

TDK-dolgozat

GILIÁN ZOLTÁN



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Racionális ortogonális rendszerek a számegyenesen

Témavezető:
Dr. Fridli Sándor
Egyetemi docens

Szerző:
Gilián Zoltán
másodéves
Programtervező Informatikus
mesterszakos hallgató

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszachenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



The Project is supported by the European Union and
co-financed by the European Social Fund (grant
agreement no. TAMOP 4.2.1./B-09/1/KMR-2010-0003).

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Egységgörön értelmezett rendszerek	2
1.1. Approximáció Hilbert-terekben	2
1.2. Blaschke függvények	5
1.3. Racionális alaprendszer	5
1.4. Hardy-terek	6
1.5. Ortogonális és biortogonális rendszer	7
1.6. Diszkretizáció	8
2. Kapcsolat az egységgör és a számegyenes között	10
2.1. A Möbius transzformáció	10
2.2. Megfelelő leképezés konstrukciója	11
2.3. Geometriai jelentés	13
3. Egységgörön értelmezett függvények átvitele a számegyenesre	16
3.1. A transzformáció bevezetése	16
3.2. Skalárszorzat	19
3.3. Diszkrét skalárszorzat	20
3.4. Egyéb tulajdonságok	21
4. Az eredmények alkalmazása	22
4.1. Approximáció az egységgörön	22
4.1.1. Előtranszformáció	22
4.1.2. Diszkrét valós eset	23
4.2. Approximáció a számegyenesen	24
4.2.1. Diszkrét valós eset	25
4.3. Optimális paraméterek keresése	27
4.3.1. Nelder-Mead algoritmus	27
4.3.2. Szimulált lehűtés	29
4.3.3. Az algoritmusok összehasonlítása	31
5. Összefoglalás	35

Bevezetés

A racionális függvényekkel történő approximáció számos területen jól alkalmazható, gyakorlati jelentősége a jel- és képfeldolgozási, valamint irányításelméleti felhasználásokban is megmutatkozik. Az approximációs feladatok megoldását a gyakorlatban algoritmusok és ezek köré épült szoftvercsomagok végzik, a problémakör szorosan kapcsolódik az informatikához.

Approximációs eljárások tervezése esetén egy lehetséges megközelítés ortogonális illetve biortogonális rendszerek szerinti sorfejtést alkalmazni, amellyel egyúttal a közelítendő jel egy reprezentációja is adódik. A komplex egységkörön értelmezett racionális ortogonális [1] és biortogonális [2] rendszerekre számos eredmény ismert. Ezen eredmények az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszékén folyó, EKG görbék feldolgozásával foglalkozó kutatási projektjében számos ponton felhasználásra kerültek [3] [4].

Előnyös lenne, ha ezen eszközök a gyakorlatban sűrűn előforduló valós változós esetben is felhasználhatóak lennének. A dolgozat célja az említett eredmények átvitele a számegyenesen értelmezett függvények esetére, valamint ezek alkalmazása racionális approximációs algoritmusok implementálására.

Az első fejezet röviden ismerteti az egységkörön értelmezett rendszerekre vonatkozó eredményeket, bevezeti a későbbi fejezetekben használt jelöléseket.

A második fejezet a számegyeneset az egységkörre képező racionális függvények keresésével és jellemzésével foglalkozik.

A harmadik fejezetben bevezetésre kerül egy egységkörön értelmezett racionális függvényeket számegyenesre transzformáló operátor, melyet e leképezés tulajdonságainak vizsgálata követ.

A negyedik fejezet az eredmények racionális approximációra történő alkalmazását tárgyalja. A fejezet kitér a paraméterek beállításának kérdéskörére, összehasonlítva két elterjedt optimalizációs eljárást – a Nelder-Mead és a szimulált lehűtés algoritmusokat.

1. fejezet

Egységkörön értelmezett rendszerek

Ebben a fejezetben az egységkörön értelmezett racionális ortogonális és biortogonális rendszerekkel kapcsolatos, a dolgozatban használt definíciók és eredmények szerepelnek.

1.1. Approximáció Hilbert-terekben

Ortogonalis és biortogonalis rendszerek használatát a Hilbert-térbeli (általánosabban euklideszi-térbeli) approximáció problémájával kapcsolatos előnyök motiválják. Ebben a részben röviden áttekintjük a problémakör e dolgozathoz szükséges részét.

Legyen (X, ρ) metrikus tér, $x \in X$, $L \subseteq X$. Az x elem L halmaztól vett távolsága definíció szerint

$$\rho(x, L) := \inf_{l \in L} \rho(x, l).$$

Az $l \in L$ elem extrémális vagy legjobban közelítő elem pontosan akkor, ha

$$\rho(x, l) = \rho(x, L).$$

Ismert, hogy Hilbert-térben zárt altérhez egyértelműen létezik legjobban közelítő elem, és az lényegében merőleges vetítéssel állítható elő.

Tekintsük az approximációs feladatot most végesdimenziós altéren. Normált térben végesdimenziós alterek zártak. Legyen $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert tér, $f \in H$,

$$L = \text{Span} \{g_k \in H \mid k = 0, \dots, n\}$$

véges dimenziós altér. Az $f' \in L$ legjobban közelítő elemre

$$\forall g \in L : \langle f - f', g \rangle = 0.$$

A fenti feltételt elegendő az alteret kifeszítő $(g_k, k = 0, \dots, n)$ rendszerre megkövetelni. Mivel $f' \in L$, ezért

$$f' = \sum_{j=0}^n c_j g_j,$$

ahonnan

$$0 = \langle f - f', g_k \rangle = \langle f, g_k \rangle - \left\langle \sum_{j=0}^n c_j g_j, g_k \right\rangle \quad (k = 0, \dots, n),$$

azaz

$$\sum_{j=0}^n c_j \langle g_j, g_k \rangle = \langle f, g_k \rangle \quad (k = 0, \dots, n).$$

Ha a $(g_k, k = 0, \dots, n)$ rendszer ortogonális, akkor a bal oldalon álló szummában csupán egyetlen tag nem nulla, így a c_k együtthatók egyszerűen kifejezhetők:

$$c_k = \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}.$$

A legjobban közelítő elemet előállító ún. projekciós operátor ekkor

$$S_n f := \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k.$$

Bizonyítható, hogy az

$$L = \overline{\text{Span} \{g_k \in H \mid k \in \mathbb{N}\}}$$

végtelen dimenziós esetben az

$$Sf := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k$$

projekciós operátor is előállítja a legjobban közelítő elemet.

Amennyiben az L alteret kifeszítő rendszer nem ortogonális, a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással elérhető a kívánt tulajdonság, ekkor azonban az approximáció eredménye egy ortogonalizált rendszer szerinti lineáris kombináció lesz. Ha az adott alkalmazáshoz jobban illeszkedik az eredeti rendszer szerinti reprezentáció, akkor érdemes biortogonális rendszereket tekinteni.

Egy $(h_k \in H, k \in \mathbb{N})$ rendszert akkor nevezünk a $(g_k, k \in \mathbb{N})$ rendszerre vonatkozóan biortogonálisnak, ha

$$\langle g_j, h_k \rangle = 0 \quad (k \neq j).$$

Ismét tekintsük a véges dimenziós esetet, ekkor

$$\langle f - f', h_k \rangle = \langle f, h_k \rangle - \sum_{j=0}^n c_j \langle g_j, h_k \rangle = \langle f, h_k \rangle - c_k \langle g_k, h_k \rangle.$$

Általában nem igaz, hogy $\langle f - f', h_k \rangle = 0$, de ha a $(h_k, k = 0, \dots, n)$ rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki, mint a $(g_k, k = 0, \dots, n)$ rendszer, akkor teljesül. Ekkor

$$c_k = \frac{\langle f, h_k \rangle}{\langle g_k, h_k \rangle},$$

és a

$$P_n f := \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, h_k \rangle}{\langle g_k, h_k \rangle} g_k$$

biortogonális projekciós operátor előállítja a legjobban közelítő elemet, ugyanis

$$\begin{aligned} \langle f - P_n f, h_k \rangle &= \langle f, h_k \rangle - \sum_{j=0}^n \frac{\langle f, h_j \rangle}{\langle g_j, h_j \rangle} \langle g_j, h_k \rangle \\ &= \langle f, h_k \rangle - \frac{\langle f, h_k \rangle}{\langle g_k, h_k \rangle} \langle g_k, h_k \rangle \\ &= \langle f, h_k \rangle - \langle f, h_k \rangle = 0, \end{aligned}$$

ahonnan $f - P_n f$ merőleges az L alterre.

Bizonyítható, hogy az

$$L = \overline{\text{Span} \{g_k \in H \mid k \in \mathbb{N}\}}$$

végtelen dimenziós esetben ha a $(h_k \in H, k \in \mathbb{N})$ és a $(g_k, k \in \mathbb{N})$ rendszerek ugyanazokat az altereket feszítik ki, akkor a

$$P f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, h_k \rangle}{\langle g_k, h_k \rangle} g_k$$

biortogonális projekciós operátor is előállítja a legjobban közelítő elemet.

1.2. Blaschke függvények

Az egységgörre vonatkozó eredmények ismertetéséhez szükség van a Blaschke függvények fogalmára.

Jelölje $\mathbb{T}$ a komplex egységgört (*tóruszt*)

$$\mathbb{T} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\},$$

és $\mathbb{D}$ a nyílt komplex egységgörlemez (*diszket*)

$$\mathbb{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \right\}.$$

Az alábbi

$$B_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (z, a \in \mathbb{C})$$

leképezéseket *Blaschke függvényeknek* nevezzük. Ezek olyan komplex racionális függvények, melyek $a \in \mathbb{D}$ esetén $\mathbb{D}$ -ről $\mathbb{D}$ -re és $\mathbb{T}$ -ről $\mathbb{T}$ -re képző bijekciók. Ez utóbbi tulajdonság miatt érvényes

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol $a = re^{i\varphi}$, $s = \frac{1+r}{1-r}$ esetén

$$\beta_a(t) = 2 \arctg\left(\operatorname{stg} \frac{t - \varphi}{2}\right) + \varphi. \quad (1.1)$$

1.3. Racionális alaprendszer

A dolgozatban racionális függvényekkel foglalkozunk. Ismert, hogy tetszőleges racionális függvény felírható az

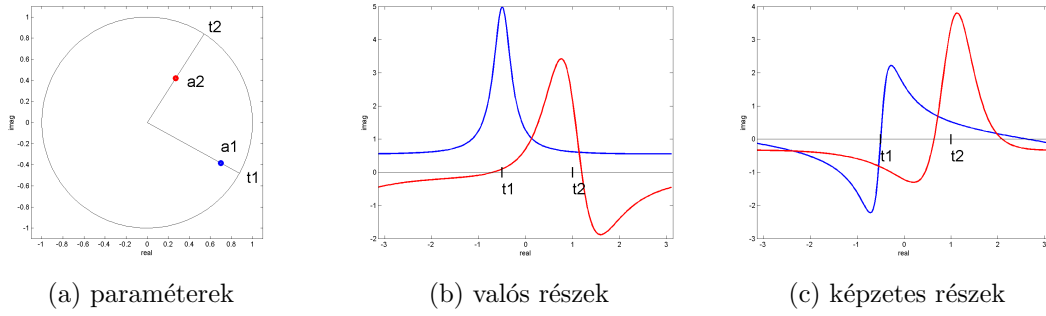
$$\phi_{a,n}(z) = \frac{z^{n-1}}{(1 - \bar{a}z)^n} \quad (a, z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n > 0) \quad (1.2)$$

racionális alapfüggvények lineáris kombinációjaként.

Az itt vizsgált racionális függvényekről megköveteljük, hogy értelmezve legyenek a teljes $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ zárt egységgörlemezen. $\phi_{a,n}$ csak a $z = \frac{1}{a}$ pontban nem értelmezett, ezért az a paramétert a $\mathbb{D}$ halmazból választjuk. Az $\frac{1}{a}$ pontot a függvény pólusának, az a pontot a függvény inverz pólusának nevezzük.

Az 1.1 ábrán két racionális alapfüggvény grafikonja látható.

Mivel a komplex racionális függvények differenciálhatók az értelmezési tartományuk pontjaiban, ezért az említett paraméterválasztás mellett $\phi_{a,n}$ analitikus a zárt diszken. Jelölje $\mathfrak{R}$ a zárt diszken analitikus racionális függvények terét. Ezt



1.1. ábra. A $\phi_{a,n}$ racionális alapfüggvények a tóruszon.

a teret feszítik ki a racionális alapfüggvények:

$$\mathfrak{R} = \overline{\text{Span} \{ \phi_{a,k} \mid a \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}, n > 0 \}}.$$

1.4. Hardy-terek

Ortogonalis és biortogonalis rendszerek bevezetéséhez skalárszorzatra van szükség. Természetes választás lenne alaptérként az $L^2(\mathbb{D})$ Hilbert-teret tekinteni, viszont a $\phi_{a,n}$ függvények analitikus volta miatt célszerű csak az analitikus függvényekre szorítkozni. Ez vezet a Hardy-terek fogalmához.

A $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ ($0 < p \leq \infty$) Hardy-tér az olyan $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ diszken analitikus függvényeket tartalmazza, amelyekre

$$\|F\|_{\mathcal{H}^p} := \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

A $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}$ $1 \leq p \leq \infty$ esetén norma, $0 < p < 1$ esetén pedig kvázinorma, valamint ezen normát (kvázinormát) tekintve $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$ teljes.

A Hardy-terekhez tartozó függvények kiterjeszthetők a tóruszra, ugyanis a

$$F(e^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1} F(re^{it})$$

határérték m.m. $t \in [-\pi, \pi)$ esetén létezik. Az így nyert határfüggvény az $L^p(\mathbb{T})$ térhez tartozik, és $\|F\|_{\mathcal{H}^p} = \|F\|_p$.

$\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ Hilbert-tér az alábbi skalárszorzattal:

$$\langle f, g \rangle = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \bar{g}(e^{it}) dt.$$

$\mathfrak{R} \subset \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ így az $\mathfrak{R}$ téren már rendelkezésünkre áll egy skalárszorzat.

1.5. Ortogonális és biortogonális rendszer

A továbbiakban tárgyalt rendszereket egy $\mathbf{a} = (a_k, k \in \mathbb{N})$ ($a_k \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}$) sorozattal paraméterezzük. A sorozat elemeihez bevezetünk kétféle multiplicitás-fogalmat. Az a_k elem *multiplicitása* alatt az

$$m_k = \sum_{a_j=a_k, 0 \leq j \leq k} 1,$$

n-multiplicitása alatt az

$$M_k^{(n)} = \sum_{a_j=a_k, 0 \leq j \leq n} 1$$

számot értjük. Bevezetjük az alábbi jelölést az (1.2) racionális alaprendszer $\mathbf{a}$ sorozattal paraméterezett változatára:

$$\phi_n^{\mathbf{a}}(z) := \phi_{a_n, m_n} = \frac{z^{m_n-1}}{(1 - \bar{a}_n z)^{m_n}}.$$

Az 1.1 részben láttuk, hogy az $\mathfrak{R}$ altérbeli legjobban közelítő elem meghatározását nagyban megkönnyíti, ha rendelkezésre áll egy altérbeli ortogonális bázis. Ez elérhető a $(\phi_k^{\mathbf{a}}, k \in \mathbb{N})$ ortogonalizálásával. Az így kapott $(\Phi_k^{\mathbf{a}}, k \in \mathbb{N})$ ortonormált rendszert nevezzük *Malmquist-Takenaka* rendszernek [1]:

$$\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) = R_{a_n}(z) \prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z). \quad (1.3)$$

ahol

$$R_a(z) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z}.$$

Ha $\mathbf{a} = (a, a, \dots)$, azaz minden inverz pólus azonos, akkor a Malmquist-Takenaka rendszert *diszkrét Laguerre* rendszernek, ha $\mathbf{a} = (a, b, a, b, \dots)$, akkor *Kautz* rendszernek is nevezik.

A $(\phi_k^{\mathbf{a}}, 0 \leq k \leq n)$ véges rendszerhez biortogonális rendszer konstruálható [2]:

$$\Psi_l^{\mathbf{a}} := \frac{\Omega_{ln}(z)(z - a_l)^{m_l-1}}{\Omega_{ln}(a_l)} \sum_{s=0}^{M_l^{(n)}-m_l} \frac{\omega_{ln}^{(s)}(a_l)}{s!} (z - a_l)^s \quad (0 \leq l \leq n), \quad (1.4)$$

ahol

$$\Omega_{ln}(z) := \frac{1}{(1 - \bar{a}_l z)^{M_l^{(n)}}} \prod_{i=0, a_i \neq a_l}^n B_{a_i}^{M_i^{(n)}}(z)$$

$$\omega_{ln}(z) := \frac{\Omega_{ln}(a_l)}{\Omega_{ln}(z)}.$$

Az ω_{ln} függvény deriváltjainak kiszámítására [2] tartalmaz képletet. Az $\mathbf{a}$ -tól való függést itt nem tüntettük fel.

A $(\Psi_k^{\mathbf{a}}, 0 \leq k \leq n)$ rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki, mint $(\phi_k^{\mathbf{a}}, 0 \leq k \leq n)$.

1.6. Diszkretizáció

Eddig egy folytonos modell szerinti ortogonalitással illetve biortogonalitással foglalkoztunk, a számítógépes feldolgozáshoz azonban jobban illeszkednek a diszkrét rendszerek. Ebben a részben bevezetünk egy diszkrét skalárszorzat-fogalmat, majd ismertetjük a Malmquist-Takenaka és a Ψ rendszerek diszkrét ortogonalitására illetve biortogonalitására vonatkozó eredményeket.

Jelölje $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a végtelen szimbóllummal kiegészített komplex számsíkot. Legyen $A \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ alaphalmaz, $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ két függvény, $A_N \subseteq A$, $|A_N| = N \in \mathbb{N}$ diszkretizációs pontok egy halmaza, valamint $\rho_N : A \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív súlyfüggvény. Ekkor f és g diszkrét skaláris szorzata:

$$[f, g]_{A_N, \rho_N} := \sum_{z \in A_N} f(z) \overline{g(z)} \rho_N(z). \quad (1.5)$$

Az $A = \mathbb{T}$ esetet tekintve megadható olyan $\mathbb{T}_N$ alappontrendszer és ρ_N súlyfüggvény, melyekre nézve a Malmquist-Takenaka és a Ψ rendszerek diszkrét értelemben ortogonálisak illetve biortogonálisak. Legyen

$$\theta_N^{\mathbf{a}}(t) := \sum_{j=0}^N \beta_{a_j}(t),$$

ahol $\beta_{a_j}(t)$ a B_{a_j} Blaschke-függvény tóruszon tekintett argumentumfüggvénye (1.1). Megmutatható [1], hogy tetszőleges τ_0 -ra, minden $k = 0, \dots, n$ esetén pontosan egy olyan $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$ létezik, melyre

$$\theta_N^{\mathbf{a}}(\tau_k) = \theta_N^{\mathbf{a}}(\tau_0) + 2k\pi$$

teljesül. Ezen τ_k számok segítségével definiálható a diszkretizációs pontok

$$\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}} := \{e^{i\tau_k} \mid k = 0, \dots, N-1\} \quad (1.6)$$

halmaza. A súlyfüggvény

$$\rho_N^{\mathbf{a}}(e^{it}) := \frac{1}{(\theta_N^{\mathbf{a}})'(t)} \quad (1.7)$$

választásával teljesül a megfelelő rendszerek diszkrét ortogonalitása illetve biortogonalitása [1] [2]:

$$[\Phi_k^{\mathbf{a}}, \Phi_l^{\mathbf{a}}]_{\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}, \rho_N^{\mathbf{a}}} = \delta_{kl}$$

$$[\phi_k^{\mathbf{a}}, \Psi_l^{\mathbf{a}}]_{\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}, \rho_N^{\mathbf{a}}} = \delta_{kl}.$$

A fent ismertetett eredmények alapján készült a RAIT racionális approximációs szoftvercsomag [4], amelyben mind az ortogonális, mind a biortogonális projekció folytonos és diszkrét változatának implementációja is szerepel.

2. fejezet

Kapcsolat az egységgör és a számegyenes között

Ebben a fejezetben olyan invertálható racionális leképezést keresünk, amellyel a számegyenes pontjai átvihetők a komplex egységgörre. A keresett leképezés racionális voltára vonatkozó megszorítást az indokolja, hogy a racionális függvények halmaza zárt a kompozícióra, így egy egységgörön értelmezett racionális függvénynek a keresett leképezéssel vett kompozíciója egy számegyenesen értelmezett racionális függvény lesz.

A legegyszerűbb kellő erővel rendelkező racionális leképezés az $\frac{\text{elsőfokú}}{\text{elsőfokú}}$ ún. Möbius transzformáció.

2.1. A Möbius transzformáció

A *Möbius transzformáció* a végtelennel kiegészített $\hat{\mathbb{C}}$ komplex számsíkot önmagára leképező invertálható racionális függvény:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

ahol $ad - bc \neq 0$. A transzformáció $c = 0$ esetén egy lineáris leképezés, ellenkező esetben pedig jól értelmezhető leképezések kompozíciójára bontható [5]:

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

A felbontásban csak eltolás ($z \mapsto z + v$), forgatva nyújtás ($z \mapsto vz$), egységgörre vonatkozó inverzió ($z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$) és valós tengelyre történő tükrözés ($z \mapsto \bar{z}$) szerepel. Továbbá ismert, hogy a Möbius transzformáció egy egyenest illetve egy kört egyenesbe vagy körbe visz át, valamint a transzformáció egy vagy kettő fixponttal rendelkezik.

2.2. Megfelelő leképezés konstrukciója

A Möbius transzformáció fenti tulajdonságainak ismeretében racionális függvényt konstruálunk, amely a valós tengelyt – a számegyeneset – a komplex egységkörbe képi. Megmutatható [5], hogy ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a korábbi jelölésekkel $c \neq 0$, $|\frac{a}{c}| = 1$ és $\frac{b}{a} = \overline{(\frac{d}{c})}$ teljesüljön. Bevezetve a $k = \frac{a}{c}$ és a $\alpha = -\frac{b}{a}$ jelöléseket, a következő alakhoz jutunk:

$$L_{\alpha,k}(z) = k \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

ahol $|k| = 1$. Továbbá ha $\text{Im } \alpha > 0$, akkor f a felső félsíkot az egységkör belsejébe viszi, ugyanis $f(\alpha) = 0$. Hasonlóan, ha $\text{Im } \alpha < 0$, akkor az alsó félsík képe lesz az egységkör belseje. $\text{Im } \alpha = 0$ az $ad - bc \neq 0$ feltétel miatt nem fordulhat elő.

Vizsgáljuk meg, hogy a paraméterek választása hogyan befolyásolja a transzformációt! Legyen $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} L_{\alpha,k}(z) &= k \frac{z - (a + bi)}{z - (a - bi)} \\ &= k \frac{\frac{z-a}{b} - i}{\frac{z-a}{b} + i} \\ &= -kL\left(\frac{z-a}{b}\right), \end{aligned}$$

ahol

$$L(z) = \frac{i - z}{i + z}.$$

Tehát az α paraméter valós része egy translációt, képzetes része (annak reciproka) pedig egy dilatációt jelent. A k paraméter egy forgatást ír le a komplex síkon. Az L leképezés tekinthető az $a = 0$, $b = 1$, $k = -1$ paraméterek melletti speciális esetnek, azaz $L = L_{i,-1}$, ezért L is egy számegyenesről egységkörbe képző invertálható leképezés, amely $\text{Im } \alpha = 1 > 0$ miatt a pozitív képzetes résszel rendelkező komplex számok félsíkját (felső félsík) az egységkör belsejére képi le. Megjegyzendő, hogy L definíciójába olvasztott előjel ezen a ponton nem tűnik kézenfekvőnek, később ez mégis kényelmesebbé teszi a tárgyalást.

Az f függvény valós tengelyen felvett értékei tehát az egységkörtől vannak, ezért $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$L_{\alpha,k}(x) = e^{i\varphi(x)},$$

ahol a φ függvény az $L_{\alpha,k}|_{\mathbb{R}}$ argumentuma (másképpen fázisa). Ennek meghatáro-

zásához vizsgáljuk meg az $\ln(L(x))$ függvényt!

$$\begin{aligned}\ln(L(x)) &= \ln(i - x) - \ln(i + x) \\ &= \ln(i(1 - ix)) - \ln(i(1 + ix)) \\ &= \ln i - \ln i + \ln(1 - ix) - \ln(1 + ix) \\ &= 2i \operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Felhasználva az $\ln$ és az arctg függvények kapcsolatára vonatkozó

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}i(\ln(1 - ix) - \ln(1 + ix))$$

összefüggést:

$$L_{\alpha,k}(x) = -ke^{i2\operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}}.$$

Az arctg függvény tulajdonságai alapján $L_{\alpha,k}|_{\mathbb{R}}$ értékkészlete $\mathbb{T} \setminus \{k\}$, speciálisan $\mathcal{R}_{L|_{\mathbb{R}}} = \mathbb{T} \setminus \{-1\}$. Kényelmi okokból vezessük be az $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jelölést, és tekintsük az $L_{\alpha,k}$ függvényeket az $\hat{\mathbb{R}}$ végtelennel kiegészített számegyenesen értelmezettnek, azaz

$$\begin{aligned}L_{\alpha,k} : \hat{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{T} \\ L_{\alpha,k}(\infty) &:= \lim_{\infty} L_{\alpha,k} = k.\end{aligned}$$

Speciálisan $L(\infty) = \lim_{\infty} L = -1$.

A fejezetben tárgyalt leképezés inverze könnyen számolható:

$$\begin{aligned}L_{\alpha,k}^{-1}(z) &= bL^{-1}\left(-\frac{z}{k}\right) + a, \text{ ahol} \\ L^{-1}(z) &= -i\frac{z-1}{z+1},\end{aligned}$$

ha $z \neq k$. $L_{\alpha,k}^{-1}(k) = \infty$. Világos, hogy $L_{\alpha,k}^{-1}$ is racionális. Az inverz a tóruszon

$$L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it}) = b \operatorname{tg} \frac{t - \tau}{2} + a \tag{2.1}$$

alakba írható, ahol $k = -e^{i\tau}$. Ezek a függvények az egységgörte a végtelennel kiegészített valós tengelyre viszik.

A mérnöki gyakorlatban elterjedt az ún. *bilineáris leképezés*:

$$I(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

amely IIR (Infinite Impulse Response) szűrők tervezésére használható [6]. A bilineáris leképezés értelmezhető a fent tárgyalt L^{-1} függvény után alkalmazott $+\frac{\pi}{2}$

szöggel való forgatásként: $I(z) = i L^{-1}(z)$. Ennek következtében az I leképezés az egységkörrel az imaginárius tengelyre képez, valamint az egységkör belsejének pontjait a negatív valós részű komplex számok (bal) félsíkjára viszi.

2.3. Geometriai jelentés

Az előző szakaszban tárgyaltak alapján az L leképezés számegyenesen történő viselkedése ismert, valamint megállapításra került, hogy az említett leképezés a felső félsíkot az egységkör belsejébe viszi. Mindezekon felül az L leképezés hatása geometriai szemlélettel is értelmezhető.

Tekintsük tehát az

$$L(z) = \frac{i - z}{i + z}$$

leképezést. Elvégezve a 2.1 részben látott dekompozíciót a következő alakhoz jutunk:

$$L(z) = -1 + \frac{2i}{z + i} = -1 + \frac{2}{-iz + 1}.$$

Ennek értelmezéséhez vizsgáljuk meg a p középpontú, R sugarú körre vonatkozó inverziót! A leképezés a $z \neq p$ pontot a z' pontba viszi, ahol p , z és z' egy egyenesre esnek, és $|z - p| \cdot |z' - p| = R^2$. A középpont és ∞ egymás képei. Ennek megfelelően:

$$\begin{aligned} g(z) &= p + (z - p) \frac{R^2}{|z - p|^2} \\ &= p + (z - p) \frac{R^2}{(z - p)(\overline{z - p})} \\ &= p + \frac{R^2}{\overline{z - p}}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$|g(z) - p| |z - p| = R^2.$$

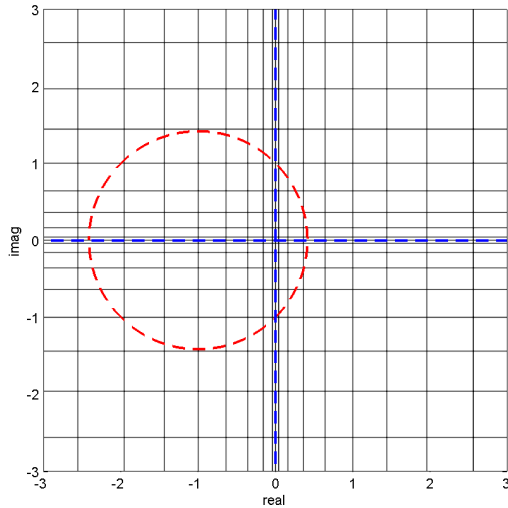
Speciálisan, ha $p = -1$ és $R = \sqrt{2}$, akkor

$$g(z) = -1 + \frac{2}{\overline{z - (-1)}}.$$

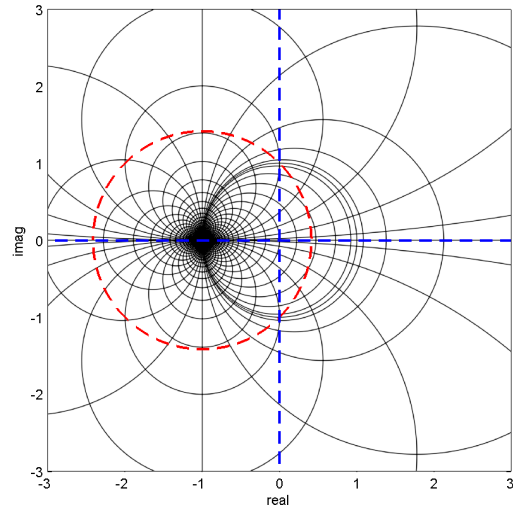
Ezek alapján

$$\begin{aligned} L(z) &= -1 + \frac{2}{-iz + 1} \\ &= -1 + \frac{2}{\overline{i\bar{z} - (-1)}} \\ &= g(i\bar{z}). \end{aligned}$$

A $z \mapsto i\bar{z}$ leképezés egy origó középpontú $+\frac{\pi}{2}$ szögű forgatás és egy valós tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés egymásutánja, ami ekvivalens az $x = y$ egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel. Az L leképezés tehát az $x = y$ tengelyre történő tükrözésre és a $(0, -1)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körre vonatkozó inverzióra bontható (2.1 ábra).



(a) Négyzetes finomságú rács



(b) Inverzió által létesített kép

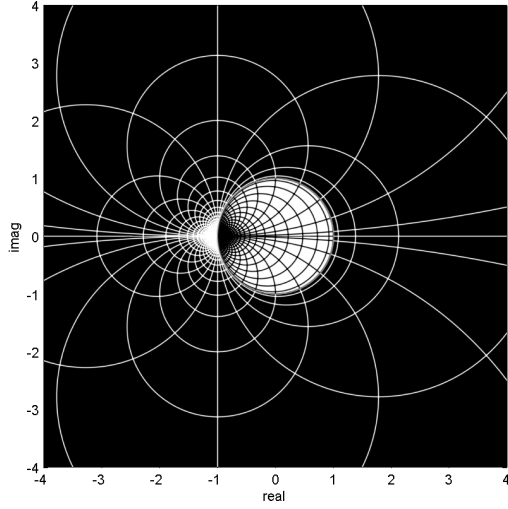
2.1. ábra. Négyzetesen növekvő finomságú rács -1 középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körre vonatkozó inverzió által létesített képe. A képzetes tengely az egységgörre kerül.

Az L leképezés inverze

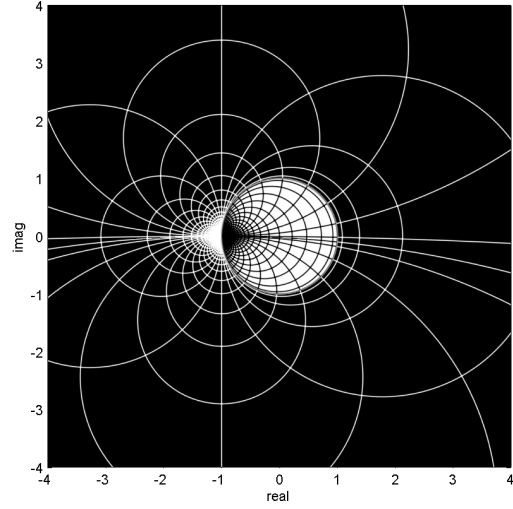
$$L^{-1}(z) = -i \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Mivel mind a tengelyes tükrözés, mind a körre vonatkozó inverzió önmagának a kompozíció művelet szerinti inverze, ezért az L^{-1} leképezés a korábbi észrevételek alapján a megfelelő tengelyes tükrözés és körre vonatkozó inverzió fordított sorrendű alkalmazásaként értelmezhető.

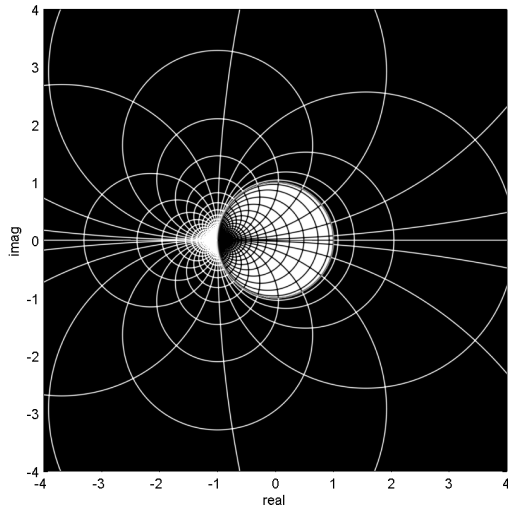
Az $L_{a+bi,k} = -kL\left(\frac{z-a}{b}\right)$ leképezést tekintve a paraméterek hatását a 2.2 ábrán szemléltetjük.



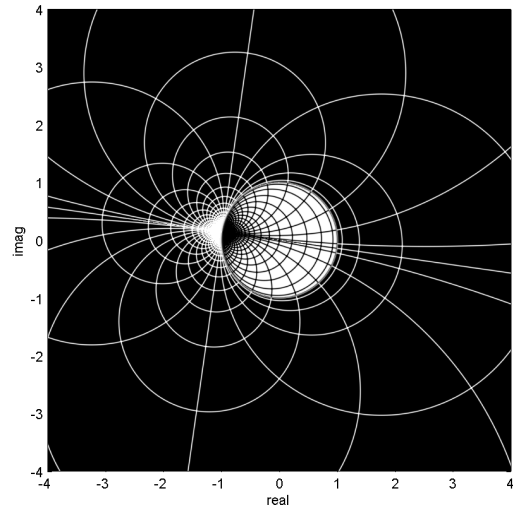
(a) $\alpha = i, k = -1$



(b) $\alpha = i + 0.05, k = -1$



(c) $\alpha = 1.05i, k = -1$



(d) $\alpha = i, k = e^{3i}$

2.2. ábra. Négyzetes finomságú rács $L_{\alpha,k}$ által létesített képe. $\text{Re } \alpha$ változtatása egy vízszintes (valós tengellyel párhuzamos) irányú transzlációt jelent az inverzió argumentumában, az $x = y$ egyenesre vonatkozó tükrözés hatására ez egy függőleges irányú torzulást eredményez. $\text{Im } \alpha$ változtatása egy függőleges irányú nyújtásnak felel meg, a képtérben ez vízszintes irányú torzuláshoz vezet. A k paraméter képtérbeli forgatást ír le. A felső félsík képe az egységkör belseje (fehér háttéren fekete vonalak), az alsó félsík képe az egységkörtől kívüli rész (fekete háttéren fehér vonalak).

3. fejezet

Egységgörön értelmezett függvények átvitele a számegyenesre

Az előző részben bevezetett $L_{\alpha,k}$ racionális leképezések segítségével az egységgörön értelmezett függvények számegyenesen értelmezett függvényekké transzformálhatók. Ez a fejezet egy ilyen transzformációt definiál és annak tulajdonságait vizsgálja.

3.1. A transzformáció bevezetése

Az 1.4 szakaszban bevezettük a $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ Hardy-teret és ennek $\mathfrak{R}$ racionális függvényeket tartalmazó alterét. Bár az egységgörre vonatkozó eredmények ezen terekhez köthetőek, a kérdéses transzformáció ennél általánosabban is bevezethető.

Tekintsük az $L^2(\mathbb{T})$ Lebesgue-teret az

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$$

skalárszorzzattal, valamint az $L^2_{\gamma}(\mathbb{R})$ súlyozott Lebesgue-teret az

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{R}, \gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \gamma(x) dx$$

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ súlyfüggvénnyel értelmezett skalárszorzzattal. Mindkét tér teljes.

Bevezetjük ezen terek racionális függvényeket tartalmazó alábbi altereit:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{\mathbb{T}} &= \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ racionális}\} \\ \mathfrak{R}_{\mathbb{R}} &= \left\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ racionális, } \lim_{-\infty} f = \lim_{\infty} f\right\}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Az $\mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$ -beli függvényekre bevezetjük az $f(\infty) := \lim_{\pm\infty} f$ jelölést, így $\mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$ elemei $\hat{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ típusú függvényeknek is tekinthetők.

Legyen adott egy $f \in \mathfrak{R}_{\mathbb{T}}$ tóruszon értelmezett racionális függvény. Mivel $L_{\alpha,k}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ és $L_{\alpha,k}$ racionális, ezért $Tf := f \circ L_{\alpha,k}|_{\mathbb{R}}$ egy számegyenesen értelmezett racionális függvény. Világos, hogy $Tf \in \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$, ugyanis $\lim_{\pm\infty} Tf = f(L_{\alpha,k}(\infty)) = f(k)$.

Most már bevezethetjük a keresett transzformációt:

$$T_{\alpha,k} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2_{\gamma}(\mathbb{R}), \quad T_{\alpha,k}f(x) = f(L_{\alpha,k}(x)). \quad (3.2)$$

A fenti gondolatmenet alapján $T|_{\mathfrak{R}_{\mathbb{T}}} : \mathfrak{R}_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}$. Megjegyezzük, hogy a $T_{\alpha,k}$ leképezés tekinthető egy $\text{Im } \alpha > 0$ esetén felső, $\text{Im } \alpha < 0$ esetén alsó félsíkon értelmezett függvényeket diszken értelmezett függvényekké transzformáló operátornak is.

A $T_{\alpha,k}$ operátor inverze

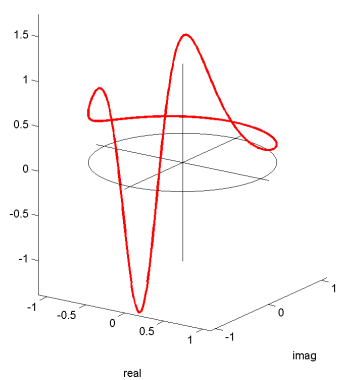
$$T_{\alpha,k}^{-1} : L^2_{\gamma}(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad T_{\alpha,k}^{-1}f(z) = f(L_{\alpha,k}^{-1}(z)).$$

Tekintsünk egy példát az imént bevezetett transzformáció végrehajtására. Az (1.3) Malmquist-Takenaka rendszer a következőképpen vihető át a számegyenesre:

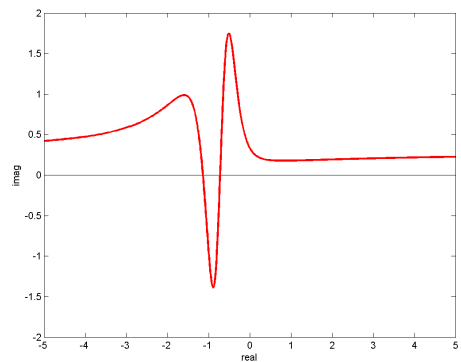
$$T_{\alpha,k}\Phi_n^a(x) = T_{\alpha,k}R_{a_n}(x) \prod_{j=0}^{n-1} T_{\alpha,k}B_{a_j}(x),$$

ahol

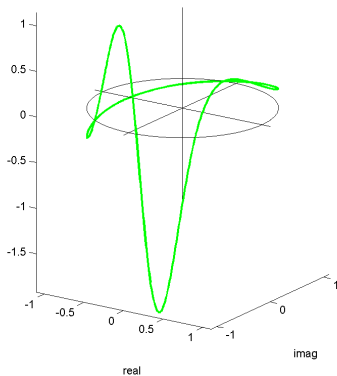
$$\begin{aligned}T_{\alpha,k}R_a(x) &= \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}L_{\alpha,k}(x)} \\ &= \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}k^{\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}}} \\ &= \frac{\sqrt{1-|a|^2}(x-\bar{\alpha})}{k\bar{a}\alpha - \bar{\alpha} + x(1-k\bar{a})},\end{aligned}$$



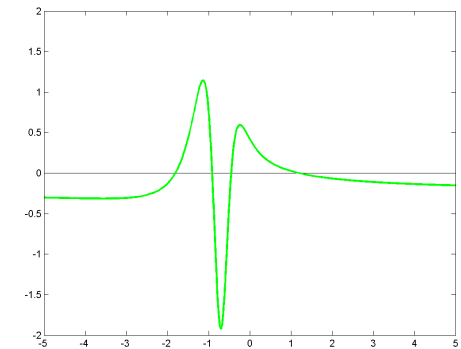
(a) $\text{Re } f$



(b) $\text{Re } T_{i,-1} f$



(c) $\text{Im } f$



(d) $\text{Im } T_{i,-1} f$

3.1. ábra. A $T_{\alpha,k}$ transzformáció ($\alpha = i$, $k = -1$). A piros szín a valós részt, a zöld a képzetes részt jelöli.

illetve az átttranszformált Blaschke-függvények:

$$\begin{aligned} \text{TB}_a(x) &= \frac{L_{\alpha,k}(x) - a}{1 - \bar{a}L_{\alpha,k}(x)} \\ &= \frac{k \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}} - a}{1 - \bar{a}k \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}} \\ &= \frac{a\bar{\alpha} - k\alpha + x(k-a)}{k\bar{a}\alpha - \bar{a} + x(1-k\bar{a})}. \end{aligned}$$

A továbbiakban kényelmi okokból a $T := T_{\alpha,k}$ rövidítés szerepel.

3.2. Skalárszorzat

A fent bevezetett transzformációval ortogonális és biortogonális rendszerek számegyenesre történő átvitele a célunk, amihez alapvető fontosságú, hogy T transzformáció megtartsa az ortogonalitást. Megvizsgáljuk, hogy milyen γ súlyfüggvény esetén lesz a T transzformáció ilyen tulajdonságú.

Legyen $\alpha = a + bi$, ekkor

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-ke^{it}) \overline{g(-ke^{it})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-ke^{i2\arctg \frac{x-a}{b}}) \overline{g(-ke^{i2\arctg \frac{x-a}{b}})} \frac{2}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Tf(x) \overline{Tg(x)} \frac{1}{b\pi \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} dx.\end{aligned}$$

Az első átalakítás $t+\tau$ helyettesítéssel adódik $-k = e^{i\tau}$ mellett, megjegyezve, hogy az integrálási határokat a periodicitás miatt nem kell változtatni. A második lépésben az $x = 2\arctg \frac{x-a}{b}$ helyettesítés került alkalmazásra.

Mindezek alapján ha a súlyfüggvényre

$$\gamma_{\alpha,k}(x) = \frac{1}{b\pi \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)}$$

teljesül, akkor

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = \langle Tf, Tg \rangle_{\mathbb{R}, \gamma_{\alpha,k}},$$

azaz a transzformáció skalárszorlattartó az $L^2(\mathbb{T})$ és az $L^2_{\gamma}(\mathbb{R})$ terek között.

A $\gamma_{\alpha,k}$ súlyfüggvény nevezője a komplex számtest felett két elsőfokú polinom szorzatára bontható:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b\pi \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} &= \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 - i\frac{x-a}{b}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} \right)},\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} T f(x), \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} T g(x) \right\rangle_{\mathbb{R}} dx = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} T f(x) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} T g(x) \right)} dx = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} T f(x) \overline{T g(x)} \frac{1}{b\pi \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} dx = \\
& \langle T f, T g \rangle_{\mathbb{R}, \gamma_{\alpha, k}} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}}.
\end{aligned}$$

Az $\frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} T$ leképezés tehát skalárszorlattartó az $L^2(\mathbb{T})$ és az $L^2(\mathbb{R})$ terek között.

A leképezés segítségével racionális $L^2(\mathbb{R})$ ortogonális rendszer szerkeszthető.

Példaként tekintsük a $(z \mapsto z^n, n \in \mathbb{N})$ $L^2(\mathbb{T})$ -beli rendszert. Ez azonos a jól ismert trigonometrikus rendszerrel $(t \mapsto e^{int}, n \in \mathbb{N})$, ami ortogonális. Másrésről vizsgált függvények a diszkrét Laguerre rendszer speciális eseteként is tekinthetők (minden inverz pólus 0). Ekkor az átvitt rendszer

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{b\pi} \left(1 + i\frac{x-a}{b}\right)} \left(-k \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right)^n &= \frac{i\sqrt{b}}{\sqrt{\pi} (ib - x + a)} (-k)^n \frac{(x-\alpha)^n}{(x-\bar{\alpha})^n} \\
&= \frac{-i\sqrt{b}}{\sqrt{\pi} (x-\alpha)} (-k)^n \frac{(x-\alpha)^n}{(x-\bar{\alpha})^n} \\
&= -i(-k)^n \sqrt{\frac{b}{\pi}} \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(x-\bar{\alpha})^n}.
\end{aligned}$$

3.3. Diszkrét skalárszorzat

Megmutatjuk, hogy megfelelő súlyfüggvények esetén a T leképezés a diszkrét skalárszorzatot is tartja. Legyen $\mathbb{R}_N$ és $\mathbb{T}_N$ a megfelelő alapponthalmaz úgy, hogy $k \notin \mathbb{T}_N$, és

$$\mathbb{R}_N = \{L_{\alpha, k}^{-1}(z) \mid z \in \mathbb{T}_N\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
[Tf, Tg]_{\mathbb{R}_N, T\rho_N} &= \sum_{x \in \mathbb{R}_N} Tf(x) \overline{Tg(x)} T\rho_N(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}_N} f(L_{\alpha,k}(x)) \overline{g(L_{\alpha,k}(x))} \rho_N(L_{\alpha,k}(x)) \\
&= \sum_{z \in \mathbb{T}_N} f(L_{\alpha,k}(L_{\alpha,k}^{-1}(z))) \overline{g(L_{\alpha,k}(L_{\alpha,k}^{-1}(z)))} \rho_N(L_{\alpha,k}(L_{\alpha,k}^{-1}(z))) \\
&= [f, g]_{\mathbb{T}_N, \rho_N}.
\end{aligned}$$

3.4. Egyéb tulajdonságok

A folytonos és diszkrét skalárszorzat megtartásán túlmenően a $T = T_{\alpha,k}$ operátor rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- i) $\|f\|_T = \|Tf\|_{\mathbb{R}}$
mind a folytonos, mind a diszkrét skalárszorzat által indukált normákat tekintve.
- ii) Ha $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, akkor $Tf \in L^\infty(\mathbb{R})$, és $\|f\|_\infty = \|Tf\|_\infty$. Következésképp T korlátos operátor.
- iii) $T(g \circ (f_1, \dots, f_n)) = g \circ (Tf_1, \dots, Tf_n)$ (szuperpozíció),
ahol $f_k : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $g \in \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_g \supseteq \mathcal{R}_{f_1} \times \mathcal{R}_{f_2} \times \dots \times \mathcal{R}_{f_n}$.
- iv) speciálisan T lineáris.

A rendelkezésre álló eszközökkel már számegyenesen értelmezett racionális ortogonális illetve biortogonális rendszer szerkeszthető adott egységkörön értelmezett azonos tulajdonságú rendszerből.

4. fejezet

Az eredmények alkalmazása

Ebben a fejezetben egy $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett diszkrét valós jel racionális approximációjának feladatára alkalmazzuk a korábbi részek eredményeit.

4.1. Approximáció az egységgörön

Az 1.1 rész áttekintette a Hilbert-térbeli approximációs feladatot, valamint kitért az ortogonális és biortogonális rendszerek jelentőségére. Az 1.5 rész bevezette a $(\Phi_n^a, n \in \mathbb{N})$ Malmquist-Takenaka ortonormált, valamint a $(\phi_n^a, n \in \mathbb{N})$ racionális alaprendszerre biortogonális $(\Psi_n^a, n \in \mathbb{N})$ rendszert. E rendszerek azonos altérreket feszítenek ki, így a biortogonális projekciós operátor előállítja az approximációs feladat megoldását.

4.1.1. Előtranszformáció

A gyakorlatban sokszor csak a valós rész közelítését írják elő, ekkor egy $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény approximációja a feladat. Ilyen esetben nem célszerű közvetlenül a komplex esetre visszavezetni a problémát, ugyanis a legjobban közelítő elem keresésének feladata az imaginárius részek approximációját is előírja, ami ronthat a valós közelítés minőségén.

Mivel a $\phi_{a,n}$ alapfüggvények analitikusak a $\overline{\mathbb{D}}$ halmazon, ezért az ezekből alkotott véges lineáris kombinációk is analitikusak lesznek. Előnyös lenne, ha rendelkezésre állna egy $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre $f + ig$ már egy $\overline{\mathbb{D}}$ halmazon analitikus h függvény egységgörre vett megszorításával lenne egyenlő. Definíció szerint az analitikus függvényeket előállítja a Taylor-soruk, ezért ha a $h \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény analitikus a $\overline{\mathbb{D}}$ halmazon, akkor $\forall |z| \leq 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Ezt a $z = e^{it}$ helyen tekintve h Fourier-sorát kapjuk, ahonnan h negatív frekvenciákhoz tartozó Fourier-együtthatói nullák:

$$\hat{h}(k) = 0 \quad (k < 0).$$

Ezen észrevétel miatt tehát célszerű az f Fourier-együtthatóit úgy átrendezni, hogy a jel valós része ne változzon, de a negatív frekvenciákhoz tartozó együtthatók eltűnjenek. Mivel

$$\begin{aligned} & \left(\hat{f}(k) + \overline{\hat{f}(-k)} \right) e^{ikx} - \left(\hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(-k)e^{-ikx} \right) = \\ & = \overline{\hat{f}(-k)}e^{ikx} - \hat{f}(-k)e^{-ikx} = 2i \operatorname{Im} \left(\overline{\hat{f}(-k)}e^{ikx} \right) \end{aligned}$$

tisztán imaginárius, ezért a $0 < k$ indexekre $\hat{f}(k)$ helyett $\hat{f}(k) + \overline{\hat{f}(-k)}$, $\hat{f}(-k)$ helyett 0 Fourier-együtthatókat tekintve ezek inverz Fourier-transzformáltjának valós része megegyezik f valós részével.

Ezen eljárást előtranszformációként alkalmazzuk az approximációs feladat megoldása előtt.

4.1.2. Diszkrét valós eset

A 1.6 szakaszban látottak alapján az (1.3) és a (1.4) rendszerek ortogonalitása illetve biortogonalitása diszkrét értelemben is teljesül. A tóruszon tekintett approximációs feladatot most az említett $\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}$ diszkretizációs pontokkal (1.6) és $\rho_N^{\mathbf{a}}$ súlyfüggvénnyel (1.7) tekintett $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}, \rho_N^{\mathbf{a}}}$ diszkrét skalárszorzat (1.5) által generált metrikával értjük. A legjobban közelítő elem a diszkrét skalárszorzat szerinti ortogonális illetve biortogonális projekciós operátor segítségével előállítható.

A diszkrét approximációs probléma esetén elegendő, ha a közelítendő függvénynek csupán a $\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}$ diszkretizációs pontokon vett mintavételezése adott.

Valós értékű esetben az előző fejezetben látottakhoz hasonlóan a közelítendő mintavételezett függvényt érdemes előtranszformálni. Természetes módon adódik a diszkrét Fourier-együtthatók átrendezése, ami megköveteli, hogy a bemenet egyenletes felosztáson legyen mintavételezve:

$$y_j = f \left(e^{i2\pi \frac{j}{N}} \right) \quad (j = 0, \dots, N-1; N \in \mathbb{N}).$$

A diszkrét skalárszorzat kiszámításához a $\mathbb{T}_N^{\mathbf{a}}$ alappontokon felvett függvényértékekre lenne szükség, ezeket valamilyen interpolációs eljárással közelítjük (újramintavételezés).

Az egyenletes felosztás mellett szól még az az érv, hogy a nemegyenletes min-

tavételezés hardveres megvalósítása nehézkes, ezért a gyakorlati alkalmazások esetén a közelítendő jel általában egyenletes mintavételezéssel adott.

Diszkrét esetben az előtranszformációs eljárás a következő:

- i) Kiszámítjuk az $\hat{y}_k$ diszkrét Fourier-együtthatókat. Ez hatékonyan elvégezhető gyors Fourier-transzformáció (FFT) segítségével.
- ii) Minden $0 < k < \frac{N}{2}$ indexre legyen

$$\begin{aligned}\hat{y}'_k &:= \hat{y}_k + \overline{\hat{y}_{-k}} \\ \hat{y}'_{-k} &:= 0, \text{ illetve} \\ \hat{y}'_0 &:= \hat{y}_0 \\ \hat{y}'_{\frac{N}{2}} &:= \hat{y}_{\frac{N}{2}} \quad (\text{páros } N \text{ esetén}).\end{aligned}$$

- iii) Inverz FFT segítségével kiszámoljuk az y'_k ($k = 0, \dots, N-1$) értékeket.
- iv) Az y'_k vektort tekintjük a közelítendő jelnek.

Az egységgörön értelmezett eredmények alapján megvalósított RAIT Matlab Toolbox [4] paraméter-optimalizálási eljárásai a fenti előtranszformációs eljárást alkalmazzák, így a bemenetet egyenletes mintavételezéssel kapott vektorként várják.

4.2. Approximáció a számegyenesen

A számegyenesen értelmezett approximációs feladatot visszavezetjük a tóruszon értelmezett feladatra.

Az egységgörön értelmezett esetben az $f \in H^2(\mathbb{D})$ függvényt

$$f \approx p = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k^{\mathbf{a}}$$

alakú racionális függvénnyel közelítettük. A normatartás és a linearitás miatt

$$\|f - p\|_{\mathbb{T}} = \|\mathbf{T}(f - p)\|_{\mathbb{R}} = \|\mathbf{T}f - \mathbf{T}p\|_{\mathbb{R}}$$

mind a folytonos, mind a diszkrét skalárszorzat által indukált normát tekintve, ahonnan a $\mathbf{T}f$ függvény legjobb közelítése $\mathbf{T}p$ lesz. Ismét a linearitás miatt

$$\mathbf{T}p = \sum_{k=0}^n c_k \mathbf{T}\phi_k^{\mathbf{a}},$$

ahol a c_k együtthatók az eredeti, egységkörön értelmezett feladat megoldásával nyert együtthatókkal azonosak. A számegyenesen értelmezett feladatot ilyen módon visszavezettük az egységkörön értelmezett feladatra.

Megjegyezzük, hogy a c_k együtthatókra teljesül

$$c_k = \langle f, \phi_k^a \rangle_{\mathbb{T}} = \langle Tf, T\phi_k^a \rangle_{\mathbb{R}},$$

így az együtthatók a számegyenesen értelmezett skalárszorzat szerint is kiszámíthatóak.

4.2.1. Diszkrét valós eset

Legyen adott $\emptyset \neq [u, v] \subseteq \mathbb{R}$ valós intervallum, $2 \leq N \in \mathbb{N}$ természetes szám, és az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

$$y_j = f\left(u + j \frac{v-u}{N-1}\right) \quad (j = 0, \dots, N-1)$$

egyenletes mintavételezése. A Malmquist-Takenaka és a biortogonális rendszer nem ezen alappontokat tekintve ortogonális illetve biortogonális, de, amint korábban említettük, a gyakorlati alkalmazásokhoz jobban illeszkedik az egyenletes mintavételezés. Egyéb alappontokon vett függvényértékek interpolációval közelíthetők.

Az approximációs feladat megoldását jelentő c_k együtthatók meghatározásához visszavezetjük a feladatot a tóruszon értelmezett esetre. Az előtranszformáció miatt (lásd 4.1.2) szükségünk van a tóruszra visszatranszformált $T_{\alpha,k}^{-1}f$ függvény

$$t_j = -\frac{\pi}{2} + j \frac{2\pi}{N} \quad (j = 0, \dots, N-1)$$

egyenletes felosztáson vett

$$w_j := T_{\alpha,k}^{-1}f(e^{it_j}) = f(L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_j}))$$

mintavételezésére. Mivel az f függvénynek csupán az egyenletes mintavételezése adott, ezért w_j -ket interpolációval közelítjük. Ehhez követelmény, hogy

$$x_j := L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_j}) \in [u, v] \quad (j = 0, \dots, N-1). \quad (4.1)$$

Hogyan állítsuk be az α és a k paramétereket, hogy ez teljesüljön? Megfogalmazunk még egy követelményt a feltételekre, ami egyszerűsíti a megoldást: az x_j pontokról elvárjuk, hogy szimmetrikusan helyezkedjenek el az $[u, v]$ intervallumon!

(2.1) alapján ez ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} b \operatorname{tg} \frac{t_j - \tau}{2} + a &= u + v - \left(b \operatorname{tg} \frac{t_{N-j} - \tau}{2} + a \right) \quad (j = 1, \dots, N-1) \\ 2a &= u + v - b \left(\operatorname{tg} \frac{t_j - \tau}{2} + \operatorname{tg} \frac{t_{N-j} - \tau}{2} \right), \end{aligned}$$

ahonnan a zárójeles kifejezés konstans. Ez teljesül, ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{t_j - \tau}{2} &= -\operatorname{tg} \frac{t_{N-j} - \tau}{2} \\ t_j - \tau &= -t_{N-j} + \tau \\ \tau &= \frac{t_j + t_{N-j}}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan, figyelembe véve t_j egyenletességét, $\tau = 0$, $k = -1$. Sajnos ekkor a k paraméter egybeesik egy alapponttal, és $L_{\alpha,k}^{-1}(k) = \infty \notin [u, v]$.

Relaxáljuk a (4.1) feltételt, és csupán a következőt követeljük meg:

$$x_j \in [u, v] \quad (j = m, \dots, N-m) \quad (4.2)$$

valamely $1 \leq m < \frac{N}{2}$ számra. Természetesen ezzel lemondunk w_j , $j \notin [m, \dots, N-m]$ minták interpolációs közelítésének lehetőségéről, ezért azzal a feltételezéssel élünk, hogy

$$w_j = \kappa \quad (j \notin [m, \dots, N-m]),$$

ahol $\kappa \in \mathbb{C}$ konstans. Emögött az a motiváció rejlik, hogy az f függvény „érdekes” részét az $[u, v]$ intervallum tartalmazza, azon kívül már nagyon közel van a $\pm\infty$ -ben vett határértékéhez. Ezen határérték minden tóruszról transzformált folytonos függvény esetén létezik.

Az $a = \frac{u+v}{2}$ és a $k = -1$ paraméterválasztás esetén a (4.2) relaxált megszorításnak eleget fog tenni az $L_{\alpha,k}^{-1}$ leképezés, ha

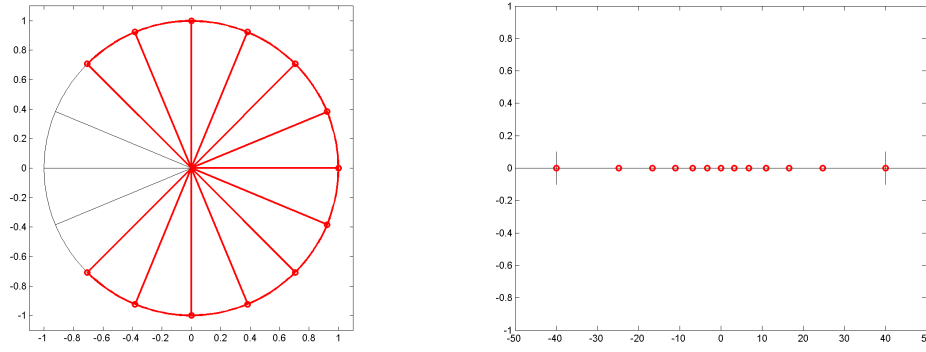
$$\begin{aligned} L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_m}) &= u \\ b \operatorname{tg} \frac{t_m}{2} + \frac{u+v}{2} &= u \\ b &= \frac{u-v}{2 \operatorname{tg} \frac{t_m}{2}}. \end{aligned}$$

Ekkor a szimmetria miatt

$$L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_{N-m}}) = v$$

is teljesül.

A fenti transzformációra a 4.1 ábrán látható egy példa.



4.1. ábra. A t_j ($m \leq j \leq N - m$) pontok átvitele a számegyenesre, $N = 16$, $m = 2$, $[u, v] = [-40, 40]$.

Megjegyezzük, hogy $m < \frac{N}{2}$ miatt $t_m < 0$, ezért $u < v$ figyelembevételével $b > 0$, tehát az így konstruált leképezés a felső félsíkot az egységkör belsejébe transzformálja. Ha a fordított viselkedés az elvárt, akkor a b paraméter a

$$b = \frac{v - u}{2 \operatorname{tg} \frac{t_m}{2}}$$

módon választandó, és ekkor

$$\begin{aligned} L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_m}) &= v \\ L_{\alpha,k}^{-1}(e^{it_{N-m}}) &= u. \end{aligned}$$

Az így kapott w_j vektorra megoldva a tóruszon értelmezett approximációs feladatot, megkapjuk a keresett c_k együtthatókat.

4.3. Optimális paraméterek keresése

A korábbi fejezetekben szó volt az adott rendszer szerinti racionális approximációs feladat megoldásáról. Az vizsgált rendszereket az $\mathbf{a}$ inverz pólusok sorozatával paramétereztük. Ez a megközelítés nagyfokú rugalmasságot eredményez, lehetőséget ad a rendszer feladathoz igazítására. Jelen fejezet a paraméterek optimális beállításával foglalkozik.

4.3.1. Nelder-Mead algoritmus

A Nelder-Mead szimplex algoritmus [7] egy széles körben használt optimalizációs eljárás, melyet sikerrel alkalmaztak az egységkörtön értelmezett modell esetén [3] [4].

Az algoritmus feladata egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény egy lokális minimum-

helyének megkeresése. Az eljárás fenntart egy $n + 1$ csúcsból álló szimplexet (a síkon háromszög, a térben tetraéder, stb.), melyet a célfüggvény értékeinek megfelelően transzformál. Az algoritmus nagy előnye, hogy a célfüggvény deriváltjára nincs szükség a futás során.

Az algoritmus lokális minimumhelyek keresésére alkalmas, és eredménye nagyban függ a kezdeti szimplextől. Globális optimum közelítésekor érdemes az algoritmust több véletlenszerűen választott kezdőpontból indítani, és a legjobb eredményt megtartani.

Az algoritmus:

1. Indexeljük úgy a szimplex x_j ($j = 1, \dots, n + 1$) csúcsait úgy, hogy

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$$

teljesüljön.

2. Számítsuk ki az $x_1, \dots, x_n$ pontok átlagát (tömegközéppontját). Legyen ez x_0 .
3. **Tükrözés** Tükrözzük az x_{n+1} pontot az x_0 pontra, esetleg egy α paraméterrel torzítva:

$$x_r := x_0 + \alpha(x_0 - x_{n+1}).$$

Ha erre $f(x_1) \leq f(x_r) < f(x_n)$ teljesül, akkor az eddigi legrosszabb x_{n+1} pontot lecseréljük a tükrözéssel nyert x_r pontra.

4. **Nyújtás** Ha a tükrözött pont jobb, mint az eddigi legjobb ($f(x_r) < f(x_1)$), akkor állítsuk elő az

$$x_e := x_0 + \gamma(x_0 - x_{n+1})$$

pontot. Az eddigi legrosszabb x_{n+1} pontot lecseréljük az x_r és az x_e közül a jobbikra, azaz ha $f(x_r) < f(x_e)$, akkor x_r -re, egyébként x_e -re.

Ugorjunk az 1. lépésre.

Ha $f(x_r) < f(x_1)$ nem teljesül, akkor ugorjunk az 5. lépésre.

5. **Zsugorítás** Ezen a ponton $f(x_r) \geq f(x_n)$ biztosan teljesül. Állítsuk elő az

$$x_c := x_0 + \rho(x_0 - x_{n+1})$$

pontot, és ha ez jobb, mint az eddigi legrosszabb ($f(x_c) < f(x_{n+1})$), akkor cseréljük le x_{n+1} -et x_c -re, és ugorjunk az 1. lépésre.

6. **Redukció** Minden $j \in \{2, \dots, n + 1\}$ -re lecseréljük az x_j pontot az

$$x'_j := x_1 + \sigma(x_j - x_1)$$

pontra, és ugrunk 1-re.

Az $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\rho = -\frac{1}{2}$ és $\sigma = \frac{1}{2}$ a szokásos konstansértékek. Többféle megállási feltétel elképzelhető, például ha a szimplex pontjain felvett függvényértékek nem térnek el túlságosan (szórásuk egy ϵ értéknél kisebb), akkor az algoritmus megáll x_1 -et elfogadva optimumként.

A fenti algoritmus a Nelder-Mead szimplex algoritmus egy alapváltozata, melyben a pontok transzformációja a megszokott euklideszi geometria szerint történik. Az algoritmus egyes lépéseiben szereplő transzformációk kicserélhetőek egyéb, nem-euklideszi geometria szerinti változatokra. A Bolyai-féle (hiperbolikus) geometria Poincaré-féle körmodelljének transzformációit alapul véve egy hiperbolikus Nelder-Mead algoritmus konstruálható [3].

Tekintsük mindezt a racionális approximációs feladat környezetében! Az $\mathbf{a}$ inverz pólusok sorozatának egy kezdőszelete alkotja az approximáció paraméterterét, legyen ez $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. Egyrészt az a_j inverz pólusok komplex számok, a Nelder-Mead algoritmust pedig valós állapottérre fogalmaztuk meg. Ez természetesen nem probléma, egyszerűen két valós dimenziót feleltetünk meg egy komplexnek a valós és képzetes részek szerint, így az algoritmus paraméterterét tekinthetjük $\mathbb{C}^n$ -nek (egy dimenzió minden inverz pólushoz). Másrészt elvárjuk, hogy minden inverz pólus a nyílt diszk belsejébe essen. A szimplex algoritmus transzformációi ezt nem garantálják. Ez a probléma orvosolható a fent említett hiperbolikus változattal, vagy a RAIT racionális approximációs szoftvercsomag [4] által alkalmazott alábbi megoldással. Legyen $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ az algoritmus paraméter-terének egy eleme. Ekkor $0 \leq j < n$ esetén

$$a_j := \frac{z_j}{1 + |z_j|^2}.$$

Elképzelhető, hogy bizonyos megkötésekkel szeretnénk élni, például a Malmquist-Takenaka rendszer szerinti approximációt tekintve csak a diszkrét Laguerre, vagy csak a Kautz rendszerek az érdekesek számunkra (lásd: 1.5). Ekkor az optimalizálási paraméterter alacsonyabb dimenziós.

4.3.2. Szimulált lehűtés

A szimulált lehűtés (Simulated Annealing, SA) [8] [9] egy általános sztochasztikus globális optimalizálási eljárás. Az elnevezés a metallurgiából ered. Kontrollált hűtéssel érik el, hogy az anyag megfelelő kristályszerkezetet vegyen fel, és lehetőleg mentes legyen a hibáktól. A megfelelő kristályszerkezet kialakulása lényegében a belső energia minimalizálásának felel meg, ahol a globális minimum elérésének érdekében magasabb energiaszinteken is át kell haladni.

Az algoritmus lényegében egy véletlen bolyongást végez az S paramétertéren, minden lépésben kiválaszt egy $s' \in S$ elemet az aktuális $s \in S$ állapot szomszédai közül. Az aktuális $y = E(s)$ és az új $y' = E(s')$ energiaértéktől, valamint egy T ún. hőmérsékleti paramétertől függő $P(y, y', T)$ elfogadási eloszlás szerint megtartja az új s' pontot, vagy elveti azt. A hőmérsékleti paraméter változása egy ún. hűtési ütemtervtől függ, amely jellemzően csökkenő tendenciájú hőmérséklet-változást ír elő. Az algoritmus tehát meglehetősen rugalmas, sok paraméterrel rendelkezik.

A szimulált lehűtés fix számú célfüggvény-kiértékelést végez, így jól tervezhető a futásideje. Olyan problémák esetén érdemes használni, ahol korlátozott időkeret alatt kell egy „kellően jó” megoldást találni.

Megemlítendő még, hogy ezen eljárás sem igényli a célfüggvény deriváltjának ismeretét.

Az alap SA algoritmus a következő:

```

 $s \leftarrow s_0; y \leftarrow E(s)$  ▷ kezdőállapot és kezdeti energia
 $s_{best} \leftarrow s; y_{best} \leftarrow y$ 
for  $k = 1 \rightarrow k_{max}$  do
   $T = \text{temperature}(k)$  ▷ hűtési ütemterv
   $s_{new} \leftarrow \text{neighbour}(s)$  ▷ szomszéd kiválasztása
   $y_{new} \leftarrow E(s_{new})$ 
  if  $P(y, y_{new}, T) > \text{random}()$  then
     $s \leftarrow s_{new}; y \leftarrow y_{new}$  ▷ új állapot elfogadása
  end if
  if  $y < y_{best}$  then
     $s_{best} \leftarrow s; y_{best} \leftarrow y$  ▷ eddigi legjobb állapot frissítése
  end if
end for
return  $s_{best}$ 

```

Tegyük fel, hogy a kívánt rendszer paraméterezhető n inverz pólussal, azaz $S = \mathbb{D}^n$. A szomszédkiválasztási eljárásnak egy komplex diszksbeli szám n -esből egy újabbat kell előállítania. Ez megtehető úgy, hogy egy lépésben csak az egyik – véletlenszerűen választott – inverz pólust módosítjuk. Egy inverz pólus módosításakor azt véletlenszerű irányba mozdítjuk a hőmérséklettől függő véletlen távolságra.

A dolgozatban a

$$\text{temperature}(k) = 0.95^{k-1}$$

hűtési ütemtervet, és a

$$P(y, y', T) = \begin{cases} e^{\frac{y-y'}{T}} & \text{ha } y' > y \\ 1 & \text{ha } y' \leq y \end{cases}$$

elfogadási valószínűséget használtuk. Az alkalmazott célfüggvény a közelítendő jel és a közelítő racionális függvény különbségének x_j (lásd 4.1) pontokon vett mintavételezéséből adódó vektor kettes normája $\sqrt{N}$ -nel normálva, ahol N a minták száma. Ha f a közelítendő függvény, $z \in \mathbb{C}^n$, akkor a célfüggvényre

$$E(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\| (f(x_j) - p_z(x_j))_{j=0}^{N-1} \right\|_2,$$

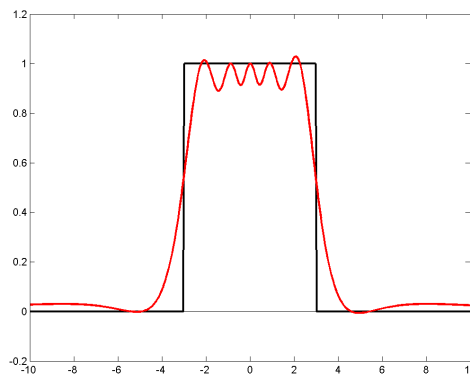
ahol p_z a z vektor által meghatározott $\mathbf{a}$ paraméter szerinti ortogonális vagy biortogonális projekció.

4.3.3. Az algoritmusok összehasonlítása

Vizsgáljuk meg a szimulált lehűtés és a simplex algoritmus viselkedését egy konkrét approximációs problémára. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

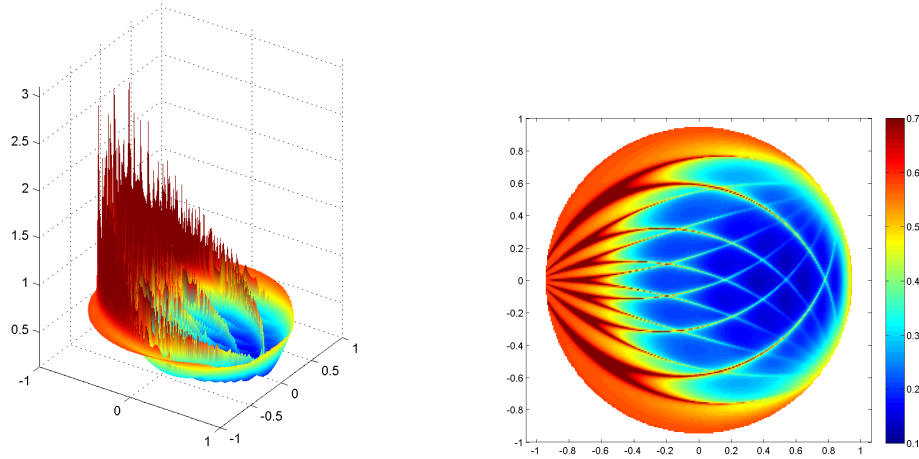
függvény $(\Phi_j^{\mathbf{a}}, 0 \leq j < n = 8)$, $\mathbf{a} = (a, a, \dots)$ diszkrét Laguerre-rendszerrel való közelítésének feladatát a diszkrét skalárszorzat szerint (4.2 ábra).



4.2. ábra. Diszkrét Laguerre rendszer szerinti approximáció. A fekete grafikon a közelítendő jelhez, a piros az előbbit közelítő racionális függvényhez tartozik.

Azért esett a választás a Laguerre-rendszerre, mert egyetlen inverz pólus paraméterezi, így lehetőség van a közelítés hibájának ábrázolására a paraméter függvényében (4.3 ábra). A tapasztalatok azt mutatják, hogy a diszkrét

skalárszorzat szerinti approximáció hibafüggvénye több, egymástól jól elkülönülő lokális minimummal rendelkezik, ezért ez a probléma alkalmasabb az algoritmusok közti különbségek bemutatására.



4.3. ábra. Diszkrét Laguerre rendszer szerinti approximáció hibája.

Az alábbi táblázat 1000 független futtatás eredményét tartalmazza. A Nelder-Mead algoritmusra $\epsilon = 10^{-3}$, a szimulált lehűtésre $kmax = 50$. A paraméterek úgy lettek beállítva, hogy a két algoritmus átlagosan közel azonos számú célfüggvény-kiértékelést végezzen. A Nelder-Mead szimplex algoritmust minden futtatásnál véletlenszerű kezdőpontból indítottuk. Az e értékek az approximációs hibákat, a k értékek a célfüggvény-kiértékelések számát jelenik. Az sx index a szimplex algoritmusra, az sa a szimulált lehűtésre vonatkozó adatot jelöl. A szórás oszlopban korrigált tapasztalati szórás szerepel.

	átlag	szórás	min	max
e_{sx}	0.1768	0.049983	0.1291	0.57128
e_{sa}	0.1459	0.028461	0.1292	0.53563
k_{sx}	48.643	18.323	11	167
k_{sa}	51	0	51	51

A futtatások adatai alapján elmondható, hogy a szimulált lehűtés átlagosan némileg jobb eredményt ért el, és a hibaértékek szórása is alacsonyabb. Ennek oka az, hogy az SA algoritmus ritkán akad el lokális minimumban, míg a Nelder-Mead alkalmas kezdőpontból indítva viszonylag magas fennsíkon található lokális minimumhelyeket is elfogad megoldásként.

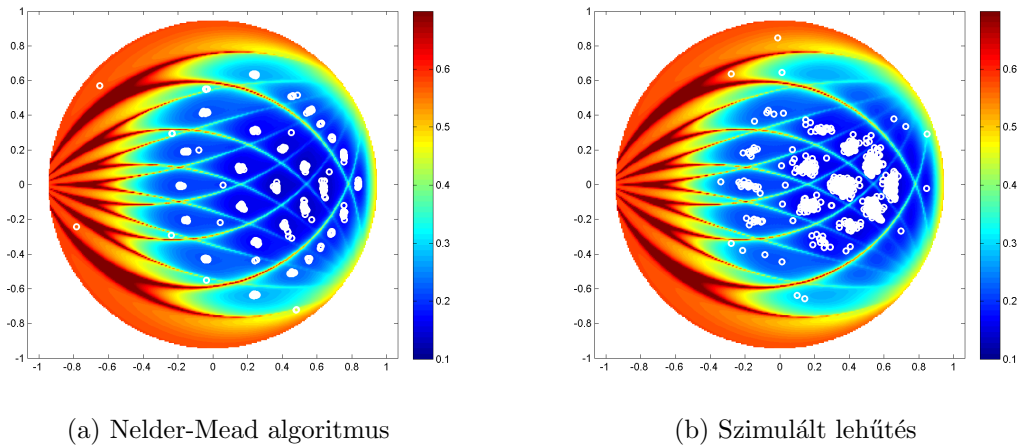
Ellenben megfigyelhető, hogy a Nelder-Mead algoritmus a hibák minimumát tekintve egy kicsit jobb eredményt produkált, mint a szimulált lehűtés. A talált inverz

pólusok elhelyezkedése alapján (4.4 ábra) elmondható, hogy ha a szimplex algoritmus egy jó minimumhely közelébe kerül, akkor arra már megbízhatóan rátalál. A szimulált lehűtésről ez nem mondható el.

A fentiek alapján a két algoritmus kombinálásával javíthatunk az approximáció minőségén.

1. Hajtsuk végre a szimulált lehűtés néhány lépését néhány véletlenszerűen választott pontra.
2. A szimulált lehűtés által talált legjobb pontokból indítsunk Nelder-Mead algoritmust.

Ekkor a szimulált lehűtés jó eséllyel rátalál az ígéretes minimumhelyekre, illetve azok közelében található pontot eredményez. Egy ilyen pontból indítva a Nelder-Mead algoritmus már „jó minőségű” minimumhellyel fog visszatérni.



4.4. ábra. Az algoritmusok futtatása során talált inverz pólusok. Látható, hogy a Nelder-Mead algoritmus hajlamos elakadni viszonylag magasabb értékű lokális minimumban, viszont az adott lokális minimumot jól közelíti. A szimulált lehűtés képes magasabb célfüggvény-értékeken átkelni.

A kombinált algoritmus 1000 független futtatásának statisztikáit az alábbi táblázat tartalmazza. Az eljárás először két szimulált lehűtést futtat véletlenszerű kezdőpontokból, majd a jobb eredményt kezdőértékként felhasználva futtatja a Nelder-Mead algoritmust. Itt $k_{max} = 15$, $\epsilon = 10^{-2}$. A Nelder-Mead pontosságát azért csökkentettük, hogy a célfüggvény-kiértékelések száma a korábbi méréseknél tapasztaltakkal közel azonos legyen.

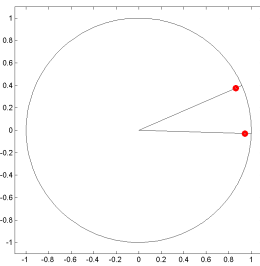
	átlag	szórás	min	max
e_{sasx}	0.14048	0.015867	0.12921	0.27348
k_{sasx}	47.487	4.9528	37	89

Az approximációs hibák átlagosan alacsonyabbak lettek, valamint a szórásuk csaknem felére csökkent a tiszta szimulált lehűtéshez képest, illetve harmadára a tiszta Nelder-Meadhez képest. A kombinált algoritmus tehát megbízhatóbban talál jó közelítést.

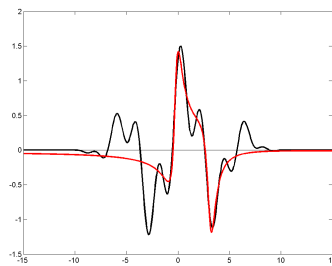
A kombinált algoritmus

$$f(x) = (\sin(x + 0.9) + 0.6 \sin(3x + 1)) \frac{\cos(\pi \frac{x}{10}) + 1}{2} \chi_{[-10,10]} \quad (x \in [-15, 15])$$

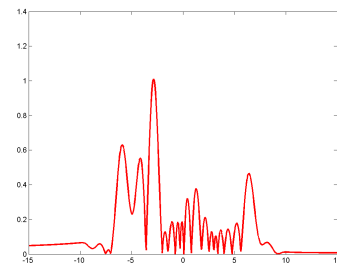
tesztfeladatra adott eredményeit a 4.5 ábra tartalmazza.



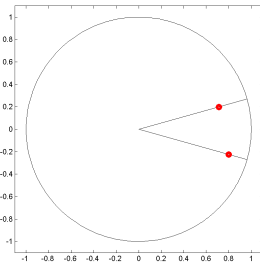
(a) $k = 1$, inverz pólusok



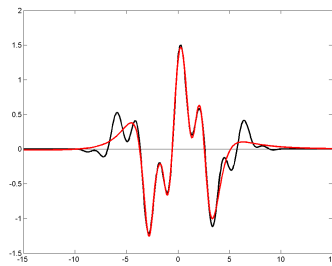
(b) $k = 1$, eredmény



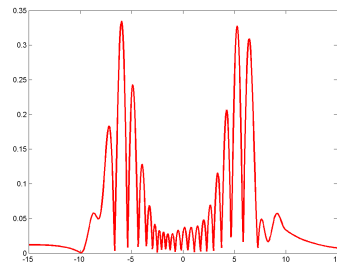
(c) $k = 1$, hibafüggvény
 l_2 hiba: 5.9036, l_∞ hiba: 1.0109



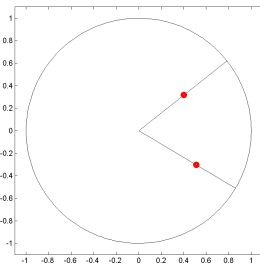
(d) $k = 4$, inverz pólusok



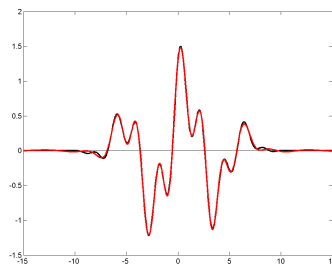
(e) $k = 4$, eredmény



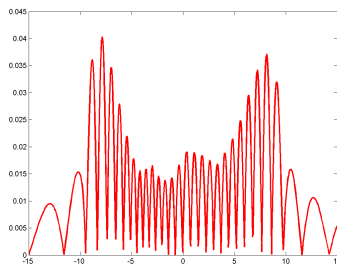
(f) $k = 4$, hibafüggvény
 l_2 hiba: 2.3341, l_∞ hiba: 0.33473



(g) $k = 8$, inverz pólusok



(h) $k = 8$, eredmény



(i) $k = 8$, hibafüggvény
 l_2 hiba: 0.3607, l_∞ hiba: 0.040387

4.5. ábra. A kombinált algoritmus eredménye az f ablakozott trigonometrikus polinomra. A közelítés a Kautz-rendszerrel történik az (a, b) paraméterek k db periódusát véve: $(a, b, \dots, a, b)$. A hibák a mintavektorok megfelelő normái, az l_2 -es $\sqrt{N}$ -nel normalizálva, N a minták száma.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat megvizsgálta a számegyenesről az egységkörre képző egyszerű racionális leképezéseket, majd ezeket felhasználva bevezetett egy függvénytranszformációt. Ez a transzformáció az egységkörön értelmezett racionális függvényekből számegyenesen értelmezett racionális függvényt állít elő, valamint megfelelően értelmezett skalárszorzatok esetén megőrzi az ortogonalitást mind folytonos, mind diszkrét esetben.

Ezt a paraméterek beállítását végző két optimalizációs eljárás – a Nelder-Mead algoritmus és a szimulált lehűtés – vizsgálata követte. Megállapítást nyert, hogy az algoritmusok előnyei egyesíthetőek, ezáltal jobb approximációs eredmények produkálhatóak.

További megfontolást igényel az approximációs eljárás gyorsítása számegyenesen értelmezett racionális FFT algoritmus használatával. Meggondolandó továbbá, hogy a folytonos egységkörön értelmezett skalárszorzat közelítésére milyen numerikus integrálási módszert lehet illetve érdemes használni. Az eredmények alkalmasak lehetnek analóg szűrő konstrukciójára, ehhez olyan approximációs eljárást kell kidolgozni, amely adott komplex abszolútértéket és fázist közelítő racionális függvényt képes előállítani.

Ezek későbbi kutatások témáját képezhetik.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Fridli Sándor Tanár úrnak a témajavaslatot, az ötleteket, tanácsokat, a konzultációra szánt időt és a folyamatos ösztönzést, mely nélkül a dolgozat nem készülhetett volna el.

Ábrák jegyzéke

1.1. Racionális alaprendszer.	6
2.1. Körre vonatkozó inverzió.	14
2.2. A paraméterek hatása az $L_{\alpha,k}$ függvényre.	15
3.1. A $T_{\alpha,k}$ transzformáció.	18
4.1. Tórusz egyenletes felosztásának átvitele	27
4.2. Diszkrét Laguerre rendszer szerinti approximáció.	31
4.3. Diszkrét Laguerre rendszer szerinti approximáció hibája.	32
4.4. A Nelder-Mead algoritmus és a szimulált lehűtés által talált inverz pólusok.	33
4.5. A kombinált algoritmus eredménye egy tesztfeladatra	34

Irodalomjegyzék

- [1] Schipp Ferenc, *Racionális ortogonális rendszerek*, 2010, ELTE jegyzet.
- [2] Fridli Sándor és Schipp Ferenc, *Biorthogonal systems to rational functions*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sec. Comp., vol. 35, 2011.
- [3] Fridli Sándor, Kovács Péter, Lócsi Levente és Schipp Ferenc, *Rational modeling of multi-lead QRS complexes in ECG signals*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sec. Comp., vol. 37, 2012.
- [4] Kovács Péter és Lócsi Levente, *RAIT: the Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab*, in Proc. 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing, 2012.
- [5] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Komplex függvénytan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005, pp. 9-18
- [6] Dr. Simonyi Ernő, *Digitális szűrők: A digitális jelfeldolgozás alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984, pp. 445-462
- [7] Nelder, J.A. and Mead, R., *A simplex method for function minimization*, Comput. J., 7, 1965, pp. 308–313.
- [8] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P., *Optimization by Simulated Annealing*, Science 220 (4598), 1983, 671–680.
- [9] Černý, V., *Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm*, Journal of Optimization Theory and Applications 45, 1985, 41–51.