

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

TDK DOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: SZARVAS KRISTÓF

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszachenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



The Project is supported by the European Union and co-financed by the European Social Fund (grant agreement no. TAMOP 4.2.1./B-09/1/KMR-2010-0003).

Budapest, 2012

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

**RACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK
IDENTIFIKÁCIÓJA RACIONÁLIS
RENDSZEREK SZERINTI FOURIER
EGYÜTTHATÓK ALAPJÁN**

TDK dolgozat

Készítette: **Szarvas Kristóf** (MSc II.)

Témavezető: **Dr. Schipp Ferenc**

egyetemi tanár, professor emeritus

Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Áttekintés	2
1.1. Blaschke-függvények	2
1.1.1. Blaschke-függvények a tóruszon	3
1.1.2. Hiperbolikus metrika	4
1.2. Malmquist-Takenaka rendszerek	4
1.3. MT-Fourier-sorfejtés	6
1.4. Diszkrét MT-rendszerek	7
1.4.1. Speciális diszkrét MT-rendszer	10
2. Laguerre-rendszer, Kautz-rendszer	11
2.1. Laguerre-rendszer	11
2.1.1. Laguerre-Tartományok	12
2.2. Kautz-rendszer	16
2.2.1. Kautz-tartományok	18
3. Alkalmazás	22
3.1. Polinom gyökkeresés	22
3.2. Numerikus hibák	38
4. Összefoglalás	42

Bevezetés

A racionális függvények, illetve a racionális függvényekből álló rendszerek szerinti Fourier-sorfejtés az utóbbi időkben központi szerephez jutott. Leginkább az irányításelméletben és az EKG görbékkel kapcsolatos kutatásokban találkozhatunk velük. Ezen rendszerek közül is kiemelkedik az úgynevezett Malmquist-Takenaka rendszer (MT-rendszer), amely egy nagyon általános, ortonormált rendszer. Általánossága igen széles körű alkalmazhatóságot tesz lehetővé. A komplex függvénytanban lényeges, hogy egy racionális függvénynek egy adott tartományon belül van-e pólusa és ha van, akkor hány és hol találhatóak (például: Residuum-tétel). Célunk tehát olyan numerikus eljárásokat kidolgozni, melyekkel hatékonyan tudjuk a racionális függvények pólusait megtalálni. Egy ilyen módszert láthatunk az MT-rendszer speciális megválasztásával [2]-ben.

Jelen dolgozat célja egy hasonlóan speciális rendszer segítségével egy másik pólus kereső módszer elkészítése, amely megjavítja a fent említett cikkben található konvergencia eredményt.

A dolgozat első fejezetében röviden összefoglaljuk a témakörben ismeretes, számunkra szükséges jelöléseket és eredményeket.

A második fejezetben felépítünk egy új pólus keresési eljárást, majd a harmadik fejezetben példákkal illusztráljuk ennek működését összehasonlítva [2]-ben bemutatott módszerrel. A fejezet végén a numerikus hibákkal is foglalkozunk.

1. fejezet

Áttekintés

Annak érdekében, hogy önmagában is érthetőek legyenek az alábbiak, ebben a fejezetben [1] alapján vázlatosan áttekintjük a későbbiekben szükséges definíciókat, jelöléseket és eredményeket. A részleteket és a bizonyításokat mellőzzük, azokat az érdeklődők megtalálják [1]-ben.

1.1. Blaschke-függvények

A következőkben ismertetett függvények, az ún. Blaschke-függvények központi szerepet játszanak mind a mi témánkban, mind pedig a jel- és irányítás elméletben. Induljunk ki a következő jelölésekből:

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

A fent bevezetett $\mathbb{D}$ halmazt diszknak, míg $\mathbb{T}$ -t tórusznak nevezzük. Rögzítsünk egy $a \in \mathbb{C}$ komplex számot. Ekkor $B_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ az a paraméterű Blaschke-függvény:

$$B_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (a \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}).$$

Az a szám a B_a Blaschke-függvény zérushelye, az a -nak az egységkörre vonatkozó tükrösképe $a^* := 1/\bar{a}$ pedig B_a pólusa. Speciálisan, ha az a paramétert a $\mathbb{D}$ diszkból vesszük akkor $\mathbb{D}$ -beli z -kre $B_a(z) \in \mathbb{D}$, míg ha $a \in \mathbb{T}$, akkor bármely $z \in \mathbb{T}$ -re

$B_a(z) \in \mathbb{T}$. Az is könnyen belátható, hogy a B_a Blaschke-függvény inverze B_{-a} , azaz

$$B_a(B_{-a}(z)) = B_{-a}(B_a(z)) = z \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, a \in \mathbb{D}).$$

Belátható, hogy $a \in \mathbb{D}$ esetén $B_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, illetve $B_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ leképezések bijekciók, melyeknek az inverzeik:

$$B_a^{-1} = B_{-a} \quad (a \in \mathbb{D}). \quad (1.1)$$

1.1.1. Blaschke-függvények a tóruszon

A Blaschke-függvények a tóruszon explicit alakban kifejezhetők. Mivel $a \in \mathbb{D}$ esetén $B_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ leképezés egy bijekció, így minden $z = e^{it} \in \mathbb{T}$ esetén létezik $B_a(z) = e^{i\beta_a(t)}$ ($t \in \mathbb{R}$) előállítás, ahol $\beta_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvény. Erre explicit formulát lehet adni. Írjuk föl az $a \in \mathbb{D}$ paramétert $a = re^{i\alpha}$ ($r \in [0, 1), \alpha \in [-\pi, \pi)$) alakban. Jelölje $s := \frac{1+r}{1-r} \in (0, \infty)$ és legyen $\gamma_s : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$\gamma_s(t) := 2 \cdot \arctan \left(s \cdot \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right).$$

Terjesszük ki γ_s függvényt $\mathbb{R}$ -re a következő képpen:

$$\gamma_s(-\pi) := -\pi, \quad \gamma_s(\pi) := \pi, \quad \gamma_s(t + 2\pi) := \gamma_s(t) + 2\pi \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezzel a kiterjesztéssel egy szigorúan monoton növekvő (tehát invertálható), és differenciálható függvényt kapunk, melynek deriváltja a Poisson-féle magfüggvény:

$$\gamma'_s(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} =: P_r(t).$$

Ezen jelölések mellett a Blaschke függvény a $\mathbb{T}$ tóruszon a következő alakban állítható elő:

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} = e^{i(\gamma_s(t-\alpha)+\alpha)}. \quad (1.2)$$

A Blaschke függvények mellett egy másik függvénycsalád is fontos szerepet játszik a következőkben. Ehhez is rögzítsünk egy $a \in \mathbb{D}$ paramétert és vezessük be a következő $R_a : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt:

$$R_a(z) := \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z}.$$

Ekkor a $\mathbb{T}$ tóruszon az R_a függvény kifejezhető

$$R_a(e^{it}) = R_r(e^{i(t-\alpha)}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol R_r polárkoordinátái kifejezhetők a γ_s függvény és a Poisson-féle magfüggvény segítségével. A korábbi jelölések mellett:

$$P_r(e^{it}) = P_r^{1/2}(t) e^{i(\gamma_s(t)-t)/2} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1.3)$$

1.1.2. Hiperbolikus metrika

A $\mathbb{D}$ -beli komplex számok között egy új távolság fogalmat fogunk bevezetni. Legyen $\varrho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow [0, 1)$ a következő függvény:

$$\varrho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|} = |B_{z_2}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}). \quad (1.4)$$

Az így definiált ϱ függvény valóban eleget tesz a metrikával szemben támasztott követelményeinknek, továbbá $z_2 \in \mathbb{D}$, valamint $B_{z_2} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ bijektivitása miatt $B_{z_2}(z_1) \in \mathbb{D}$, következésképpen $\varrho(z_1, z_2) < 1$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{D}$). Az is belátható, hogy a B_a ($a \in \mathbb{D}$) izometriák a ϱ metrikára nézve, azaz

$$\varrho(B_a(z_1), B_a(z_2)) = \varrho(z_1, z_2) \quad (a \in \mathbb{D}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}).$$

1.2. Malmquist-Takenaka rendszerek

Fourier-sorfejtéshez szükségünk van ortogonális rendszerekre, az ortogonális rendszerekhez viszont skaláris szorzatra. Legyen

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) \overline{G}(e^{it}) \, dt \quad (F, G \in H^2(\mathbb{T})), \quad (1.5)$$

ahol $H^2(\mathbb{T})$ Hardy-tér. Ráadásul $(H^2(\mathbb{T}), \langle, \rangle)$ Hilbert-tér.

Jelölje $\mathfrak{R}$ a $\overline{\mathbb{D}}$ -n analitikus valódi racionális függvények algebráját. Legyen:

$$r_a(z) = \frac{1}{1 - \bar{a}z} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad a \in \mathbb{D}).$$

Az r_a^k ($0 < k \in \mathbb{N}$) függvényeket $\mathfrak{R}$ -beli elemi racionális függvényeknek nevezzük, továbbá ezen függvények generálják $\mathfrak{R}$ -et, azaz

$$\mathfrak{R} = \text{span}\{r_a^k : 0 < k \in \mathbb{N}\}.$$

Az r_a^k -nak az $a^* = 1/\bar{a}$ hely k -szoros multiplicitású pólusa. Egy másik lehetséges generátor-függvényrendszer:

$$q_{a,k} := \frac{z^k}{(1 - \bar{a}z)^{k+1}} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor ugyanis $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ és $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{span}\{r_a^k : k = 1, 2, \dots, n\} = \text{span}\{q_{a,k} : k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

illetve

$$\mathfrak{R} = \text{span}\{q_{a,k} : a \in \mathbb{D}, \quad k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.6)$$

Jelöljön $\mathbf{a} = (a_n, \quad n \in \mathbb{N})$ ($a_n \in \mathbb{D}, \quad n \in \mathbb{N}$) egy diszksbeli sorozatot. Az a_n tag multiplicitásán azt az m_n számot értjük, ahányszor előfordult addig a sorozatban, vagyis

$$m_n := \sum_{j=0, \quad a_j=a_n}^n 1. \quad (1.7)$$

Legyen $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, \quad n \in \mathbb{N})$ és legyen $(m_n, \quad n \in \mathbb{N})$ az $\mathbf{a}$ sorozat multiplicitásainak a sorozata. Kiindulva a

$$q_n^{\mathbf{a}}(z) := q_{a_n, m_n-1}(z) = \frac{z^{m_n-1}}{(1 - \bar{a}_n z)^{m_n}} \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad n \in \mathbb{N}) \quad (1.8)$$

racionális függvényekből az (1.5) skaláris szorzat segítségével és a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással tudunk ortonormált rendszereket készíteni. Az így kapott ortonormált rendszereket nevezzük **Malmquist-Takenaka rendszernek** (továbbiakban MT-rendszer). Jelölje

$$\mathfrak{R}_n^{\mathbf{a}} := \text{span}\{q_k^{\mathbf{a}} : k = 0, \dots, n-1\}, \quad \mathfrak{R}^{\mathbf{a}} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n^{\mathbf{a}}$$

a $q_k^{\mathbf{a}}$ ($k = 0, \dots, n-1$) függvények által kifeszített alteret, illetve az $\mathbf{a}$ paramétertől függő alterét $\mathfrak{R}$ -nek.

Az $\mathbf{a}$ paramétertől függő MT-rendszer n -edik tagja fölírható

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\mathbf{a}}(z) &:= \Phi_n(z) := \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \bar{a}_n z} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} = \\ &= R_{a_n}(z) \prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

alakban. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció nem változtatja meg a generált al-
teret, azaz

$$\text{span}\{\Phi_j^{\mathbf{a}} : j = 0, \dots, n-1\} = \text{span}\{q_j^{\mathbf{a}} : j = 0, \dots, n-1\} = \mathfrak{R}_n^{\mathbf{a}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Állítás. Legyen $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ egy diszkbeli sorozat. Ekkor (1.9) MT-
rendszer az (1.5) skaláris szorzatra nézve ortonormált rendszer, azaz

$$\langle \Phi_m^{\mathbf{a}}, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Igaz továbbá a következő

1. Lemma. Legyen $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in A(\mathbb{D})$, $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, azaz legyen f egy a diszken
analitikus, lezártján folytonos függvény. Ekkor

$$\langle f, q_n^{\mathbf{a}} \rangle = \frac{f^{(m_n-1)}(a_n)}{(m_n-1)!},$$

1. Megjegyzés. Az (1.5) skaláris szorzat $\mathbb{T}$ -n értelmezett függvényekre van defini-
álva. Egyszerű meggondolással tudunk ortonormált rendszert szerkeszteni az $r\mathbb{T} :=$
 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ körön. Részleteket lásd [1]-ben.

2. Megjegyzés. $a_0 = 0$ esetén terjesszük ki a $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, n \in \mathbb{N})$ rendszert negatív n -ekre
a következő képpen:

$$\Phi_{-n}^{\mathbf{a}}(e^{it}) := \Phi_n^{\mathbf{a}}(e^{it}) \quad (t \in [-\pi, \pi)).$$

Az így kiterjesztett rendszerre

2. Állítás. A $(\Phi_n^{\mathbf{a}}, n \in \mathbb{Z})$ MT-rendszer pontosan akkor teljes az $L^2(\mathbb{D})$ függvényosz-
tályon, ha az MT-rendszert előállító $\mathbf{a}$ sorozatra teljesül, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|) = \infty. \quad (1.10)$$

1.3. MT-Fourier-sorfejtés

Ha már van egy Hilbert-terünk, és egy teljes ortonormált rendszerünk, akkor
bevezethetjük a Fourier-sorfejtés fogalmát. Induljunk ki ehhez egy $F \in H^2(\mathbb{D})$
függvényből és egy $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ diszkbeli sorozatból.

1. Definíció. Az $F \in H^2(\mathbb{D})$ n -edik $\mathbf{a}$ paraméterű MT-Fourier-együtthatója

$$F^{\mathbf{a}}(n) := \langle F, \Phi_n^{\mathbf{a}} \rangle \quad (n \in \mathbb{N}),$$

MT-Fourier sora

$$S^{\mathbf{a}}F := \sum_{k=0}^{\infty} F^{\mathbf{a}}(k) \Phi_k^{\mathbf{a}},$$

míg az n -edik MT-Fourier részletösszege

$$S_n^{\mathbf{a}}F := \sum_{k=0}^{n-1} F^{\mathbf{a}}(k) \Phi_k^{\mathbf{a}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1.4. Diszkrét MT-rendszerek

Ahhoz, hogy a Fourier sorokat numerikusan kezelni tudjuk, elengedhetetlen, hogy a Fourier-együtthatók számításánál az integráló formulát le tudjuk cserélni egy véges összegre. Induljunk ki egy rögzített $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ diszkrét sorozatból, egy rögzített $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ komplex számból és egy szintén rögzített $n \in \mathbb{N}$ számból. Jelölje az első n Blaschke-függvény szorzatát

$$A_n(z) := \prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}})$$

és keressük az

$$A_n(z) = A_n(\zeta_0) \tag{1.11}$$

nemlineáris egyenlet megoldásait. Belátható, hogy ennek van pontosan n darab páronként különböző $\mathbb{T}$ -beli megoldása, azaz a megoldások

$$\zeta_k = e^{i\tau_k} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

alakúak. Célunk tehát τ_k -k meghatározása. Az A_n függvény a peremen (Blaschke-függvények a tóruszon):

$$A_n(e^{it}) = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\beta_{a_k}(t)} = e^{i\sum \beta_{a_k}(t)} =: e^{i\theta_n(t)} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol tehát

$$\theta_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{a_k}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Itt β_{a_k} az (1.2) egyenlőségben szereplő függvény, vagyis $\beta_{a_k} = \gamma_{s_k}(t - \alpha_k) + \alpha_k$, ahol tehát $a_k = r_k \cdot e^{i\alpha_k}$, $s_k = \frac{1+r_k}{1-r_k}$.

3. Megjegyzés. Itt θ_n függvény n darab szigorúan monoton növekvő folytonos függvény pontonkénti összege, következésképpen θ_n is szigorúan monoton növekvő folytonos (azaz invertálható) függvény.

Mivel $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, így egyértelműen létezik $\tau_0 \in [-\pi, \pi)$ szám, melyre $e^{i\tau_0} = \zeta_0$. Legyen $\tau_k \in [\tau_0, \tau_0 + 2\pi)$ az a szám, melyre

$$\theta_n(\tau_k) = \theta_n(\tau_0) + 2\pi k \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Az így kapott τ_k megoldások páronként különbözőek. Ezen τ_k megoldásokkal képzett

$$\zeta_k := e^{i\tau_k} \in \mathbb{T} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

komplex számok kielégítik az (1.11) egyenletet sőt ezen ζ_k -kon kívül nincs is más megoldása az egyenletnek. Ezen pontok segítségével tudjuk bevezetni a diszkrétizált MT-rendszereket. Legyen

$$\mathbb{T}_n^{\mathbf{a}} := \{\zeta \in \mathbb{T} : A_n^{\mathbf{a}}(\zeta) = A_n^{\mathbf{a}}(\zeta_0)\} = \{\zeta_k = e^{i\tau_k} : k = 0, \dots, n-1\},$$

és vezessük be a következő diszkrét skaláris szorzatot:

$$[F, G]_n^{\mathbf{a}} := [F, G]_n := \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_n^{\mathbf{a}}} F(\zeta) \overline{G(\zeta)} \varrho_n^{\mathbf{a}}(\zeta), \quad (1.12)$$

ahol $\varrho_n^{\mathbf{a}}$ jelöli a következő súlyfüggvényt:

$$\varrho_n^{\mathbf{a}}(e^{it}) := \varrho_n(e^{it}) := \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} P_{r_k}(t - \alpha_k)} \quad (a_k = r_k \cdot e^{i\alpha_k}, \quad t \in [-\pi, \pi)).$$

Belátható, hogy az így előállított alappontokban a diszkrét skaláris szorzatra nézve az MT-rendszerek egy véges ortonormált rendszert alkotnak. Nevezetesen

3. Állítás. Legyen $(\Phi_k^{\mathbf{a}} : k = 0, \dots, n-1)$ egy véges rendszer. Ekkor ez a rendszer az (1.12) diszkrét skaláris szorzatra nézve ortonormált rendszert alkot, azaz

$$[\Phi_k^{\mathbf{a}}, \Phi_l^{\mathbf{a}}]_n^{\mathbf{a}} = \delta_{kl} \quad (k, l = 0, \dots, n-1).$$

Legyen

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}_n^{\mathbf{a}}} := \{F : F : \mathbb{T}_n^{\mathbf{a}} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

a $\mathbb{T}_n^a$ halmaz pontjaiban értelmezett diszkrét függvények osztálya. A $\mathbb{T}_n^a$ pontjaira leszűkített Φ_k^a ($k = 0, \dots, n-1$) függvények rendszere kifeszíti $\mathcal{F}_{\mathbb{T}_n^a}$ teret, azaz

$$\text{span}\{\Phi_k^a|_{\mathbb{T}_n^a} : k = 0, \dots, n-1\} = \mathcal{F}_{\mathbb{T}_n^a},$$

ezért bármely $F : \mathbb{T}_n^a \rightarrow \mathbb{C}$ függvény esetén létezik $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, \dots, n-1$) együtthatók, melyekkel

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Phi_k^a(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T}_n^a). \quad (1.13)$$

Sőt (1.10) teljesülése esetén a $(\Phi_k^a : k = 0, \dots, n-1)$ rendszer teljes, ezért ekkor (1.13) előállítás egyértelmű. Itt $(\Phi_k^a : k = 0, \dots, n-1)$ rendszer ortogonalitása miatt a λ_k együtthatókra

$$\lambda_k = [F, \Phi_k^a]_n^a \quad (k = 0, \dots, n-1). \quad (1.14)$$

Az eddigiek lehetőséget adnak a következő fogalmak bevezetésére:

2. Definíció. Az (1.14) alakú $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, \dots, n-1$) együtthatókat az $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény k -adik diszkrét MT-Fourier-együtthatójának, az

$$S^\bullet F := \sum_{k=0}^{n-1} [F, \Phi_k^a]_n^a \cdot \Phi_k^a$$

alakú sort F diszkrét MT-Fourier sorának, az

$$S_j^\bullet F := \sum_{k=0}^{j-1} [F, \Phi_k^a]_n^a \cdot \Phi_k^a \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

pedig F j -edik diszkrét MT-Fourier részletösszegének nevezzük.

Ekkor a következő állítás érvényes:

4. Állítás. Legyen $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Ekkor $S^\bullet F$ interpolálja F -et $\mathbb{T}_n$ halmaz pontjaiban, azaz

$$S^\bullet F(\zeta) = F(\zeta) \quad (\zeta \in \mathbb{T}_n).$$

$F \in \mathfrak{R}_n^a$ esetén a diszkrét MT-Fourier sor elő is állítja a függvényt, vagyis

$$S^\bullet F(z) = F(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

Az $\mathfrak{R}_n^a$ függvényosztályon az (1.5) folytonos és az (1.12) diszkrét skaláris szorzatok megegyeznek, azaz

$$\langle F, G \rangle = [F, G]_n^a \quad (F, G \in \mathfrak{R}_n^a).$$

1.4.1. Speciális diszkrét MT-rendszer

Az 1.4 fejezetnek megfelelően nézzük meg, hogy az $\mathbf{a} = (a, b, a, b, \dots)$ speciális sorozat által generált MT-rendszereket hogyan tudjuk diszkretizálni. A jelölések ugyanazok. Kapjuk tehát, hogy $n = 2k$ esetén

$$A_{2k}(z) = (B_a(z))^k (B_b(z))^k, \quad A_{2k}(e^{it}) = e^{ik(\beta_a(t) + \beta_b(t))} =: e^{i\theta_{2k}(t)},$$

ahol tehát

$$\theta_{2k}(t) = k(\beta_a(t) + \beta_b(t)).$$

Az

$$A_{2k}(z) = A_{2k}(\zeta_0), \quad \text{azaz a} \tag{1.15}$$

$$(B_a(z))^k (B_b(z))^k = (B_a(\zeta_0))^k (B_b(\zeta_0))^k$$

nem lineáris egyenlet megoldásai legyenek ζ_l ($l = 0, \dots, 2k - 1$) és a belőlük készített alappontrendszer $\mathbb{T}_{2k} := \{\zeta \in \mathbb{T} : A_{2k}(z) = A_{2k}(\zeta_0)\}$. A $\varrho_{2k} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varrho_{2k}(\zeta) := \frac{1}{K_{2k}(\zeta, \zeta)} \quad (\zeta \in \mathbb{T}), \quad \text{ahol}$$

$$K_{2k}(\zeta, \zeta) = k(P_{r_a}(t - \alpha_a) + P_{r_b}(t - \alpha_b)), \quad \text{ahol}$$

$$a = r_a e^{i\alpha_a}, \quad b = r_b e^{i\alpha_b} \quad (r_a, r_b \in [0, 1), \quad \alpha_a, \alpha_b \in [-\pi, \pi))$$

súlyfüggvény segítségével bevezetett

$$\begin{aligned} [F, G]_{2k} &:= \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_{2k}} F(\zeta) \overline{G(\zeta)} \varrho_{2k}(\zeta) = \\ &= \sum_{\zeta \in \mathbb{T}_{2k}} F(\zeta) \overline{G(\zeta)} \frac{1}{k(P_{r_a}(t - \alpha_a) + P_{r_b}(t - \alpha_b))}. \end{aligned}$$

diszkrét skaláris szorzatra nézve a K_l ($l = 0, \dots, 2k - 1$) rendszer egy véges ortonormált rendszer, azaz

$$[K_l, K_j]_{2k} = \delta_{lj} \quad (l, j = 0, \dots, 2k - 1).$$

Továbbá a 1.4 fejezetben leírtak itt is ugyanúgy érvényesek, vagyis ugyanúgy be tudjuk vezetni a $2k$ alappontra támaszkodó diszkrét MT-Fourier-együtthatók és MT-Fourier sor fogalmát.

2. fejezet

Laguerre-rendszer, Kautz-rendszer

2.1. Laguerre-rendszer

Az $\mathbf{a} = (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$ sorozat speciális megválasztásával az (1.9) alapján generálhatunk különböző MT-rendszereket. Elsőként legyen $\mathbf{a} := (b, b, b, \dots)$ ($b \in \mathbb{D}$) konstans sorozat. Ekkor az ennek megfelelő MT-rendszer (1.9) alapján

$$\begin{aligned}\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) &:= L_{n,b}(z) := \frac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\bar{b}z} \left(\frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right)^n = \\ &= R_b(z)(B_b(z))^n \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad b \in \mathbb{D}, \quad n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Ebben a speciális esetben az ehhez a rendszerhez tartozó MT-Fourier-együtthatókat nevezzük Laguerre-Fourier együtthatóknak is.

Legyen $f \in \mathfrak{R}$, és jelölje $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{D}$ az f páronként különböző inverzpólusait (azaz a pólusoknak a tóruszra vonatkoztatott tükörképeit). Legyen továbbá m_i az a_i multiplicitása ($i = 1, \dots, N$). Osszuk föl a $\mathbb{D}$ halmazt tartományokra a hiperbolikus távolság segítségével a következő képpen:

$$D_i := \{z \in \mathbb{D} : \varrho(z, a_i) > \max\{\varrho(z, a_j) : i \neq j = 1, \dots, N\}\}, \quad (2.1)$$

$$D_0 := \bigcup_{j=1}^N D_j.$$

Vagyis a D_i tartomány azon $\mathbb{D}$ -beli pontokat tartalmazza, amelyek az összes inverzpólus közül az i -edikről vannak dominánsan a legtávolabb. A D_0 halmazban pont azok a pontok nincsenek benne, amelyek két tartomány határán fekszenek, azaz amely pontok esetén $\exists k, l \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad k \neq l : \varrho(z, a_k) = \varrho(z, a_l)$.

Schipp Ferenc és Alexandros Soumelidis [2]-ben belátták, hogy ha a b paraméter az i -edik tartományba esik, akkor az $f \in \mathfrak{R}$ függvény szomszédos Laguerre-Fourier együtthatóinak hányadosának konjugáltja $B_b(a_i)$ -hez tart. Innen pedig a Blaschke-függvény inverzképletét fölhasználva (lásd: (1.1)) módszert kapunk a pólusok meghatározására. Nevezetesen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{-b} \left(\frac{\langle L_{n+1,b}, f \rangle}{\langle L_{n,b}, f \rangle} \right) = a_i \quad (f \in \mathfrak{R}, \quad i = 1, \dots, N).$$

A konvergencia sebességét is meghatározták a szerzők. Nevezetesen, ha

$$q_i(b) > \max \left\{ \frac{\varrho(b, a_k)}{\varrho(b, a_i)} : i \neq k = 1, \dots, N \right\}, \quad \text{és } b \in D_i,$$

akkor

$$\Delta_n(b) := \left| \frac{\langle L_{n+1,b}, f \rangle}{\langle L_{n,b}, f \rangle} - B_b(a_i) \right| = \begin{cases} O((q_i(b))^n), & \text{ha } m_i = 1 \\ O\left(\frac{1}{n}\right), & \text{ha } m_i > 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ha azonban $D_i = \emptyset$, akkor az a_i inverz-pólust nem tudjuk így megtalálni. Kérdés, hogy lehet-e egyáltalán ilyen eset. A következőkben ezt a kérdést járjuk körül és mutatunk példát olyan esetre, amikor az egyik tartomány üres.

2.1.1. Laguerre-Tartományok

Vezessük be az a_i és a_j ($i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$) inverz-pólusok hiperbolikus felezőmerőlegeseit, vagyis azon pontok halmazát, melyeknek az a_i és a_j inverz-pólusoktól vett hiperbolikus távolságuk megegyezik.

3. Definíció. Legyen

$$e_{i,j} := \{z \in \mathbb{D} : \varrho(z, a_i) = \varrho(z, a_j)\} \quad (i \neq j = 1, \dots, N).$$

4. Megjegyzés. Természetesen a_i és a_j inverzpólusok hiperbolikus felezőmerőlegesére

$$e_{i,j} = e_{j,i} \quad (i \neq j = 1, \dots, N).$$

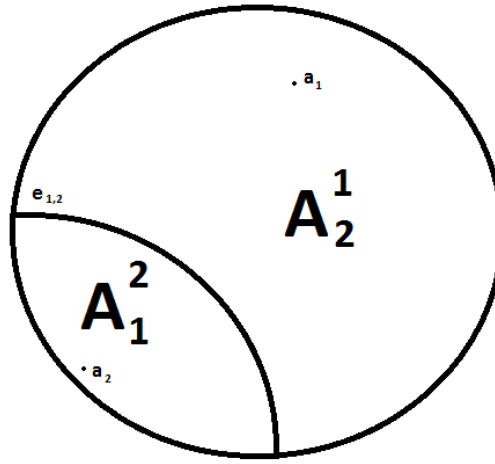
Az $e_{i,j}$ hiperbolikus felezőmerőleges két részre osztja $\mathbb{D}$ -t. Vezessük be a következő tartományokat:

4. Definíció. *Legyen*

$$A_i^j := \{z \in \mathbb{D} : \varrho(z, a_i) > \varrho(z, a_j)\} \quad (i \neq j = 1, \dots, N)$$

tartomány az $e_{i,j}$ hiperbolikus felezőmerőleges által kettészelt $\mathbb{D}$ azon része, amely nem tartalmazza a_i -t. A_j^i pedig az $e_{i,j}$ által kettéosztott $\mathbb{D}$ a_j inverz-pólust nem tartalmazó része.

Erre láthatunk példát az alábbi ábrán:



2.1. ábra. A kettészelt diszk

Ekkor a D_i tartomány ezen A_i^j tartományok j -szerinti metszeteként áll elő, vagyis

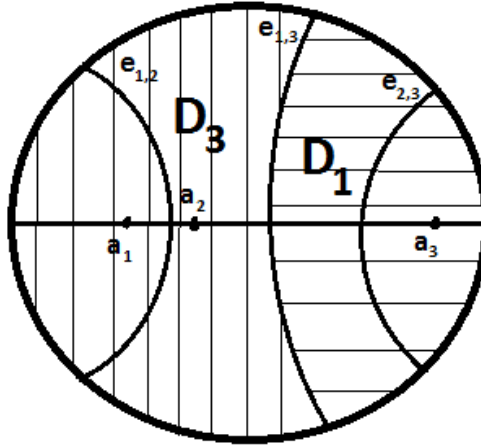
$$D_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^N A_i^j.$$

Tegyük fel, hogy van 3 olyan inverz-pólus, amelyek egy (euklideszi) egyenesen vannak. Ekkor biztosan lesz üres tartomány. Tegyük fel, hogy az a_1, a_2, a_3 inverz-pólusok ilyenek. Feltehetjük, hogy az a_2 inverz-pólust közrefogja az a_1 és a_3 inverz-pólus. Ekkor az $e_{1,2}$ hiperbolikus felezőmerőleges az a_2 inverz-pólus egyik oldalán, míg $e_{2,3}$ hiperbolikus felezőmerőleges az a_2 inverz-pólus másik oldalán fut, ezért $e_{1,2} \cap e_{2,3} = \emptyset$, továbbá A_2^1 és A_2^3 definíciója miatt $D_2 = A_2^1 \cap A_2^3 = \emptyset$. Erre láthatunk most példát:

1. PÉLDA. Vegyük például azt az esetet, amikor

$$a_1 := -0.5 \quad a_2 := -0.2 \quad a_3 := 0.8.$$

Ekkor $D_2 = \emptyset$, de $D_1 \neq \emptyset$, $D_3 \neq \emptyset$. A D_1 és D_3 tartományokat éppen az $e_{1,3}$ hiperbolikus felezőmerőleges választja el egymástól. Ezt láthatjuk a 2.2 ábrán.



2.2. ábra. Egyik hiperbolikus felezőmerőleges sem metszi a másikat

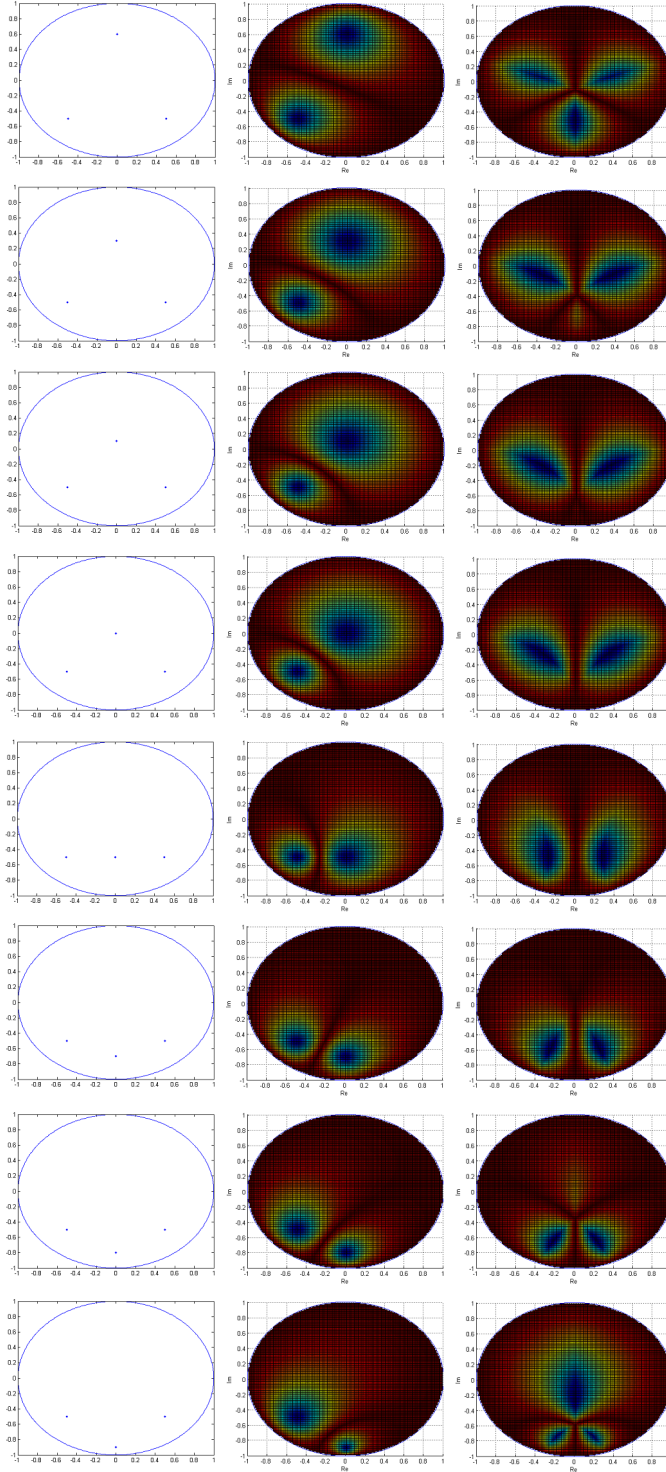
A következő példában azt szemléltetjük, hogyan tűnik el egy tartomány.

2. PÉLDA. Rögzítsünk két inverz-pólust:

$$a_1 := -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \quad a_2 := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

a harmadik inverz-pólus helyzetét pedig változtassuk a képzetes-tengely mentén. Az a_1, a_2 inverz-pólusok elhelyezkedése miatt $e_{1,2}$ hiperbolikus felezőmerőleges a képzetes-tengely, az $e_{2,3}$ hiperbolikus felezőmerőleges pedig az $e_{1,3}$ hiperbolikus felezőmerőleges képzetes tengelyre vonatkozó tükörképe. A lentebb látható 2.3 ábra egy képsorozat, melynek első oszlopában az inverz-pólusok láthatók, második oszlopában az $e_{1,3}$ hiperbolikus felezőmerőleges, míg a harmadik oszlopában a három inverz-pólus által meghatározott tartományok. Jól látható, hogy a_3 változtatásával hogyan változik $e_{1,3}$ és a tartományok. Először a csökkentés hatására az $e_{1,2} \cap e_{1,3}$ metszéspont egyre lejjebb kerül, míg az 5. sorban már nincs is metszéspont és megszűnik az egyik

tartomány. Ekkor az inverz-pólusok egy euklideszi egyenesen vannak. Ha tovább csökkentjük a_3 -at, akkor ismét megjelenik az eltűnő tartomány, mert ismét van metszéspontja $e_{1,2}$ -nek és $e_{1,3}$ -nak.



2.3. ábra.

Célunk a továbbiakban egy másik speciális rendszerből kiindulva a Laguerre-módszerhez hasonló, inverz-pólus kereső módszert kidolgozni.

2.2. Kautz-rendszer

Legyen $\mathbf{a} := (a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N})$, melyre

$$a_{2k} := a \in \mathbb{D}, \quad \text{és} \quad a_{2k+1} := b \in \mathbb{D} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ez is egy igen speciális sorozat. Az indexelés miatt írjuk is ki a sorozat első néhány tagját, hogy a következő megállapítások jobban láthatóak legyenek:

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_2 = a, \quad a_3 = b, \quad a_4 = a, \quad a_5 = b, \quad \dots$$

Jól látható, hogy ennek a sorozatnak a multiplicitás sorozata (1.7) szerint

$$m_{2k} = k + 1, \quad \text{míg} \quad m_{2k+1} = k + 1. \quad (2.3)$$

Az így definiált $\mathbf{a}$ sorozat által generált MT-rendszer (1.9) értelmében:

$$K_{2k+1}(z) := \Phi_{2k+1}^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1-|b|^2}}{1-\bar{b}z} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^{k+1} \left(\frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right)^k = R_b(z)(B_a(z))^{k+1}(B_b(z))^k,$$

$$K_{2k}(z) := \Phi_{2k}^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^k \left(\frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right)^k = R_a(z)(B_a(z))^k(B_b(z))^k.$$

Mi csak az $n = 2k$ esettel fogunk foglalkozni. Figyelembe véve a (2.3) egyenlőségben szereplő $m_{2k} = k + 1$ multiplicitást, $\mathbf{a}$ sorozat speciális alakját, (1.8) fölírását és 1 lemmát, kapjuk hogy

$$\langle f, q_{2k}^{\mathbf{a}} \rangle = \langle f, q_{a,k} \rangle = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (f \in A(\mathbb{D}), \quad f \in C(\bar{\mathbb{D}})). \quad (2.4)$$

Mivel (1.6) szerint $\mathfrak{R}$ -et a $q_{a,k}$ függvények generálják, ezért bármely $\mathfrak{R}$ -beli függvény fölírható $q_{a,k}$ -k véges lineáris kombinációjaként, azaz $\exists \lambda_{j,i} \in \mathbb{C} \quad (i = 0, \dots, m_j - 1, \quad \lambda_{j,m_j-1} \neq 0)$, melyekkel

$$R_j(z) = \sum_{i=0}^{m_j-1} \lambda_{j,i} \cdot q_{a_j,i} = \sum_{i=0}^{m_j-1} \lambda_{j,i} \frac{z^i}{(1-\bar{a}_j z)^{i+1}} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}}).$$

Itt R_j egy olyan racionális függvény, melynek az $a_j \in \mathbb{D}$ m_j -szeres inverz-pólusa (azaz $1/\bar{a}_j$ m_j -szeres pólusa). Ilyen R_j függvények összegeként írhatók föl az $\mathfrak{R}$ -beli függvények, azaz bármely $f \in \mathfrak{R}$ esetén $\exists N \in \mathbb{N}$, R_j ($j = 1, \dots, N$), melyekre

$$f(z) = \sum_{j=1}^N R_j(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

Vezessük be a $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ következő felosztását:

5. Definíció. A $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ i -edik tartománya legyen

$$\mathcal{D}_i := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} : \varrho(z_1, a_i)\varrho(z_2, a_i) > \max_{i \neq j=1, \dots, N} \{\varrho(z_1, a_j)\varrho(z_2, a_j)\}\}.$$

1. Tétel. Tegyük föl, hogy az $f \in \mathfrak{R}$ függvényre

$$f = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot q_{a_j, 0},$$

vagyis f inverz-pólusai egyszeresek. Ha $(a, b) \in \mathcal{D}_i$ és $\lambda_i \neq 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\langle K_{2(k+1)}, f \rangle}{\langle K_{2k}, f \rangle} \right) = B_a(a_i)B_b(a_i).$$

Bizonyítás:

(2.4) egyenlőség miatt

$$\begin{aligned} \langle K_{2k}, f \rangle &= \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j \langle K_{2k}, q_{a_j, 0} \rangle = \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j K_{2k}(a_j) = \sum_{j=1}^N \bar{\lambda}_j R_a(a_j) (B_a(a_j))^k (B_b(a_j))^k = \\ &= (B_a(a_i)B_b(a_i))^k \left(\bar{\lambda}_i R_a(a_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\lambda}_j R_a(a_j) \left(\frac{B_a(a_j)B_b(a_j)}{B_a(a_i)B_b(a_i)} \right)^k \right) =: (B_a(a_i)B_b(a_i))^k \cdot \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Itt $(a, b) \in \mathcal{D}_i$ miatt

$$\left| \frac{B_a(a_j)B_b(a_j)}{B_a(a_i)B_b(a_i)} \right| = \frac{\varrho(a, a_j)\varrho(b, a_j)}{\varrho(a, a_i)\varrho(b, a_i)} < 1,$$

vagyis $\lim \varepsilon_k = \bar{\lambda}_i R_a(a_i)$. Ugyanezt fölírva $K_{2(k+1)}$ -re:

$$\langle K_{2(k+1)}, f \rangle = (B_a(a_i)B_b(a_i))^{k+1} \cdot \varepsilon_{k+1}.$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\langle K_{2(k+1)}, f \rangle}{\langle K_{2k}, f \rangle} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(B_a(a_i)B_b(a_i))^{k+1} \varepsilon_{k+1}}{(B_a(a_i)B_b(a_i))^k \varepsilon_k} \right) = \\ &= B_a(a_i)B_b(a_i) \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right) = B_a(a_i)B_b(a_i), \end{aligned}$$

mivel $\lim(\varepsilon_{k+1}) = \bar{\lambda}_i R_a(a_i) \neq 0$. ■

5. Megjegyzés. *i) A konvergencia sebessége:*

$$\Delta_k := \left| B_a(a_i)B_b(a_i) - \frac{\langle K_{2(k+1)}, f \rangle}{\langle K_{2k}, f \rangle} \right| = \mathcal{O}(q_i^k),$$

ahol

$$q_i > \max_{i \neq j=1, \dots, N} \left\{ \frac{\varrho(a, a_j)\varrho(b, a_j)}{\varrho(a, a_i)\varrho(b, a_i)} \right\}.$$

ii) A tétel igaz marad akkor is, ha f pólusai nem csak egyszeresek. Ebben az esetben bejönnek K_{2k} deriváltjai. Az i -edik deriváltra a következő rekurzív összefüggés adható:

$$K_{2k}^{(i)} = \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \binom{k}{l} K_{2(k-l)}, \quad \text{ahol}$$

$$\gamma_{0,0} = 1, \quad \gamma_{i,l} = 0 \quad (\text{ha } l > i \text{ vagy } l < 0), \quad (2.5)$$

$$\gamma_{i+1,l} = \alpha_a \gamma_{i,l} + \gamma'_{i,l} + l(\beta_a B_b + \beta_b B_a) \gamma_{i,l-1} \quad (l = 0, \dots, i+1).$$

Itt β_a és β_b jelöli B_a és B_b függvények deriváltját, vagyis

$$\beta_a := B'_a, \quad \beta_b := B'_b$$

2.2.1. Kautz-tartományok

Úgy, ahogy a Laguerre-tartományok esetében, itt is vezessük be a következő fogalmakat.

6. Definíció. Legyen $e_{i,j}^\times$ a $\mathcal{D}_i$ és $\mathcal{D}_j$ tartományokat elválasztó $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ -beli pontok halmaza, vagyis

$$e_{i,j}^\times := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} : \varrho(z_1, a_i)\varrho(z_2, a_i) = \varrho(z_1, a_j)\varrho(z_2, a_j)\} \quad (i \neq j = 1, \dots, N).$$

6. Megjegyzés. Ha $z_1 \in e_{i,j}$ és $z_2 \in e_{i,j}$, vagyis $\varrho(z_1, a_i) = \varrho(z_1, a_j)$ és $\varrho(z_2, a_i) = \varrho(z_2, a_j)$, akkor

$$\varrho(z_1, a_i)\varrho(z_2, a_i) = \varrho(z_1, a_j)\varrho(z_2, a_j),$$

azaz ebben az esetben $(z_1, z_2) \in e_{i,j}^\times$. Eszerint $(e_{i,j} \times e_{i,j}) \subset e_{i,j}^\times$.

Szükségünk van a következő tartományokra is:

7. Definíció. Legyen $\mathcal{A}_i^j$ az $e_{i,j}^\times$ által kettészelt $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ azon része, amely nem tartalmazza az (a_i, a_i) párost, vagyis

$$\mathcal{A}_i^j := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} : \varrho(z_1, a_i)\varrho(z_2, a_i) > \varrho(z_1, a_j)\varrho(z_2, a_j)\} \quad (i \neq j = 1, \dots, N).$$

Ekkor a $\mathcal{D}_i$ tartomány ezen $\mathcal{A}_i^j$ tartományok j -szerinti metszeteként áll elő, vagyis

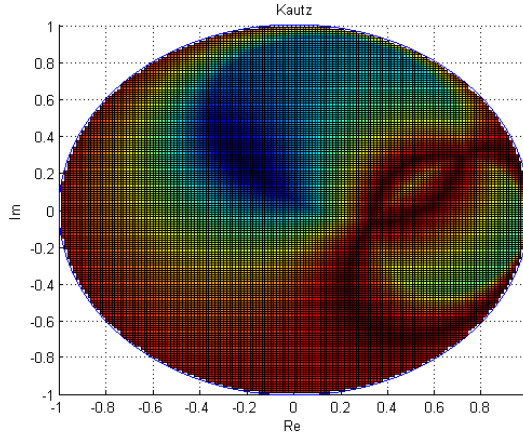
$$\mathcal{D}_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{A}_i^j.$$

Ahhoz, hogy a Kautz-tartományokat ábrázolni tudjuk, meg kell kötnünk az egyik változót. Vagy úgy, hogy a másik változónak valamilyen függvénye legyen, vagy úgy, hogy konstansnak választjuk. Rögzítsük le b -t és nézzünk erre az esetre példát:

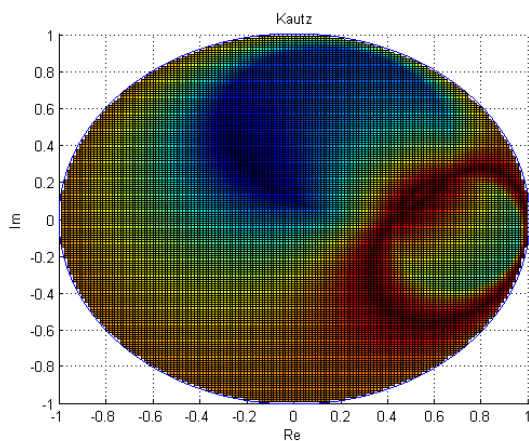
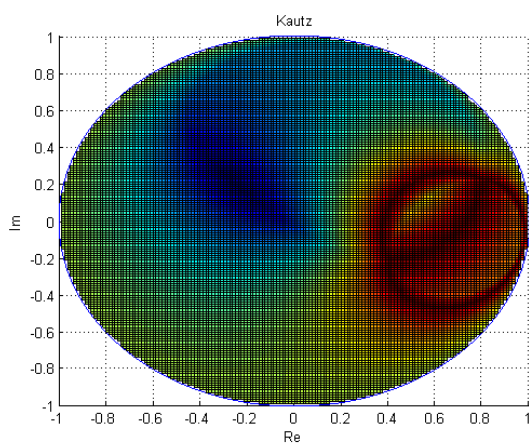
3. PÉLDA. Legyenek

$$a_1 := 0.2 + 0.6i \quad a_2 := -0.7 - 0.3i \quad a_3 := 0.8 - 0.1i$$

és legyen rendre $b := -0.8 + 0.1i$, $b := -0.6 + 0.1i$, $b := -0.8 + 0.1i$. Ekkor a következő Kautz-tartományokat kapjuk (2.4 ábra, 2.5 ábra, 2.6 ábra):



2.4. ábra. $\mathbf{b} = -0.8 + 0.1i$

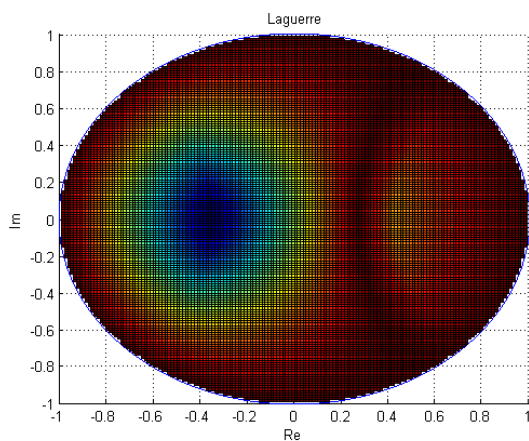
2.5. ábra. $\mathbf{b} = -0.6 + 0.1i$ 2.6. ábra. $\mathbf{b} = -0.4 + 0.1i$

Mind a három példában 3 tartományra bomlik a diszk, vagyis nincsen üres tartomány. Jól látható, hogy b megválasztásától erősen függ a tartományok mérete (és persze darabszáma is). Ha b -t nem megfelelően választjuk, az egyik tartomány eltűnik és a diszknek csak két tartománya lesz. Ebben az esetben az egyik inverz-pólust nem fogjuk tudni megtalálni (amelyikhez tartozó tartomány üres).

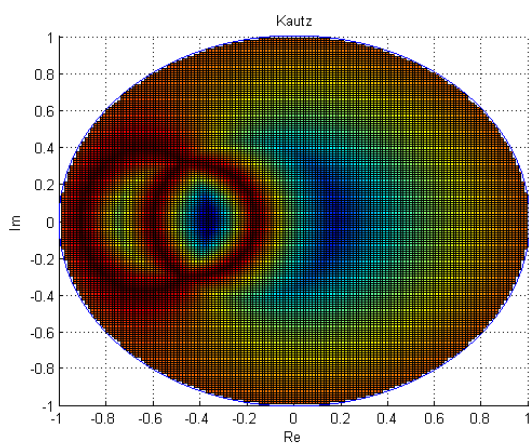
4. PÉLDA. Legyenek

$$a_1 := -0.5 \quad a_2 := -0.2 \quad a_3 := 0.8.$$

Láttuk, hogy ebben az esetben a Laguerre-tartományok közül az egyik üres. Ebben az esetben a Laguerre-tartományok (2.7 ábra):

2.7. ábra. **Eltűnő Laguerre-tartomány**

Még ekkor is tudunk olyan $b \in \mathbb{D}$ -t választani, hogy a Kautz-tartományok közül egyik se tűnjön el. Legyen ugyanis $b := 0.65 + 0.1i$. Ekkor a Kautz-tartományok (2.8 ábra):

2.8. ábra. **Kautz-tartományok**

3. fejezet

Alkalmazás

3.1. Polinom gyökkeresés

Ebben a fejezetben nézzünk egy alkalmazást az eddigiekhez! Induljunk ki egy

$$P(z) := \sum_{k=0}^n c_k z^k \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \quad (c_k \in \mathbb{C} \ (k = 0, \dots, n), \ z \in \mathbb{C}, \ c_n \neq 0)$$

polinomból, melynek deriváltja

$$P'(z) = \sum_{k=1}^n k \cdot c_k z^{k-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \quad (c_k \in \mathbb{C} \ (k = 1, \dots, n), \ z \in \mathbb{C}, \ c_n \neq 0).$$

Ekkor $\frac{P'}{P} \in \mathfrak{R}$, melynek pólusai éppen P gyökei, így egy alkalmazás lehet a P polinom gyökeinek a meghatározása a korábban leírt módszerek valamelyikével. Jelölje a_k^* ($k = 1, \dots, n$) P m_k -szoros gyökeit, azaz

$$P(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k^*)^{m_k} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor az

$$R(z) := \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - a_k^*}$$

racióális függvénynek az a_k^* pólusai egyszeresek. Akár a [2]-ben leírt, akár az itt leírt algoritmust akarjuk használni, el kell érünk, hogy $\frac{P'}{P}$ inverz-pólusai $\mathbb{D}$ -n belül legyenek, ugyanis ezeket találja meg a módszer. Az inverz-pólusra

$$a_k \in \mathbb{D} \Leftrightarrow a_k^* = \frac{1}{\bar{a}_k} \notin \mathbb{D}, \quad \text{ahol tehát} \quad P(a_k^*) = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ezt elérjük, ha eltranszformáljuk a P polinomot. A polinomok gyökeire igaz a következő becslés:

5. Állítás. Legyen $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$,

$$Q(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k \in \mathcal{P}_n \quad (b_k \in \mathbb{C} \ (k = 0, \dots, n), \ z \in \mathbb{C}, \ b_n \neq 0, \ b_0 \neq 0).$$

Legyenek a $z_k \in \mathbb{C}$ számok $(k = 1, \dots, n)$ a Q polinom gyökei. Vegyük az r és R számokat:

$$r := \frac{1}{1 + \frac{\max\{|b_n|, |b_{n-1}|, \dots, |b_1|\}}{|b_0|}} \quad \text{és} \quad R := 1 + \frac{\max\{|b_{n-1}|, |b_n|, \dots, |b_0|\}}{|b_n|}.$$

Ekkor:

$$r \leq |z_k| \leq R \quad (k = 1, \dots, n).$$

Kiemelendő, hogy az előző állítás csak akkor igaz, ha van nem 0 konstans tag, azaz a 0 már nem gyöke a polinomnak. Ki kell tehát emelnünk a 0-hoz tartozó gyöktényezőt ahányszor csak lehet. Ezután már tudjuk alkalmazni az iménti becslést. Igaz továbbá, hogy

6. Állítás. Legyenek a

$$P_1^{(1)} = \sum_{k=0}^n b_k z^k \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \quad (b_k \in \mathbb{C}, \ (k = 0, \dots, n), \ b_n = 1)$$

1-főegyütthatós polinomnak a gyökei: $z_1, \dots, z_n$. Ekkor az a $P_2^{(1)} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ polinom, melynek gyökei: $\alpha z_1, \dots, \alpha z_n$ fölírható

$$P_2^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} b_k z^k \quad (b_k \in \mathbb{C} \ (k = 0, \dots, n), \ z \in \mathbb{C}, \ b_n = 1, \ \alpha > 0).$$

alakban.

Mivel

$$\forall r > 0 \ \exists \alpha > 0 : \quad 1 < \alpha \cdot r \quad (< \alpha |z_k|),$$

így egy ilyen α -t választva és ezzel elkészítve a "fölfújtt" $P_2^{(1)}$ polinomot, $P_2^{(1)}$ -nek minden $z_{k, P_2^{(1)}}$ gyökére teljesül, hogy

$$|z_{k, P_2^{(1)}}| > 1, \quad \text{azaz} \quad z_{k, P_2^{(1)}} \notin \mathbb{D} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Tehát miután elértük, hogy a P polinomunknak a 0 ne legyen gyöke és főegyütthatóra normáltuk, akkor pl.: $\alpha := \frac{1,0001}{r}$ választással elkészíthetjük azt a

$$\tilde{P}(z) := \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} c_k z^k \quad (c_k \in \mathbb{C} \ (k = 0, \dots, n), \ z \in \mathbb{C}, \ c_n = 1, \ \alpha > 0)$$

polinomot, melynek már nincs gyöke $\mathbb{D}$ -ben, azaz minden a_k ($k = 1, \dots, n$) inverz-pólusa már $\mathbb{D}$ -ben van, így alkalmazhatjuk a fõnt leírt inverz-pólus keresõ módszereket.

A (2.2) segítségével fel tudjuk térképezni a $\mathbb{D}$ diszket konvergencia szempontjából.

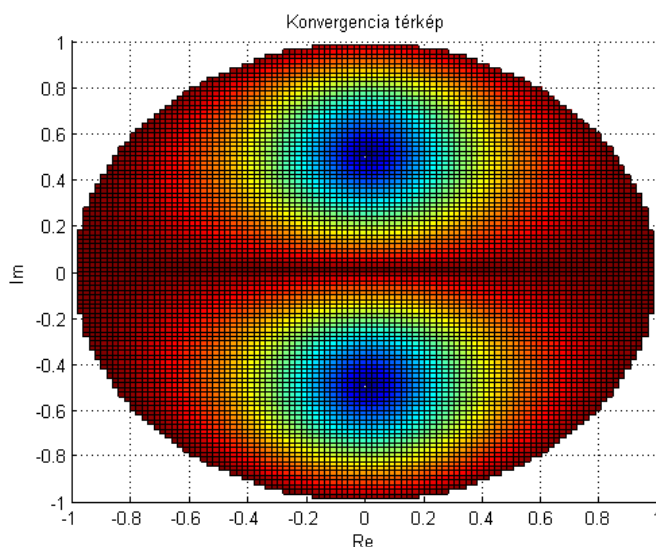
5. PÉLDA. *Tegyük föl, hogy a*

$$P(z) := z^2 + 4 \quad (z \in \mathbb{C})$$

polinomra akarjuk futtatni az [2]-ben leírt algoritmust (továbbiakban Laguerre-módszer) és azt vizsgáljuk, hogy milyen $b \in \mathbb{D}$ paraméterre milyen gyorsan konvergál. P gyökei: $2i$, $-2i$, azaz inverz-pólusai, amiket az algoritmus keres: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$. Készítsünk egy $f : \mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$ függvényt, amely megmondja, hogy egy adott $b \in \mathbb{D}$ paraméterû ponthoz mekkora konvergencia sebesség tartozik. Esetünkben

$$f(b) := \begin{cases} \frac{\varrho(-0.5i, b)}{\varrho(0.5i, b)} = \frac{|B_{-0.5i}(b)|}{|B_{0.5i}(b)|}, & \text{ha } \varrho(0.5i, b) > \varrho(-0.5i, b) \\ \frac{\varrho(0.5i, b)}{\varrho(-0.5i, b)} = \frac{|B_{0.5i}(b)|}{|B_{-0.5i}(b)|}, & \text{ha } \varrho(-0.5i, b) > \varrho(0.5i, b). \end{cases}$$

Ekkor a következõ konvergencia térképet kapjuk:



3.1. ábra. $P(z) = z^2 + 4$ konvergencia térképe. Inverz pólusok: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$, a lehető legnagyobb konvergencia sebesség: 0.

Jól látható, hogy a diszk két tartományra bomlik. Ha a $b \in \mathbb{D}$ paraméter a diszk felső részében helyezkedik el, akkor a b -hez tartozó Laguerre-módszer a $-\frac{1}{2}i$ inverz-pólushoz konvergál, míg ha a diszk alsó részében helyezkedik el, akkor a hozzá tartozó Laguerre-módszer az $\frac{1}{2}i$ inverz-pólushoz konvergál. A képen az is látható, hogy az inverz-pólus közelében lesz gyors a konvergencia (kék) (pl.: $b := \frac{1}{2}i$ -ből indítva egy lépésben átugrik a $-\frac{1}{2}i$ -be). Jól látható az is, hogy a két tartomány határán, valamint a tórusz közelében a konvergencia sebessége 1, tehát ezen pontokban a módszerünk nem konvergál. Ebben a példában tehát a lehető legnagyobb konvergencia sebesség 0.

7. Megjegyzés. A konvergencia sebességén azt a $q \in [0, 1]$ számot értjük, amire rögzített $b \in D_i$ esetén

$$\Delta_n := \left| \frac{\langle L_{n+1,b}, f \rangle}{\langle L_{n,b}, f \rangle} - B_b(a_i) \right| = O(q^n).$$

Vagyis q minél kisebb, a konvergencia annál gyorsabb.

6. PÉLDA. Legyen most

$$P(z) := z^3 + 2z^2 + 4z + 8 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor P gyökei: $2i$, $-2i$, -2 , azaz inverz-pólusai: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}$, konvergencia térképe pedig (3.2) ábra:

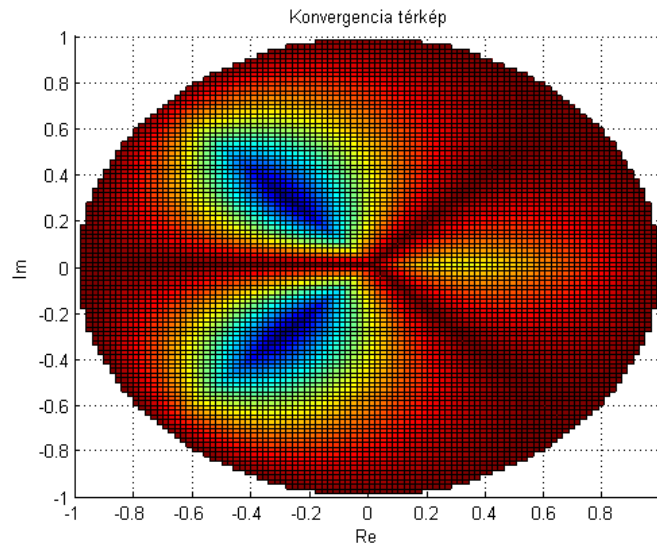
Itt is jól láthatók a tartományok. Itt már sokkal szűkebb a jól konvergáló indulópontok halmaza, illetve a lehető legjobb konvergencia is már csak 0.5664. Ezt körülbelül a $-0.3 \pm 0.3i$ -ben veszi fel.

7. PÉLDA. Nézzünk meg egy négy pólussal rendelkező példát is. Legyen ehhez

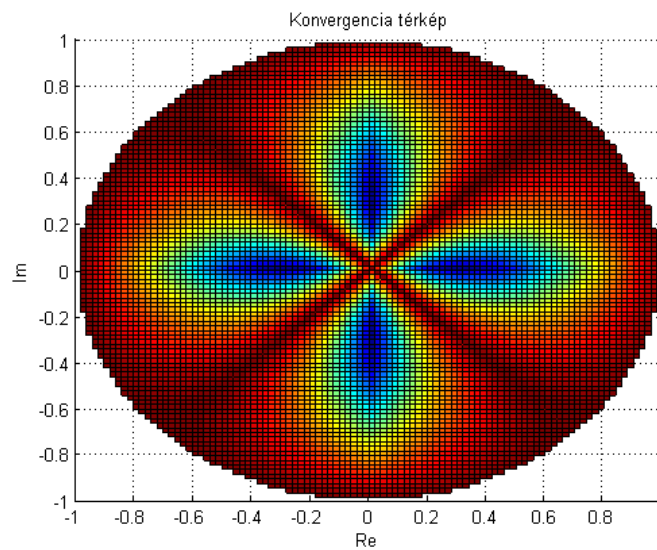
$$P(z) := z^4 - 16 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ennek gyökei: $2i$, $-2i$, 2 , -2 , míg inverz-pólusai: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. Ekkor a konvergencia térkép (3.3 ábra):

Itt is gyönyörűen látható a négy darab tartomány.



3.2. ábra. $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$ konvergencia térképe. Inverz pólusok: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}$, legnagyobb konvergencia sebesség: 0.5664.



3.3. ábra. $P(z) = z^4 - 16$ konvergencia térképe. Inverz pólusok: $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, legnagyobb konvergencia sebesség: 0.8289.

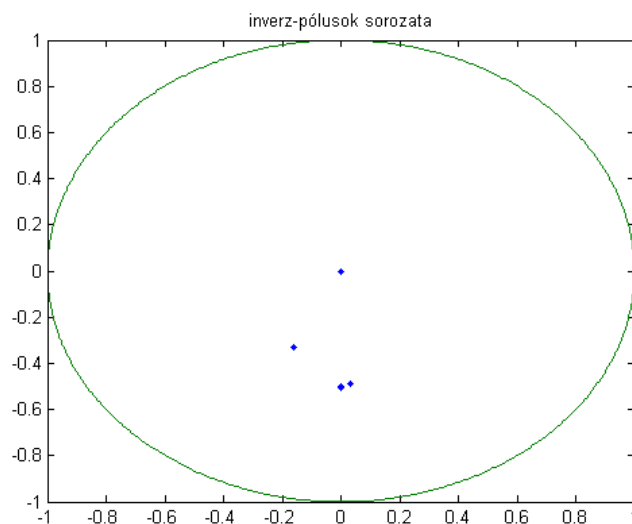
Most nézzük meg a módszer futását ezekben az esetekben!

8. PÉLDA. *Induljunk ki ismét a*

$$P(z) := z^2 + 4 \quad (z \in \mathbb{C})$$

polinomból és indítsuk el a Laguerre-módszert a $b = 0.05 + 0.45i$ pontból. A 3.1

ábra konvergencia térképéből látszik, hogy innen indítva nagyon jól fog konvergálni. Valóban, 10 iteráció után a megállás: $0.000000066206453 - 0.500000052612708i$, ami kiválónak mondható, hiszen a hiba: $0.8455799441 \cdot 10^{-7}$. Az is jól látható, hogy lényegében egyből beugrik a $-\frac{1}{2}i$ -be (3.4 ábra):

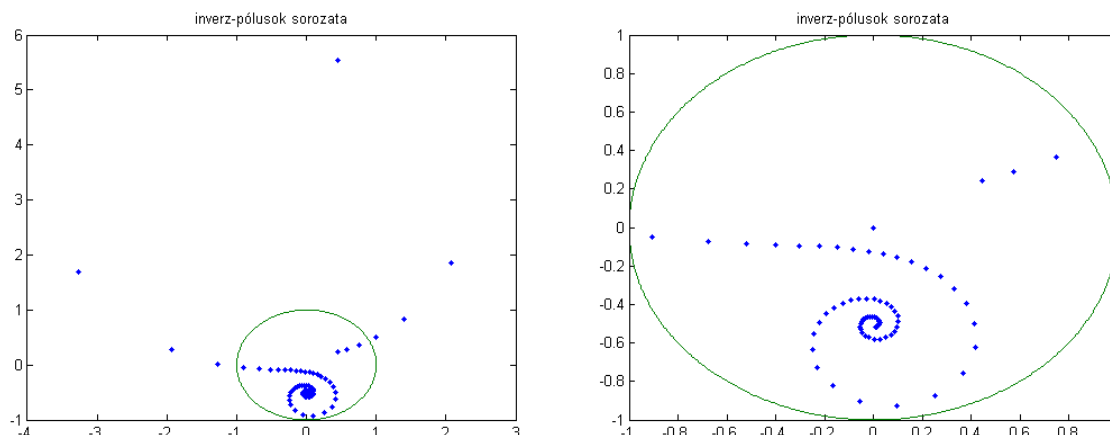


3.4. ábra. $P(z) = z^2 + 4$. A módszert a $b = 0.05 + 0.45i$ pontból indítva 10 iterációt végrehajtva, az inverz-pólusok sorozata. A konvergencia sebessége: **0.1174518003**.

Nézzünk egy olyan esetet is, amikor a konvergencia lassú.

9. PÉLDA. Legyen a P polinom ugyanaz, mint az előbb, de most a Laguerre-módszert indítsuk a $b = 0.8 + 0.3i$ pontból. Ekkor a konvergencia igen lassú, egészen pontosan: 0.9446903205 és mivel b a diszk felső részén helyezkedik el, ezért ekkor a $-\frac{1}{2}i$ inverz-pólushoz konvergál. A 3.5 ábrán 80 iteráció utáni inverz-pólus sorozat látható. A bal oldalin látszik, hogy az első pár lépésben még bőven a diszken kívül van, később azonban szépen bekonvergál a "helyére". A jobb oldali ugyanaz az ábra, csak a diszken kívüli eredményeket kinulláztuk. A megtalált pont 80 iteráció után: $0.008924868450736 - 0.518201841608480i$, ami szemmel láthatólag sokkal gyengébb érték, mint az előbbi 10 iterációs változat, hiszen a hiba ebben az esetben: 0.02027215614 .

Leszűrhetjük tehát azt a trivialitást, hogy a Laguerre-módszer igen csak érzékeny az indítási pontra.



3.5. ábra. $P(z) = z^2 + 4$. A módszert a $b=0.8+0.3i$ pontból indítva 80 iterációt végrehajtva, az inverz-pólusok sorozata. A konvergencia sebessége: 0.9446903205.

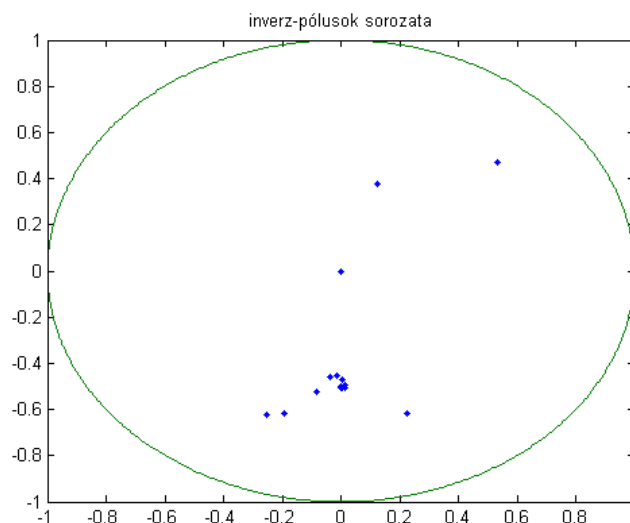
Nézzük meg hogyan vizsgáljuk a Laguerre-módszer három pólus esetén!

10. PÉLDA. Legyen most

$$P(z) := z^3 + 2z^2 + 4z + 8 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Indítsuk el a Laguerre-módszert a $b = -0.3 + 0.4i$ pontból. A 3.2 ábra konvergencia térképe alapján innen viszonylag gyors konvergenciát várhatunk. A konvergencia sebesség pontos értéke: 0.6528625492. A $b \in \mathbb{D}$ pont legtávolabb a $-\frac{1}{2}i$ inverz-pólustól van, tehát a Laguerre-módszer ezt az inverz-pólust fogja megtalálni. 20 iterációt végrehajtva kapjuk: $0.000139565082543 - 0.499383144554080i$, ami egy bőven elfogadható eredménynek mondható. A hiba: 0.0006324468332. A 3.6 ábrán látszik, hogy valóban elég gyorsan a $-\frac{1}{2}i$ közelébe ér.

Nézzünk erre is egy lassú konvergenciát!



3.6. ábra. $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$. A módszert a $b = -0.3 + 0.4i$ pontból indítva 20 iterációt végrehajtva, az inverz-pólusok sorozata. A konvergencia sebessége: 0.6528625492.

11. PÉLDA. Legyen tehát P ugyanaz, mint előbb, de most indítsuk a Laguerre-módszert a $b = -0.1 - 0.6i$ pontból. Ekkor a konvergencia pontos sebessége:

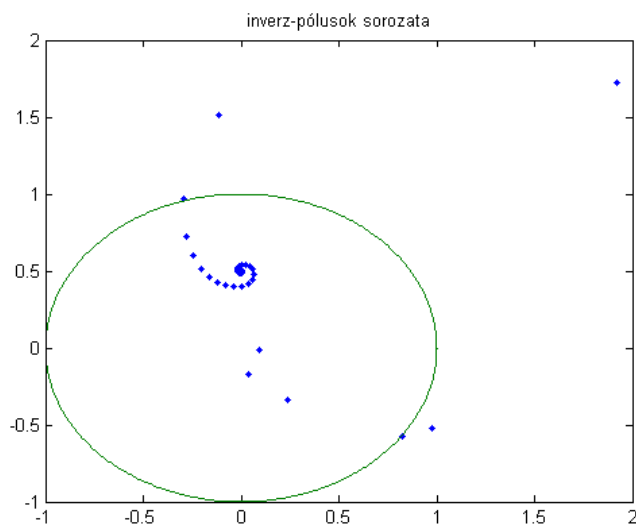
0.8525519214. Most a b pont a legtávolabb az $\frac{1}{2}i$ inverz-pólustól helyezkedik el, így a Laguerre-módszer oda konvergál. 80 iteráció után a leállás helye:

0.000003730521769 + 0.499997101615292i. A hiba: $0.4724141745 \cdot 10^{-5}$. Itt is látszik, hogy az iteráció elején még elhagyja az inverz-pólusok sorozata a diszket (3.7 ábra).

A problémát az okozza, hogy mi nem ismerjük az inverz-pólusokat (épp ezeket keressük), ezért nem tudunk optimális $b \in \mathbb{D}$ pontot választani. A tóruszt, illetve a tartomány határait leszámítva a konvergencia mindenütt biztosított, de a sebessége kérdéses. Ezért érdemes egyszerre több pontból elindítani az algoritmust. Csinálhatjuk azt tehát, hogy véletlenszerűen leszórunk a diszkre M darab pontot $(b_1, \dots, b_M)$ és mindegyikből elindítjuk a Laguerre-módszert. Kapunk ezzel M darab sorozatot: $(a_n^{(b_1)}), (a_n^{(b_2)}), \dots, (a_n^{(b_M)})$. Ekkor $b_j \in D_i$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{(b_j)}) = a_i. \quad (j = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, N).$$

Itt N jelöli az inverz-pólusok számát. Nézzünk erre is néhány példát!



3.7. ábra. $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$. A módszert a $b = -0.1 - 0.6i$ pontból indítva 80 iterációt végrehajtva, az inverz-pólusok sorozata. A konvergencia sebessége: 0.8525519214.

12. PÉLDA. Legyen

$$P(z) := z^2 + 4 \quad (z \in \mathbb{C}),$$

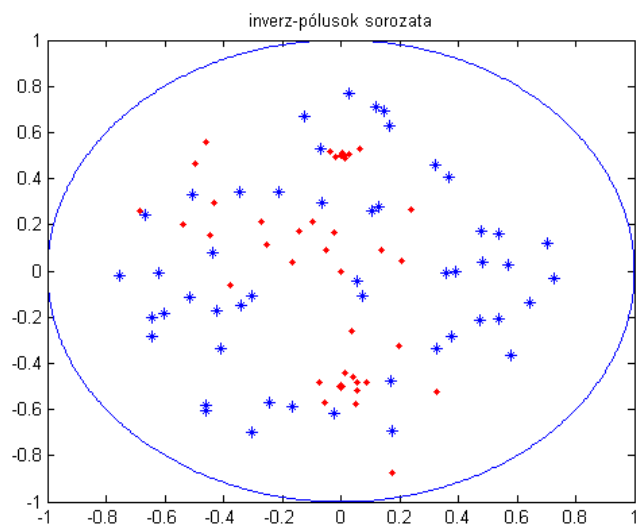
és szórjunk le véletlenszerűen a diszkre 50 pontot (kék csillag). Itt, mivel a tórusz közelében amúgy is nagyon lassú a konvergencia, ezért kikötöttük, hogy a pont a 0.8 sugarú körbe essék. Ezután indítsuk el a Laguerre-módszert ezekből a pontokból és nézzük, hova érkeznek 60 iteráció után. A 3.8 ábrán pirossal ábrázoltuk minden inverz-pólus sorozat utolsó 5 tagját. Látható, hogy valóban a két inverz-pólus $(\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i)$ körül csoportosulnak. A valós tengelyhez közeli pontokban a konvergencia nagyon rossz, ezért a hozzájuk tartozó inverz-pólusok még nem jutottak el az $\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i$ inverz-pólusok egyikébe sem. Ezek a szétszórt piros pontok.

Nézzük meg a három- és négy pólusos esetben is!

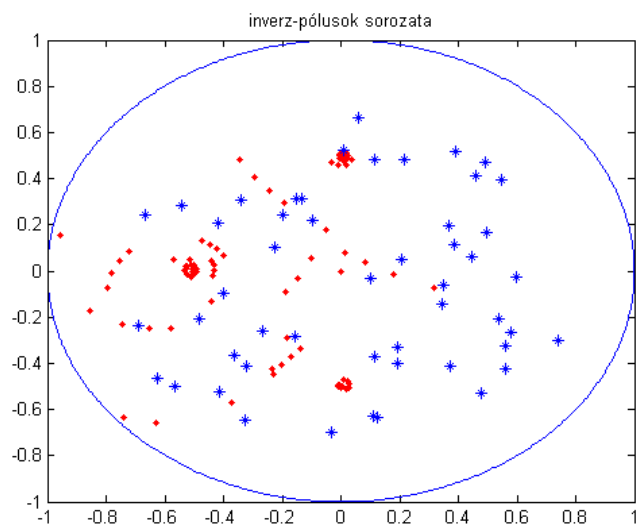
13. PÉLDA. Legyen most

$$P(z) := z^3 + 2z^2 + 4z + 8 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Szórjunk le ismét 50 pontot véletlenszerűen és nézzük meg 60 iteráció után az inverz-pólusok sorozatát (3.9)!



3.8. ábra. $P(z) = z^2 + 4$. 50 pontot szórtunk le (kék csillag), 60 iteráció után az inverz-pólusok sorozata (piros pont).



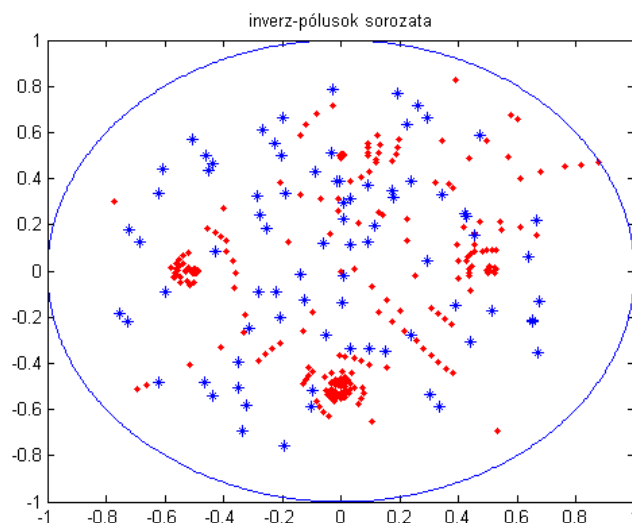
3.9. ábra. $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$. 50 pontot szórtunk le (kék csillag), 60 iteráció után az inverz-pólusok sorozata (piros pont).

És végül négy pólusú esetben:

14. PÉLDA. Legyen ehhez

$$P(z) := z^4 - 16 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Most 80 pont leszórása után 60 iterációt követve az inverz-pólusok sorozata (3.10):



3.10. ábra. $P(z) = z^4 - 16$. 80 pontot szórtunk le (kék csillag), 60 iteráció után az inverz-pólusok sorozata (piros pont).

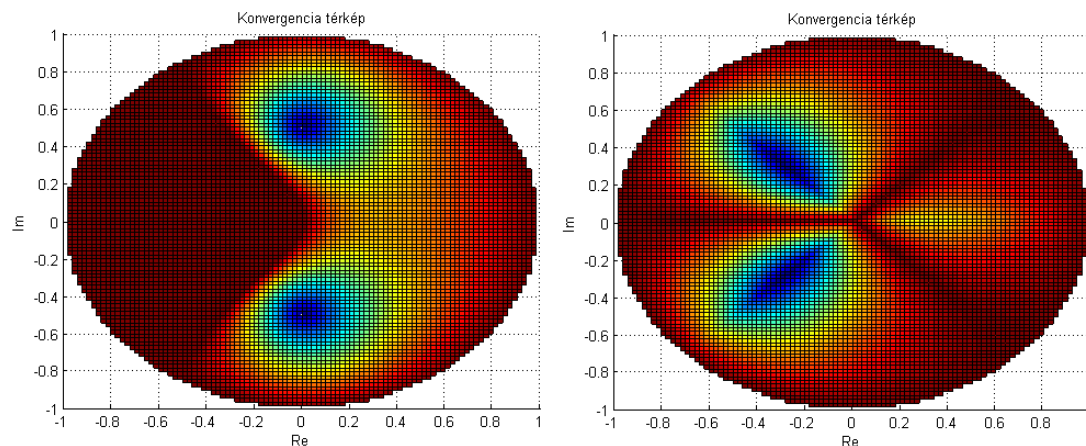
Ezzel alaposan kielemeztük a [2]-ben leírt módszert. Most nézzük meg a 2.2 részben ismertetett módszert (továbbiakban Kautz-módszer) is! Először ábrázoljuk a konvergencia térképét a korábban látott 2, 3, és 4 pólusú esetekben. Hogy jól látható legyen a különbség, a jobb oldalon feltüntetjük az esetnek megfelelő Laguerre-módszernél kapott konvergencia térképet is.

8. Megjegyzés. A Kautz-módszernél 4 darab valós paramétert választhatunk meg szabadon: az a paraméter valós- és képzetes részét, illetve a b paraméter valós- és képzetes részét. Ha így akarnánk ábrázolni a konvergencia sebesség függvényét, akkor az egy $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvény lenne. Ezt elkerülendő az a paraméter megválasztása után b paraméter legyen a -nak valamilyen függvénye. Ezzel a szabadon választható paraméterek számát 2-re redukáltuk. Mi a $b := \bar{a}$ esetet választottuk. Így már a konvergencia sebesség függvény egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvény.

15. PÉLDA. Legyen

$$P(z) := z^3 + 2z^2 + 4z + 8 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor a Kautz-módszer konvergencia térképe (3.11 ábra):



3.11. ábra. $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$ konvergencia térképe a Kautz- és a Laguerre-rendszer esetén. Lehető legnagyobb konvergencia: 0 (Laguerre-nél: 0.5664).

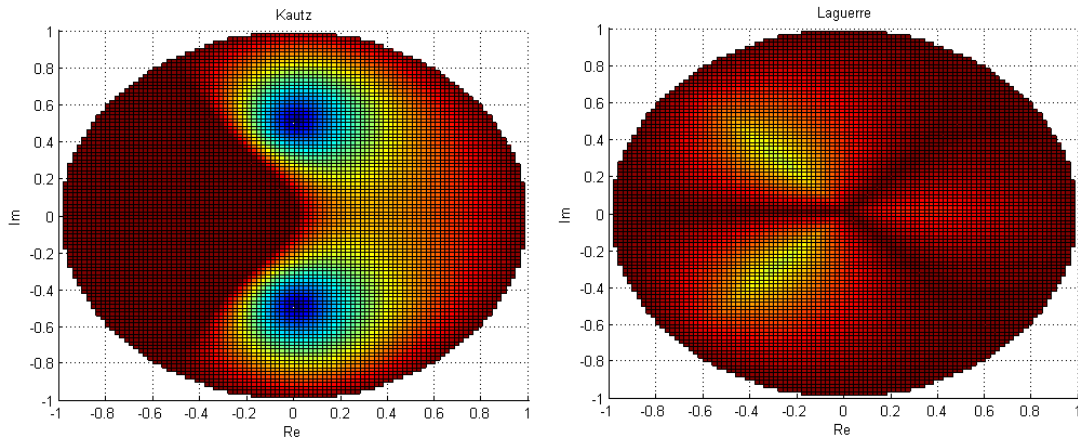
Az ábrákon két dolgot érdemes megfigyelni. Az egyik persze a lehető legjobb konvergencia: a Kautz-rendszer esetén 0, míg a Laguerre-rendszer esetén csak 0.5664. A másik, hogy a Kautz-rendszerénél a térkép nagy része sokkal világosabb, ami azt jelenti hogy a nem konvergáló részből sokkal meredekebben megy át a módszer nem csak egyszerűen a konvergáló, hanem a jól konvergáló részbe.

9. Megjegyzés. Két negatív dolgot is meg kell jegyezni.

- Az egyik, hogy az ábra becsapós abban az értelemben, hogy a színezés mindig a lehető legjobb konvergenciától (kék) megy a rossz, illetve egyáltalán nem konvergáló részig (piros). Esetünkben ez azt jelenti, hogy míg a bal oldali ábrán a kék a 0 közeli konvergenciát jelenti, addig a jobb oldali esetben a 0.5664-hez közelít. Ha mind a két ábrát a 0 és 1 között színezzük, akkor a kapott térképek (3.12 ábra):

Így már jól látható, hogy a Kautz-rendszer a konvergáló részeken mennyivel gyorsabban konvergál, mint a Laguerre-módszer.

- A másik negatívumot ennek tükrében azonnal le tudjuk olvasni. Nevezetesen, a Kautz-módszerénél a diszk körülbelül egyharmadán nincs is konvergencia (bal oldali részen). Ez azonban csak az inverz-pólusok szimmetriája és megint csak a $b := \bar{a}$ választás miatt van.

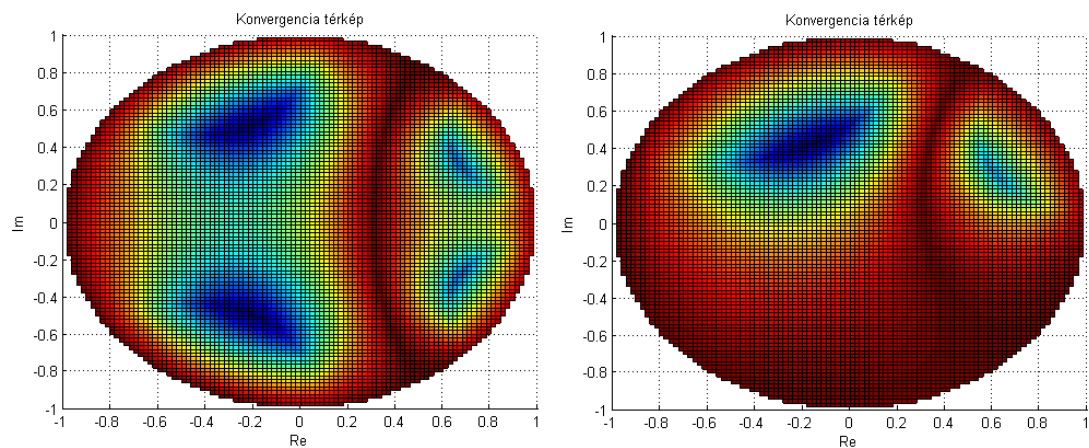


3.12. ábra. Módosított színezésű térképek

- Persze a $b := \bar{a}$ választás miatt az így kapott konvergencia térképek szimmetrikusak lesznek a valós tengelyre.

Az előbbi megjegyzés második részét "igazolandó" bemutatunk egy nem elfajult példát is:

16. PÉLDA. Legyenek az inverz-pólusok: 0.1 , $-0.3 + 0.7i$, $0.8 + 0.4i$. Ekkor a konvergencia térkép a Kautz- és a Laguerre-rendszer esetében (3.13 ábra):



3.13. ábra. A 0.1 , $-0.3 + 0.7i$, és a $0.8 + 0.4i$ inverz-pólusokhoz tartozó konvergencia térkép a Kautz- és a Laguerre-rendszer esetén. Lehető legnagyobb konvergencia: 0.3717 (Laguerre-nél: 0.5243).

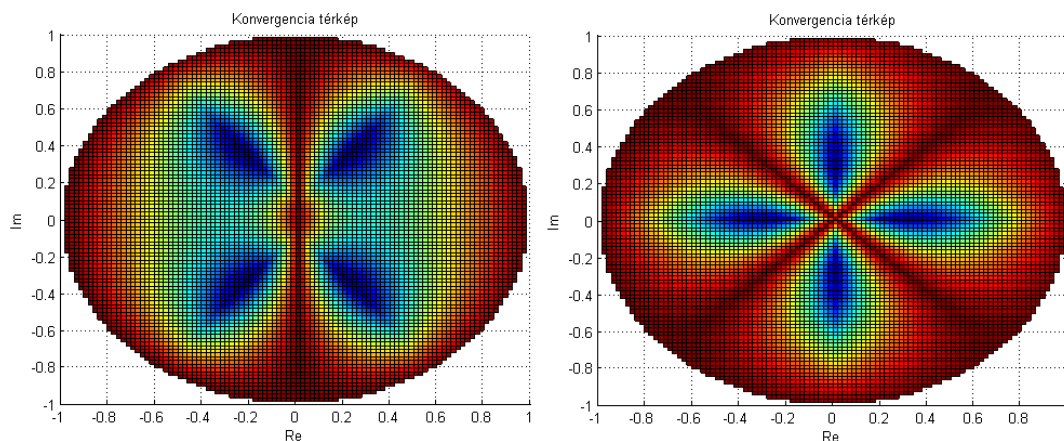
Itt már jól látszik a gyorsaságbeli különbség a két módszernél.

Nézzük meg a 4 pólusú esetnek megfelelő térképeket is:

17. PÉLDA. *Legyen*

$$P(z) := z^4 - 16 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor a Kautz- és a Laguerre-rendszer konvergencia térképei (3.14 ábra):



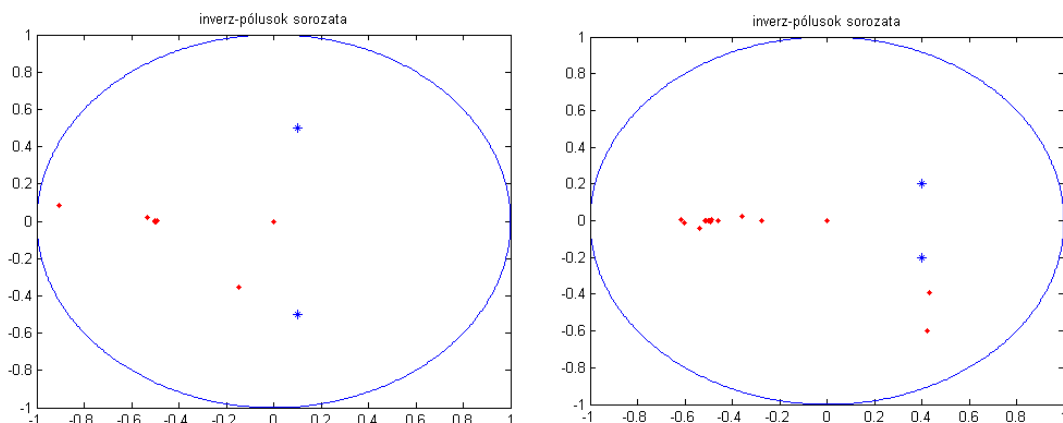
3.14. ábra. $P(z) = z^4 - 16$ konvergencia térképe a Kautz- és a Laguerre-rendszer esetén. Lehető legnagyobb konvergencia: 0.4775 (Laguerre-nél: 0.8289).

Végül nézzünk meg itt is egy-két konkrét példát a konvergenciára.

18. PÉLDA. *Legyen*

$$P(z) := z^3 + 2z^2 + 4z + 8 \quad (z \in \mathbb{C}),$$

és indítsuk el a Kautz-módszert az $a := 0.1 + 0.5i$ és a $b := 0.1 - 0.5i$ pontból. Ekkor a konvergencia sebessége: 0.2041152167. 10 iterációs lépés után a megtalált inverz-pólus pedig: $-0.500100874004055 + 0.000024712919133i$ (hiba: 0.0001038570761). Nézzünk egy lassabban konvergáló esetet. Válasszuk ehhez az $a := 0.4 - 0.2i$, $b := 0.4 + 0.2i$ pontokat. Ekkor a konvergencia sebessége: 0.6671312582. 20 iterációs lépés után a végállomás: $-0.501430716308894 - 0.000222763523368i$ (hiba: 0.001447954667). A 3.15 ábra bal oldalán a gyorsan konvergáló, jobb oldalon pedig a lassan konvergáló esetet ábrázoltuk.



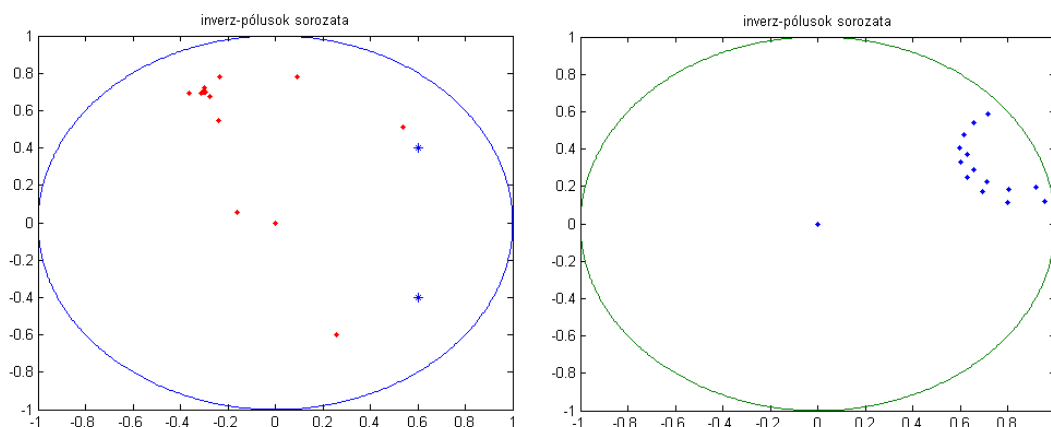
3.15. ábra. A Kautz rendszer konvergenciája gyors- (bal: $a=0.1+0.5i$, $b=0.1-0.5i$) és lassú esetben (jobb: $a=0.4-0.2i$, $b=0.4+0.2i$).

10. Megjegyzés. Az diszkretizációs alappontok számításánál egy nem lineáris egyenletet oldunk meg numerikusan, így ott csak közelítő megoldást tudunk adni. Az öröklött hibák miatt viszont a skaláris szorzatok hányadosa numerikusan instabillá válhat, ezért le kell állítani a módszert, ha már a hányados keveset változik. Arra is figyelni kell, hogy az iteráció számot kellően nagyra válasszunk. Egyrészt az iteráció szám mondja meg, hogy hány darab inverz-pólust számoljunk (ugyanannyit). Ehhez nyilván kétszer annyi rendszer tagot kell meghatározni (mert csak a párosak hányadosából számítjuk), illetve ugyanennyi diszkretizációs alappont is lesz (a diszkrét és folytonos skaláris szorzat egybeesése miatt). Amennyiben kicsi iteráció számot adunk meg, úgy kevés lesz a diszkretizációs alappont is, illetve tipikusan a skaláris szorzatok hányadosa még nem "konvergál be" megfelelően. A numerikus hiba kezelésére egy megoldást láthatunk a 3.2 részben.

Nézzünk a nem szimmetrikus 3 pólusú feladatra is példát:

19. PÉLDA. Legyenek az inverz-pólusok: 0.1 , $-0.3+0.7i$, $0.8+0.4i$ és versenyeztessük meg a Kautz- és a Laguerre-módszert! Legyen $a := 0.6 - 0.4i$, $b := 0.6 + 0.4i$. Ekkor számíthatunk ebben a tartományban a leggyorsabb konvergenciára a 3.13 konvergencia térkép szerint. Valóban, a konvergencia sebessége ekkor: 0.5890227850 és 20 iteráció után a $-0.298519752633292 + 0.700315782466633i$ pontba jutunk. Ekkor a hiba: 0.001513555732 . A Laguerre-módszert a $0.6 - 0.4i$ pontból indítva a konver-

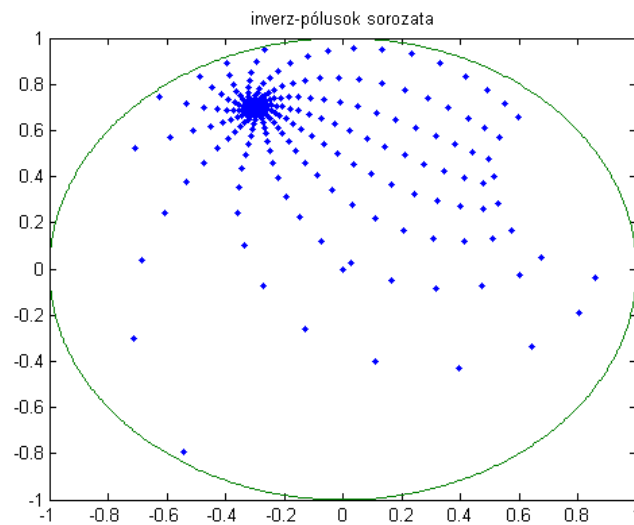
gencia sebessége 0.9817046416, ami annyira rossz, hogy 20 iteráció után a kapott inverz-pólus értékelhetetlen. Ezt láthatjuk is a 3.16 ábrán, ahol most is bal oldalon az Kautz-, míg a jobb oldalon a Laguerre-módszer által meghatározott inverz-pólus sorozatokat ábrázoltuk.



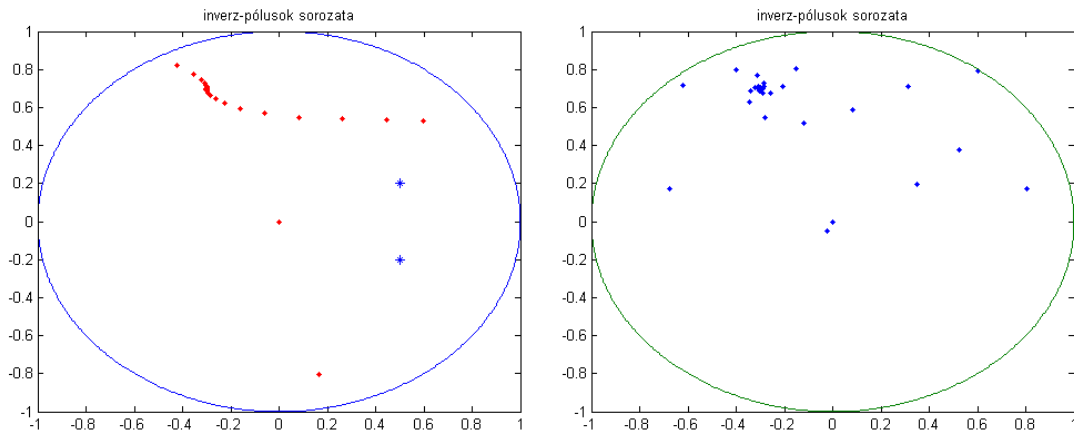
3.16. ábra. A Kautz- (bal oldal) és a Laguerre-módszer (jobb oldal) versenye.

A Laguerre-módszert ebből a pontból indítva 500 iteráció után jutunk el a $-0.318483091280327 + 0.691048843805610i$ pontba, azaz a hiba még ekkor is 0.02053650071. Ezt láthatjuk a 3.17 ábrán.

Egy lassú konvergenciát tapasztalhatunk $a := 0.5 + 0.2i$ és $b := 0.5 - 0.2i$ választás mellett. Ekkor a konvergencia sebesség: 0.7647050446 és 40 iteráció után az inverz-pólus: $-0.299308745118931 + 0.700232233218993i$, a hiba pedig: 0.0007292225970. A Laguerre-módszert a $0.5 + 0.2i$ pontból indítva 40 iteráció után a $-0.300455380765149 + 0.698947546654053i$ pontba érkezünk. A konvergencia sebessége 0.798798047, míg a módszer hibája: 0.001146747410. Ezt láthatjuk a 3.18 ábrán. Figyeljük meg, hogy a két módszer konvergencia sebessége nagyjából megegyezik, mégis ugyanannyi iteráció után a Kautz-módszer egy nagyságrenddel jobb eredményt ad.



3.17. ábra. A Laguerre-módszer a $0.6-0.4i$ pontból indítva 500 iteráció után (A konvergencia sebessége: 0.9817046416).



3.18. ábra. A Kautz- (bal oldal) és a Laguerre-módszer (jobb oldal) versenye.

3.2. Numerikus hibák

Mint az a klasszikus Fourier-analízisben ismeretes, a Fourier-együtthatók a 0-hoz tartanak a Parseval egyenlőség következményeként. A Parseval egyenlőség igaz marad nem csak trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sorfejtés esetén, hanem általánosabb rendszerek esetén is, így a Laguerre- és Kautz-rendszerek Fourier-sorfejtésére is. Vagyis mind a Laguerre-, mind a Kautz-Fourier együtthatók 0-hoz

tartanak. Ez azért okoz problémát nekünk, mert mindkét módszer esetén egy ilyen Fourier-együttható konjugáltjával osztunk, következésképpen a módszer numerikusan instabillá válik nagy iterációs számok esetén.

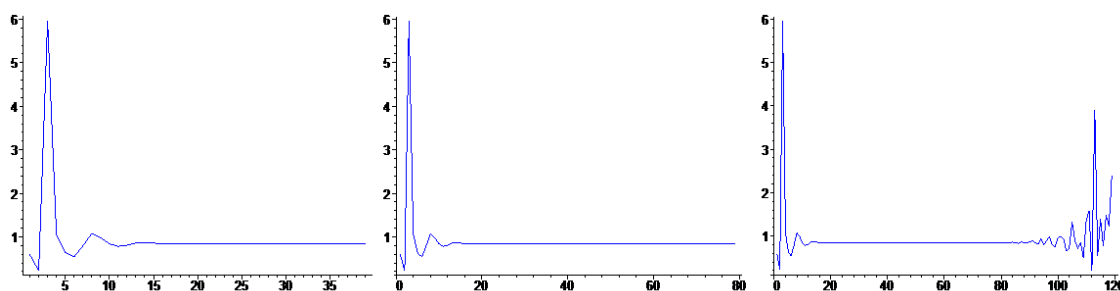
20. PÉLDA. *Legyenek*

$$a_1 := -0.5 - 0.5i, \quad a_2 := 0.5 - 0.5i, \quad a_3 := 0.5i,$$

továbbá számoljunk 10 jegy pontossággal. Futtassuk a Laguerre-módszert a $b := -0.4$ pontból. Ebből a pontból indítva a konvergencia sebessége: 0.7419133466. Vezessük be a következő sorozatot:

$$\alpha_n := \left| \frac{\langle L_{n+1,b}, f \rangle}{\langle L_{n,b}, f \rangle} \right| \quad (n \in \mathbb{N})$$

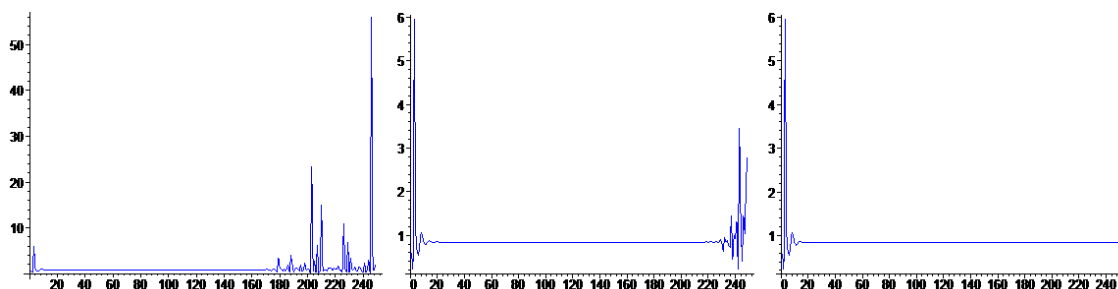
hányados sorozatot. Itt $f = \frac{P'}{P}$, ahol P az a polinom, melynek inverz-pólusai: a_1 , a_2 és a_3 . Erre a sorozatra: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = |B_b(a_i)| < 1$, ha $b \in D_i$. Ábrázoljuk ennek a sorozatnak az első 40, 80, illetve 120 tagját. Ez látható a 3.19 ábrán.



3.19. ábra. Numerikus instabilitás

Jól látható, hogy a Laguerre-módszer 40 és 80 iteráció esetén még stabil, azonban 120 iteráció esetén már instabillá válik. Ezen a problémán például úgy lehet segíteni, hogy növeljük a pontos jegyek számát. Legyen a jegyek száma rendre 15, 20 és 25, az inverz-pólusok és az indulási pont, mint az előbb, az iterációs szám pedig legyen 250. Az így kapott (α_n) sorozatokat láthatjuk 3.20 ábrán.

Érdeemes megfigyelni először is, hogy 250 iteráció esetén mind a 15, mind a 20 jegy pontosságú módszer instabillá válik. Viszont az előbbi 120 iterációra már a 15

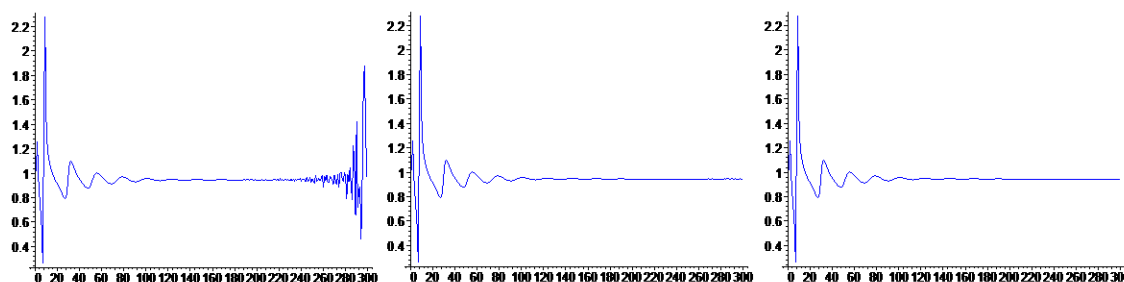


3.20. ábra. Pontos jegyek számát növelve az instabilitás kitolódik.

jegy pontosságú módszer is stabil. A 15 jegy pontossággal számoló módszer kb. 170 iterációnál kezd instabillá válni, a 20 jegy pontossággal számoló módszer kb. 210 iterációnál válik instabillá, míg a 25 jegy pontossággal számoló módszer a 250 iterációnál még stabil.

Az, hogy a módszer adott jegypontosság mellett milyen iterációs számnál válik instabillá attól függ, hogy a konvergencia milyen gyors. Egy lassabb módszer később válik instabillá.

21. PÉLDA. Legyenek az inverz-pólusok, mint előbb, (α_n) sorozat, mint előbb, de most indítsuk a módszert a $b = -0.4 + 0.6i$ pontból. Ekkor a konvergencia sebessége: 0.9669010287, vagyis jóval lassabb, mint az előbb. Legyen az iterációs szám 300 és a pontos jegyek száma rendre 10, 12 és 15. Ezt láthatjuk a 3.21 ábrán.



3.21. ábra. Lassabb konvergencia esetén az instabilitás később jelentkezik.

Láthatjuk, hogy 10 pontos jegy esetén a módszer nem is tud elkezdni konvergálni (nincs egyenes szakasz), már fellép az instabilitás. 12 pontos jegy esetén a módszer

kb. 250 iterációszámig stabil, utána válik instabillá, míg 15 pontos jegy esetén a módszer még 300 iterációra is stabil. Figyeljük meg, hogy az előbbi esetben, amikor a konvergencia gyorsabb volt, akkor 15 pontos jegy esetén a módszer kb. 170 iterációra már instabil, most meg még 300-ra is stabil.

4. fejezet

Összefoglalás

Kiindulva az $\mathbf{a} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ speciális diszkrét sorozatból fölépítettük az $\mathbf{a}$ sorozat által generált MT-rendszert, megvizsgáltuk néhány alapvető tulajdonságát, majd ezt felhasználva tudtunk numerikus eljárást kidolgozni racionális függvények pólusainak keresésére. Kiderült, hogy a racionális függvények eszerint a rendszer szerinti páros MT-Forier együtthatóinak konjugáltjainak hányadosa konvergens. Bebizonyítottuk, hogy a hányadosoknak a sorozata 1-szeres pólusok esetén konvergens (nullmértékű halmaztól eltekintve) és a határértékből egyszerű számítással a pólus meghatározható. Ezen túlmenően a konvergencia sebességére is becslést adtunk. Az új eljárásban két szabadon választható paraméter van, ezek alkalmas összehangolásával a konvergencia gyorsítható és a [2]-ben ismertetett eljárásnál jobb konvergenciát kapunk.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani **Dr. Schipp Ferenc** Tanár Úrnak, aki sokszor hasznos ötletekkel és tanácsokkal látott el a dolgozat írása közben. Köszönöm, hogy tudását megosztotta velem, és köszönöm a konzultációkra fordított időt és energiát is. A Tanár Úr áldozatos munkája nélkül nem mélyíthettem volna el ennyire tudásom ebben a témakörben és ez a dolgozat sem készülhetett volna el.

Irodalomjegyzék

- [1] **SCHIPP F.:** Racionális ortogonális rendszerek, *I/1. A Blaschke csoport; I/2. Blaschke függvények a tóruszon; I/3. Hiperbolikus metrika; II. Malmquist-Takenaka rendszerek; II/1. Komplex MT-rendszerek; II/2. MT-Fourier sorok, magfüggvények; II/4. Diszkrét Malmquist-Takenaka rendszerek*, ELTE jegyzet.
- [2] **SCHIPP F., SOUMELIDIS A.:** On the Fourier coefficients with respect to the discrete Laguerre system, *2. The discrete Laguerre system; 3. Reconstruction algorithm*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. Volumes 34 (2011).
- [3] **PAPP M., SCHIPP F.:** Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions, *Mathematica Pannonica*, Volumes 12/2, (2001) 185-194.
- [4] **SCHIPP F.:** Discrete Laguerre functions and equilibrium conditions, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, Volumes 17, (2001) 117-120.
- [5] **SOUMELIDIS A., SCHIPP F., BOKOR J.:** Frequency domain representation of signals of rational orthogonal bases, *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation* (2002).
- [6] **BULTHEEL A., CARRETTE P.:** Fourier analysis and the Takenaka-Malmquist bases, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* (2003) 486-491.
- [7] **REIMAN ISTVÁN:** *Geometria és határfelületei* (1999).