági modulus és $T = \frac{\eta}{E - E_e}$ a relaxációs idő.

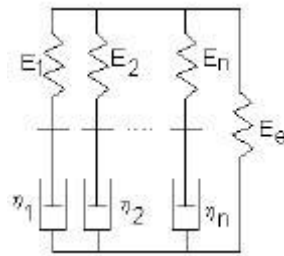
A valós anyagokat leíró relaxációs görbék nulla helyett egy σ_e egyensúlyi értékéhez tartanak, ezt másként visszamaradó feszültségnek is hívjuk.

Két-három exponenciális függvény összegével tudjuk leírni a relaxációs görbét.



9.ábra A feszültség relaxációja állandó deformációnál valós anyagoknál

Általánosított Maxwell modell (10.ábra) segítségével írjuk le a valós anyagok relaxációját. Ez a modell több (n darab) Maxwell elem párhuzamos kapcsolásával és egy rugó elem párhuzamos összekapcsolásával nyerhető, melyet az n -edik elemhez kötünk. A modellt egy $E_e = \frac{\sigma_e}{\varepsilon}$ rugalmassági modulus jellemzi.



10.ábra Az általánosított Maxwell modell

Az n elemű modell esetén a feszültség csökkenése az időben állandó deformáció esetén:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E_1 - E_e \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + E_2 - E_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \dots + E_n - E_{n-1} \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + E_e \right]. \quad (17)$$

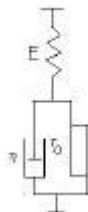
A relaxációs görbe, $\sigma(t)$ függvény, ismerete lehetővé teszi a modell paramétereinek meghatározását. Ezen egyenlet egyenértékű a következő egyenlettel az (1) összefüggés alapján:

$$F = F_e + F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} \quad (18)$$

Ezt az egyenletet használom a későbbiekben bemutatott sorozatos maradék módszernél.

2.1.2.3. Bingham modell

A Bingham modell egy háromelemű összetett modell. Egy súrlódó és egy plasztikus elem párhuzamos összekapcsolásához csatlakozik sorosan egy rugó elem (11.ábra).



11.ábra Bingham modell

2.2. Gumicukor

Magyarországon a gumicukor összetételét a Magyar Élelmiszerkönyv szabályozza (<http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumicukorka>). Az Élelmiszerkönyv meghatározása szerint a gumicukor cukor, glükóz szirup, esetleg invertcukorszirup és zselésítő anyagok (ilyenek a gumiarábikum és a zselatin) felhasználásával készített, ízesített és színezett, öntéssel alakított, esetenként panírozott, gumiszerűen rugalmas puhacukorka.

A gumicukrot a londoni Charles Gordon Maynard találta fel 1909-ben. 1925-től már édesgyökérből is készítettek gumicukrot.

Az édesség receptje az évek során nem változott: szirup, cukor, szőlőcukor, zselatin és a különféle aromák. Maga a keverési arány féltve őrzött titok napjainkban is.

A gumicukorra jellemző gumis, rágós állag a 6-8 tömegszázaléknyi zselatint tartalmazó szirup befőzésével érhető el, amit a befőzés után száraz levegővel szárítanak mindaddig, míg a víztartalom 18 tömegszázalékra csökken.

A gyártási folyamat végén vékony méhviaszréteggel vonják be a gumicukrot, mely ennek köszönhetően fényes lesz, és nem ragad.

Gumicukor összetétele:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------|
| ▪ Zselatin | ▪ Karnauba viasz |
| ▪ Cukor (szacharóz vagy répacukor) | ▪ Méhviasz |
| ▪ Glükóz szirup | ▪ Citromsav |
| ▪ Invertcukor | ▪ Természetes színező- és |
| ▪ Dextróz | ízesítőanyagok |

2.2.1. Zselatin

A zselatin egy áttetsző, színtelen, íztelen szilárd lineáris polipeptid, melynek molekulatömege 10000 és 200000 között változik. Állati kötőszövetekből hidrolizálják forró vízzel vagy 5%-os sósavoldattal. A kollagénben található kötések lebontásával kapjuk. Hideg vízben megduzzad, míg meleg vízben feloldódik és viszkózus kolloid oldattá alakul át. Nagy viszkozitása miatt hűtő hatást fejt ki. Viszkozitása 4,4°C (40°F) alatt és magas koncentrációban a legnagyobb. A zselatin 90%-a fehérje, mely aminosavakra bomlik az emésztés során. A fehérjét 22 aminosav építi fel, a zselatin ebből 18-at tartalmaz. Elsősorban lizin, prolin, hidroxiprolin, glutaminsav és alanin vesz részt a felépítésében. Széles körben alkalmazzák az élelmiszeriparban és a gyógyszeriparban. Élelmiszerek esetében E441 néven emulgálószerként és zselésítő anyagként használják (Bogdán et al. , 1992; http://www.haribo.com/planet/hu/info/core/nutritional_info/gluten_free.php).

2.2.2. Cukor (szacharóz vagy répacukor), glükóz szirup, invertcukor, dextróz

Természetes szerves édesítőanyagok lehetnek a répacukor (szacharóz), a szőlőcukor (glükóz), a gyümölcscukor (fruktóz), a malátacukor (maltóz), az invertcukor (glükóz és fruktóz elegye), a tejcukor (laktóz), a méz és a keményítőszörp.

A szacharóz a legfontosabb diszacharid, D-fruktózból és D-glükózból épül fel. A cukrot nemesített cukorrépából nyerik. Híg ásványi savakkal végzett hidrolízisekor 1:1 arányú D-glükóz és D-fruktóz elegyet kapunk, ezt hívjuk invertcukornak. Az invertcukrot kikristályosodást meggátló tulajdonsága miatt használja az édesipar. Védi a kiszáradástól a gumicukrot.

A glükóz (dextróz) és a fruktóz monoszacharidok, melyek jó édesítőképességgel rendelkeznek. Az általuk felépített oligoszacharidok, illetve poliszacharidok hidrolízise során

állítják elő az iparban. A glükózt főként keményítőből, ritkábban cellulózból, míg a fruktózt szacharózból vagy inulinból, illetve glükózból képeznek még fruktózt glükóz-izomeráz enzim segítségével (Bogdán et al. , 1992; <http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumicukorka>).

A glükózsirup glükóz és malátacukor vizes oldata. Kukoricakeményítőből nyerik enzimes hidrolízis során.

Természetes édesítőszer a glicirrizin is, amely az édesgyökér kivonatában található meg – 1925 óta édesgyökérből is gyártanak gumicukrot (<http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumicukorka>).

2.2.3. Fényező anyagok - karnauba viasz, méhviasz

A karnaubapálma leveléből nyerik a karnauba viaszt. Ez a növény Braziliában honos. Zsírsavból, szénhidrogénekből és fahéjsavból áll maga a viasz. Magas olvadáspontjának (85°C) köszönhetően nagy melegben sem olvasnak össze a gumicukrok. Funkcióját tekintve fényt ad a gumicukornak és kiemeli a színét.

A méhviasz a mézet termelő méhek által előállított természetes viasz. A fiatal dolgozók által kiválasztott méhviasz még teljesen átlátszó, de fehér lesz azután, hogy a méhek rágással képlékennyé tették. A végleges sárgás-barnás színt a pollenben található olajok, valamint a propolisz következtében kapja. Funkcióját tekintve fényt kölcsönöz a gumicukornak és megvédi a kiszáradástól (http://www.haribo.com/planet/hu/info/core/nutritional_info/gluten_free.php).

2.2.4. Antioxidáns

A citromsav színtelen, szagtalan, kellemesen savanykás ízű, vízben jól oldódó, jól kristályosodó anyag. Szabad állapotban a ribizkében, egresben, cseresznyében, málnában, szamócában, szederben és a citrusfélékben fordul elő. Citromléből vagy megfelelő penésztörzsek felhasználásával állítható elő erjesztés során. Segíti a többi antioxidáns működését. Széles körben alkalmazzák ízesítőszerként E330 néven. Késlelteti a

gyümölcsök oxigén hatására történő elszíneződését (barnulását) (Bogdán et al. , 1992; http://www.haribo.com/planet/hu/info/core/nutritional_info/gluten_free.php).

2.2.5. Természetes színező-, és ízesítő anyagok

Elsősorban valódi gyümölcsök kivonatával, gyümölcs sűrítményekkel alakítják ki az íz- és színvilágot. Ilyen gyümöleskivonatok a citrom, narancs, az alma, a kivi, a bodza, a fekete ribizli, a szőlő, a spenót, a csalán, a passiógyümölcs, a málna, az eper, és a mangó (http://www.haribo.com/planet/hu/info/core/nutritional_info/gluten_free.php).

Színezőanyagok osztályozása az okozott színek szerint:

- Fehér szín: ananász, bodza, csalán.
- Sárga szín: citrom, narancs, papaya, szőlő, alma.
- Piros szín: málna, fekete ribizli, eper.
- Zöld szín: kivi, spenót.

2.2.6. Gemicukrok reológiája

A szerkezetformáló poliszacharidok és fehérjék biztosítják a kívánt funkcionális tulajdonságok széles skáláját az élelmiszerek esetén (Kinsella, Rector, & Phillipps, 1994). A szerkezetformáló anyagok befolyásolják az élelmiszerek fizikai tulajdonságait is. Számos módszert dolgoztak már ki, a szerkezet-funkció kapcsolatok kiderítésére (BeMiller, 1996; Dickinson & McClements, 1995; Kalab, Allan-Wojtas, & Miller, 1995; Ross-Murphy, 1994; DeMars L. L., 2001). Például E. Allen Foegeding a biopolimer gélek törését vizsgálta az összetétel függvényében.

Egy kolloid rendszerben a kölcsönhatás erősségét és a szerkezetet részben az alkotórészek méretei és koncentrációi határozzák meg, ezek a rendszerek sokszor nem stabil egyensúlyi helyzetben vannak. (Mezzenga, 2006) A kísérleti adatok azt mutatják, hogy a kettős emulziók tipikus relaxációs ideje 1-24 óra az ozmotikus egyensúly beállásáig. (Mezzenga et al., 2004) A viszkoelasztikus viselkedés leírásához a relaxációs kísérletek alkalmasak, amelyek megadhatják mind a rugalmas (tárolási) és a viszkózus (veszteségi) modulusokat (Mezzenga, 2006). A folyadék-kristályos fázisok viszkoelasztikus viselkedését

több relaxációs mechanizmus jellemzi, így több relaxációs idő szükséges a matematikai leírásukhoz. Ahhoz, hogy ezt a komplex viszkoelasztikus viselkedést leírjuk több Maxwell modell szükséges. (Mezzenga, Meyer et al., 2005; Mezzenga, Schurtenberger et al., 2005)

3. Munka célja

A munkám célja, hogy a gemicukor reológiai modelljét felállítsam relaxációs vizsgálatok segítségével. A mérési eredmények segítségével felállított reológiai modell későbbiekben felhasználható lehet a termékfejlesztés során. Minél pontosabb reológiai modell felállításához a méréseket különböző paraméterek szerint végeztem. Különböző mérőfej sebességeket alkalmaztam, két eltérő cukorréteg vastagságon végeztem a méréseket. A mérési eredményeket csoportosítottam a gemicukor színe alapján is.

4. Anyag és módszer

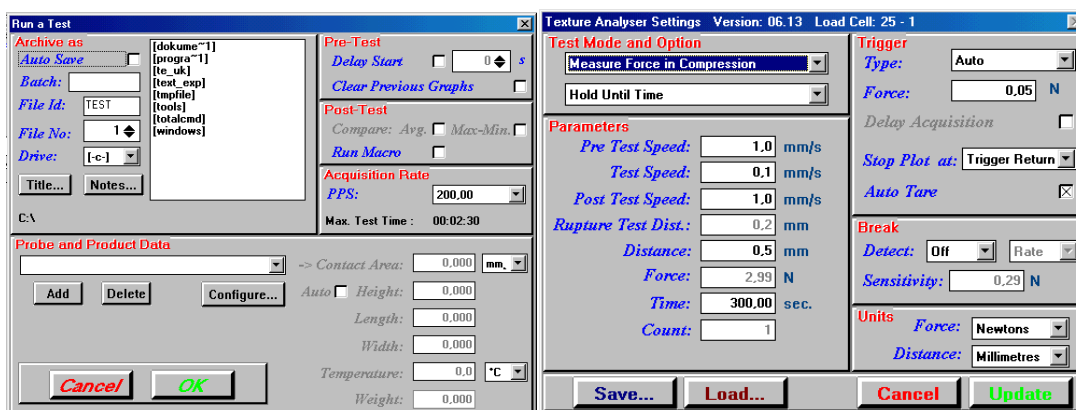
4.1. Anyag

A kereskedelemben kapható gemicukrokon végeztem a méréseket, mindig frissen bontott csomagolásból, hogy a nedvességtartalom közel állandó legyen. Különböző színezésű és vastagságú cukrokat választottam a mérésekhez. Ötféle színű gemicukorral végeztem a méréseket, az ötféle szín: színtelen, zöld, piros, citromsárga és narancssárga. A kétféle cukorréteg vastagság pedig 8 és 10 mm volt.

4.2. SMS típusú asztali penetrométer (Stable Micro System Texture Analyser)

A méréseket SMS típusú precíziós asztali penetrométeren végeztem. A mérésekhez egy 2,00 mm átmérőjű nyomófejet használtam. Állandó deformációnál relaxáció típusú méréseket végeztem. A kapott értékeket erő-idő grafikonon ábrázoltam. A kapott görbéket közelítettem többféle módszerrel.

Az állományvizsgálót egy TEXTURE EXPERT nevű számítógépes program segítségével kezeltem. Itt beállítható a mérési mód, a mérendő anyag távolsága, a mérőfej sebessége és természetesen a mérőfej típusa is. A program alapkiértékelésre is alkalmas, azonban a MathCad és Microsoft Excel programokat használtam a kiértékelésem során.



12.ábra A Texture Expert nevű számítógépes program beállításai

A mérési összeállítás a 13.ábrán látható. Az állandó relatív deformáció 5 mm volt. A méréseket 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 és 1,1 mm/s mérőfej sebességgel végeztem. A két cukorréteg vastagság, amelyeken a méréseket végeztem, 8 és 10 mm volt. Az eredményeket szín szerint is csoportosítottam, az öt szín: színtelen, zöld, piros, citromsárga és narancssárga.



13.ábra Stable Micro System Texture Analyser (balról jobbra számítógép a program futtatásához, SMS mérőkészülék és az irányítópultja)

4.3. Alapfüggvényes közelítés

A relaxációs görbéket háromféle függvénnyel közelítem. A három függvény: a hatványfüggvény ($y = a \cdot x^b + c$), az exponenciális függvény ($y = a \cdot e^{b \cdot x} + c$) és a természetes alapú logaritmikus függvény ($y = a \cdot \ln x + b$). Illetve ezek kombinációjával próbáltam közelíteni a kapott görbéket. A függvény által mutatott csökkenő tendencia miatt választottam ezeket a függvényeket.

4.4. Általános többelemű Maxwell modell - sorozatos maradék-módszer

Az állandó deformációnál kapott feszültség-relaxációs mérések eredményeit $\log \sigma - t$ koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Mivel a kapott görbe nem egyenes, így a feszültség-

relaxáció egytagú exponenciális kifejezéssel nem adható meg. A több tagú kifejezést a sorozatos maradék-módszerrel nyerjük (Sitkei alapján).

Az eredeti görbéhez húzunk egy érintőt, ez fogja adni az első exponenciális tagot, amelynek a legnagyobb a relaxációs ideje. Ekkora már a kisebb relaxációs idejű folyamatok lecsengtek. Ha megkaptuk az első exponenciális tagot, kivonjuk a σ -ból, ekkor kapjuk az első maradékot. Mivel az első maradék még mindig nem egyenes, ezért ismét érintőt húzunk, ez adja a második exponenciális tagot. A második maradékot hasonlóan kapjuk az első maradékhoz. A második maradék már jó közelítéssel egyenes, ez fogja a harmadik exponenciális tagot adni. Ily módon a következő egyenlethez jutunk a jelenlegi példa esetén (14.ábra):

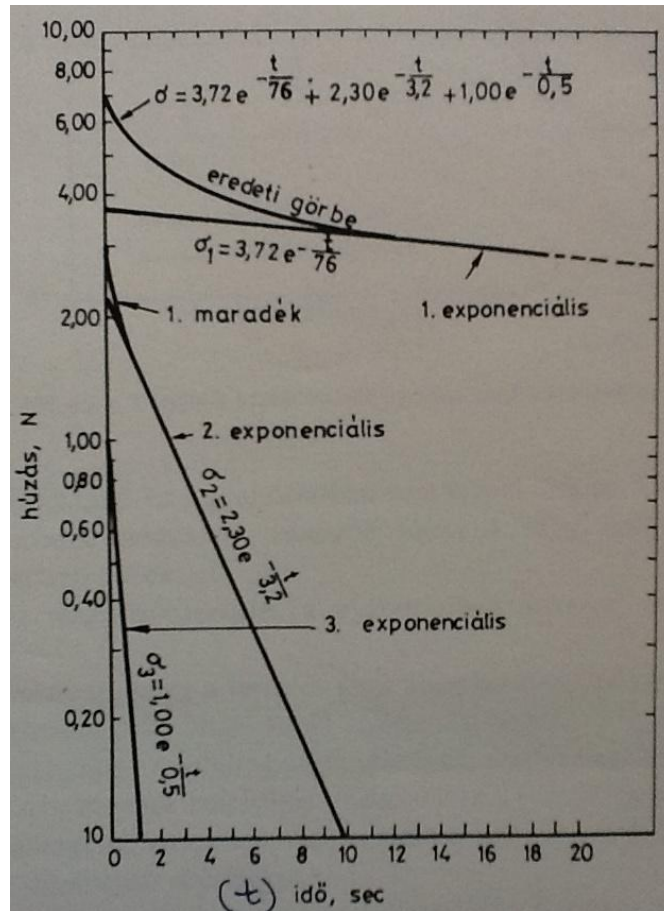
$$\sigma = 3,72 \cdot e^{-\frac{t}{76}} + 2,3 \cdot e^{-\frac{t}{3,2}} + 1,0 \cdot e^{-\frac{t}{0,5}} \quad (19)$$

A hatványkitevő nevezőjében található T relaxációs idő az egyenesek hajlásszögeiből számolható:

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2} = \frac{t_2 - t_1}{2,3 \cdot \lg \sigma_1 - \lg \sigma_2}, \text{ ahol} \quad (20)$$

t_1, t_2 – két tetszőleges időpillanat

σ_1, σ_2 – a t_1 és t_2 időpillanatokhoz tartozó feszültségértékek.



14.ábra A sorozatos maradék módszer (Sitkei, 1981)

4.5. Nyújtott exponenciális függvény

A nyújtott exponenciális függvény egy speciális exponenciális függvény, amely egy β paraméterrel egészíti ki a hagyományos exponenciális függvényt (http://hu.wikipedia.org/wiki/Ny%C3%BAjtott_exponenci%C3%A1lis_f%C3%BCggv%C3%A9ny).

$$\varphi(t) = e^{-\left(\frac{t}{T_K}\right)^\beta} \quad (21)$$

Különböző β értékek jelentése:

- $0 < \beta < 1$, akkor megnyúlt $\varphi(t) - \log(t)$ függvényt kapunk
- $\beta = 1$, akkor a hagyományos exponenciális függvényről beszélünk
- $\beta > 1$ esetén összenyomott exponenciális görbét kapunk
- $\beta = 2$ pedig egy nevezetes eset, a normál eloszlás.

Számos alkalmazása ismert a matematika és a fizika területén, gyakran használják rendezetlen rendszerek relaxációjának leírásához is.

A relaxációs idők nem triviális eloszlása $\rho(u)$, melynek definíciója

$$e^{-t^\beta} = \int_0^\infty du \rho(u) e^{-\frac{t}{u}}, \text{ az eloszlás pedig: } G = u\rho(u), \text{ ahol}$$

$$\rho(u) = -\frac{1}{\pi \cdot u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin \left(\frac{\pi}{2} \beta k \right) \Gamma(\beta k + 1) u^{\beta k} \quad (22)$$

A $\varphi(t)$ görbe alatti területe értelmezhető az átlagos relaxációs időként:

$$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty dt e^{-\left(\frac{t}{\tau_K}\right)^\beta} = \frac{\tau_K}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (23)$$

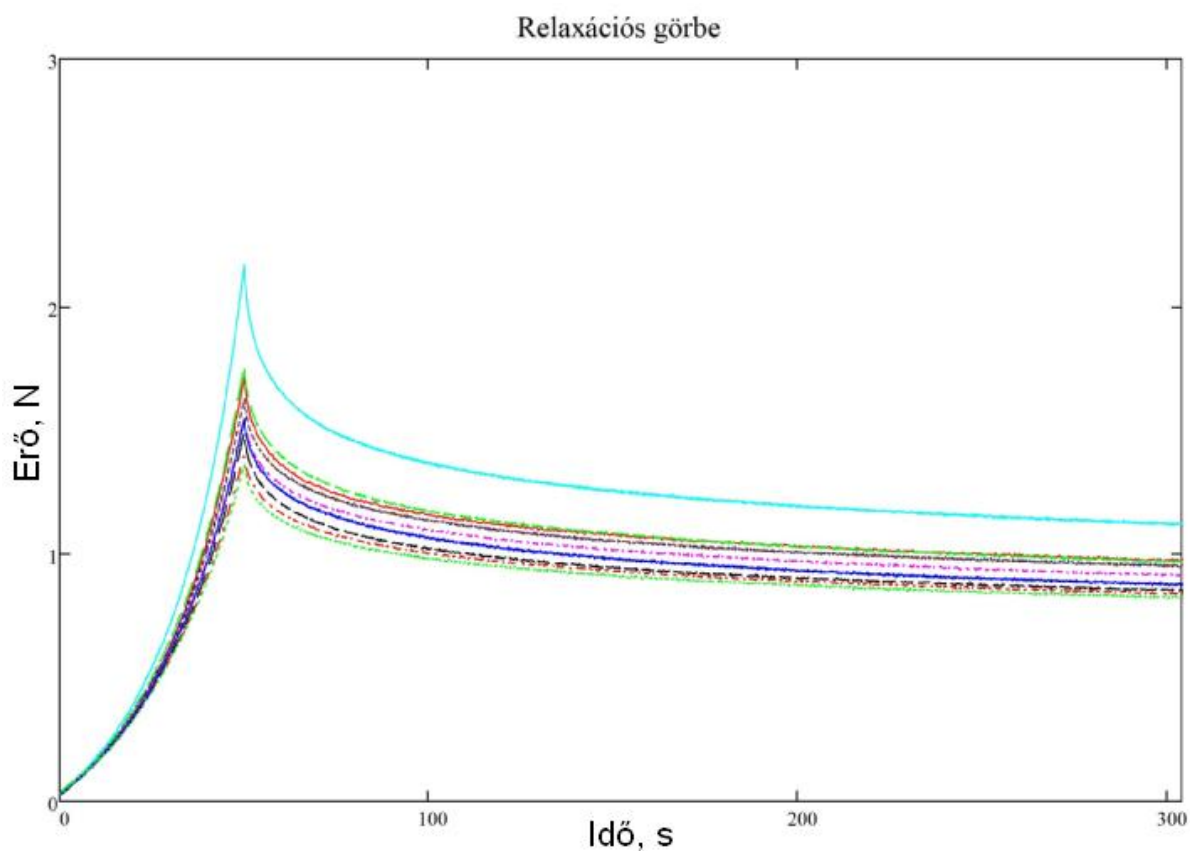
ahol Γ a gamma-függvény.

5. Kísérleti eredmények és az eredmények értékelése

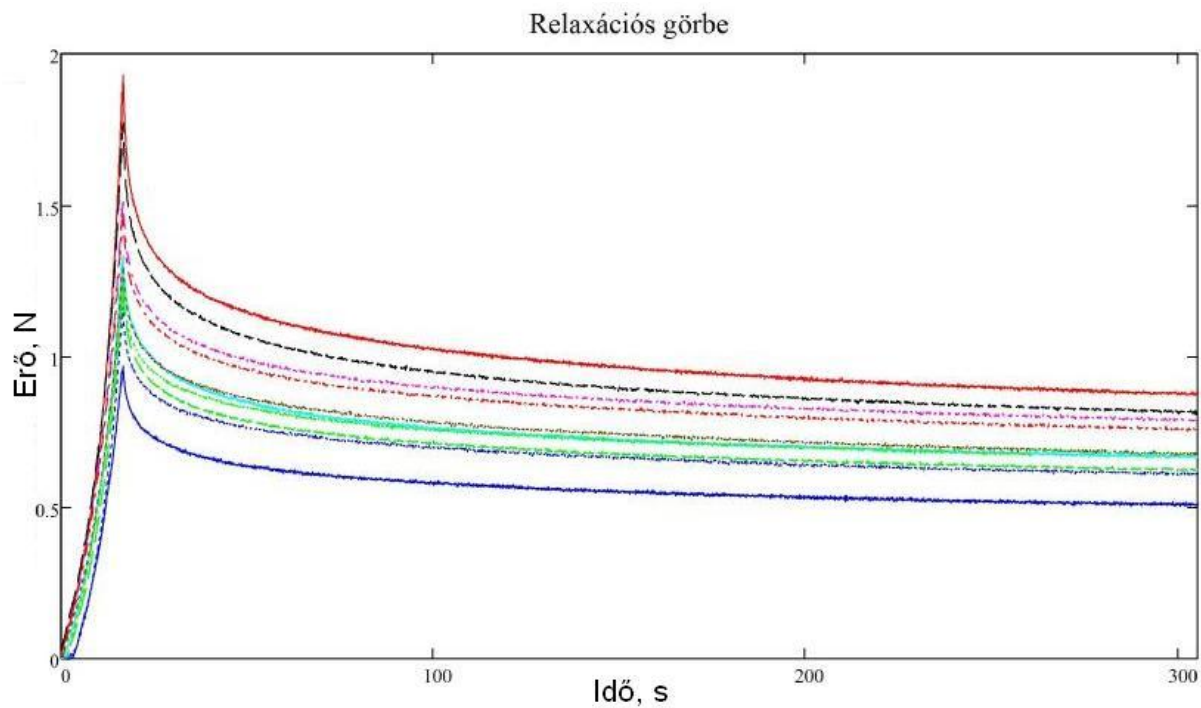
5.1. A mért relaxációs görbék

A kapott feszültség-relaxációs görbéket a következő hat ábra mutatja be. Ezeken külön-külön látható a 6 különböző sebességgel a 10-10 mérés. A vízszintes tengelyen minden esetben az idő jelenik meg másodpercben, míg a függőleges tengelyen az erő található newtonban.

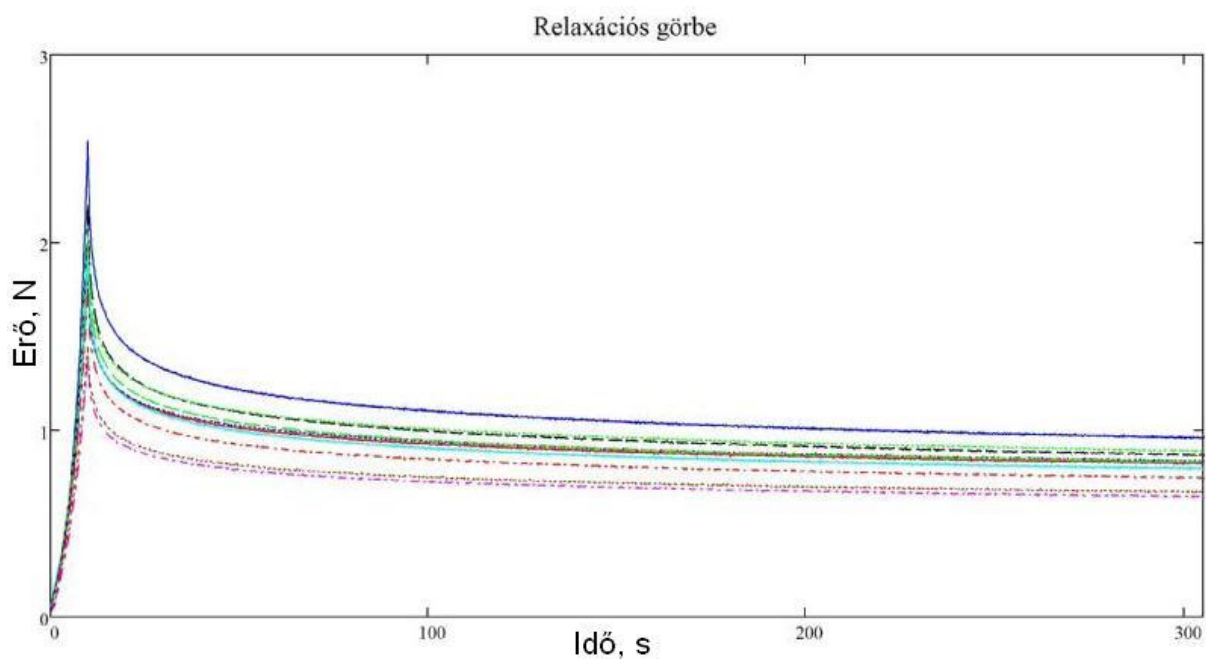
A görbék egy felfutási szakaszból, és egy csökkenő szakaszból állnak, mely meredeken kezdődik, de a meredeksége egyre csökken, ahogy tart az F_e értékhez. A görbékről leolvasható, hogy a nagyobb sebességeknél sokkal meredekebben kezdődik a csökkenési szakasz. Ebből is látszik, hogy a terhelés sebességétől függ a terhelés utáni relaxáció.



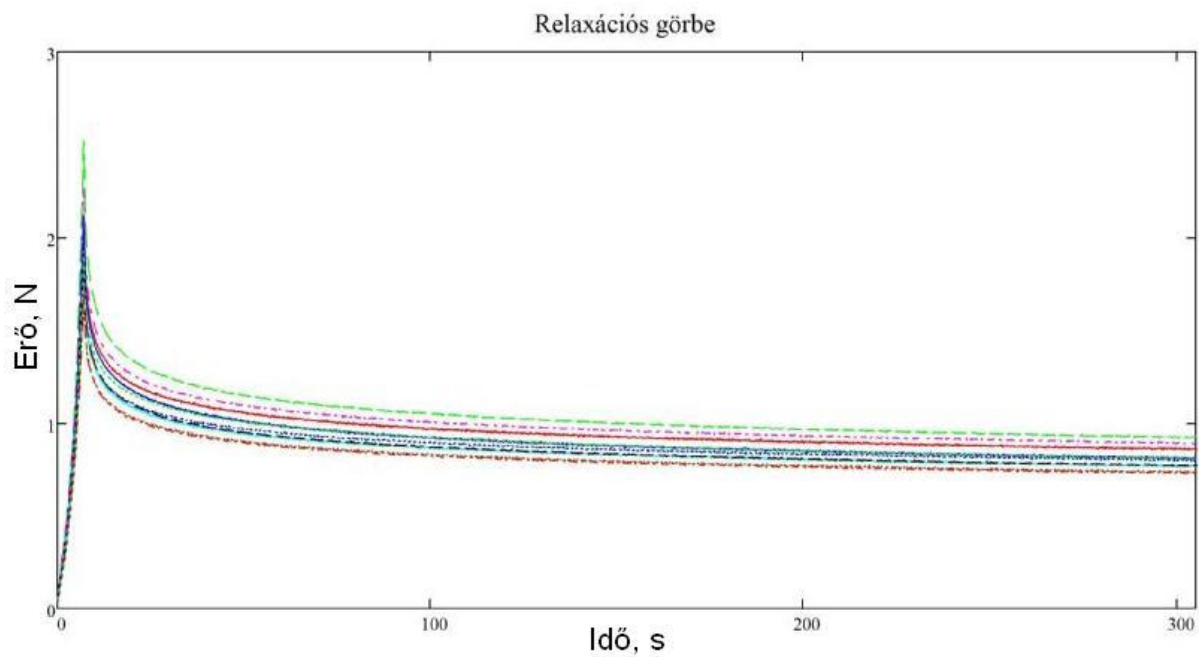
15.ábra 0,1 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék



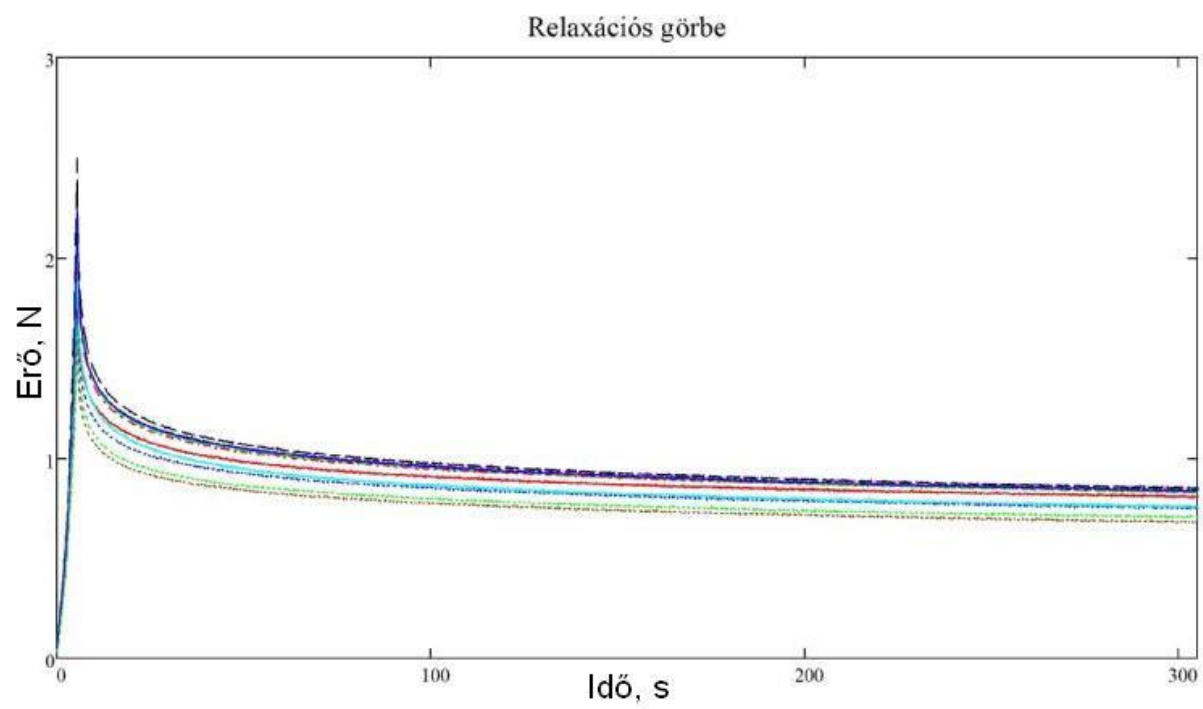
16.ábra 0,3 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék



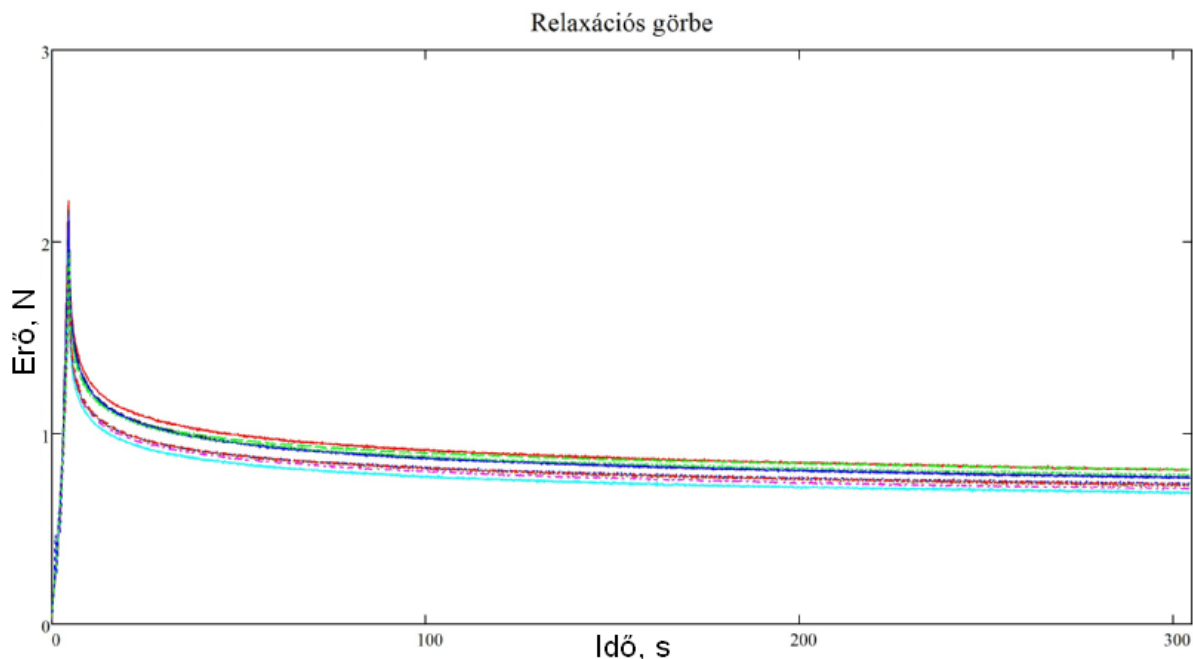
17.ábra 0,5 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék



18.ábra 0,7 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék



19.ábra 0,9 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék

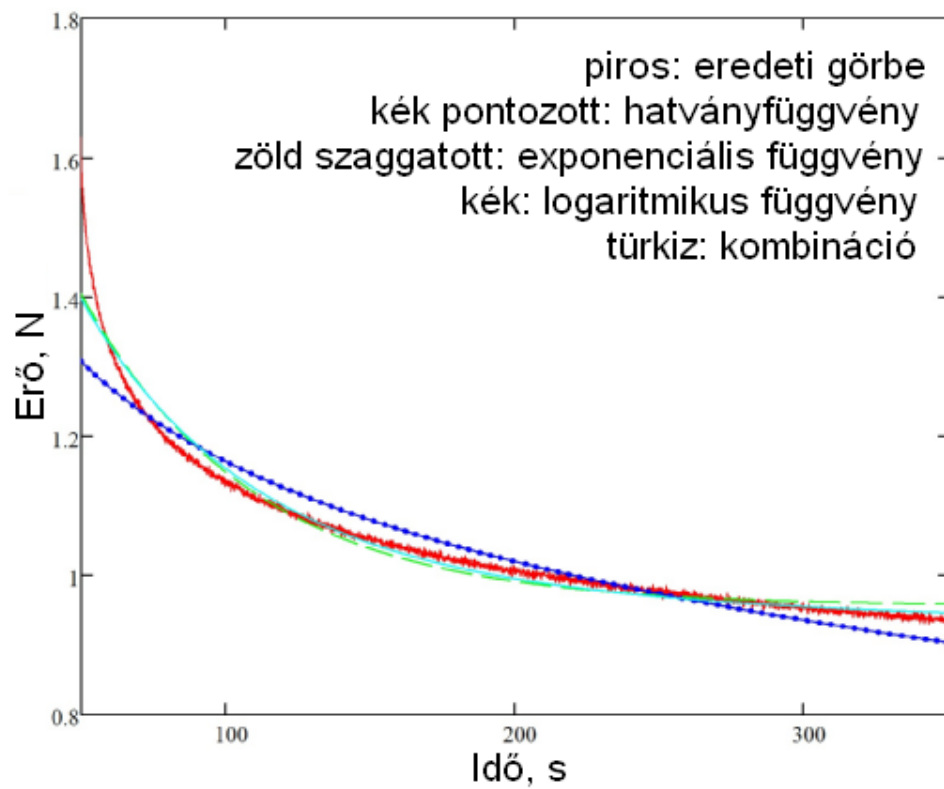


20.ábra 1,1 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék

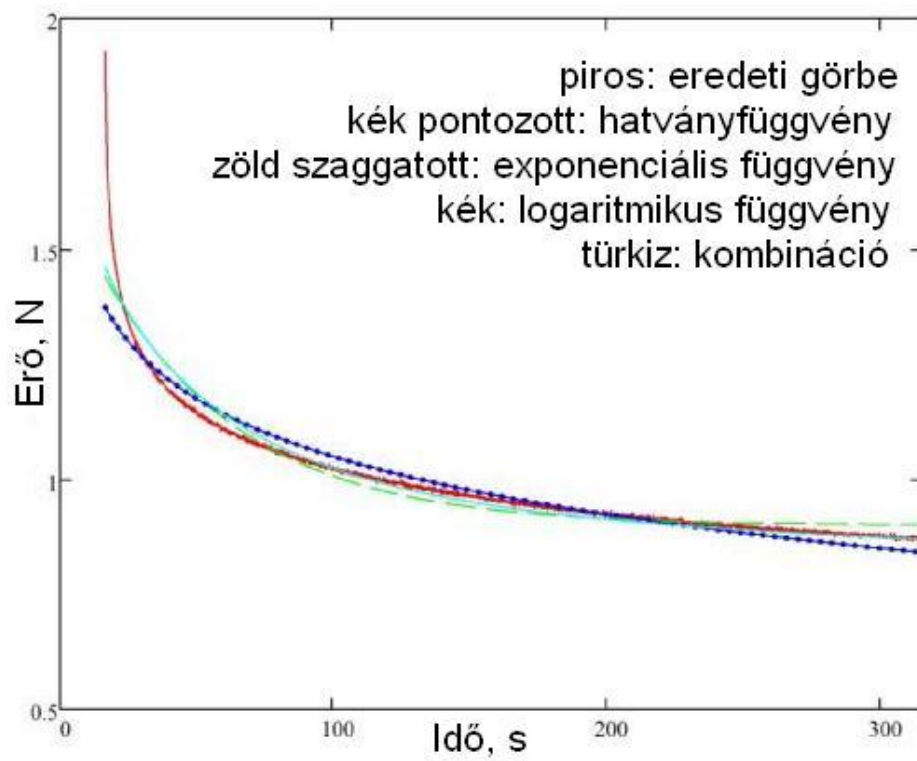
Megfigyelhető, hogy a kisebb mérőfej sebességeknél a szórás nagyobb az azonos méréseknél, mint a nagyobb mérőfej sebességeknél.

5.2. Közelítés alapfüggvényekkel és azok kombinációjával

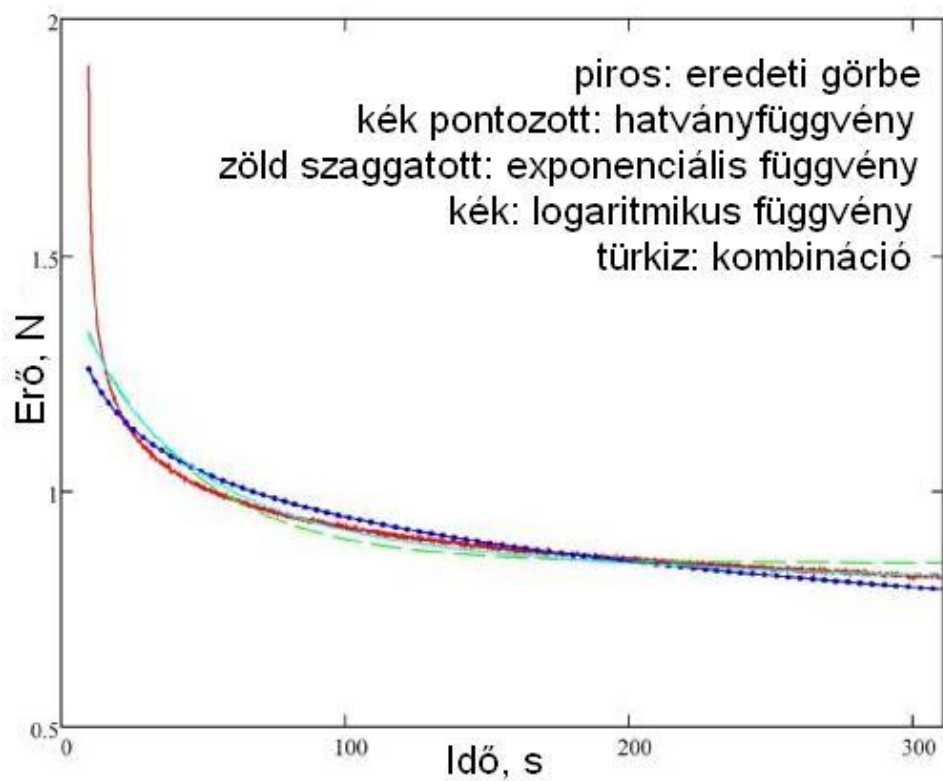
A közelítéseket a tíz mérés átlagából kapott görbéken számoltam ki. Először hatványfüggvény, exponenciális függvény és természetes alapú logaritmikus függvények kombinációjával próbáltam közelíteni a kapott görbéket (21-26.ábrák). A „piros” görbe a mért relaxációs görbe csökkenő szakasza, a „kék” pontozott, „zöld” szaggatott és „kék” jelzésű görbék a hatványfüggvény, az exponenciális függvény és a természetes alapú logaritmikus függvény közelítő görbéi külön-külön, míg a „türkiz” görbe a háromféle függvény kombinációjából származó közelítő görbe. Legjobban a hatványfüggvények és a függvények kombinációi közelítették a mért pontokat.



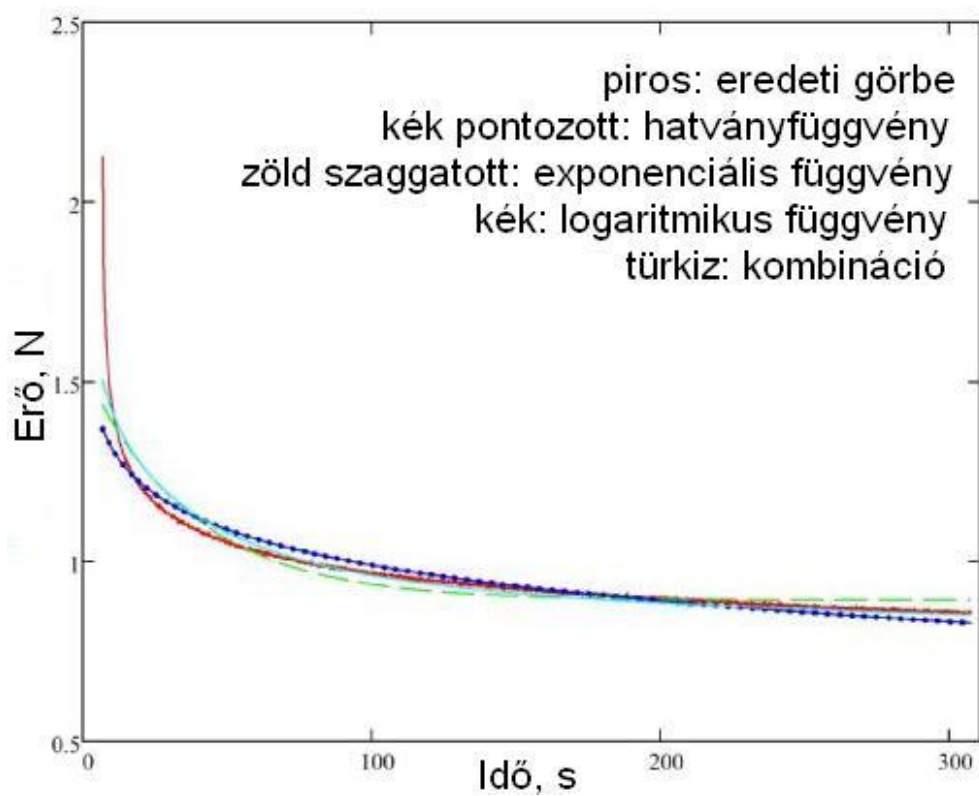
21.ábra 0,1 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék



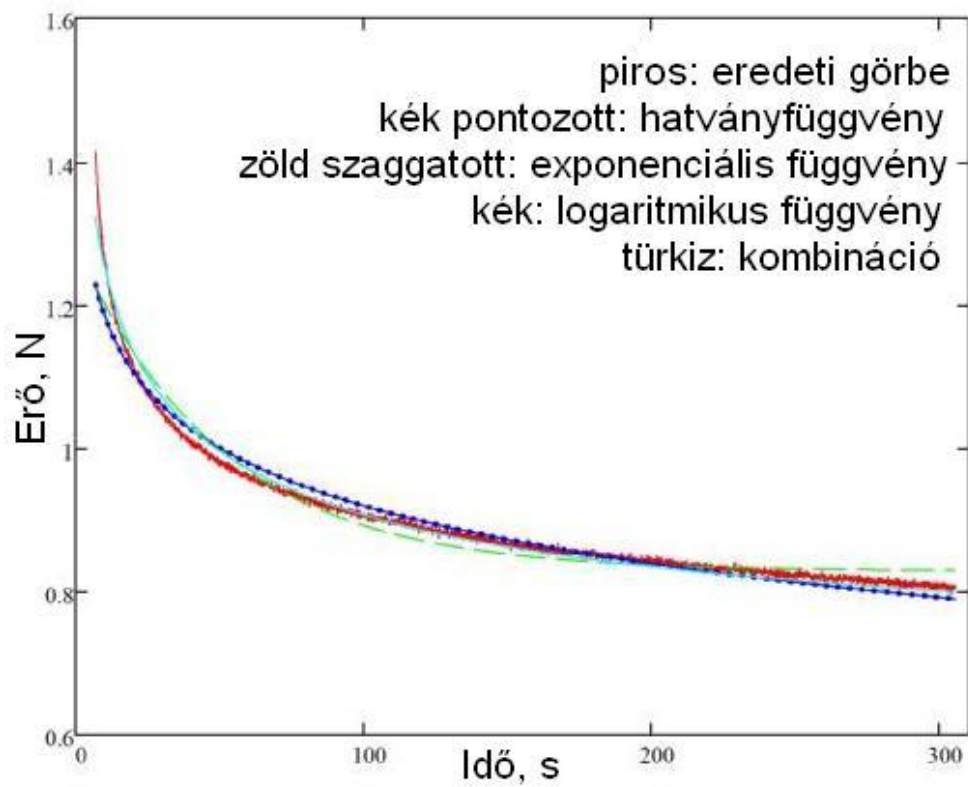
22.ábra 0,3 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék



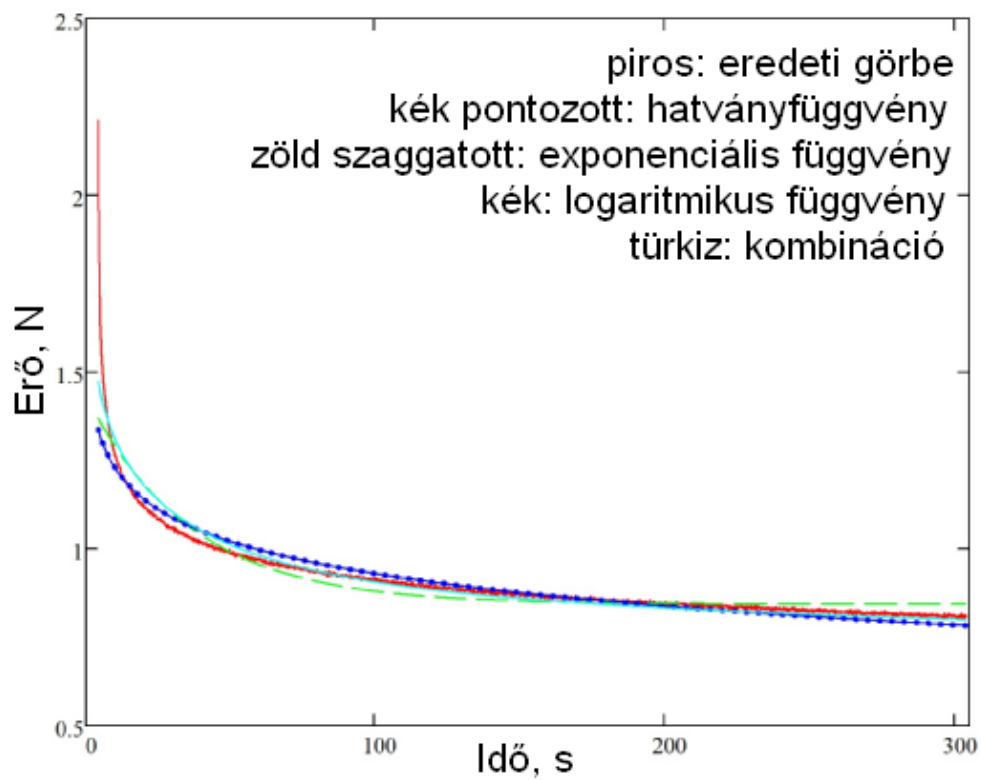
23.ábra 0,5 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék



24.ábra 0,7 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék

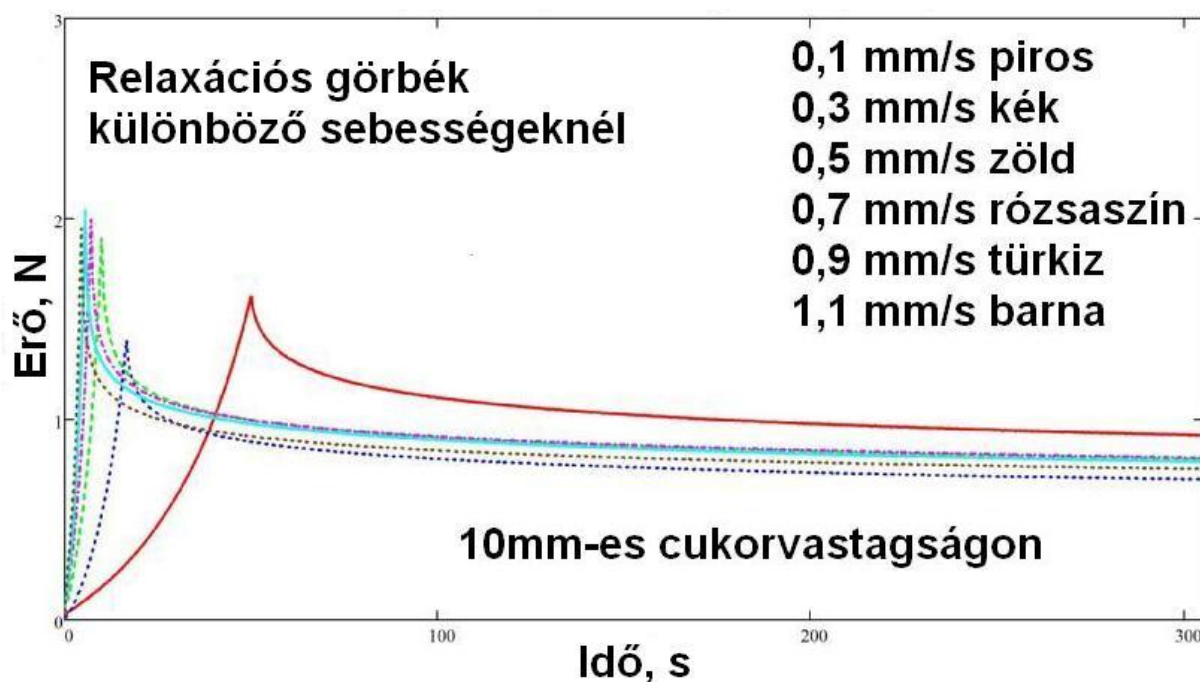


25.ábra 0,9 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék



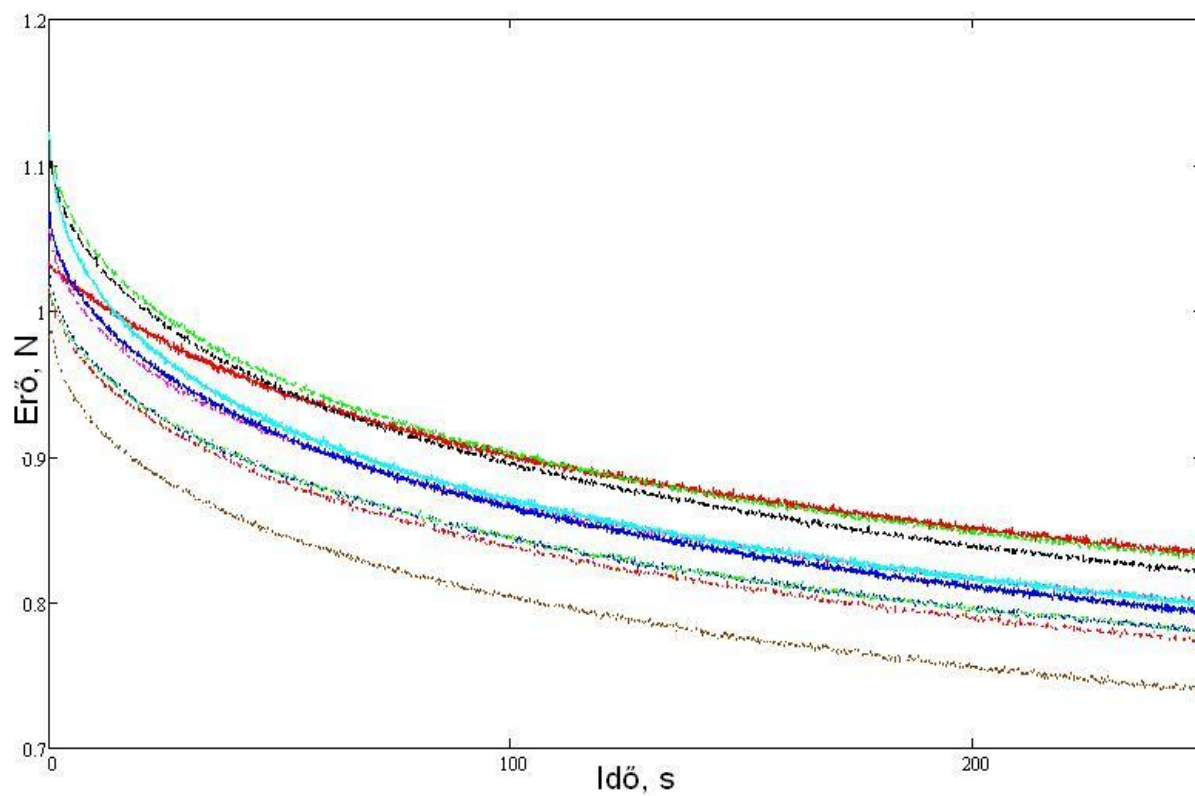
26.ábra 1,1 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék

A különböző sebességeket egy diagramon ábrázolva látszódik, hogy a nagyobb sebességeknél gyorsabb a relaxáció – a görbe kezdeti meredeksége nagyobb (27.ábra). Minél hosszabb a terhelés ideje, annál nagyobb lesz a terhelés idejére eső relaxáció. A terhelés utáni relaxáció függ a terhelés sebességétől. Az alacsonyabb sebességeknél már az összenyomás alatt is történik relaxáció.

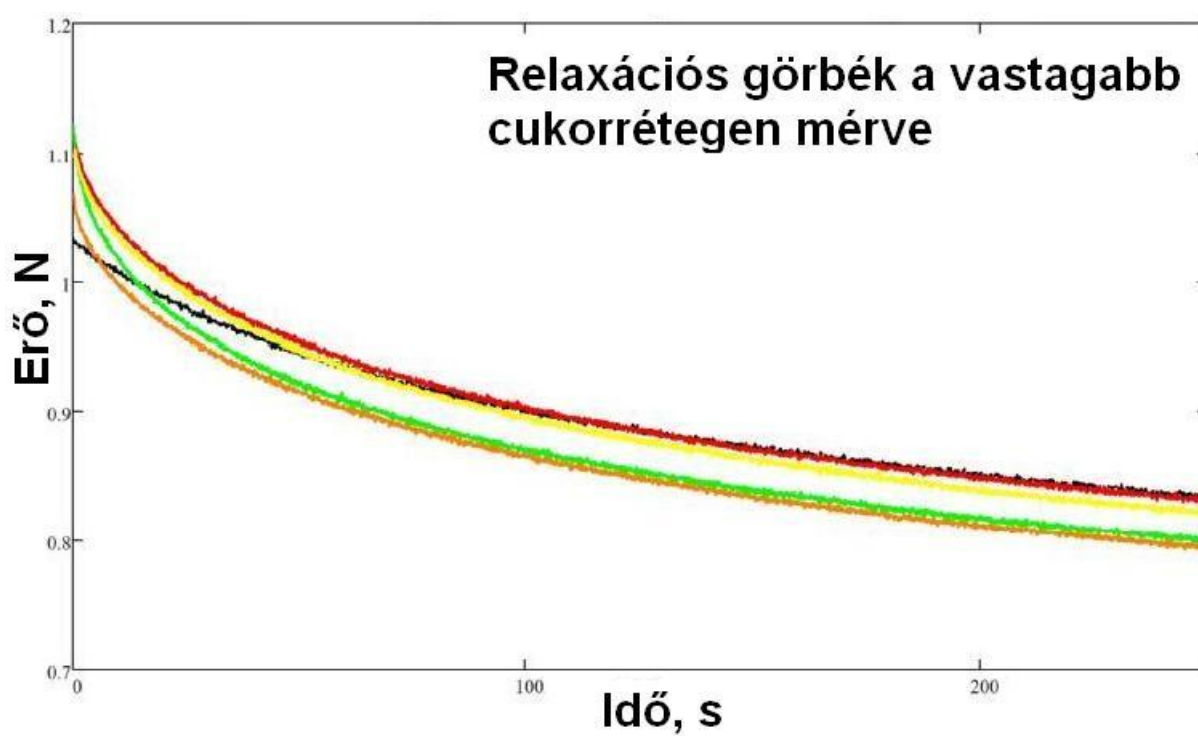


27.ábra Relaxációs görbék különböző sebességek esetén

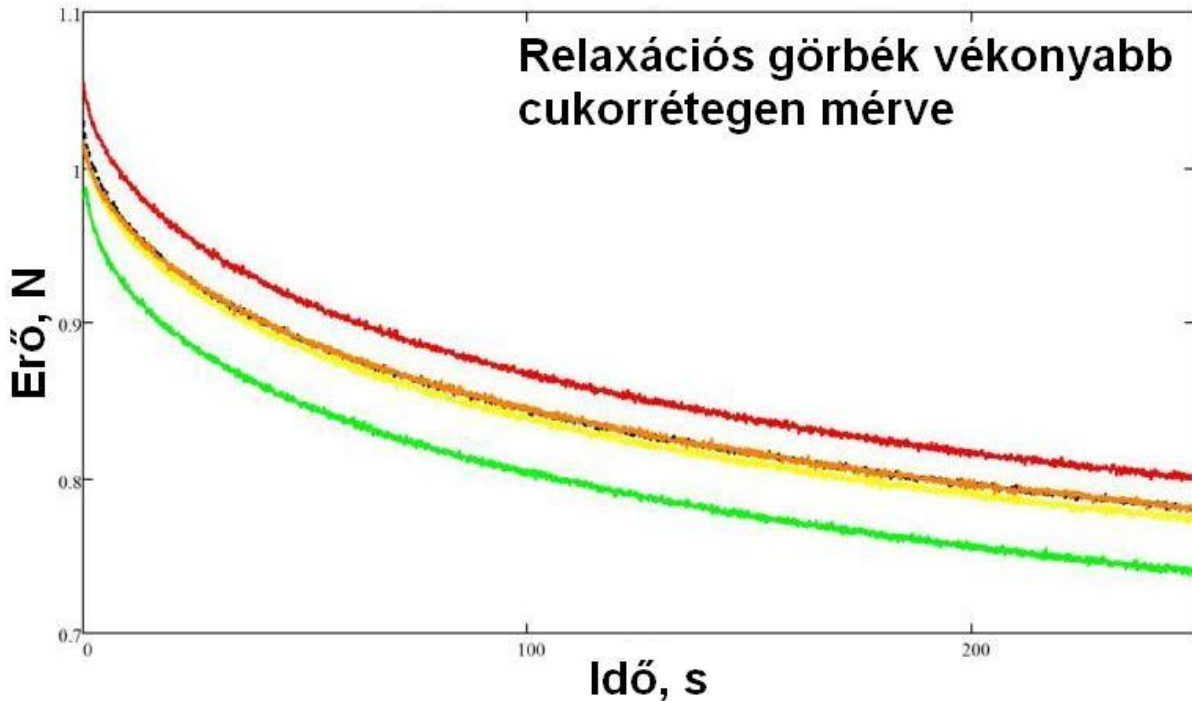
A különböző színű gumi-cukrok relaxációs görbéi között lényeges különbség nem látható (28. ábra), ebből arra következtetnek, hogy a különböző színezékek nem befolyásolják, vagy ha igen, akkor egyformán befolyásolják a relaxációt. A méréseket két helyen végeztem a gumi-cukron: két különböző vastagságnál (8 és 10 mm). A vékonyabb cukorrétegnél kisebb feszültségértékek vannak (29. ábra), mint a vastagabb cukorrétegnél (30.ábra).



28.ábra Relaxációs görbék színenként



29.ábra Relaxációs görbék különböző színeknél vastagabb cukorrétegen mérve



30.ábra Relaxációs görbék különböző színeknél vékonyabb cukorrétegen mérve

5.3. Közelítés sorozatos maradék módszerrel

Az relaxációs mérések eredményeit $\log F - t$ koordinátarendszerben ábrázolom. A fél-logaritmikus görbét részekre bontom. A részeket regressziós egyenessel közelítem. Az egyenesek egyenleteiből F (erő) és T (relaxációs idő) jellemzőket olvasom ki. Az exponenciális függvények egyenleteinek összegzésével jutok el a több-tagú exponenciális függvényhez.

A kiindulási egyenlet a következő:

$$F = F_e + F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}}, \quad (24)$$

ahol az F a mért erőt, az F_e az egyensúlyi erőt (ehhez tart a görbe), T a relaxációs időt, t pedig az eltelt időt jelenti. Első lépésként az egyensúlyi erőt kivonom a baloldaltól.

$$F - F_e = F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} \text{ és } t \gg T_1; T_2, \quad (25)$$

ez azt jelenti, hogy a T_1 és T_2 relaxációs idejű relaxációk már lecsengtek, ezért lehetséges a 3. komponens (T_3 -as relaxációs idejű) vizsgálata. Mivel $t \gg T_1; T_2$, így az $F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ tag elhanyagolható,

$$F - F_e \approx F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} \quad (26)$$

marad, melynek logaritmusát veszem:

$$\ln(F - F_e) \approx \ln F_3 - \frac{t}{T_3} \quad (27)$$

És meghatározom az F_3 -at és a T_3 -at.

Következő lépésként az eredeti egyenlet egy kicsit átrendezett alakjából indulok ki:

$$F - F_e - F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} = F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \text{ és } t \gg T_1, \quad (28)$$

itt csak a T_1 relaxációs idejű relaxáció csengett le, a T_2 relaxációs idejű még nem, így ebben a lépésben azt vizsgálom. Itt az $F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ tag hanyagolható el, így jutok a következő egyenlethez:

$$F - F_e - F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} \approx F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (29)$$

A következő lépésben pedig az egyenlet logaritmusát veszem:

$$\ln\left(F - F_e - F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}}\right) \approx \ln F_2 - \frac{t}{T_2} \quad (30)$$

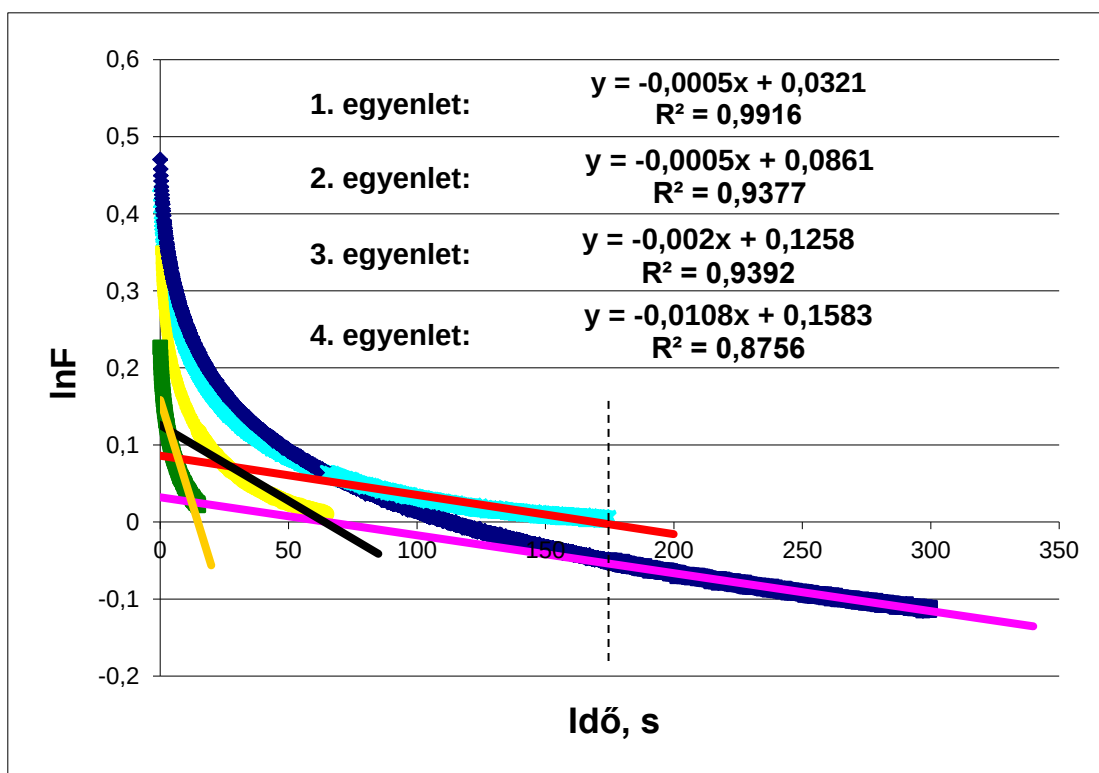
Az utolsó lépésben a T_1 relaxációs idejű elemet vizsgálom:

$$F - F_e - F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \approx F_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (31)$$

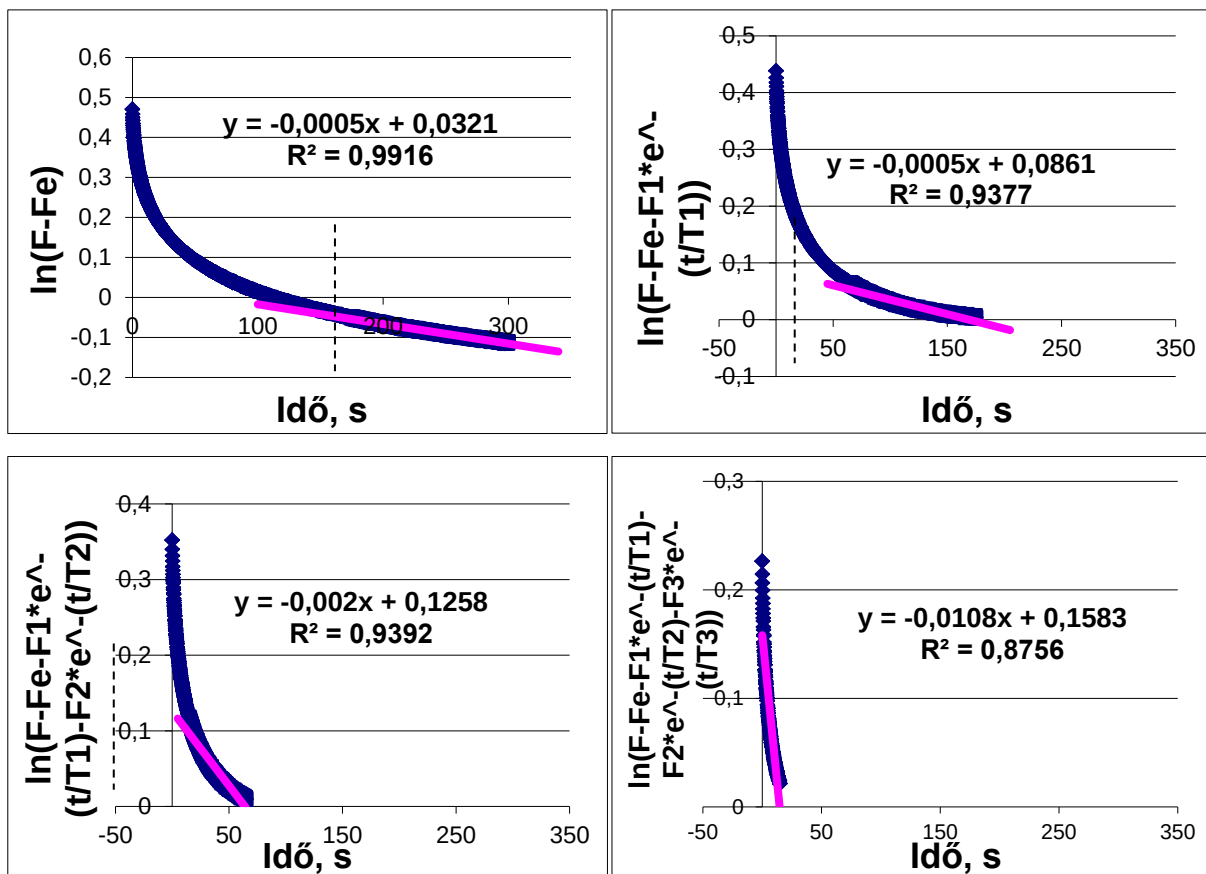
$$\ln\left(F - F_e - F_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - F_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \approx \ln F_1 - \frac{t}{T_1} \quad (32)$$

A következő ábra (31.ábra) a sorozatos maradék-módszer lépéseit mutatja be. A sötétkék görbe az $\ln(F - F_e) - t$ görbe, melyhez érintőt húzok, ez a rózsaszín egyenes. A rózsaszín egyenes egyenlete $y = -0,0005x + 0,0321$. A sötétkék görbe értékeiből a rózsaszín

egyenes egyenletével kapott értékeket levonva kapom a türkiz görbét, melyhez a piros érintő egyenes tartozik. Ennek az egyenesnek az egyenlete: $y = -0,0005x + 0,0861$. A türkiz görbe értékeiből a piros egyenes egyenletével kapott értékeket levonva kapom a sárga görbét, melyhez a fekete érintő egyenes tartozik. Az ehhez tartozó egyenlet: $y = -0,002x + 0,1258$. A sárga görbe értékeiből a fekete egyenes egyenletével kapott értékeket levonva kapom a zöld görbét, melyhez a narancssárga érintő egyenes tartozik. Ennek az egyenesnek az egyenlete: $y = -0,0108x + 0,1583$.



31.ábra A sorozatos maradék-módszer megértését segítő ábra



32.ábra A sorozatos maradék –módszer folyamatát bemutató lnF-t diagramok

A példánál kapott eredmény:

$$F = F_e + 1,0326N \cdot e^{-\frac{t}{2000s}} + 1,0899N \cdot e^{-\frac{t}{2000s}} + 1,1341 \cdot e^{-\frac{t}{500s}} + 1,1715 \cdot e^{-\frac{t}{92,6s}}$$

A 32.ábrán a bal felső diagram a relaxációnál lévő feszültség csökkenését mutatja be természetes logaritmus alakban idő függvényében, a bemutatott példa negyedik szakaszának paramétereit az ezen görbéhez húzott érintő egyenlete adja. Így kapom a jelen példánál az F_4 -et és a T_4 -et. A jobb felső diagramon látható görbéhez húzott érintő egyenletéből származik F_3 és a T_3 paraméter. A bal alsó diagramon található görbéhez húzott érintő egyenlete tartalmazza az F_2 -t és a T_2 -t, míg az F_1 és T_1 a görbe első szakaszára illesztett egyenesből származik, mely a jobb alsó diagramon látható. Az itt bemutatott lépéseket mind a hat sebességnél elvégezve a következő értékeket kapjuk (1.táblázat):

1.táblázat Sorozatos maradék módszerrel kapott értékek

Sebesség (mm/s)	Szakasz	Regressziós egyenestegyenlete	R ² értékek	F (N)	T (s)
0,1	1.	$y = -0,005x + 0,0321$	0,9916	1,03262	200,0000
0,1	2.	$y = -0,0232x - 1,1949$	0,9911	0,30273	43,1034
0,1	3.	$y = -0,2108x - 1,5228$	0,9948	0,21810	4,7438
0,3	1.	$y = -0,0024x - 1,2794$	0,9890	0,27820	416,6667
0,3	2.	$y = -0,0297x - 1,5881$	0,9953	0,20431	33,6700
0,3	3.	$y = -0,2063x - 1,4938$	0,9877	0,22452	4,8473
0,5	1.	$y = -0,0063x - 1,327$	0,9969	0,26527	158,7302
0,5	2.	$y = -0,0136x - 0,8941$	0,9922	0,40898	73,5294
0,5	3.	$y = -1,7054x - 0,7102$	0,9642	0,49155	5,8637
0,7	1.	$y = -0,0074x - 1,3019$	0,9975	0,27201	135,1351
0,7	2.	$y = -0,0149x - 0,8946$	0,9916	0,40877	67,1141
0,7	3.	$y = -0,18x - 0,061$	0,9912	0,94082	5,5556
0,9	1.	$y = -0,0045x - 1,2965$	0,9946	0,27349	222,2222
0,9	2.	$y = -0,0101x - 0,8726$	0,9865	0,41787	99,0099
0,9	3.	$y = -0,249x + 0,217$	0,9011	1,24234	4,0161
1,1	1.	$y = -0,0081x - 1,3867$	0,9965	0,24990	123,4568
1,1	2.	$y = -0,0167x - 0,9701$	0,9893	0,37905	59,8802
1,1	3.	$y = -0,3419x + 0,0657$	0,9134	1,06791	2,9248

Az F értékek esetén elmondható, hogy az F_1 értékek 0,24 és 0,28 között várhatóak (a 0,1 mm/s-os érték kiugrik, ez adódhat mérési hibából), míg az F_2 értékek 0,2 és 0,42 között mozogtak, az F_3 értékek pedig nőttek a sebesség növelésével. A T relaxációs idők természetesen az első szakaszban a legnagyobbak és egyre csökkennek.

Ezzel a módszerrel kapott eredmények a relaxációs görbék közelítésére:

$$0,1 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 1,03262N \cdot e^{-\frac{t}{200s}} + 0,30273N \cdot e^{-\frac{t}{43,1034s}} + 0,2181N \cdot e^{-\frac{t}{4,7438s}}$$

$$0,3 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 0,2782N \cdot e^{-\frac{t}{416,6668s}} + 0,20431N \cdot e^{-\frac{t}{33,67s}} + 0,22452N \cdot e^{-\frac{t}{4,8473s}}$$

$$0,5 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 0,26527N \cdot e^{-\frac{t}{158,7302s}} + 0,40898N \cdot e^{-\frac{t}{73,5294s}} + 0,49155N \cdot e^{-\frac{t}{5,8637s}}$$

$$0,7 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 0,27201N \cdot e^{-\frac{t}{135,1351s}} + 0,40877N \cdot e^{-\frac{t}{67,1141s}} + 0,94082N \cdot e^{-\frac{t}{5,5556s}}$$

$$0,9 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 0,27349N \cdot e^{-\frac{t}{222,2222s}} + 0,41787N \cdot e^{-\frac{t}{99,0099s}} + 1,24234N \cdot e^{-\frac{t}{4,0161s}}$$

$$1,1 \text{ mm/s-nál: } F = F_e + 0,24990N \cdot e^{-\frac{t}{123,4568s}} + 0,37905N \cdot e^{-\frac{t}{59,8802s}} + 1,06791N \cdot e^{-\frac{t}{2,9248s}}$$

A leggyorsabb komponens erő és relaxációs értékei változnak számottevő mértékben. A sebesség növelésével az erők nőnek, a relaxációs idők csökkennek. A nagyobb sebességeknél gyorsabb a relaxáció, meredekebb a görbe első szakasza, melyet nem tudunk helyesen leírni az általunk eddig alkalmazott módszerekkel. Erre megoldást a 4.5.-as fejezetben leírt módszer nyújthat, az úgynevezett nyújtott exponenciális függvény. A sebességfüggő paraméterek ennél a módszernél is meglesznek, de kevesebb ilyen lesz, és egyszerűbb leírást ad.

6. Összefoglalás

A munkám célja az volt, hogy megtaláljam a gomicukokat legjobban leíró reológiai modellt. Ehhez méréseket végeztem a Stable Micro System típusú precíziós asztali állományvizsgálóval. A mérésekhez a 2,00 mm átmérőjű mérőfejet használtam. A kísérlet típusa relaxáció volt, így állandó deformáció mellett vettem fel az erő-idő görbéket. Az SMS típusú penetrométert a Texture Expert nevű számítógépes program segítségével használtam. A kiértékeléseket Microsoft Excelben és MathCadben végeztem.

Kétféle kiértékelést végeztem. Eleinte alapfüggvényekkel próbáltam leírni a görbéket, majd az alapfüggvények kombinációival. Mivel ezek a közelítések nem bizonyultak elég pontosnak, tovább próbálkoztam.

A második módszer, amelyet a kiértékelés során használtam az úgynevezett sorozatos maradék módszer. Ennek alapja az, hogy az eredeti görbét több részre bontjuk, ezeket regresszióval közelítjük, és az így kapott egyenesekből ki tudjuk olvasni a feszültség és relaxációs idő komponenseket, amiket aztán egy egyenletbe rendezve megkapjuk a reológiai modell egyenletét. Ez már szép közelítést adott, ám a magasabb sebességű méréseknél megjelenő gyors komponenst ez sem tudja szépen leírni. A gyors komponens leírásához a nyújtott exponenciális függvény nyújthat segítséget. Ezen módszer alapján a mért adatok kiértékelését megkezdtem, reményeim szerint a közeljövőben csatolni tudom az eddigi eredményekhez.

Jelölések:

Latin betűk:

A – keresztmetszet

E – rugalmassági modulus

F – erő

F_e – egyensúlyi erő

l – test eredeti mérete

Δl – deformáció

t – idő

T – relaxációs idő

T_r – késleltetési vagy retardációs idő

Görög betűk:

β – a nyújtott exponenciális függvény paramétere

ε - relatív deformáció

ε_0 – kezdeti deformáció

ε_r – deformáció a rugalmas elemen

ε_v – deformáció a viszkózus elemen

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ – nyírási sebesség

η - dinamikai viszkozitás

σ - mechanikai feszültség

σ_0 – kezdeti feszültség

σ_e – egyensúlyi feszültség

σ_r – feszültség a rugalmas elemen

σ_v – feszültség a viszkózus elemen

τ – nyírófeszültség

τ_0 – határfeszültség

Táblázatok és ábrák jegyzéke

1.ábra Reológiai alapmodellek (a: Hooke-test, b: Newton-test, c: Saint-Venant-test)	5
2.ábra A rugó elem szimbóluma és feszültség-relatív deformáció függvénye	6
3.ábra A dugattyú szimbóluma és feszültség-sebesség függvénye	7
4.ábra A Saint-Venant-test szimbóluma és nyírófeszültség-relatív deformáció függvénye	7
5.ábra Kelvin modell	8
6.ábra Általánosított Kelvin modell	9
7.ábra Maxwell modell	9
8.ábra A Maxwell modell feszültség relaxációja állandó deformációnál	10
9.ábra A feszültség relaxációja állandó deformációnál valós anyagoknál	10
10.ábra Általánosított Maxwell modell	11
11.ábra Bingham modell	12
12.ábra A Texture Expert nevű számítógépes program beállításai	18
13.ábra Stable Micro System Texture Analyser (balról jobbra számítógép a program futtatásához, SMS mérőkészülék és az irányítópultja)	19
14.ábra A sorozatos maradék módszer	21
15.ábra 0,1 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	23
16.ábra 0,3 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	24
17.ábra 0,5 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	24
18.ábra 0,7 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	25
19.ábra 0,9 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	25
20.ábra 1,1 mm/s –os sebességhez tartozó relaxációs görbék	26
21.ábra 0,1 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	27
22.ábra 0,3 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	27
23.ábra 0,5 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	28
24.ábra 0,7 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	28
25.ábra 0,9 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	29
26.ábra 1,1 mm/s-os sebességhez tartozó közelítő görbék	29
27.ábra Relaxációs görbék különböző sebességek esetén	30
28.ábra Relaxációs görbék színenként	31

29.ábra	Relaxációs görbék különböző színeknél vastagabb cukorrétegen mérve	31
30.ábra	Relaxációs görbék különböző színeknél vékonyabb cukorrétegen mérve	32
31.ábra	A sorozatos maradék-módszer megértését segítő ábra	34
32.ábra	A sorozatos maradék –módszer folyamatát bemutató $\ln F$ -t diagramok	35
1.táblázat	Sorozatos maradék módszerrel kapott értékek	36

Felhasznált irodalom

BeMiller J. N. 1996. Gums/hydrocolloids: analytical aspects. In A.-C. Eliasson, Carbohydrates in food (pp. 265-281). New York: Marcel Dekker

Dr. Bogdán J., dr. Gasztonyi K., Gábor M. dr. 1992. Élelmiszer-kémia 1. Bp. Mezőgazda Kiadó

DeMars L. L., Ziegler G. R. 2001. Texture and structure of gelatin/pectin-based gummy confections. Food Hydrocolloids, 15 (2001), 643-653.

Dickinson E., & McClements D. J. 1995. Advances in food colloids, New York: Blackie Academic & Professional.

Figura L. O., Teixeira A. A. 2010. Food Physics: Physical Properties – Measurement and Applications. Springer

Foegeding E. A. 2007. Rheology and sensory texture of biopolymer gels. Current Opinion in Colloid & Interface Science 12 (2007) 242-250.

Kalab M., Allan-Wojtas P., & Miller S. S. 1995. Microscopy and other imaging techniques in food structure analysis. Trend sin Food Science and Technology, 6, 177-186.

Kinsella J. E., Rector D. J., & Phillips L. G. 1994. Physicochemical properties of proteins: texturization via gelation, glass and film formation. In R. Y. Yada, R. L. Jackman & J. L. Smith, Protein structure-function relationships in foods (pp. 1-21). New York: Blackie Academic & Professional

Mezzenga R. 2006. Equilibrium and non-equilibrium structures in complex food systems. Food Hydrocolloids, 21 (2007), 674-682

Mezzenga, R., Folmer, B. M., & Hughes, E. (2004). Design of double emulsions by osmotic pressure tailoring. *Langmuir*, 20(9), 3574–3582.

Mezzenga, R., Meyer, C., Servais, C., Romoscanu, A. I., Sagalowicz, L., & Hayward, R. C. (2005). Shear rheology of lyotropic liquid crystals: A case study. *Langmuir*, 21(8), 3322–3333.

Mezzenga, R., Schurtenberger, P., Burbidge, A., & Michel, M. (2005). Understanding foods as soft materials. *Nature Materials*, 4(10), 729–740.

Ross-Murphy B. S. (Ed.). 1994. Physical techniques for the study of food biopolymers. New York: Blackie Academic & Professional

Sitkei Gy. 1981. A mezőgazdasági anyagok mechanikája. Akadémiai Kiadó

Tóth S. 2000. Reológia, reometria. Veszprémi Egyetemi Kiadó

http://www.haribo.com/planet/hu/info/core/nutritional_info/gluten_free.php

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumicukorka>

http://hu.wikipedia.org/wiki/Ny%C3%BAjtott_exponenci%C3%A1lis_f%C3%BCggv%C3%A9ny