



ESZTERHÁZY KÁROLY FŐISKOLA
MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET

Szimmetrikus elemek Lie-feloldható hossza nem Lie-feloldható csoportalgebrákban

Készítette:

Tóth Enikő

Matematika BSc.

Témavezető:

Dr. Juhász Tibor

adjunktus

EGER, 2012

1. Bevezetés

A dolgozatot a vizsgált probléma megértéséhez szükséges fogalmak áttekintésével kezdjük. Legyen G egy csoport és F egy test. Jelölje FG az összes $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ alakú formális összegek halmazát, ahol csak véges sok $\alpha_g \in F$ együttható nem nulla. Értelmezzük FG -ben az összeadást és a skalárral való szorzást a következőképpen: ha $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ és $y = \sum_{g \in G} \beta_g g$ FG elemei, ahol $\alpha_g, \beta_g \in F$, és $\gamma \in F$ akkor $x + y = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g)g$, $\gamma x = \sum_{g \in G} \gamma \alpha_g g$. Ekkor FG vektortér F felett, sőt az $xy = \sum_{g \in G} (\sum_{h \in G} \alpha_h \beta_{h^{-1}g})g$ szorzással ellátva algebra, melyet a G csoport F test feletti *csoportalgebrájának* nevezünk. Az FG csoportalgebrát – mint minden asszociatív egységelemes algebrát – tekinthetjük Lie-algebrának, melyen a Lie-műveletet (*Lie-kommutátort*) a következőképpen definiáljuk: $[x, y] = xy - yx$ minden $x, y \in FG$ -re.

Legyen S az FG csoportalgebra egy nemüres részhalmaza. Az $[S, S]$ szimbólum alatt FG összes $[x, y]$ Lie-kommutátora által generált alterét értjük, ahol $x, y \in S$. Legyen $\delta^{[0]}(S) = S$, és ha $n \geq 1$, legyen $\delta^{[n+1]}(S) = [\delta^{[n]}(S), \delta^{[n]}(S)]$. A $\{\delta^{[n]}(S)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot az S részhalmaz *Lie-derivált sorozatának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az S részhalmaz *Lie-feloldható*, ha létezik $n \in \mathbb{N}$ melyre $\delta^{[n]}(S) = 0$. A legkisebb ilyen n -et nevezzük S *Lie-feloldható hosszának*, és ezt $dl_L(S)$ -sel jelöljük. Most módosítjuk ezt a definíciót annak érdekében, hogy a sorozat tagjai ne csupán alterek, hanem az FG algebra asszociatív ideáljai legyenek. Ezáltal egy jobban használható és könnyebben tanulmányozható sorozathoz jutunk. Legyen $\delta^{(0)}(S) = S$, és legyen $\delta^{(n+1)}(S) = [\delta^{(n)}(S), \delta^{(n)}(S)]FG$ az összes $[x, y]$ Lie-kommutátor által generált asszociatív ideál, ahol $x, y \in \delta^{(n)}(S)$. A $\{\delta^{(n)}(S)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot az S részhalmaz *erős Lie-derivált sorozatának* nevezzük. Az S részhalmaz *erősen Lie-feloldható*, ha létezik $n \in \mathbb{N}$ melyre $\delta^{(n)}(S) = 0$, és ekkor a legkisebb ilyen n -et nevezzük az S *erős Lie-feloldható hosszának*, és $dl^L(S)$ -sel jelöljük. Nyilván $\delta^{[n]}(S) \subseteq \delta^{(n)}(S)$ minden S és $n \in \mathbb{N}$ esetén, így minden erősen Lie-feloldható S részhalmaz Lie-feloldható is, és $dl_L(S) \leq dl^L(S)$. Jelöljük $U(S)$ -sel az S egységeinek csoportját, azaz mindazon S -beli elemek halmazát, melyeknek van inverze a szorzásra nézve. Világos, hogy $U(FG)$ csoport (melyet az FG csoportalgebra *egységcsoportjának* nevezünk), vegyük ennek egy M nemüres részhalmazát. Jelölje ekkor (M, M) az összes $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$ ($g, h \in M$) csoportkommutátor által generált részcsoporthoz. M esetén legyen $\delta_0(M) = M$, és ha $n \geq 0$, legyen $\delta_{n+1}(M) = (\delta_n(M), \delta_n(M))$. Az M részhalmaz *feloldható*, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre $\delta_n(M) = 1$. A legkisebb ilyen n az M *feloldható hossza*, melynek jele $dl(M)$. Az $(x, y) = 1 + x^{-1}y^{-1}[x, y]$ egyenlőséggel könnyen belátható, hogy $\delta_n(U(S)) \subseteq 1 + \delta^{(n)}(S)$ minden $n \geq 1$ esetén, ami azt jelenti, hogy az erősen Lie-feloldható S részhalmaz egységeinek halmaza feloldható, és $dl(U(S)) \leq dl^L(S)$. Az ehhez hasonló észrevételek hatására fokozódott a csoportalgebrák Lie-tulajdonságainak (Lie-feloldhatóság, Lie-nilpotencia, Lie- n -Engel tulajdonság, stb.) vizsgálata. Ebből az összefüggésből látszik ugyanis, hogy a csoportalgebra erős Lie-feloldható hossza felső korlát a csoportalgebra egységeinek feloldható hosszára. Az egységek közvetlen vizsgálata általában nehéz probléma, hiszen két elem kommutátorának kiszámításához szükség van az elemek inverzének ismeretére, melynek meghatározása

újabb nehézségeket vet fel. A Lie-kommutátorok viszont az inverz elemek ismerete nélkül kiszámíthatók.

Könnyen belátható, hogy az FG csoportalgebra pontosan akkor erősen Lie-feloldható, ha a G csoport G' kommutátor-részcsoportha véges p -csoport, és az F test karakterisztikája p (Lemma 2.2. [10]). Sokkal mélyebb megfontolásokat igényel annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy vajon létezik-e olyan FG csoportalgebra, mely Lie-feloldható, de nem erősen Lie-feloldható. I.B.S. Passi, D.S. Passmann és S.K. Sehgal [9] eredménye szerint ez akkor és csak akkor fordulhat elő, ha F karakterisztikája 2, és G -nek van olyan 2-indexű részcsoportha, melynek kommutátor részcsoportha véges 2-csoport. Azoknak a csoportalgebráknak a jellemzése, melyek egységcsoportha feloldható, még ennél is összetettebb probléma. Ennek fejlődése A. Bovdi [7] dolgozatában követhető nyomon.

A Lie-feloldható csoportalgebrák Lie-feloldható hosszának vizsgálatát A. Shalev kezdeményezte, a témában publikált két dolgozata [11, 12] közül az első fő eredménye egy alsó korlát. Azoknak a csoportalgebráknak a jellemzése, melyekre ez az alsó korlát pontos, E. Spinelli [13] eredménye. Ennek bizonyításában kulcsszerepet játszik Zs. Balogh és T. Juhász [4] azon tétele, amely azoknak a FG csoportalgebráknak a Lie-feloldható hosszát határozza meg, melyekre G' ciklikus és páratlan rendű. Ugyanezen csoportosztály esetén ismert FG egységcsoporthjának feloldható hossza: [1, 5]. Az eddig elért eredményeket nézve kevés a remény arra, hogy megadható olyan formula, amely tetszőleges erősen Lie-feloldható csoportalgebrának és egységeinek megadja a Lie-feloldható hosszait, illetve a feloldható hosszát.

Legyen $*$ az FG csoportalgebra egy *involúciója*, azaz egy olyan $*$: $FG \mapsto FG$ ($x \mapsto x^*$) leképezés, melyre $(x + y)^* = x^* + y^*$, $(xy)^* = y^*x^*$ és $(x^*)^* = x$ teljesül bármely $x, y \in FG$ esetén. Legyen újra $S \subseteq FG$. Az $S^+ = \{x \in S : x^* = x\}$ halmazt az S *szimmetrikus elemei halmazának* nevezzük.

A csoportalgebrák involúcióinak feltárása még nyitott probléma. Viszont könnyen látható, hogy a G csoporton értelmezett $g \mapsto g^{-1}$ leképezés FG -re történő lineáris kiterjesztése $\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}\right)$ az FG involúciója lesz. Ezt az involúciót *FG kanonikus involúciójának* nevezzük, a továbbiakban $*$ mindig ezt jelöli.

A szimmetrikus elemek halmazának vizsgálata jelenleg a legintenzívebben kutatott terület a csoportalgebrák témakörén belül. Ennek ellenére a kérdés, hogy egy csoportalgebra szimmetrikus elemeinek halmaza mikor Lie-feloldható, még nyitott. Az eddig ismert eredmények [8] arra vonatkoznak, hogy a szimmetrikus elemek Lie-feloldhatósága milyen feltételek mellett vonja maga után az egész csoportalgebra Lie-feloldhatóságát.

Abban az esetben, ha FG Lie-feloldható, nyilván FG^+ is az, és $\text{dl}_L(FG^+) \leq \text{dl}_L(FG)$. Ugyanez elmondható az erős Lie-feloldhatóságról és az egységek feloldhatóságáról is, az azonban még kérdéses, hogy az egyenlőség mikor teljesül. Ezzel kapcsolatban már folynak kutatások, lásd: [2, 3]. Megtörténhet azonban, hogy FG^+ Lie-feloldható, de FG nem. Valóban, legyen P egy tetszőleges véges p -csoport, ahol p páratlan prím, és legyen N egy Hamilton 2-csoport, azaz olyan 2-csoport, melynek minden részcsoportha normális. Legyen $G =$

$= P \times N$ és legyen F egy p karakterisztikájú test. Ekkor [9] szerint FG nem Lie-feloldható. Könnyű belátni, hogy ha $P = 1$, akkor $FG = FN$ szimmetrikus elemei egymással felcserélhetők, így FG^+ erősen Lie-feloldható, és $\text{dl}^L(FG^+) = 1$. Továbbá megmutatjuk, hogy FG^+ a $P \neq 1$ esetben is erősen Lie-feloldható, és ekkor $\text{dl}^L(FG^+) \leq \lceil \log_2 t(P) \rceil$. Ebben a formulában $\lceil \cdot \rceil$ egy valós szám felső egészrészét jelöli, $t(P)$ pedig az FP csoportalgebra $\omega(FP)$ fundamentális ideáljának (amely a $\varphi: FG \rightarrow F$, $\varphi(\sum_{g \in G} \alpha_g g) = \sum_{g \in G} \alpha_g$ homomorfizmus magja) nilpotencia indexét. Mivel most P véges p -csoport és $\text{char } F = p$, így ez az ideál valóban nilpotens (3.1. Tétel [6]). Továbbá igazoljuk, hogy ha P hatványteljes, azaz $P' \subseteq P^p$, akkor FG^+ Lie-feloldható hossza, és FG^+ egységeinek feloldható hossza is eléri a fent említett felső korlátot. Ezeket az eredményeket az alábbi tétel foglalja össze.

Tétel. *Legyen F egy $p > 2$ karakterisztikájú test, és legyen $G = P \times N$, ahol $P \neq 1$ véges p -csoport, és N egy Hamilton 2-csoport. Ekkor FG^+ erősen Lie-feloldható és*

$$\text{dl}^L(FG^+) \leq \lceil \log_2 t(P) \rceil.$$

Továbbá, ha P hatványteljes, akkor

$$\text{dl}(U^+(FG)) = \text{dl}_L(FG) = \text{dl}^L(FG) = \lceil \log_2 t(P) \rceil$$

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor P hatványteljes, $t(P)$ könnyen kiszámítható.

A dolgozatot a tétel bizonyításával folytatjuk.

2. A tétel bizonyítása

A bizonyításhoz felhasználjuk a

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y \quad \text{és} \quad [x, yz] = y[x, z] + [x, y]z \quad (2.1)$$

azonosságokat, melyek minden $x, y, z \in FG$ esetén teljesülnek. Továbbá, könnyen belátható, hogy bármely $g \in G$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$g^k - 1 = k(g - 1) \pmod{\omega(FG)^2}, \quad (2.2)$$

melyre szintén szükségünk lesz. A G csoport, valamint az FG csoportalgebra centrumát $\zeta(G)$ illetve $\zeta(FG)$ fogja jelölni.

Legyen $P \neq 1$ véges p -csoport, ahol p páratlan prím, N egy Hamilton 2-csoport és F egy p karakterisztikájú test. Mint az jól ismert, $N \cong Q_8 \times E$, ahol Q_8 a nyolcadrendű kvaternió csoport, és $E^2 = 1$. Legyen $G = P \times N$, továbbá jelölje $\mathfrak{I}(P)$ az FG csoportalgebra $\omega(FP)$ által generált ideálját. Mivel $\omega(FP)$ nilpotens, és P normális részecssoportja G -nek, így $\mathfrak{I}(P)$ nilpotens ideál melynek nilpotencia indexe $t(P)$, és az $\{1 + x : x \in \mathfrak{I}(P)\}$ normális részecssoportja az $U(FG)$ egységcsoportnak (23.1. Lemma [6]).

A tétel bizonyítását két részletben fogjuk elvégezni.

2.1. Lemma. $\text{dl}^L(FG^+) \leq \lceil \log_2 t(P) \rceil$

Bizonyítás. Jól ismert, hogy FG^+ -nak, mint F test feletti vektortérnek az

$$S = \{g + g^{-1} : g \in G\}$$

halmaz egy generátorrendszere. Esetünkben $S = \{a(h + a^2h^{-1}) : a \in N, h \in P\}$. Mivel

$$a(h + a^2h^{-1}) = a(h - 1) + a^3(h^{-1} - 1) + a + a^3,$$

és $a + a^3$ eleme FG centrumának, így kapjuk, hogy

$$FG^+ \subseteq \mathfrak{I}(P) + \zeta(FG).$$

Innen indukcióval belátjuk, hogy $\delta^{(n)}(FG^+) \subseteq \mathfrak{I}(P)^{2^n}$, minden $n \geq 1$ -re. Valóban, $n = 1$ esetén:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}(FG^+) &= [FG^+, FG^+] FG \subseteq \\ &\subseteq [\mathfrak{I}(P) + \zeta(FG), \mathfrak{I}(P) + \zeta(FG)] FG \subseteq \\ &\subseteq [\mathfrak{I}(P), \mathfrak{I}(P)] FG \subseteq \mathfrak{I}(P)^2. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén igaz az állítás, azaz $\delta^{(n)}(FG) \subseteq \mathfrak{I}(P)^{2^n}$. Ekkor

$$\delta^{(n+1)}(FG^+) = [\delta^{(n)}(FG^+), \delta^{(n)}(FG^+)] FG \subseteq [\mathfrak{I}(P)^{2^n}, \mathfrak{I}(P)^{2^n}] FG \subseteq \mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}}.$$

Ha $2^n \geq t(P)$ akkor $\mathfrak{I}(P)^{2^n} = 0$, és így $\delta^{(n)}(FG^+) = 0$. Innen $\text{dl}^L(FG^+) \leq \lceil \log_2 t(P) \rceil$ következik.

Mivel $\text{dl}_L(FG^+) \leq \text{dl}^L(FG^+)$ és $\text{dl}(U^+(FG)) \leq \text{dl}^L(FG^+)$, így $\lceil \log_2 t(P) \rceil$ felső korlátja $\text{dl}_L(FG^+)$ -nak és $\text{dl}(U^+(FG))$ -nek is.

2.2. Lemma. *Ha P hatványteljes, akkor*

$$\text{dl}_L(FG^+) \geq \lceil \log_2 t(P) \rceil \quad \text{és} \quad \text{dl}(U^+(FG)) \geq \lceil \log_2 t(P) \rceil.$$

Bizonyítás. Jelölje c az N^2 generátor elemét. Indukcióval be fogjuk látni, hogy minden $a \in N \setminus \zeta(N)$ és $h_1, \dots, h_{2^n} \in P$ esetén létezik $u_n \in \delta^{[n]}(FG^+)$ és $u'_n \in \delta_n(U^+(FG))$, melyre

$$u_n \equiv 1 - u'_n \equiv a(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}}}.$$

Valóban, minden $a \in N \setminus \zeta(N)$ és $h \in P$ esetén (2.2) miatt

$$\begin{aligned} u_0 &:= a(h - 1) + a^3(h^{-1} - 1) \equiv a(h - 1) - a^3(h - 1) = \\ &= a(1 - a^2)(h - 1) = a(1 - c)(h - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^2}, \end{aligned}$$

és mivel u_0 eleme az $\mathfrak{I}(P)$ nilpotens ideálnak, így $u'_0 := 1 - u_0 \in U(FG)$. Továbbá, u_0 és u'_0 szimmetrikus elemek, tehát az állítás teljesül, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n \geq 0$ esetén. Legyen $a \in N \setminus \zeta(N)$, $h_1, h_2, \dots, h_{2^{n+1}} \in P$. Ekkor kiválaszthatjuk az $a_1, a_2 \in N \setminus \zeta(N)$ elemeket úgy, hogy $(a_1, a_2) \neq 1$ és $a_1 a_2 = a$. Az indukciós hipotézis szerint léteznek olyan $u_n, v_n \in \delta^{[n]}(FG^+)$ és $u'_n, v'_n \in \delta_n(U^+(FG))$ elemek, melyekre

$$\begin{aligned} u_n &\equiv 1 - u'_n \equiv a_1(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}}}, \\ v_n &\equiv 1 - v'_n \equiv a_2(1 - c)(h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}}}. \end{aligned}$$

Ekkor (2.1) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} [u_n, v_n] &\equiv [a_1(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1), a_2(1 - c)(h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)] = \\ &= a_1(1 - c)[(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1), a_2(1 - c)(h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)] + \\ &\quad + [a_1(1 - c), a_2(1 - c)(h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)](h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) = \\ &= a_1 a_2 (1 - c)^2 [(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1), (h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)] + \\ &\quad + [a_1(1 - c), a_2(1 - c)](h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) = \\ &= a_1 a_2 (1 - c)^2 [(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1), (h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)] + \\ &\quad + [a_1, a_2](1 - c^2)(h_{2^n+1} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) \\ &\hspace{15em} \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}+1}} \end{aligned}$$

és felhasználva, hogy $(1 - c)^2 = 2(1 - c)$,

$$\begin{aligned} [u_n, v_n] &\equiv 2a_1a_2(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1) + \\ &\quad + 2a_1a_2(1 - c)(h_{2^{n+1}} - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) \\ &\quad \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}+1}}, \end{aligned}$$

adódik. Mivel P hatványteljes és $\text{char } F = p \geq 3$,

$$(h_i, h_j) - 1 \in \omega(P') \subseteq \omega(P^p) \subseteq \omega(P)^p \subseteq \mathfrak{I}(P)^3$$

és

$$\begin{aligned} (h_i - 1)(h_j - 1) &= (h_j - 1)(h_i - 1) + h_j h_i ((h_i, h_j) - 1) \\ &\equiv (h_j - 1)(h_i - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^3} \end{aligned}$$

minden i, j esetén, így

$$[u_n, v_n] \equiv 4a_1a_2(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}+1}}.$$

Világos, hogy $(u'_n)^{-1}(v'_n)^{-1} - 1 \in \mathfrak{I}(P)$, és

$$\begin{aligned} (u'_n, v'_n) &= 1 + ((u'_n)^{-1}(v'_n)^{-1} - 1)[u'_n, v'_n] + [u'_n, v'_n] \\ &\equiv 1 + [u_n, v_n] \equiv 1 + 4a(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}+1}}. \end{aligned}$$

Mivel p páratlan prím, választhatunk olyan s egész számot, hogy $4s \equiv -1 \pmod{p}$, és a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(u'_n, v'_n)^s \equiv 1 - a(1 - c)(h_1 - 1) \cdots (h_{2^{n+1}} - 1) \pmod{\mathfrak{I}(P)^{2^{n+1}+1}}.$$

Az indukció készen van, ugyanis $u_{n+1} := 4^{-1}[u_n, v_n] \in \delta^{[n+1]}(FG^+)$ és $u'_{n+1} := (u'_n, v'_n)^s \in \delta_n(U^+(FG))$.

Mindaddig amíg $2^n < t(P)$, létezik $h_1, \dots, h_{2^n} \in P$ melyre $(h_1 - 1) \cdots (h_{2^n} - 1) \neq 0$, azaz $\delta^{[n]}(FG)$ -nek létezik 0-tól, $\delta_n(U^+(FG))$ -nek pedig 1-től különböző eleme, melyből az állítás következik.

3. Konklúzió

A dolgozatban példát adtunk olyan csoportalgebrákra, melyek szimmetrikus elemei Lie-feloldhatóak, de maga a csoportalgebra nem: ha P egy véges p -csoport, ahol p páratlan prím, N egy Hamilon 2-csoport, és $G = N \times P$, akkor G csoportalgebrája tetszőleges p karakterisztikájú F test felett ilyen. Beláttuk továbbá, hogy ha $P \neq 1$, akkor FG szimmetrikus elemeinek erős Lie-feloldható hossza nem lehet nagyobb, mint $\lceil \log_2 t(P) \rceil$, és ha P hatványteljes, akkor FG szimmetrikus elemeinek Lie-feloldható hossza és szimmetrikus egységeinek feloldható hossza el is éri ezt a korlátot.

Legyen most

$$N = Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, (a, b) = a^2 \rangle$$

a nyolcadrendű kvaterniócsoport,

$$P = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^3 = 1, (x, y) = z, (x, z) = (y, z) = 1 \rangle,$$

és F egy 3 karakterisztikájú test. Ekkor P nem hatványteljes, és könnyű belátni, hogy $t(P) = 9$, így a tétel szerint $\text{dl}^L(FG) \leq 4$. A korábbihoz hasonló számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} t_1 &= a(x-1) + a^3(x^2-1), & t_2 &= b(x-1) + b^3(x^2-1) \\ t_3 &= a(y-1) + a^3(y^2-1), & t_4 &= ab(y-1) + a^3b(y^2-1) \\ t_5 &= b(y-1) + b^3(y^2-1), & t_6 &= ab(x-1) + a^3b(x^2-1) \end{aligned}$$

esetén

$$0 \neq \left[[t_1, t_2], [t_3, t_4] \right], [t_1, t_5], [t_2, t_6] \in \delta^{[3]}(FG^+),$$

és ha $t'_i = 1 - t_i$, akkor

$$1 \neq \left((t'_1, t'_2), (t'_3, t'_4) \right), \left((t'_1, t'_5), (t'_2, t'_6) \right) \in \delta_3(U^+(FG)),$$

így $\text{dl}_L(FG^+) = \text{dl}(U^+(FG)) = 4$. Tehát a felső korlát eléréséhez P hatványteljes volta elégséges, de nem szükséges. Ezáltal az alábbi kérdések még nyitva maradnak:

3.1. Probléma. *A tétel jelölései mellett létezik-e olyan P , melyre*

$$\text{dl}(U^+(FG)) \neq \lceil \log_2 t(P) \rceil \quad \text{vagy} \quad \text{dl}_L(FG) \neq \lceil \log_2 t(P) \rceil?$$

3.2. Probléma. *Az általunk vizsgáltakon kívül létezik-e olyan nem Lie-feloldható csoportalgebra, amely szimmetrikus elemeinek halmaza Lie-feloldható?*

Irodalomjegyzék

- [1] Bagiński, C. *A note on the derived length of the unit group of a modular group algebra.* *Comm. Algebra* 30 (2002), 4905–4913.
- [2] Balogh, Z. *Lie derived length and involutions in group algebras*, *J. Pure Appl. Algebra* 216 (2012), No. 6, 1282–1287
- [3] Balogh, Z.; Juhász, T. *Derived lengths of symmetric and skew symmetric elements in group algebras*, *JP J. Algebra Number Theory Appl.* 12, (2008), No. 2, 191–203
- [4] Balogh, Z.; Juhász, T. *Lie derived lengths of group algebras of groups with cyclic derived subgroup*, *Commun. Alg.* 36 (2008), No. 2, 315–324.
- [5] Balogh, Z.; Li, Y. *On the derived length of the group of units of a group algebra*, *J. Algebra Appl.* 6, (2007), No. 6, 991–999.
- [6] Bódi, B. *Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, (1996).
- [7] Bovdi, A. *Group algebras with a solvable group of units*, *Commun. Alg.* 36 (2008), No. 2, 315–324.
- [8] Lee, G.T.; Sehgal, S.K.; Spinelli, E. *Group algebras whose symmetric and skew elements are Lie solvable*, *Forum Math.* 21 (2009), No. 4, 661–671.
- [9] Passi, I.B.S.; Passmann, D.S.; Sehgal, S.K. *Lie solvable group rings*, *Canad. J. Math.* 25 (1973), 748–757.
- [10] Sahai, M. *Lie solvable group algebras of derived length three*, *Publ. Mat.* 39 (1995), No. 2, 233–240.
- [11] Shalev, A. *The derived length of Lie soluble group rings I.*, *J. Pure Appl. Algebra* 78 (1992), No. 3, 291–300.
- [12] Shalev, A. *The derived length of Lie soluble group rings. II.*, *J. London Math. Soc.* (2) 49 (1994), No. 1, 93–99.
- [13] Spinelli, E. *Group algebras with minimal Lie derived length*, *J. Algebra* 320 (2008), 1908–1913.