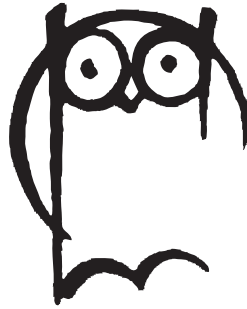


Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti Fizikai Tanszék



Töltött részecskék BC_n Sutherland-modellje mint az $SU(n+1, n)$
Lie-csoporton mozgó szabad részecske redukciója

TDK dolgozat

Készítette: Görbe Tamás Ferenc
Alkalmazott matematikus hallgató

Témavezető: Dr. Fehér László
Egyetemi tanár
SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék

Szeged
2012. június 13.

Tartalom

1. Bevezetés	1
1.1. A dolgozat tárgya	1
1.2. Célkitűzés és a dolgozat szerkezete	2
2. Szimplektikus geometriai összefoglaló	3
2.1. Szimplektikus sokaság és hamiltoni rendszer	3
2.2. Példák: Koérintőnyaláb és koadjungált pálya	8
2.3. Hamiltoni csoportthatás és momentum leképezés	11
2.4. Szimplektikus redukció és „eltolási trükk”	12
3. Csoportelméleti előkészületek	15
3.1. Az $SU(n+1, n)$ Lie-csoport involúciói	15
3.2. Koadjungált pályák	17
4. A szimplektikus redukció egy alkalmazása	20
4.1. Momentum leképezés és momentum kényszerfelület	20
4.2. A pályák tere mint sima sokaság	23
4.3. A redukált fázistér modellje	24
4.4. Algoritmus a mozgásegyenletek megoldására	26
5. Összefoglalás	27
Hivatkozások	28
Köszönetnyilvánítás	29
Nyilatkozat	30

1. Bevezetés

1.1. A dolgozat tárgya

A sokrészecskés integrálható rendszerek tanulmányozása az 1970-es évek elején, Calogero [1], Moser [2], és Sutherland [3] publikációival vette kezdetét, és mindmáig a matematikai fizika élénken kutatott területe. Sokrétű alkalmazásairól a fizikában és matematikában például Polychronakos [4] összefoglaló cikkében olvashatunk.

A Calogero – Moser – Sutherland (CMS) rendszerek n számú, megegyező tömegű, egyenes vagy körvonal mentén mozgó részecskét írnak le. Mivel a mozgás egydimenziós, így a fázistér a $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ és $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ koordináta- és impulzusváltozók tere. A rendszer Hamilton-függvénye

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 + g^2 \sum_{j < k} V(q^j - q^k) \quad (1.1)$$

alakú, ahol $g > 0$ a részecskék közötti kölcsönhatás „erejét” jellemző csatolási állandó. A részecskék párkölcsönhatását a V potenciálfüggvény szabja meg; eszerint négy típust különböztetünk meg:

- (I) Racionális: $V(q) = q^{-2}$; (II) Hiperbolikus: $V(q) = \sinh^{-2}(q)$;
(III) Trigonometrikus: $V(q) = \sin^{-2}(q)$; (IV) Elliptikus: $V(q) = \wp(q, \omega_1, \omega_2)$,

ahol $\wp$ Weierstrass elliptikus függvénye $2\omega_1, 2\omega_2$ periódusokkal, amelyekre $\omega_1, -i\omega_2 > 0$.

Az (I) – (IV) CMS rendszerek a véges dimenziós dinamikai rendszerek klasszikus értelemben Liouville-integrálható alosztályába tartoznak. Ez alatt azt értjük, hogy léteznek a $2n$ -dimenziós fázistéren értelmezett $H_1, \dots, H_n$ független, sima függvények, amelyek Poisson-zárójele az egész fázistéren eltűnik, a hamiltoni folyamuk teljes, és a H (1.1) Hamilton-függvény ehhez a Poisson kommutáló családhoz tartozik.

A fenti rendszerek mindegyikének léteznek ún. BC_n általánosításai. Egyenesen történő mozgásnál ezeket az jellemzi, hogy $(2n+1)$ részecske az origóra szimmetrikusan helyezkedik el, amint azt lentebb is látni fogjuk. A hiperbolikus esetben két különböző típusú „töltött” részecskét leíró változatok is léteznek. Ezeket a modelleket Calogero [5] vizsgálta elsőként 1975-ös munkájában. A dolgozatban egy ilyen, töltött részecskéket modellező BC_n rendszert vizsgálunk, melynek Hamilton-függvénye

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 - \sum_{j \leq m < k} \left(\frac{g^2}{\cosh^2(q^j - q^k)} + \frac{g^2}{\cosh^2(q^j + q^k)} \right) \\ & + \sum_{j < k \leq m} \left(\frac{g^2}{\sinh^2(q^j - q^k)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q^j + q^k)} \right) + \sum_{m < j < k} \left(\frac{g^2}{\sinh^2(q^j - q^k)} + \frac{g^2}{\sinh^2(q^j + q^k)} \right) \\ & + \sum_{j \leq m} \frac{g_1^2}{\sinh^2(q^j)} - \sum_{m < j} \frac{g_1^2}{\cosh^2(q^j)} + \sum_j \frac{g_2^2}{\sinh^2(2q^j)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

ahol $g > 0$, g_1 és g_2 valós független csatolási állandók. Az energiafüggvény alakjából jól kivehető az eltérő előjelű töltések vonzó $-\cosh^{-2}(q)$ és az azonosak taszító $\sinh^{-2}(q)$ potenciálja.

1.2. Célkitűzés és a dolgozat szerkezete

A szimplektikus redukció kifejlesztése a szimplektikus sokaság és ekvivariáns momentum leképezés általános kontextusában Meyer [6], Marsden, és Weinstein [7] érdeme. Egyik első alkalmazása az integrálható rendszerek területén Kazhdan, Kostant, és Sternberg [8] nevéhez fűződik. Híres cikkükben belátták néhány CMS rendszerre, hogy előállnak magasabb dimenziós szabad rendszerek szimplektikus redukciójaként. Ezáltal a redukció eszközt biztosított fizikai értelemben releváns modellek könnyen kezelhető rendszerekből történő származtatására.

A három független csatolási állandóval rendelkező hiperbolikus BC_n rendszer integrálhatóságát hamiltoni redukció alkalmazásával Fehér László és Pusztai Gábor 2007-es cikkükben [9] bizonyították. Levezetésükben az $SU(n, n)$ és az $SU(n + 1, n)$ Lie-csoportok Cartan-involúciójából kiindulva is visszakapták az (1.2) modell $m = 0$ értékhez tartozó, vagyis azonos töltésű részecskéket leíró változatát. Ezt az eredményt tetszőleges $1 \leq m < n$ esetre, vagyis két részecsketípusra általánosította Ayadi Viktor és Fehér László [10]. A [10] cikkben [9] eredményeinek a „fele” került általánosításra, mivel a redukciónak csupán az $SU(n, n)$ csoporton alapuló általánosítását dolgozták ki.

Felmerül a kérdés, hogy vajon le lehet-e vezetni az (1.2) modellt az $SU(n + 1, n)$ csoporton adott geodetikus, szabad mozgás redukciójával is? A dolgozat fő célja ezen levezetés megvalósítása, és így [9] teljes általánosítása a két típusú részecskék esetre. Mint már utaltunk rá, az (1.2) rendszer egy lehetséges fizikai interpretációja, ha $2n + 1$ egyenesen mozgó, azonos tömegű töltött részecskére gondolunk. Az egyenes origójába egy pozitív töltésű részecskét teszünk, amely onnan el nem mozdulhat. A többi erre szimmetrikusan helyezzük el: mindkét félegyenesre m pozitív, és $n - m$ negatív töltésű részecske kerül. A dolgozatban ismertetett eredményeink révén az (1.2) rendszer Liouville-integrálhatóságának egy új, [10] eredményét kiegészítő bizonyítást nyerjük.

A fenti BC_n modellt az $SU(n + 1, n)$ Lie-csoport geodetikusainak olyan redukciójával nyerjük, ahol a momentum leképezést a csoport két felcserélhető involúciója generálja. Az eltolási trükk alkalmazásával olyan kényszerfelülethez jutunk, amelynek megfelelő faktorizációja egy sima sokaságot eredményez. Ezután meghatározzuk a rendszer Lax-mátrixát, amely segítségével megkapjuk a redukált fázistér egy modelljét. A kapott Lax-mátrix különbözik a [10]-ben találhatóétól. Utolsó lépésként [10] mintájára egy új eljárást adunk a mozgásegyenletek algoritmikus megoldására.

Feltétlenül megemlítendő Hashizume korábbi munkája [11] is, amely tartalmazza az (1.2) modell bizonyos speciális eseteinek redukciós tárgyalását. Azonban az a tárgyalás 3 helyett csak 2 független csatolást enged meg, mint az [10]-ben is részletezve van.

A következő szakaszban egy rövid szimplektikus geometriai összefoglalót adunk, melyben definiáljuk a vizsgálataink alapját képező szimplektikus sokaság és hamiltoni rendszer fogalmát. Példaként ismertetjük a koérintőnyalábok és a koadjungált pályák szimplektikus struktúráját. A hamiltoni csoportthatás és a szimplektikus redukcióhoz szükséges momentum leképezés bevezetése után sorra vesszük a redukció generikus lépéseit. Szót ejtünk az eltolási trükkéről is, amely nagy hasznunkra lesz a redukcióban.

A harmadik szakasz egy további előkészítő rész, amely a dolgozatban használatos jelölések bevezetésére, a konvenciók lerögzítésére, és a csoportelméleti előkészületek megtételére szolgál. A negyedik szakaszban elvégezzük a szimplektikus redukciót és megkapjuk a már ismertetett eredményeinket. A dolgozatot az igazolt eredmények összegzésével, valamint az eddigi vizsgálatok közé történő beillesztésével zárjuk. Végül felvetünk néhány, további kutatást igénylő kérdést.

2. Szimplektikus geometriai összefoglaló

Ebben a szakaszban a dolgozatban felhasznált matematikai eszközök ismertetését tűztük ki célul. Ezt a számunkra releváns fogalmak és eredmények bemutatásával kívánjuk elérni. A felsoroló jelleg következtében az állításokat nem igazoljuk, ellenben hivatkozásokat adunk meg a bizonyításokat tartalmazó forrásokra.

2.1. Szimplektikus sokaság és hamiltoni rendszer

Egy sokaság szimplektikus tulajdonságát az érintővektorain értelmezett nemelfajuló antiszimmetrikus bilineáris formákból megkonstruált szimplektikus forma hordozza. Ezért először a vektorterek szintjén értelmezzük és vizsgáljuk a szükséges fogalmakat, majd áttérünk sokaságokra. Végül rámutatunk a szimplektikus sokaságok hamiltoni vektormezői és az analitikus mechanika Hamilton-egyenletei közötti viszonyra. Az itt leírt állítások és tételek bizonyításai [14]-ben megtalálhatók.

2.1.1. Definíció. Legyen V egy véges dimenziós valós vektortér és $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy bilineáris forma. Azt mondjuk, hogy ω *nemelfajuló*, ha

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ pontosan akkor teljesül minden } \mathbf{v} \in V \text{ vektorra, ha } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

A fenti definícióval ekvivalens állításokat szeretnénk megfogalmazni, azonban ehhez előbb néhány újabb definícióra lesz szükség.

2.1.2. Definíció. Legyen $e := \{\mathbf{e}_i\} \subset V$ a vektortér egy bázisa. Ekkor az

$$\omega_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (2.2)$$

elemek alkotta mátrixot az ω *bilineáris forma mátrixának* nevezzük és $[\omega]_e$ -vel jelöljük. Az ω *bilineáris forma rangja* alatt a (valamely bázisban felírt) mátrixának rangját értjük és $r(\omega)$ -val jelöljük. Az $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ vektorokat ω -*ortogonálisnak* mondjuk, ha $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$. Az $U < V$ altér ω -*ortogonális kiegészítője* alatt az alábbi halmazt értjük:

$$U^\omega := \{\mathbf{w} \in V \mid \omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}. \quad (2.3)$$

2.1.3. Definíció. Az $\omega^\top: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris formát ω *transzponáltjának* nevezzük, ha

$$\omega^\top(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \text{ minden } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \text{ vektorra.} \quad (2.4)$$

Egy azonnali észrevétel, hogy $[\omega^\top]_e = [\omega]_e^\top$ bármely $e \subset V$ bázisban.

2.1.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az ω bilineáris forma *szimmetrikus*, ha $\omega^\top = \omega$. Abban az esetben, ha $\omega^\top = -\omega$ teljesül, az ω bilineáris formát *antiszimmetrikusnak* mondjuk. A V vektortéren értelmezett antiszimmetrikus bilineáris formák halmazát $\Omega^2(V)$ jelöli.

2.1.5. Definíció. Az $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris forma segítségével definiálhatjuk az $\omega^\flat: V \rightarrow V^*$ lineáris leképezést

$$(\omega^\flat \mathbf{u})(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Könnyen látható, hogy $r(\omega) = \dim(\text{Im}(\omega^\flat))$. Az eddigi definíciók lehetővé teszik, hogy ekvivalens állításokat fogalmazzunk meg arra, hogy egy bilineáris forma mikor nemelfajuló.

2.1.6. Állítás. Legyen $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy bilineáris forma. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- (i) ω nemelfajuló;
- (ii) $\omega^\top$ nemelfajuló;
- (iii) ω (bármely bázisban felírt) mátrixa nemelfajuló;
- (iv) ω^b izomorfizmus.

Az alábbi állítás az antiszimmetrikus bilineáris formák kanonikus alakját adja meg.

2.1.7. Állítás. Legyen $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ egy antiszimmetrikus bilineáris forma. Ekkor ω rangja páros ($r(\omega) = 2n$) és létezik olyan $e = \{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n, f_1, \dots, f_k\} \subset V$ bázis, amelyben ω mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0_n & 1_n & 0 \\ -1_n & 0_n & 0 \\ 0 & 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

ahol 0_n és 1_n az $n \times n$ -es null- és egységmátrixot jelölik.

Az előbbi eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy bármely ω antiszimmetrikus bilineáris formához létezik olyan $e \subset V$ bázis, amelynek megfelelő $\alpha \subset V^*$ duális bázisával

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \alpha^{n+i}. \quad (2.7)$$

Az $u, v \in V$ vektorokon ω értéke az

$$\omega(u, v) = \sum_{i=1}^n (u_i v_{n+i} - u_{n+i} v_i) \quad (2.8)$$

képlettel számolható.

Az alábbi állítás a nemelfajultság egy hasznos kritériumát adja.

2.1.8. Állítás. Legyen V egy véges dimenziós valós vektortér és $\omega \in \Omega^2(V)$. Ekkor az ω forma pontosan akkor nemelfajuló, ha V dimenziója páros ($\dim(V) = 2n$) és $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ egy térfogat V -n.

2.1.9. Definíció. Legyen V egy véges dimenziós valós vektortér. Egy $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést *szimplektikus formának* nevezünk, ha ω bilineáris, antiszimmetrikus, és nemelfajuló. A (V, ω) párt *szimplektikus vektortérnek* nevezzük.

2.1.10. Definíció. Legyenek (V, ω) és (W, ρ) szimplektikus vektorterek. Ekkor egy $f: V \rightarrow W$ lineáris leképezést *szimplektikusnak* nevezünk, ha $f^* \rho = \omega$, ahol f^* az f leképezés transzponáltja.

Ha (V, ω) egy szimplektikus vektortér, akkor ω segítségével megadható egy irányítás a vektortéren:

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!} \omega^n, \quad (2.9)$$

ahol $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$.

2.1.11. Állítás. Legyenek (V, ω) és (W, ρ) egyenlő dimenziós szimplektikus vektorterek, tehát valamely n -re $\dim(V) = \dim(W) = 2n$ és $f: V \rightarrow W$ egy szimplektikus leképezés. Ekkor f megőrzi a térfogatot és irányítástartó, azaz $\det_{(\Omega_\omega, \Omega_\rho)} f = 1$.

2.1.12. Állítás. Legyen (V, ω) szimplektikus vektortér. Ekkor a V vektortér bijektív szimplektikus transzformációi a leképezésszorzással csoportot alkotnak, amelyet (V, ω) szimplektikus csoportjának nevezünk és $\text{Sp}(V, \omega)$ -val jelölünk.

Ezek után vizsgáljuk a szimplektikus leképezések mátrixát, illetve az azokat jellemző feltételeket. Ehhez tekintsük a V vektortér azon e bázisát, amelyben ω mátrixa

$$[\omega]_e = \begin{bmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{bmatrix} =: J \quad (2.10)$$

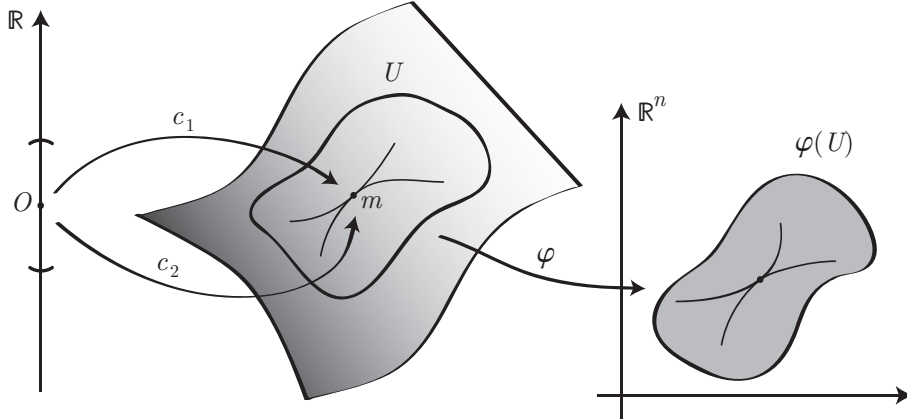
alakú. Érdekes megjegyezni, hogy $J^{-1} = J^T = -J$ és $J^2 = -1_{2n}$.

Legyen $f \in \text{Sp}(V, \omega)$ egy tetszőleges szimplektikus leképezés. Ekkor az $f^*\omega = \omega$ feltételből f ezen bázisban felírt F mátrixára az alábbi adódik:

$$F^T J F = J. \quad (2.11)$$

Az $F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ blokkmátrixos írásmóddal megfogalmazva ($A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$) a (2.11) feltétel pontosan akkor teljesül, ha $A^T C$ és $B^T D$ szimmetrikus mátrixok, valamint $A^T D - C^T B = 1_n$.

Most lépünk tovább a differenciálható sokaságok szintjére. Ehhez tekintsünk egy M differenciálható sokaságot és a sokaság $\tau_M: TM \rightarrow M$ érintőnyalábját. A sokaság érintőterét az $m \in M$ pontban két, egymással ekvivalens módon definiálhatjuk: Az egyik értelmezés szerint egy $v \in T_m M$ érintővektor azon m ponton áthaladó görbék ekvivalenciaosztálya, melyeknek megegyezik az m -ben vett deriváltja.



1. ábra. Görbék a sokaságon.

A másik felfogás szerint $T_m M$ elemei *deriváltak*, azaz $v: \mathcal{F}_m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezések¹, amelyek teljesítik az ún. *szorzatszabályt*:

$$v(fg) = v(f)g(m) + f(m)v(g). \quad (2.12)$$

2.1.13. Definíció. Az $\omega \in \Omega^2(M)$ differenciál 2-forma a sokaság minden $m \in M$ pontjához egy

$$\omega_m: T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.13)$$

antiszimmetrikus bilineáris leképezést rendel. Azt mondjuk, hogy ω *zárt*, ha

$$d\omega = 0, \quad (2.14)$$

ahol d a külső deriválást jelöli. Azt mondjuk, hogy ω *nemelfajuló*, ha bármely $m \in M$ pontra ω_m nemelfajuló.

¹ $\mathcal{F}_m(M)$ a sokaságon értelmezett m -pontbeli sima függvénycsírák halmaza.

2.1.14. Állítás. Az ω 2-forma pontosan akkor nemelfajuló, ha M dimenziója páros ($\dim M = 2n$) és $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ egy térfogati forma M -en. Tehát, ha ω nemelfajuló, akkor M irányítható. A standard térfogatot a (2.9)-ben látott formula adja.

2.1.15. Definíció. Egy *szimplektikus forma* az M sokaságon egy olyan 2-forma, amely zárt és nemelfajuló. Az (M, ω) párt *szimplektikus sokaságnak* nevezzük, ha M egy sokaság és ω egy szimplektikus forma M -en.

2.1.16. Példák. (1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, ahol ω a standard szimplektikus forma $\mathbb{R}^{2n}$ -en

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i. \quad (2.15)$$

(2) $(\mathbb{C}^n, \omega)$, ahol ω az alábbi szimplektikus forma

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i. \quad (2.16)$$

Valójában ez azonosítható az előző példában látott (2.15) szimplektikus formával a $z_i \mapsto q^i + ip_i$ izomorfizmus segítségével.

(3) $(\mathbb{S}^2, \omega)$, ahol az ω szimplektikus formát lokálisan definiáljuk. Legyen ω_m az $m \in \mathbb{S}^2$ pont érintőterén értelmezett szimplektikus forma, melyet az

$$\omega_m(u, v) := (m, u \times v) \quad (2.17)$$

formula definiál.

(4) $(\mathbb{C}P^n, \omega_{\text{FS}})$, ahol ω_{FS} az ún. *Fubini–Study szimplektikus forma*, melynek lokális alakja

$$\omega_{\text{FS}, z} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(\|z\|^2 + 1). \quad (2.18)$$

(5) További alapvető példák szimplektikus sokaságokra a sokaságok koérintőnyalábja és a Lie-csoportok koadjungált pályája. Ezekről a következő, 2.2. pontban ejtünk szót.

2.1.17. Darboux-tétel (Darboux 1882). *Tegyük fel, hogy ω egy nemelfajuló 2-forma a $2n$ -dimenziós M sokaságon. Ekkor $d\omega = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $m \in M$ ponthoz létezik (U, φ) térkép, melyre $\varphi(m) = \mathbf{0}$ és a $\varphi = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ koordinátafüggvények segítségével az ω forma U -ra vett megszorítása az alábbi alakot ölti*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i. \quad (2.19)$$

2.1.18. Definíció. A Darboux-tételben szereplő térképeket *szimplektikus térképeknek*, a megfelelő q^i, p_i koordinátafüggvényeket pedig *kanonikus koordinátáknak* nevezzük.

A tétel egyszerű következménye, hogy ha ω egy szimplektikus térképen (2.19) alakú, akkor $\Omega_\omega = dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n$. A szimplektikus vektortereknl látott szimplektikus leképezés fogalma sokaságokon is értelmezhető.

2.1.19. Definíció. Legyen (M, ω) és (N, ρ) szimplektikus sokaság. Egy $F: M \rightarrow N$ sima leképezést *szimplektikus leképezésnek* hívunk, ha $F^*\rho = \omega$. Ha F bijekció is, akkor *szimplektomorfizmusnak* vagy *kanonikus transzformációnak* nevezzük.

A szimplektikus sokaságok szimplektikus leképezése is rendelkezik a vektortereknél látott térfogatörző tulajdonsággal.

2.1.20. Állítás. Ha (M, ω) és (N, ρ) szimplektikus $2n$ -sokaságok, $F: M \rightarrow N$ pedig egy szimplektikus leképezés, akkor F megőrzi a térfogatot, $\det_{(\Omega_\omega, \Omega_\rho)} F = 1$ és F lokálisan diffeomorfizmus.

2.1.21. Definíció. Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság és $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ egy sima függvény a sokaságon. Azt az X_H vektormezőt, amelyet az

$$\omega(X_H, Y) = dH \cdot Y \quad (2.20)$$

egyenlőségéből kapunk, a H Hamilton-függvényhez tartozó *hamiltoni vektormezőnek* nevezzük.

2.1.22. Definíció. Az (M, ω, H) hármast *hamiltoni rendszernek* nevezzük, ha (M, ω) egy szimplektikus sokaság és $H \in C^\infty(M)$ az M sokaságon értelmezett sima függvény, amelyet *Hamilton-függvénynek* nevezünk.

2.1.23. Állítás. Legyenek $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ az ω szimplektikus forma kanonikus koordinátái, azaz $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$. Ekkor

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) = J \cdot dH, \quad (2.21)$$

ahol $J = \begin{bmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{bmatrix}$. Tehát egy $(q(t), p(t))$ görbe akkor integrálgörbéje az X_H hamiltoni vektormezőnek, ha eleget tesz a Hamilton-féle mozgásegyenleteknek:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

2.1.24. Definíció. Az analitikus mechanikából ismert, hogy egy adott M fázistéren értelmezett sima valós függvények Poisson struktúrával rendelkeznek. Ha ω a fázistér szimplektikus formája, akkor $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ függvények *Poisson-zárójele* az

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \quad (2.23)$$

formulával definiálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy (ω) tulajdonságaiból adódóan a Poisson-zárójel bilineáris, antiszimmetrikus, és teljesíti a *Jacobi-azonosságot*, vagyis bármely $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ esetén

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (2.24)$$

Szintén belátható, hogy $\{\cdot, \cdot\}$ a *Leibniz-szabálynak* is eleget tesz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad (2.25)$$

2.1.25. Állítás. Egy (M, ω, H) hamiltoni rendszerben $\{H, f\} = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha f állandó az X_H vektormező integrálgörbéin.

2.1.26. Definíció. Az előbbi állításban látott f függvényt *mozgásállandónak* vagy *első integrálnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $H_1, \dots, H_n$ mozgásállandók *függetlenek*, ha $dH_1, \dots, dH_n$ differenciálhányadosok lineárisan függetlenek M egy sűrű nyílt részhalmazának minden pontjában. Egy $2n$ -dimenziós sokaságon értelmezett hamiltoni rendszert (Liouville-értelemben) *integrálhatónak* nevezünk, ha léteznek olyan $H_1 = H, H_2, \dots, H_n$ független mozgásállandók, amelyek involúcióban állnak egymással, azaz $\{H_i, H_j\} = 0$, minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

2.2. Példák: Koérintőnyaláb és koadjungált pálya

Számos mechanikai rendszer fázistere szimplektikus szerkezetű. Ha a konfigurációs tér egy Q sokaság, akkor a T^*Q koérintőnyaláb a fázistér, amelyen az alábbi standard szimplektikus forma értelmezhető.

2.2.1. Tétel. Legyen Q egy n -sokaság és $P = T^*Q$. Tekintsük a $\tau_Q^*: P \rightarrow Q$ koérintőnyalábot és annak $T\tau_Q^*: TP \rightarrow TQ$ érintőnyalábját. Válasszuk egy tetszőleges $\alpha_q \in P$ ($q \in Q$) pontot és egy w_{α_q} pontot a TP nyaláb α_q feletti fibrumán. Definíáljuk a θ 1-formát P -n az alábbi módon

$$\theta_{\alpha_q}: T_{\alpha_q}P \rightarrow \mathbb{R}, w_{\alpha_q} \mapsto \alpha_q \circ T\tau_Q^*(w_{\alpha_q}) \quad \text{és} \quad \theta: \alpha_q \mapsto \theta_{\alpha_q} \quad (2.26)$$

Ekkor $\theta \in \mathfrak{X}^*(P)$, és $\omega = -d\theta$ egy szimplektikus forma P -n.

2.2.2. Definíció. Az előbbi tételben szereplő θ és ω formákat a P koérintőnyaláb kanonikus formáinak nevezzük.

Ha $(q^1, \dots, q^n)$ jelöli a koordinátákat a Q sokaságon és $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ a $T^*Q = P$ koérintőnyalábon, akkor a kanonikus formák lokális alakja a következő:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad (2.27)$$

és

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \quad (2.28)$$

A következő állítás θ egy érdekes jellemzését adja.

2.2.3. Állítás. A T^*Q koérintőnyalábon adott θ differenciál 1-forma az egyetlen olyan 1-forma, amellyel bármely Q -n értelmezett β 1-formára

$$\beta^*\theta = \beta, \quad (2.29)$$

ahol $\beta: Q \rightarrow T^*Q$ a koérintőnyaláb szelése. Ebből adódóan $\beta^*\omega = -d\beta$.

A sokaságon értelmezett leképezések felemelése a koérintőnyalábra a szimplektikus leképezések generálásának egyik legtermészetesebb módja.

2.2.4. Definíció. Legyen Q egy sokaság és $f: Q \rightarrow Q$ egy diffeomorfizmus. Az f leképezés felemeltje a

$$T^*f: T^*Q \rightarrow T^*Q, T^*f(\alpha_q)v = \alpha_q(Tf \cdot v) \quad (2.30)$$

leképezés, ahol $q \in Q$ és $v \in T_{f^{-1}(q)}Q$.

2.2.5. Állítás. Egy $f: Q \rightarrow Q$ diffeomorfizmus T^*f felemeltje szimplektikus leképezés.

Koordinátákkal kifejezve, ha $f(q^1, \dots, q^n) = (Q^1, \dots, Q^n)$, akkor T^*f a

$$(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n) \mapsto (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n), \quad (2.31)$$

leképezés, ahol

$$p_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} P_i. \quad (2.32)$$

Ez a transzformáció kanonikus, mivel megőrzi a θ kanonikus formát, ugyanis

$$\sum_{i=1}^n P_i dQ^i = \sum_{i=1}^n P_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} dq^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \right) dq^k = \sum_{k=1}^n p_k dq^k. \quad (2.33)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a diffeomorfizmusok felemeltjei eleget tesznek az

$$f^{-1} \circ \tau_Q^* = \tau_Q^* \circ T^*f \quad (2.34)$$

összefüggésnek, vagyis az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} T^*Q & \xrightarrow{T^*f} & T^*Q \\ \downarrow \tau_Q^* & & \downarrow \tau_Q^* \\ Q & \xleftarrow{f} & Q \end{array} \quad (2.35)$$

Szintén fontos azonosság a következő

$$T^*(f \circ g) = T^*g \circ T^*f. \quad (2.36)$$

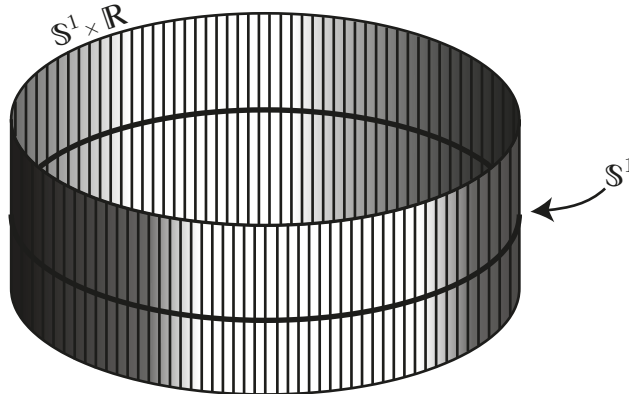
2.2.6. Példa. Egy G (véges dimenziós) Lie-csoport T^*G koérintőnyalábja azonosítható a $G \times \mathfrak{g}^*$ szorzattal. Jelölje $\pi: T^*G \rightarrow G$ az $\alpha_g \in T_g^*G$ elem $g \in G$ alappontba történő vetítését. A T^*G koérintőnyalábon értelmezhető az alábbi $\mathfrak{g}^*$ értékű függvény

$$\theta^r(\alpha_g) = (T_e R_g)^*(\alpha_g), \quad (2.37)$$

ahol R a jobb eltolást jelöli (2.39). Az ún. *jobb-trivializálás* a

$$(\pi, \theta^r): T^*G \rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \quad (2.38)$$

izomorfizmuson keresztül történő azonosítás. Erre egy egyszerű példa az $\mathbb{S}^1$ csoport koérintőnyalábja, amely $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ -rel izomorf.



2. ábra. Koérintőnyaláb.

A szimplektikus sokaságok egy másik alapvetően fontos osztályát alkotják a Lie-csoportok koadjungált pályái.

2.2.7. Definíció. Legyen G egy Lie-csoport, $\mathfrak{g}$ ennek Lie-algebrája, és $\mathfrak{g}^*$ a Lie-algebra duálisa. A csoport természetes módon hat önmagán bal- és jobb szorzással, illetve konjugálással:

$$\begin{aligned} \text{bal eltolás} \quad L: G \times G &\rightarrow G, (g, h) \mapsto gh, \\ \text{jobb eltolás} \quad R: G \times G &\rightarrow G, (g, h) \mapsto hg, \\ \text{konjugálás} \quad \Phi: G \times G &\rightarrow G, (g, h) \mapsto (R_{g^{-1}} \circ L_g)h = ghg^{-1}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Mivel Φ_g invariánsan hagyja a csoport $e \in G$ egységelemét, ezért a hatás linearizálásával $h = e$ -ben a Lie-algebrán nyerünk egy csoportthatást. Ezt a G Lie-csoport *adjungált ábrázolásának* nevezzük és Ad -al jelöljük:

$$\text{Ad}: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (g, \eta) \mapsto \text{Ad}_g \eta = T_e(\Phi_g)\eta. \quad (2.40)$$

Az Ad csoportthatásból származtatható annak duálisa, melyet *koadjungált ábrázolásnak* nevezünk és Ad^* -gal jelölünk:

$$\text{Ad}^*: G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*, (g, \alpha) \mapsto \alpha \circ \text{Ad}_{g^{-1}}. \quad (2.41)$$

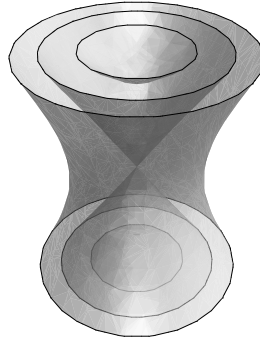
Ha egy tetszőleges $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ ponton minden Ad_g^* ($g \in G$) csoporttelemmel hatunk, megkapjuk a csoport α ponton átmenő $\mathcal{O}_\alpha$ *koadjungált pályáját*. A koadjungált pálya szimplektikus szerkezetét az ω_α differenciál 2-forma adja, amelyet az

$$\omega_\alpha(X_\xi, X_\eta) = -\langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle \quad (2.42)$$

formulával definiálunk, ahol X_ξ és X_η rendre a ξ, η Lie-algebra elemek által indukált vektormezők, $[\cdot, \cdot]$ pedig a Lie-zárójel $\mathfrak{g}$ -n.

2.2.8. Példák. (1) Legyen $G = \text{SO}(3)$ a speciális ortogonális mátrixok Lie-csoportja. Ekkor $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\}$. A koadjungált pályák az origó középpontú $r > 0$ sugarú gömbök és az origó.

(2) Legyen $G = \text{SO}(2, 1)$ a 3-dimenziós Lorentz-csoport. Ekkor $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3 = \{(p_0, p_1, p_2)\}$. A koadjungált pályák a $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 = c$ egyenlet által, különböző $c \in \mathbb{R}$ konstansok választásával meghatározott felületek: egy- és kétköpenyű hiperboloidok, a két fénykúp és az origó.



3. ábra. Koadjungált pályák.

(3) Legyen $G = \text{SU}(3)$ a speciális unitér mátrixok Lie-csoportja. Ekkor $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ a nulla nyomú antihermitikus mátrixok algebrája és a koadjungált pályák három típusba sorolhatóak:

(a) 6-dimenziós pályák $\mathcal{O} = \text{SU}(3)/\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(1) \times \text{U}(1))$: speciális unitér mátrixok három különböző sajátértékkel,

(b) 4-dimenziós pályák $\mathcal{O} = \text{SU}(3)/\text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(1))$: speciális unitér mátrixok két egybeeső sajátértékkel; ezek a pályák izomorfak a $\mathbb{CP}^2$ komplex projektív síkkal,

(c) az origó.

2.3. Hamiltoni csoportthatás és momentum leképezés

Jól ismert eredmény miszerint egy mechanikai rendszer impulzusa (lendülete) és impulzusmomentuma (perdülete) szoros összefüggésben áll a rendszer eltolásokkal és forgatásokkal szembeni invarianciájával. Ez a kapcsolat messzemenően általánosítható tetszőleges szimplektikus sokaság mint fázistér és az azon ható, a szimmetriát kódoló Lie-csoport esetére a hamiltoni csoportthatás és momentum leképezés segítségével.

Legyen (P, ω) egy összefüggő szimplektikus sokaság és $\Phi: G \times P \rightarrow P$ egy sima csoportthatás a sokaságon.

2.3.1. Definíció. A Φ csoportthatás által a ξ Lie-algebra elemhez rendelt *infinitesimális generátor* a

$$\xi_P(z) := \left. \frac{d}{dt} \Phi(\exp(t\xi), z) \right|_{t=0} \quad (2.43)$$

vektormező.

2.3.2. Definíció. A Φ csoportthatást *szimplektikusnak* nevezzük, ha bármely $g \in G$ esetén $\Phi_g: P \rightarrow P, z \mapsto \Phi(g, z)$ szimplektikus leképezés (lásd 2.1.19. definíció).

Egy

$$\mathbf{J}: P \rightarrow \mathfrak{g}^* \quad (2.44)$$

leképezést *momentum leképezésnek* nevezünk, ha bármely $\xi \in \mathfrak{g}$ esetén

$$X_{\langle \mathbf{J}, \xi \rangle} = \xi_P, \quad (2.45)$$

és $\mathbf{J}$ *ekvivariáns*, azaz

$$\mathbf{J}(\Phi_g(z)) = \text{Ad}_g^*(\mathbf{J}(z)), \quad (2.46)$$

minden $g \in G$ és $z \in P$ esetén.

A $\mathbf{J}$ momentum leképezést meghatározó (2.45) összefüggés az alábbi ekvivalens alakban is felírható

$$d\langle \mathbf{J}, \xi \rangle = i_{\xi_P} \omega. \quad (2.47)$$

Azt mondjuk, hogy Φ *hamiltoni csoportthatás*, ha létezik egy hozzá tartozó (ekvivariáns) momentum leképezés. A $(P, \omega, \Phi, \mathbf{J})$ négyest *hamiltoni G-térnek* szokás nevezni.

2.3.3. Példák momentum leképezésre. (1) A konfigurációs tér legyen $Q = \mathbb{R}^n$, a fázistér pedig ennek $P := T^*Q = \mathbb{R}^{2n}$ koéríntőnyalábja. Az $\mathbb{R}^n$ csoport eltolással hat a fázistéren. Ekkor a hatáshoz tartozó ekvivariáns momentum leképezés egy ponthoz az impulzusát rendeli:

$$\mathbf{J}: P \rightarrow \mathfrak{g}^*, (q, p) \mapsto p. \quad (2.48)$$

(2) Tekintsük az előbbi fázistérrel az $n = 3$ speciális esetben és az $\text{SO}(3)$ forgáscsoport hatását. A megfelelő momentum leképezés az impulzusmomentum:

$$\mathbf{J}: P \rightarrow \mathfrak{g}^*, (q, p) \mapsto q \times p. \quad (2.49)$$

Noether tétele számos alakban megfogalmazható; az alábbi [14]-ből származik.

2.3.4. Noether-tétel (Noether 1915). Ha $H: P \rightarrow \mathbb{R}$ egy G invariáns Hamilton-függvény, és a $\Phi: G \times P \rightarrow P$ hatás hamiltoni, akkor a $\mathbf{J}$ momentum leképezés állandó az X_H hamiltoni vektormező trajektóriáin.

2.4. Szimplektikus redukció és „eltolási trükk”

A fizikában gyakran használt egyszerűsítő eljárás a szimmetriával bíró (mechanikai) rendszer szabadsági fokának csökkentése. Egy egyszerű példa, a gömbszimmetrikus potenciálban mozgó tömegpont esetén a radiális problémára való áttérés. Itt és az alább vázolt további példákban úgy járunk el, hogy először rögzítjük a szimmetriát generáló megmaradó mennyiségek (vagyis a momentum leképezés) értékét, majd faktorizálunk a rögzített értéket megőrző szimmetria részcsopottal. A szimplektikus redukció ennek matematikai formalizálása az általános esetben.

2.4.1. Elemi példák redukcióra. (1) Centrális erőterben mozgó pontszerű test esetén az $\mathbf{L}$ impulzusmomentum megmaradó mennyiség. Az $\mathbf{L}$ vektor értékét rögzítve és a fix (nem-nulla) $\mathbf{L}$ körüli forgatásokkal faktorizálva a fázistér dimenziója 6-ról 2-re csökkenthető.

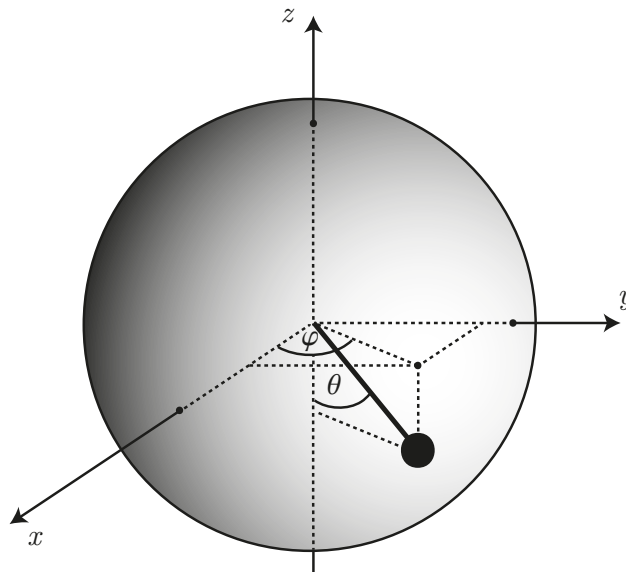
(2) Hasonló redukció hajtható végre a háromtest-probléma esetén. Ekkor a 6-dimenziós Euklideszi-csoport hatására invariáns rendszer 18-dimenziós fázisterének dimenziója 8-ra csökkenthető.

(3) A gömbi inga konfigurációs tere $Q = \mathbb{S}^2$, fázistere $P = T^*\mathbb{S}^2 \cong \{(\varphi, \theta, p_\varphi, p_\theta)\}$, ahol φ, θ a gömbi polárkoordináták, p_φ, p_θ pedig az impulzuskoordináták. A rendszer Hamilton-függvénye

$$H(\varphi, \theta, \xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \cos \theta. \quad (2.50)$$

A p_φ momentum a rendszer z -tengely körüli forgásszimmetriáját generálja. Technikai okokból (lásd [17]) most zárjuk ki a θ szög 0 és π extrémális értékeit. Az így kapott P^0 megszorított fázistéren a $p_\varphi = \mu$ kényszerrel előírva és z -tengely körüli forgatásokkal faktorizálva redukált fázistérként T^*I adódik, ahol $I = (0, \pi)$ a θ szög megengedett értékeit tartalmazó nyílt intervallum. A megfelelő redukált Hamilton-függvény pedig

$$H_\mu(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2} \left(p_\theta^2 + \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right) - \cos \theta. \quad (2.51)$$



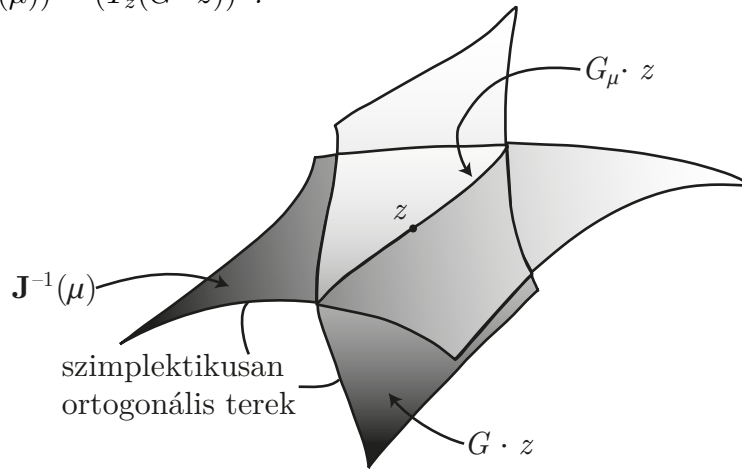
4. ábra. A gömbi inga konfigurációs tere.

(4) A $P = \mathbb{C}^{n+1}$ fázistéren forgatással természetes módon hat a $G = \mathbb{S}^1$ Lie-csoport. Ebből a $\mathbf{J}(z) = (1 - \|z\|^2)/2$ momentum leképezéssel a $P_0 \cong \mathbb{C}P^n$ tér nyerhető és $\mathbb{C}^{n+1}$ standard szimplektikus formája (2.16) a Fubini – Study formává (2.18) redukálódik.

Elsőként az ún. redukciós lemmát mondjuk ki, amely a szimplektikus redukciót készíti elő, annak geometriáját segít megérteni.

2.4.2. Redukciós lemma. Legyen $(P, \omega, \Phi, \mathbf{J})$ egy hamiltoni G -tér és rögzítsünk egy $\mu \in \mathfrak{g}^*$ és $z \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ elemet. Jelölje $G \cdot \mu$ a $\mu \in \mathfrak{g}^*$ momentumértékhez tartozó koadjungált pályát, $g \cdot z$ pedig g hatását z -n, és $G_\mu := \{g \in G \mid \text{Ad}_g^*(\mu) = \mu\}$. Ekkor

- (i) $\mathbf{J}^{-1}(G \cdot \mu) = G \cdot \mathbf{J}^{-1}(\mu) = \{g \cdot z \mid g \in G \text{ és } \mathbf{J}(z) = \mu\}$;
- (ii) $G_\mu \cdot z = G \cdot z \cap \mathbf{J}^{-1}(\mu)$;
- (iii) $T_z(G_\mu \cdot z) = T_z(G \cdot z) \cap T_z(\mathbf{J}^{-1}(\mu))$;
- (iv) $T_z(\mathbf{J}^{-1}(\mu)) = (T_z(G \cdot z))^\omega$.



5. ábra. A redukciós lemma geometriája.

A lemma bizonyítása például [16]-ban található.

2.4.3. Szimplektikus redukció (Meyer 1973, Marsden – Weinstein 1974).

Legyen $(P, \omega, \Phi, \mathbf{J})$ a G Lie-csoport tetszőleges hamiltoni G -tere. Tegyük fel, hogy a

$$G \times P \rightarrow P \times P, (g, z) \mapsto (\Phi_g(z), z) \quad (2.52)$$

leképezésnél kompakt halmazok ősképe is kompakt². Válasszunk egy $\mu \in \mathfrak{g}^*$ momentumértéket és tegyük fel, hogy G_μ szabadon hat a $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ „kényszerfelületen”. Ekkor

- (i) a $P_\mu := \mathbf{J}^{-1}(\mu)/G_\mu$ pályák tere egy sima sokaság, amelyen
- (ii) létezik egy ω_μ szimplektikus forma, amelyet a $\pi_\mu^* \omega_\mu = \iota_\mu^* \omega$ összefüggés definiál.

ahol $\pi_\mu: \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow P_\mu$ a faktortérre való projekció és $\iota_\mu: \mathbf{J}^{-1}(\mu) \hookrightarrow P$ a tautologikus beágyazás.

2.4.4. Definíció. A P_μ sokaságot redukált fázistérnek, a ω_μ szimplektikus formát pedig redukált szimplektikus formának nevezzük.

A redukált fázistér dimenziójára a

$$\dim P_\mu = \dim P - \dim G - \dim G_\mu \quad (2.53)$$

összefüggés nyerhető.

²Ez a feltevés kompakt G esetén automatikusan teljesül.

2.4.5. Példák. (1) A centrális erőter példájában $\dim P = 6$, $\dim G = 3$, $\dim G_\mu = 1$, ahol $\mu \neq 0$. Ebből következik, hogy valóban $\dim P_\mu = 6 - 3 - 1 = 2$.
(2) Legyen $P = T^*G$, a G Lie-csoport koérintőnyalábja, és legyen Φ a bal eltolásból adódó csoportthatás. Ekkor a megfelelő momentum leképezés

$$\mathbf{J}(g, \alpha) = \alpha, \quad g \in G, \alpha \in \mathfrak{g}^* \quad (2.54)$$

ahol a (2.38)-ban leírt $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ azonosítással élünk. Ekkor $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \cong G$ és $P_\mu \cong \mathcal{O}_\mu$.

Az eddig tárgyalt redukciós eljárást *pontredukciónak* nevezzük. Az elnevezés oka, hogy a $\mathfrak{g}^*$ tér egy μ pontjából indultunk ki. Egy másik lehetőség, ha a koadjungált pályák szerint végezzük a redukciót. Ezt *pályaredukciónak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy P összefüggő, G hatás pedig szimplektikus és fennáll (2.52). Továbbá tételezzük fel, hogy P/G egy sima sokaság. Vezessük be a $[\iota_\mu]: P_\mu \rightarrow P/G$ leképezést, amely egy $[z]G_\mu$ pályát a $[z]G$ pályába képez. Láthatóan $[\iota_\mu]$ jól definiált és sima, továbbá az alábbi kommutatív diagram érvényes:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{J}^{-1}(\mu) & \xrightarrow{\iota_\mu} & P \\ \downarrow \pi_\mu & & \downarrow \pi \\ P_\mu & \xrightarrow{[\iota_\mu]} & P/G \end{array} \quad (2.55)$$

Ellenőrizhető, hogy $[\iota_\mu]$ egy injektív immerzió, valamint az is könnyen belátható, hogy

$$[\iota_\mu](P_\mu) = \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G, \quad (2.56)$$

ahol $\mathcal{O}_\mu \subset \mathfrak{g}^*$ a $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ponton áthaladó koadjungált pálya. A

$$P_{\mathcal{O}_\mu} := \mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G \quad (2.57)$$

halmazt az $\mathcal{O}_\mu$ pályához tartozó *pályaredukcióval nyert térnek* nevezzük.

2.4.6. Pályaredukció. A fenti jelölések és feltevések mellett $(P_{\mathcal{O}_\mu}, \omega_{\mathcal{O}_\mu})$ szimplektikus sokaság. Az $\omega_{\mathcal{O}_\mu}$ szimplektikus formát egyértelműen meghatározza a

$$\pi_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega_{\mathcal{O}_\mu} = \mathbf{J}_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega_{\mathcal{O}_\mu} + \iota_{\mathcal{O}_\mu}^* \omega \quad (2.58)$$

összefüggés, ahol $\mathbf{J}_{\mathcal{O}_\mu}$ a $\mathbf{J}^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$ halmazra történő megszorítás, $\omega_{\mathcal{O}_\mu}$ az $\mathcal{O}_\mu$ koadjungált pálya (2.42) szimplektikus formája, $\iota_{\mathcal{O}_\mu}$ pedig ι megszorítása $\mathcal{O}_\mu$ -re.

További részletek és a tétel bizonyítása [8]-ban és [18]-ban található. Az alábbiakban ismertetett eltolási trükk lényege, hogy helyettesíti a (P, ω) szimplektikus sokaság $\mathcal{O}_\mu$ pályaredukcióját a $(P \times \mathcal{O}_\mu, \omega - \omega_{\mathcal{O}_\mu})$ kiterjesztett fázistér 0-ban vett pontredukciójával. Az $\mathcal{O}_\mu$ koadjungált pályával kiterjesztett fázistér momentum leképezése

$$\widehat{\mathbf{J}}: P \times \mathcal{O}_\mu \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \widehat{\mathbf{J}}(z, \alpha) = \mathbf{J}(z) - \alpha. \quad (2.59)$$

2.4.7. Eltolási tétel. A fenti feltevések mellett, a pályaredukcióval nyert $P_{\mathcal{O}_\mu}$, valamint a pontredukcióval kapott P_μ , és $(P \times \mathcal{O}_\mu)_0$ redukált terek szimplektikusan diffeomorfak.

A tétel bizonyítása [18]-ban található. Az eltolási tétel a 4. szakaszban kerül alkalmazásra.

3. Csoportelméleti előkészületek

A szakasz a szimplektikus redukció előkészítésére szolgál. Először az $SU(n+1, n)$ Lie-csoport két involúciójának fixpont részcsoportjait és azok Lie-algebráit jellemezzük. Ezt követően felírjuk az eltolási trükkhöz használt koadjungált pályát.

Ebben a fejezetben követjük [10] hasonló című előkészítő fejezetének felépítését. A [10] $SU(n, n)$ -re vonatkozó állításainak itt leírt $SU(n+1, n)$ általánosításait minden esetben elemi számítással igazoltuk. Ezek az eredmények természetesen megtalálhatók a csoportelméleti irodalomban is, alábbi összefoglalásukra később szükségünk lesz.

3.1. Az $SU(n+1, n)$ Lie-csoport involúciói

3.1.1. Definíció. Az $SU(n+1, n)$ csoportot az alábbi konvenció szerint definiáljuk:

$$G := SU(n+1, n) = \{g \in SL(2n+1, \mathbb{C}) \mid g^\dagger Q g = Q\}. \quad (3.1)$$

A Q mátrix alakja

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0_n & 1_n \\ 0 & 1_n & 0_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}), \quad (3.2)$$

ahol 0_n és 1_n az $n \times n$ -es null- és egységmátrix. A definíció alapján G Lie-algebrája

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(n+1, n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n+1, \mathbb{C}) \mid X^\dagger Q + QX = 0_{2n+1}\}. \quad (3.3)$$

3.1.2. Állítás. Tetszőleges $X \in \mathfrak{g}$ Lie-algebra elem a következő alakba írható

$$X = \begin{bmatrix} X_{00} & X_{01} & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ -X_{01}^\dagger & X_{21} & -X_{11}^\dagger \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \overline{X}_{00} &= -X_{00} \\ X_{12}^\dagger &= -X_{12} \\ X_{21}^\dagger &= -X_{21} \end{aligned}, \quad \text{Im}(X_{00} + 2 \text{tr}(X_{11})) = 0. \quad (3.4)$$

3.1.3. Definíció. Rögzítsük az m és n egész számokat úgy, hogy

$$1 \leq m < n \quad (3.5)$$

teljesüljön és definiáljuk a következő mátrixokat

$$I_m := \text{diag}(1_m, -1_{n-m}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \quad D_m := \text{diag}(1, I_m, I_m) \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}). \quad (3.6)$$

Az alábbiakban bevezetjük G két, egymással felcserélhető involúcióját a [11] cikkben megadott definícióval.

3.1.4. Definíció.

$$\Theta: G \rightarrow G, \quad \Theta(g) := (g^\dagger)^{-1}, \quad \Xi: G \rightarrow G, \quad \Xi(g) := D_m \Theta(g) D_m, \quad \forall g \in G. \quad (3.7)$$

Legyenek θ és ξ a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra megfelelő involúciói:

$$\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \theta(X) = -X^\dagger, \quad \xi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \xi(X) = D_m \theta(X) D_m, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (3.8)$$

3.1.5. Állítás. Ekkor Θ fixpont részcsoportja G maximális kompakt részcsoportja. A Ξ involúció fixpont részcsoportja nemkompakt. Jelölje előbbi G_+ , utóbbit pedig G^+ :

$$G_+ := \{g \in G \mid \Theta(g) = g\}, \quad G^+ := \{g \in G \mid \Xi(g) = g\}. \quad (3.9)$$

3.1.6. Megjegyzés. E ponttól számításainkat a Lie-algebrák szintjén végezzük. Ennek egyik oka, hogy egy Lie-algebra könnyebben kezelhető algebrai struktúra, mint a Lie-csoport, amelyhez az algebra tartozik. Másrészt egy Lie-csoport egységelemben vett érintőtere (Lie-algebrája) számottevő információt hordoz magáról a csoportról is.

3.1.7. Állítás. *A már látott blokkmátrixos írásmódot használva G_+ Lie-algebrája*

$$\mathfrak{g}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} X_{00} & -X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{10} & X_{12} & X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \bar{X}_{00} = -X_{00} \\ X_{11}^\dagger = -X_{11} \\ X_{12}^\dagger = -X_{12} \end{array}, X_{00} + 2 \operatorname{tr}(X_{11}) = 0 \right\}, \quad (3.10)$$

valamint $\mathfrak{g}_+$ izomorf az $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(n+1) \oplus \mathfrak{u}(n))$ Lie-algebrával. Legyen $X \in \mathfrak{u}(n+1)$ és $Y \in \mathfrak{u}(n)$, amelyekre $\operatorname{tr}(X) + \operatorname{tr}(Y) = 0$ teljesül. Egy izomorfizmus

$$\psi: \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(n+1) \oplus \mathfrak{u}(n)) \rightarrow \mathfrak{g}_+, \quad \begin{bmatrix} X_{00} & -X_{10}^\dagger & 0 \\ X_{10} & X_{11} & 0_n \\ 0 & 0_n & Y \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2X_{00} & -\sqrt{2}X_{10}^\dagger & -\sqrt{2}X_{10}^\dagger \\ \sqrt{2}X_{10} & X_{11} + Y & X_{11} - Y \\ \sqrt{2}X_{10} & X_{11} - Y & X_{11} + Y \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ennek megfelelően a G_+ csoport izomorf az $S(U(n+1) \times U(n))$ csoporttal az alábbi megfeleltetéssel

$$\Psi: S(U(n+1) \times U(n)) \rightarrow G_+, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \mapsto S \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} S^{-1} =: g(A, B) \quad (3.12)$$

$$\text{ahol } S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1_n & 1_n \\ 0 & 1_n & -1_n \end{bmatrix}.$$

3.1.8. Állítás. *A G^+ csoport Lie-algebrája az alábbi alakú*

$$\mathfrak{g}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} X_{00} & -X_{10}^\dagger I_m & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ I_m X_{10} & I_m X_{12} I_m & I_m X_{11} I_m \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \bar{X}_{00} = -X_{00} \\ X_{11}^\dagger = -I_m X_{11} I_m \\ X_{12}^\dagger = -X_{12} \end{array}, X_{00} + 2 \operatorname{tr}(X_{11}) = 0 \right\} \quad (3.13)$$

és izomorf az $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(m+1, n-m) \oplus \mathfrak{u}(m, n-m))$ Lie-algebrával az alábbi leképezés révén

$$\eta: \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(m+1, n-m) \oplus \mathfrak{u}(m, n-m)) \rightarrow \mathfrak{g}^+, \quad \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \mapsto \tilde{S} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1}, \quad (3.14)$$

$$\text{ahol } \tilde{S} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1_n & 1_n \\ 0 & I_m & -I_m \end{bmatrix}.$$

3.1.9. Állítás. *A Lie-algebra involúciók -1 sajátértékhez tartozó sajátalterei*

$$\mathfrak{g}_- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ -X_{10} & -X_{12} & -X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} X_{11}^\dagger = X_{11} \\ X_{12}^\dagger = -X_{12} \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

és

$$\mathfrak{g}^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X_{10}^\dagger I_m & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ -I_m X_{10} & -I_m X_{12} I_m & -I_m X_{11} I_m \end{bmatrix}, \begin{array}{l} X_{11}^\dagger = I_m X_{11} I_m \\ X_{12}^\dagger = -X_{12} \end{array} \right\}. \quad (3.16)$$

A $\mathfrak{g}_s^r := \mathfrak{g}_s \cap \mathfrak{g}^r$ jelölést bevezetve ($s, r \in \{\pm\}$) a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrát diszjunkt sajátaltérrek direkt összegére bonthatjuk

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}_-^+ \oplus \mathfrak{g}_+^- \oplus \mathfrak{g}_+^+, \quad (3.17)$$

amelyek páronként merőlegesek a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrán értelmezhető invariáns skalárszorzatra nézve, melyet az

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} \text{tr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (3.18)$$

formula definiál.

3.1.10. Állítás. A $\mathfrak{g}_+^+$ altér alakja

$$\mathfrak{g}_+^+ = \left\{ \begin{bmatrix} X_{00} & -X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{10} & X_{12} & X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \overline{X}_{00} = -X_{00} \\ X_{10} = I_m X_{10} \\ X_{00} + 2 \text{tr}(X_{11}) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} X_{11} = I_m X_{11} I_m = -X_{11}^\dagger \\ X_{12} = I_m X_{12} I_m = -X_{12}^\dagger \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

és a (3.11)-ben megadott izomorfizmushoz hasonlóan belátható, hogy

$$\mathfrak{g}_+^+ \cong \mathfrak{s}((\mathfrak{u}(m+1) \oplus \mathfrak{u}(n-m)) \oplus (\mathfrak{u}(m) \oplus \mathfrak{u}(n-m))). \quad (3.20)$$

A (3.17)-ben szereplő többi altér elemeit is explicit módon megadjuk:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_+^- &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{10} & X_{12} & X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} X_{10} = -I_m X_{10}, \quad X_{11} = -I_m X_{11} I_m = -X_{11}^\dagger \\ \text{tr}(X_{11}) = 0, \quad X_{12} = -I_m X_{12} I_m = -X_{12}^\dagger \end{array} \right\}, \\ \mathfrak{g}_-^+ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ -X_{10} & -X_{12} & -X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} X_{10} = -I_m X_{10}, \quad X_{11} = -I_m X_{11} I_m = X_{11}^\dagger \\ X_{12} = -I_m X_{12} I_m = -X_{12}^\dagger \end{array} \right\}, \\ \mathfrak{g}_-^- &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & X_{10}^\dagger & -X_{10}^\dagger \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ -X_{10} & -X_{12} & -X_{11} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} X_{10} = I_m X_{10}, \quad X_{11} = I_m X_{11} I_m = X_{11}^\dagger \\ X_{12} = I_m X_{12} I_m = -X_{12}^\dagger \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2. Koadjungált pályák

Ezek után válasszunk egy maximális Abel-féle részalgebrát $\mathfrak{g}_-^-$ -ban, jelölje ezt $\mathfrak{a}$. Ismert eredmény (lásd [13]) miszerint $\mathfrak{a}$ választása a G_+^+ csoport elemeivel történő konjugálástól eltekintve egyértelmű. Az alábbi módon választjuk meg $\mathfrak{a}$ -t:

3.2.1. Definíció.

$$\mathfrak{a} := \left\{ q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{q} & 0_n \\ 0 & 0_n & -\mathbf{q} \end{bmatrix} : \mathbf{q} = \text{diag}(q^1, \dots, q^n), q^k \in \mathbb{R} \right\} < \mathfrak{g}_-^-. \quad (3.22)$$

3.2.2. Állítás. $\mathfrak{a}$ centralizátora $\mathfrak{g}$ -ben a $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ direkt összegként áll elő, ahol

$$\mathfrak{m} = \left\{ d := i \begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{d} & 0_n \\ 0 & 0_n & \mathbf{d} \end{bmatrix} : \mathbf{d} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_k \in \mathbb{R}, d_0 + 2\text{tr}(\mathbf{d}) = 0 \right\} < \mathfrak{g}_+^+. \quad (3.23)$$

Jelölje A és M az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{m}$ részalgebráknak megfelelő összefüggő részcsoportokat G -ben. Ekkor M pontosan azokat a g elemeket tartalmazó részcsoportja G_+^+ -nak, amelyekre

$$gqg^{-1} = q, \quad \forall q \in \mathfrak{a}. \quad (3.24)$$

3.2.3. Definíció. Egy $q \in \mathfrak{a}$ elemet *regulárisnak* nevezünk, ha $g \in G_+^+$ esetén

$$gqg^{-1} = q \Rightarrow g \in M. \quad (3.25)$$

Egyszerűen megmutatható, hogy $q \in \mathfrak{a}$ pontosan akkor reguláris, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

$$q^i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (q^j - q^k)(q^j + q^k) \neq 0, \quad 1 \leq j < k \leq m \text{ és } m < j < k \leq n. \quad (3.26)$$

Válasszunk egy összefüggő komponenst ún. *Weyl-kamrát* az $\mathfrak{a}$ reguláris elemeiből álló (nyílt) halmazban és jelöljük $\mathfrak{a}_c$ -vel. Egy általános eredmény [13] alapján tudjuk, hogy minden $g \in G$ csoportelem felbontható az alábbi módon:

$$g = g_+ e^q g^+, \quad \text{ahol } q \in \bar{\mathfrak{a}}_c, \quad g_+ \in G_+, \quad g^+ \in G^+, \quad (3.27)$$

ahol $\bar{\mathfrak{a}}_c$ a lezártat jelöli.

3.2.4. Megjegyzés. Az előbbi felbontásban fellépő q mátrix egyértelmű, valamint ha q reguláris, akkor a g_+, g^+ mátrixokat kizárólag az alábbi módon helyettesíthetjük:

$$(g_+, g^+) \rightarrow (g_+ m, m^{-1} g^+), \quad \forall m \in M. \quad (3.28)$$

A (3.27)-ben megadott ún. *általánosított Cartan-felbontásban* az $\mathfrak{a}_c$ nyílt Weyl-kamra választható úgy, hogy egy tetszőleges a (3.22)-ben látott q elemére az alábbi feltételt írjuk elő:

$$q^1 > \dots > q^m > 0 \quad \text{és} \quad q^{m+1} > \dots > q^n > 0. \quad (3.29)$$

A (3.27)-ben megadott felbontás még döntő jelentőségű lesz a következő szakaszban.

3.2.5. Állítás. *Mind a $\mathfrak{g}_+$ és $\mathfrak{g}^+$ részalgebrák centruma egydimenziós. A $\mathfrak{g}_+$ részalgebra centrumát a*

$$C^\ell := \frac{1}{2}i \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 \\ 0 & -1_n & (2n+1)1_n \\ 0 & (2n+1)1_n & -1_n \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

alakú mátrix, míg $\mathfrak{g}^+$ centrumát a

$$C^r := \frac{1}{2}i \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 \\ 0 & -1_n & (2n+1)I_m \\ 0 & (2n+1)I_m & -1_n \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

mátrix generálja. Ezekre teljesül, hogy

$$C^\lambda \in \mathfrak{g}_+^+, \quad \lambda = \ell, r. \quad (3.32)$$

Az invariáns skalárszorzat lehetővé teszi a $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_+$ és $\mathfrak{g}^+$ algebrák azonosítását rendre a nekik megfelelő duális térrel. Az azonosítással a megfelelő koadjungált ábrázolás is megfeleltethető az adjungált ábrázolásnak. Az ezt követő 4. szakaszban G_+ bizonyos koadjungált pályáit fogjuk felhasználni. Ahhoz, hogy ezeket leírjuk újabb mátrixokat vezetünk be.

3.2.6. Definíció. Legyen $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tetszőleges,

$$X(\mathbf{u}) := i \left(\mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger - \frac{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}{n+1} 1_{n+1} \right) \in \mathfrak{su}(n+1) \quad \text{és} \quad \chi(\mathbf{u}) := S \begin{bmatrix} X(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & 0_n \end{bmatrix} S^{-1}. \quad (3.33)$$

3.2.7. Állítás. Legyenek $\kappa > 0$ és $x \neq 0$ tetszőleges rögzített konstansok. Felhasználva a (3.11) összefüggést kapjuk, hogy az

$$\mathcal{O}_{\kappa, x} := \{xC^\ell + \chi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = \kappa(n+1)\} \quad (3.34)$$

halmaz G_+ egy minimális (nemnulla dimenziós) koadjungált pályája. Egy $g(A, B) \in G_+$ csoportelem hatása az $\mathcal{O}_{\kappa, x}$ pályán

$$g(A, B)(xC^\ell + \chi(\mathbf{u}))g(A, B)^{-1} = xC^\ell + \chi(A\mathbf{u}). \quad (3.35)$$

3.2.8. Megjegyzés. Mivel $\chi(\mathbf{u})$ egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal való szorzás erejéig határozza meg $\mathbf{u}$ -t, ezért az $\mathcal{O}_{\kappa, x}$ pálya azonosítható a $\mathbb{C}P^n$ komplex projektív térrel. Továbbá bármely x, y valós számokra xC^ℓ és yC^r egy pontból álló koadjungált pályái rendre a G_+ és a G^+ csoportoknak.

4. A szimplektikus redukció egy alkalmazása

A szakaszban elvégezzük az $SU(n+1, n)$ Lie-csoport geodetikusainak szimplektikus redukcióját. Ehhez alkalmasan módosítjuk, általánosítjuk a [10] megfelelő lépéseit, ahol hasonló analízis található az $SU(n, n)$ csoport egyszerűbb esetében.

4.1. Momentum leképezés és momentum kényszerfelület

Az eltolási trükk alkalmazásához ki kell terjesztenünk a fázisteret egy koadjungált pályával. Erre az előző szakaszban bevezetett (3.34) $\mathcal{O}_{\kappa, x}$ pályát használjuk. (2.38)-nak megfelelően trivializálva a koérintőnyalábot a fázisteret a következő alakba írhatjuk:

4.1.1. Definíció.

$$P := T^*G \times \mathcal{O}_{\kappa, x} \cong (G \times \mathfrak{g}) \times \mathcal{O}_{\kappa, x} = \{(g, \Lambda, \zeta) \mid g \in G, \Lambda \in \mathfrak{g}, \zeta \in \mathcal{O}_{\kappa, x}\}. \quad (4.1)$$

A fázistér szimplektikus formája

$$\omega = \omega_{T^*G} + \omega_{\mathcal{O}_{\kappa, x}}, \quad (4.2)$$

ahol $\omega_{T^*G} = \mathbf{d}\langle \Lambda, \mathbf{d}g g^{-1} \rangle$, míg $\omega_{\mathcal{O}_{\kappa, x}}$ az $\mathcal{O}_{\kappa, x}$ koadjungált pálya (2.42) szimplektikus formája. A fázistéren megadható sima függvények egy Poisson kommutáló családjá

$$H_k(g, \Lambda, \zeta) := \frac{1}{4k} \text{tr}(\Lambda^{2n}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

melynek első tagja felelős a geodetikus mozgásért.

4.1.2. Állítás. H_k függvényhez tartozó Hamilton-egyenletek megoldása

$$(g(t), \Lambda(t), \zeta(t)) = (e^{tV_k} g_0, \Lambda_0, \zeta_0), \quad \text{ahol } V_k := \Lambda_0^{2k-1} - \frac{1}{2n+1} \text{tr}(\Lambda_0^{2k-1}) 1_{2n+1}. \quad (4.4)$$

4.1.3. Definíció. Tekintsük a $\Phi: (G_+ \times G^+) \times P \rightarrow P$ csoporthatást, melyet a

$$\Phi_{(a,b)}(g, \Lambda, \zeta) := (agb^{-1}, a\Lambda a^{-1}, a\zeta a^{-1}), \quad (a, b) \in G_+ \times G^+. \quad (4.5)$$

formula definiál.

4.1.4. Állítás. A fenti (4.5) formula hamiltoni csoporthatást értelmez, melyhez tartozó momentum leképezés

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= (\mathbf{J}_+, \mathbf{J}^+): P \rightarrow (\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}^+), \\ \mathbf{J}_+(g, \Lambda, \zeta) &= \pi_+(\Lambda) + \zeta, \quad \mathbf{J}^+(g, \Lambda, \zeta) = -\pi^+(g^{-1}\Lambda g), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol π_+ és π^+ a természetes projekciók rendre a $\mathfrak{g}_+$ és $\mathfrak{g}^+$ alterekre. A (4.3)-ban definiált H_k függvények invariánsak erre a $G_+ \times G^+$ csoporthatásra.

A 4.1.2. és 4.1.4. állítások bizonyítása standard, ezért itt elhagyjuk. A redukcióhoz (2.59) alapján vegyük a momentum leképezés alábbi (konstans) értékét

$$\mu := (0_{2n+1}, -yC^r) \in (\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}^+), \quad (4.7)$$

ahol $y \neq 0$ valós szám. A $G_+ \times G^+$ szimmetriacsoport hatása invariánsan hagyja a

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset P \quad (4.8)$$

„kényszerfelületet”, vagyis a jelen esetben $(G_+ \times G^+)_{\mu} = G_+ \times G^+$.

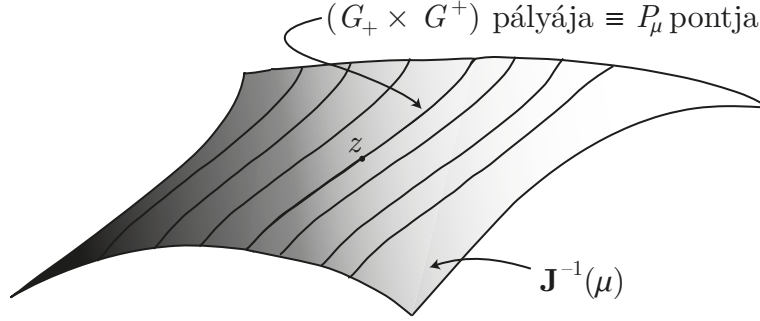
Az asszociált redukált fázistér tehát most

$$P_\mu := \mathbf{J}^{-1}(\mu)/(G_+ \times G^+). \quad (4.9)$$

Az alábbiakban a redukció definíciójában szereplő $\kappa > 0$ és x, y valós konstansokra kirójuk a következő feltételeket:

$$\kappa - n(x + y) \geq 0, \quad \kappa + x + y > 0. \quad (4.10)$$

Látni fogjuk, hogy ekkor a pályák P_μ terére sima differenciálható struktúra öröklődik.



6. ábra. A pályák tere.

Közvetlen célunk egy globális keresztmetszetet (gauge szelést) megadni $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ -ben, amely a $(P_\mu, \omega_\mu, H_k^\mu)$ redukált hamiltoni rendszer modelljéül fog szolgálni. Először az alábbi lemmát igazoljuk, melynek bizonyítása közben a globális szelés egy konstruktív előállítását is megkapjuk.

4.1.5. Lemma. *Az e^q [$q \in \mathfrak{a}(3.22)$] és $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$ esetén $(e^q, \Lambda, xC^\ell + \chi(\mathbf{u})) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu)$ (4.8) pontosan akkor, ha $|u_0|^2 = \kappa - nx - ny$, $|u_j|^2 = \kappa + x + y$ ($j = 1, \dots, n$) és q reguláris (3.25).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$(e^q, \Lambda, xC^\ell + \chi(\mathbf{u})) \in \mathbf{J}^{-1}(\mu), \quad (4.11)$$

valamely $q \in \mathfrak{a}$ elemre. Ez a tartalmazás a momentum leképezést használva az alábbi egyenletekkel írható le

$$\pi_+(\Lambda) + xC^\ell + \chi(\mathbf{u}) = 0, \quad \pi^+(e^{-q}\Lambda e^q) = yC^r. \quad (4.12)$$

A $\mathfrak{g}_s^r$ alterekre történő felbontással az első egyenlet két részre esik, így a

$$\pi_+^+(\Lambda) + xC^\ell + \pi_+^+(\chi(\mathbf{u})) = 0, \quad \pi_+^-(\Lambda) + \pi_+^-(\chi(\mathbf{u})) = 0, \quad \pi^+(e^{-q}\Lambda e^q) = yC^r \quad (4.13)$$

egyenleteket nyerjük. A $\Lambda_s^r := \pi_s^r(\Lambda)$ jelöléssel élve az első két feltétel

$$\Lambda_+^+ = -xC^\ell - \pi_+^+(\chi(\mathbf{u})), \quad \Lambda_+^- = -\pi_+^-(\chi(\mathbf{u})) \quad (4.14)$$

alakot ölt. Felhasználva, hogy $e^{-\text{ad}_q} = \cosh(\text{ad}_q) - \sinh(\text{ad}_q)$ és $C^r \in \mathfrak{g}_+^+$, a π_+^+ és π_+^- projekciók segítségével a (4.13)-ban megjelenő harmadik egyenlet az alábbiakkal ekvivalens

$$(\cosh \text{ad}_q)(\Lambda_+^+) - (\sinh \text{ad}_q)(\Lambda_+^-) = 0 \quad (4.15)$$

$$(\cosh \text{ad}_q)(\Lambda_+^+) - (\sinh \text{ad}_q)(\Lambda_+^-) = yC^r. \quad (4.16)$$

Az előbbi egyenletbe Λ_+^+ helyére (4.14) alapján a $-xC^\ell - \pi_+^+(\chi(\mathbf{u}))$ mátrixot írva, majd mindkét oldalon egy tetszőleges $d \in \mathfrak{m}$ elemmel skalárszorzatot képezve kapjuk, hogy

$$\langle d, \chi(\mathbf{u}) \rangle = -\frac{2n+1}{2}(x+y)\text{tr}(\mathbf{d}). \quad (4.17)$$

A d mátrix elemeinek megfelelő megválasztásával (4.17)-ből a következőt nyerjük az $\mathbf{u}$ vektor komponenseire

$$|u_0|^2 = \kappa - nx - ny, \quad |u_j|^2 = \kappa + x + y \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.18)$$

Egy ilyen vektor komponensei nem feltételül a valós tengelyen helyezkednek el, azonban ez elérhető az $M_{\text{diag}} < G_+ \times G^+$ részcsoport segítségével, amelyet az

$$M_{\text{diag}} := \{(e^d, e^d) \in G_+ \times G^+ | d \in \mathfrak{m}\} \quad (4.19)$$

formula definiál. A (4.5)-ben megadott hatással, figyelembe véve (3.33)-at a

$$d_k := -\arg(u_k) + \alpha \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad \text{ahol } \alpha := \frac{\arg(u_0) + 2[\arg(u_1) + \dots + \arg(u_n)]}{2n+1} \quad (4.20)$$

választással $\text{diag}(d_0, \mathbf{d})\mathbf{u}$ minden komponensének argumentuma α lesz.

Mivel $\chi(\text{diag}(d_0, \mathbf{d})\mathbf{u})$ csupán egy egységnyi abszolút értékű konstans szorzó erejéig határozza meg a $\text{diag}(d_0, \mathbf{d})\mathbf{u}$ vektort, így $e^{-i\alpha}$ -val megszorozva minden elem pozitív lesz. Tehát a (4.11)-ben megadott pont helyettesíthető az alábbival

$$(e^q, \Lambda, xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_{\mathbb{R}})), \text{ ahol } (\mathbf{u}_{\mathbb{R}})_0 = \sqrt{\kappa - nx - ny}, \text{ és } (\mathbf{u}_{\mathbb{R}})_j = \sqrt{\kappa + x + y} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.21)$$

A továbbiakban az iménti (4.21) elemmel vizsgáljuk a (4.14)–(4.16) feltételeket. Kezdjük a (4.16) egyenlettel. Mivel $\sinh(\text{ad}_q)(\Lambda_-^-)$ diagonális elemei nullák, ezért a $(\Lambda_-^-)_{k,k} \in \mathbb{R}$ ($1 < k \leq n$) mátrixelemeket tetszőlegesen választhatjuk; $\mathfrak{g}_-$ szerkezetéből (3.21) adódóan ezek (-1) -szerese adja a $(\Lambda_-^-)_{n+k,n+k}$ elemeket, valamint láthatóan $(\Lambda_-^-)_{1,1} = 0$. A blokkmátrixos értelemben diagonálisban szereplő $n \times n$ -es mátrixok főátlón kívüli nemnulla elemeit a

$$-ig \cosh(q^j - q^k) - \sinh(q^j - q^k)(\Lambda_-^-)_{j+1,k+1} = 0, \quad 1 \leq j < k \leq m \text{ vagy } m < j < k \leq n \quad (4.22)$$

egyenletből kaphatjuk, ahol $g := (\kappa + x + y)/2$, ismét figyelembe véve (3.21)-et. Világos, hogy a fenti egyenlet csak akkor oldható meg, ha $q^j - q^k \neq 0$. A diagonálison kívül eső $n \times n$ -es blokkok elemeit a

$$-ig \cosh(q^j + q^k) - \sinh(q^j + q^k)(\Lambda_-^-)_{j+1,n+k+1} = 0, \quad 1 \leq j < k \leq m \text{ vagy } m < j < k \leq n \quad (4.23)$$

és

$$-i \frac{2(n+1)x+y}{2} \cosh(2q^k) - \sinh(2q^k)(\Lambda_-^-)_{k+1,n+k+1} = y(C^r)_{k+1,n+k+1}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.24)$$

egyenletekből nyerhetjük, amennyiben $q^j + q^k \neq 0$ és $q^k \neq 0$ (az indexek az egyenleteknél megadott feltételek szerint változnak).

A bizonyítás lezárásaként vegyük észre, hogy (4.15) mindig megoldható Λ_-^+ -ra nézve hiszen $\cosh \text{ad}_q: \mathfrak{g}_+^+ \rightarrow \mathfrak{g}_+^+$ invertálható leképezés.

Beláttuk tehát, hogy a (4.11) tartalmazás szükséges feltétele, hogy az $\mathbf{u}$ vektorra fennálljon (4.18) és $q \in \mathfrak{a}$ reguláris elem legyen. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek egyben elégséges feltételek is. ■

4.2. A pályák tere mint sima sokaság

Ebben a pontban azt fogjuk belátni, hogy a

$$P_\mu := \mathbf{J}^{-1}(\mu)/(G_+ \times G^+) \quad (4.25)$$

pályák tere egy szimplektikus sokaság. A 2.4.3. tétel szerint ennek egyik feltétele miszerint $G_+ \times G^+$ hatása olyan, hogy a megfelelő (2.52) leképezés esetén kompakt halmazok ősképe is kompakt. Belátható (lásd [18]), hogy ezzel ekvivalens a következő tulajdonság: bármely $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_+ \times G^+$ és $\{(g_n, \Lambda_n, \zeta_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset P$ sorozatokra, ha $(g_n, \Lambda_n, \zeta_n)$ és $\Phi_{(a_n, b_n)}(g_n, \Lambda_n, \zeta_n)$ konvergensek, akkor az $\{(a_n, b_n)\}$ sorozatnak létezik konvergens részsorozata. Formálisan, bármely $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_+ \times G^+$ esetén

$$(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, \Lambda_n, \zeta_n) \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(a_n, b_n)}(g_n, \Lambda_n, \zeta_n)) \implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k}, b_{n_k}). \quad (4.26)$$

4.2.1. Állítás. *A Φ csoportthatás rendelkezik a (4.26) tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Válasszuk egy tetszőleges $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G_+$ sorozatot; mivel G_+ kompakt ebből mindig kiválasztható egy $\{a_{n_k}\}$ konvergens részsorozat. Így ha g_{n_k} és $a_{n_k} g_{n_k} b_{n_k}^{-1}$ konvergens sorozatok, akkor szükségképpen b_{n_k} is konvergens, ami bizonyítja, hogy Φ rendelkezik a fenti (4.26) és ezáltal a (2.52) tulajdonsággal is. ■

A folytatáshoz azt kell igazolnunk, hogy a 2.4.3. tétel másik feltétele is teljesül, miszerint $(G_+ \times G^+)_\mu$ szabadon hat a kényszerfelületen.

4.2.2. Állítás. *A Φ csoportthatás szabad, vagyis*

$$\Phi_{(a,b)}(g, \Lambda, \zeta) = (g, \Lambda, \zeta) \implies (a, b) = (1_{2n+1}, 1_{2n+1}) \in (G_+ \times G^+). \quad (4.27)$$

Bizonyítás. A Φ csoportthatást definiáló (4.5) formulából kiolvasható, hogy valójában a $(G_+ \times G^+)/(\mathbb{Z}_{2n+1})_{\text{diag}}$ faktorcsoporthat a fázistéren, ahol

$$(\mathbb{Z}_{2n+1})_{\text{diag}} := \{(\varepsilon_k 1_{2n+1}, \varepsilon_k 1_{2n+1}) \in G_+ \times G^+ | \varepsilon_k \in \mathbb{C}, \varepsilon_k^{2n+1} = 1\}. \quad (4.28)$$

Az $m\chi(\mathbf{u}_{\mathbb{R}})m^{-1} = \chi(\mathbf{u}_{\mathbb{R}})$ összefüggésből adódóan m eleme M centrumának, amely egyben G centruma is és izomorf a $\mathbb{Z}_{2n+1}$ csoporttal. Az ennek megfelelő $(\mathbb{Z}_{2n+1})_{\text{diag}}$ részcsoport hatása triviális P -n, ezáltal pedig a $(G_+ \times G^+)_\mu/(\mathbb{Z}_{2n+1})_{\text{diag}}$ faktorcsoporthat is szabadon hat a $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ kényszerfelületen. ■

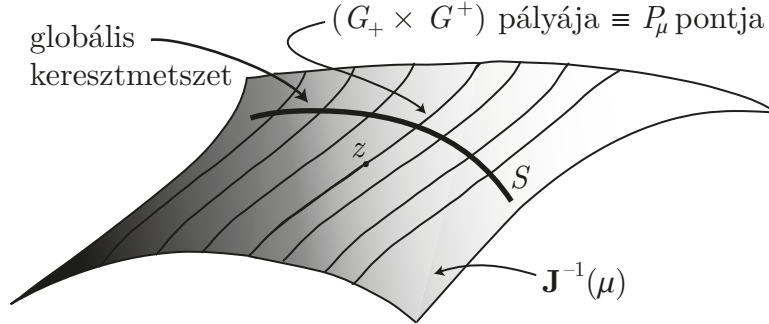
Ezzel beláttuk, hogy teljesülnek a 2.4.3. tétel kritériumai, így P_μ egy szimplektikus sokaság. Az általános eredménynek megfelelően [18] P_μ az alábbi formula által definiált ω_μ szimplektikus formát és H_k^μ Hamilton-függvényeket örökli

$$\pi^* \omega_\mu = \omega|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu)}, \quad \pi^* H_k^\mu = H_k|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu)}, \quad (4.29)$$

ahol $\pi: \mathbf{J}^{-1}(\mu) \rightarrow P_\mu$ a természetes projekció és $\omega|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu)}$ az ω forma $\mathbf{J}^{-1}(\mu) \subset P$ halmazra történő megszorítása (pontosabban annak visszahúzottja).

4.3. A redukált fázistér modellje

Előző eredményeinkre támaszkodva ebben a fejezetben leírjuk a redukált fázistér modelljét adó globális keresztmetszetet, amit a 7. ábrán S szimbolizál:



7. ábra. Az S szelés.

Célunk eléréséhez használni fogjuk az alább definiált $\Lambda(q, p)$ mátrixot, amelyről kiderül, hogy az (1.2) rendszer egy lehetséges Lax-mátrixa. A következő definíciót az motiválja, hogy az itt bevezetett $\Lambda(q, p)$ mátrix egybeesik a 4.1.5. lemma bizonyításában fellépő Λ mátrixszal.

4.3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $\kappa > 0$ és x, y valós számok, amelyekre fennáll (4.10). Bármely $q \in \mathfrak{a}_c$ és $p \in \mathfrak{a}$ elemek esetén képezzük a

$$\Lambda(q, p) := -xC^\ell - \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R}) + L(q, p) \quad (4.30)$$

mátrixot, ahol $(\mathbf{u}_\mathbb{R})_0 = \sqrt{\kappa - nx - ny}$ és $(\mathbf{u}_\mathbb{R})_j = \sqrt{\kappa + x + y}$ ($j = 1, \dots, n$), továbbá $L(q, p)$ elemei a következők: Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$L_{1,1} = 0, \quad L_{k+1,k+1} = -L_{n+k+1,n+k+1} = p_k. \quad (4.31)$$

Ha $1 \leq k \leq m$, akkor

$$L_{k+1,1} = -L_{n+k+1,1} = L_{1,k+1} = -L_{1,n+k+1} = -ih_1 \coth(q^k), \quad (4.32)$$

$$L_{k+1,n+k+1} = -L_{n+k+1,k+1} = -i\sqrt{2}\tilde{h}_2 \frac{1}{\sinh(2q^k)} - i\sqrt{2}h_2 \coth(2q^k), \quad (4.33)$$

míg $m < k \leq n$ esetén

$$L_{k+1,1} = -L_{n+k+1,1} = L_{1,k+1} = -L_{1,n+k+1} = -ih_1 \tanh(q^k), \quad (4.34)$$

$$L_{k+1,n+k+1} = -L_{n+k+1,k+1} = i\sqrt{2}\tilde{h}_2 \frac{1}{\sinh(2q^k)} - i\sqrt{2}h_2 \coth(2q^k) \quad (4.35)$$

Ha $1 \leq j < k \leq m$ vagy $m < j < k \leq n$, akkor

$$L_{j+1,k+1} = -L_{k+1,j+1} = -L_{n+j+1,n+k+1} = L_{n+k+1,n+j+1} = -ig \coth(q^j - q^k), \quad (4.36)$$

$$L_{j+1,n+k+1} = L_{k+1,n+j+1} = -L_{n+j+1,k+1} = -L_{n+k+1,j+1} = -ig \coth(q^j + q^k). \quad (4.37)$$

Végül az $1 \leq j \leq m$ és $m < k \leq n$ indexekre

$$L_{j+1,k+1} = -L_{k+1,j+1} = -L_{n+j+1,n+k+1} = L_{n+k+1,n+j+1} = -ig \tanh(q^j - q^k), \quad (4.38)$$

$$L_{j+1,n+k+1} = L_{k+1,n+j+1} = -L_{n+j+1,k+1} = -L_{n+k+1,j+1} = -ig \tanh(q^j + q^k). \quad (4.39)$$

A definícióban megjelenő konstansok:

$$g := \frac{\kappa + x + y}{2}, \quad h_1 := \frac{\sqrt{(\kappa - nx - xy)(\kappa + x + y)}}{\sqrt{2}}, \quad h_2 := \frac{2(n+1)x + y}{\sqrt{8}}, \quad \tilde{h}_2 := \frac{y(2n+1)}{\sqrt{8}}. \quad (4.40)$$

4.3.2. Tétel. A fent definiált $\Lambda(q, p)$ mátrixot felhasználva tekintsük az

$$S := \{(e^q, \Lambda(q, p), xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})) | q \in \mathfrak{a}_c, p \in \mathfrak{a}\} \subset P \quad (4.41)$$

részsokaságot (lásd 7.ábra). Ekkor S része a $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ kényszerfelületnek (4.8) és a $G_+ \times G^+$ csoport minden $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ -beli pályáját pontosan egy pontban metszi. Az ω szimplektikus forma (4.2) visszahúzottja S -en

$$\omega_S = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k. \quad (4.42)$$

Tehát az (S, ω_S) szimplektikus sokaság a (P_μ, ω_μ) redukált fázistér (4.9) egy modellje, melyet azonosíthatunk a $T^*\mathfrak{a}_c$ kotangensnyalábbal.

Bizonyítás. Mivel minden $g \in G$ csoportelem felbontható a (3.27)-ben látott módon, így a 4.1.5. lemma alapján $(G_+ \times G^+)$ minden pályája $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ -ben tartalmaz egy

$$(e^q, \Lambda, xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})), \quad q \in \mathfrak{a}_c \quad (4.43)$$

alakú elemet. A 4.1.5. lemma bizonyításában megmutattuk, hogy a Λ Lie-algebra elemet (4.43) felírhatjuk $\Lambda(q, p)$ (4.30) alakban, valamely $p \in \mathfrak{a}$ segítségével.

Annak igazolásához, hogy a szelés minden pályát pontosan egy helyen metsz tegyük fel, hogy valamely $(a, b) \in G_+ \times G^+$ elemre

$$(ae^qb^{-1}, a\Lambda(q, p)a^{-1}, xC^\ell + a\chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})a^{-1}) = (e^{q'}, \Lambda(q', p'), xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})). \quad (4.44)$$

A (3.27) felbontás unicitása miatt $e^q = e^{q'}$, amiből $q = q'$ és $(a, b) = (m, m) \in M_{\text{diag}}$ következik, továbbá (4.44) második komponenséből $p = p'$ adódik.

Az ω forma visszahúzottját meghatározva S -en (4.42) adódik. Mivel S a pályák egy globális keresztmetszetét adja $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ -ben, ezért az (S, ω_S) szimplektikus sokaság a (P_μ, ω_μ) redukált fázistér modelljéül szolgál. A (3.18) skalárszorozattal történő $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}^*$ azonosítással látható, hogy (S, ω_S) szimplektomorf a Darboux-féle szimplektikus formával ellátott $T^*\mathfrak{a}_c \cong \mathfrak{a}_c \times \mathfrak{a}^*$ koérintőnyalábbal. ■

4.3.3. Következmény. A $T^*\mathfrak{a}_c$ kanonikus Darboux–Poisson-féle struktúrájára nézve involúcióban álló független Hamilton-függvények egy családját adják a

$$H_k^\mu(q, p) = \frac{1}{4k} \text{tr}(\Lambda(q, p)^{2k}), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.45)$$

függvények. Továbbá a $H(q, p)$ Hamilton-függvény (1.2) Liouville-integrálható, mivel

$$H(q, p) = \frac{1}{4} \text{tr}(\Lambda(q, p)^2) = H_1^\mu(q, p), \quad (4.46)$$

ahol (4.40) jelöléseit alkalmazva

$$g = \frac{\kappa + x + y}{2}, \quad g_1^2 = h_1^2 + h_2 \tilde{h}_2, \quad g_2^2 = (h_2 - \tilde{h}_2)^2, \quad (4.47)$$

illetve az eredeti κ, x, y paraméterekkel

$$g_1^2 = \frac{(2\kappa - 2nx + y)(2\kappa + 2x - (2n - 1)y)}{8}, \quad g_2^2 = \frac{(n + 1)x - ny}{\sqrt{2}}. \quad (4.48)$$

Bizonyítás. Mivel a (4.3) Hamilton-függvények involúcióban állnak a (P, ω) sokaság Poisson struktúrájára tekintettel, így a (4.45) Hamilton-függvények is involúcióban állnak az ω_S formából származó kanonikus Poisson struktúrára nézve. A $\Lambda(q, p)$ mátrix (4.30) definíciójának felhasználásával a (4.46) azonosság könnyen ellenőrizhető.

A (4.45) Hamilton-függvények függetlensége a $p_1, \dots, p_n$ változókat tartalmazó tagok kitevőjének eltérésén is látható. A redukció azt is garantálja, hogy a megfelelő hamiltoni vektormezők integrálgörbéi teljesek, ezáltal a H_k^μ függvények mindegyike, így $H = H_1^\mu$ is Liouville-integrálható. ■

A (4.45) formulából látható, hogy a $\Lambda(q, p)$ mátrix generálja a kommutáló Hamilton-függvényeket, ami általában a Lax-mátrix egyik sajátos ismérve. A másik jellemvonás a Lax-mátrix megjelenése valamely, a mozgásegyenletek megoldó algoritmusban. Ezzel a következő pontban foglalkozunk.

4.4. Algoritmus a mozgásegyenletek megoldására

Utolsó eredményként megadjuk, hogy a (4.45) H_k^μ redukált Hamilton-függvényekhez tartozó integrálgörbéket miként lehet megkonstruálni a (4.4)-ben leírt „szabad folyam” segítségével. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $(q(0), p(0))$ kezdeti értéket. A hamiltoni redukció következményeként az ehhez tartozó $(q(t), p(t))$ megoldás a H_k^μ függvény Hamilton-féle mozgásegyenleteivel az alábbi egyenlőségből határozható meg

$$\begin{aligned} (e^{q(t)}, \Lambda(q(t), p(t)), xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})) = \\ = (a(t)e^{tV_k}e^{q(0)}b(t)^{-1}, a(t)\Lambda(q(0), p(0))a(t)^{-1}, a(t)(xC^\ell + \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R}))a(t)^{-1}), \end{aligned} \quad (4.49)$$

ahol

$$V_k = \Lambda(q(0), p(0))^{2k-1} - \frac{1}{2n+1} \text{tr}(\Lambda(q(0), p(0))^{2k-1}) 1_{2n+1} \quad (4.50)$$

és a $(a(t), b(t)) \in G_+ \times G^+$ elemet az a feltétel adja meg, hogy a (4.48) egyenlet bal oldalán álló pontnak az S szelésben (4.41) kell lennie. Tehát a megoldáshoz az

$$e^{tV_k}e^{q(0)} = a(t)^{-1}e^{q(t)}b(t), \quad (a(t), q(t), b(t)) \in G_+ \times \mathfrak{a}_c \times G^+ \quad (4.51)$$

általánosított Cartan-felbontást kell megadni az $a(0) = b(0) = e \in G$ kezdeti feltétellel és az

$$a(t)\chi(\mathbf{u}_\mathbb{R})a(t)^{-1} = \chi(\mathbf{u}_\mathbb{R}) \quad (4.52)$$

segédegyenlettel. Ekkor $p(t)$ -re teljesül az alábbi egyenlőség

$$p(t) = \pi_-(a(t)\Lambda(q(0), p(0))a(t)^{-1}) = \pi_-(a(t)L(q(0), p(0))a(t)^{-1}). \quad (4.53)$$

Ha csupán $q(t)$ -t szeretnénk meghatározni, akkor egy elemibb megoldási algoritmus adható. Ehhez vegyük észre, hogy a $g\Xi(g^{-1})$ kifejezés kiértékelése (4.51) mindkét oldalán (ahol Ξ a (3.7)-ben megadott involúció) az alábbihoz vezet

$$e^{2q(t)}D_m = a(t)e^{tV_k}e^{2q(0)}D_me^{tV_k^\dagger}a(t)^{-1}. \quad (4.54)$$

Ebből következik, hogy az $e^{2q(t)}D_m$ diagonális mátrix főátlójának elemei az alábbi Hermite-féle mátrix sajátértékei:

$$e^{tV_k}e^{2q(0)}D_me^{tV_k^\dagger}. \quad (4.55)$$

A D_m mátrix (3.6) alakjából, a (4.53) egyenletből és a Weyl-kamra (3.29)-ben leírt alakjából következik, hogy a sajátértékek különbözőek, és ezáltal $q(t)$ meghatározása egy közönséges diagonalizálási feladattá egyszerűsödik.

5. Összefoglalás

A dolgozatban bemutatott munkánk legfontosabb célja a következő – a bevezetésben feltett – kérdés megválaszolása volt: *Megkapható-e az (1.2) modell az $SU(n+1, n)$ csoporton történő szabad mozgás redukciójával?* Eredményeink az alábbi két pontban foglalhatók össze:

- Megadtuk a töltött részecskéket leíró három független csatolási állandó jellemezte hiperbolikus BC_n Sutherland-modell egy új származtatását. A levezetés egyik következménye az (1.2) rendszer integrálhatóságának újabb bizonyítása.
- Felírtuk ([10] mintájára) a mozgásegyenletek egy alternatív megoldási eljárását. Mint kiderült mozgásegyenletek vissza lehet vezetni egy mátrix-diagonalizálási feladatra, így a megoldásokat egy közös séges sajátérték probléma szolgáltatja.

Tehát igazoltuk, hogy a feltett kérdésre pozitív válasz adható, ezáltal kiegészítettük és továbbfejlesztettük az (1.2) BC_n Sutherland rendszer korábbi ([10, 11]) vizsgálatait. Érdekes megjegyezni, hogy Hashizume [11] a G/G^+ geodetikusainak redukciójával foglalkozik, és effektíve a mi κ, x, y paramétereket használó tárgyalásunk $y = 0$ speciális esetként tartalmazza.

További kutatást igényel az általunk levezetett $(2n+1) \times (2n+1)$ méretű és a [10]-ben talált $2n \times 2n$ -es Lax-mátrixok kapcsolatának tisztázása. Ugyancsak érdekes lenne megvizsgálni, hogy megoldási algoritmusunkból mi következik a redukált rendszer aszimptotikus viselkedésére vonatkozóan. Léteznek-e kötött (korlátos) mozgások és amennyiben léteznek, akkor ezek mennyire kivételes esetek? Természetesen felmerülő feladat a redukció kvantummechanikai általánosítása is.

Hivatkozások

- [1] F. CALOGERO: *Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. **12**, 419-436 (1971)
- [2] J. MOSER: *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Advances in Mathematics **16**, 197-220 (1975)
- [3] B. SUTHERLAND: *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I&II*, Phys. Rev. A: **4**, 2019-2021 (1971) & **5**, 1372-1376 (1972)
- [4] A.P. POLYCHRONAKOS: *Physics and mathematics of Calogero particles*, J.Phys. A: **39**, 12793-12846 (2006)
- [5] F. CALOGERO: *Exactly solvable one dimensional many-body problems*, Lett. Nuovo Cimento **13**, 411-416 (1975)
- [6] K.R. MEYER: *Symmetries and integrals in mechanics*, Dynamical Systems, Academic Press, New York, 259-272 (1973)
- [7] J.E. MARSDEN – A. WEINSTEIN: *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Math. Phys. Vol. 5, 121-130 (1974)
- [8] D. KAZDAN – B. KOSTANT – S. STERNBERG: *Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type*, Comm. Pure Appl. Math. **31**, 481-507 (1978)
- [9] L. FEHÉR – B.G. PUSZTAI: *A class of Calogero type reductions of free motion on a simple Lie group*, Lett. Math. Phys. **79**, 263-277 (2007)
- [10] V. AYADI – L. FEHÉR: *An integrable $BC(n)$ Sutherland model with two types of particles*, J. Math. Phys. **52**, 103506 (2011)
- [11] M. HASHIZUME: *Geometric approach to the completely integrable Hamiltonian systems attached to the root systems with signature*, Adv. Stud. Pure Math. **4**, 291-330 (1984)
- [12] S.N.M. RUIJSENAARS: *Calogero – Moser – Sutherland systems of nonrelativistic and relativistic type*, Encyclopedia of Math. Phys. Vol. 1, 403–411, Elsevier, (2006)
- [13] H. SCHLICHTKRULL: *Harmonic analysis on semisimple symmetric spaces*, G.Heckman and H.Schlichtkrull, Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces, Perspectives in Mathematics **16**, Academic Press, 91-225 (1994)
- [14] R. ABRAHAM – J.E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley, 1987
- [15] V.I. ARNOLD: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer, 1989
- [16] J.E. MARSDEN ET AL.: *Hamiltonian Reducion by Stages*, Lecture Notes in Mathematics 1913, Springer, 2007
- [17] J.E. MARSDEN: *Lectures on Mechanics*, Lecture Note Series 174, Cambridge University Press, 1992
- [18] J.P. ORTEGA – T.S. RATIU: *Momentum Maps and Hamiltonian Reducion*, Progress in Mathematics 222, Birkhäuser, 2004
- [19] A.M. PERELOMOV: *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras Vol. I*, Birkhäuser, 1990

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, dr. Fehér Lászlónak figyelmes, tapintatos javallataiért, valamint értékes tanácsaiért, amelyeket a TDK dolgozat készítése közben kaptam. Hálás vagyok családomnak a bátorításért és a tanulmányaimhoz szükséges nyugodt környezet megteremtéséért.

Nyilatkozat

Alulírott Görbe Tamás Ferenc jelen nyilatkozat aláírásával kijelentem, hogy a

Töltött részecskék BC_n Sutherland-modellje mint az $SU(n+1, n)$ Lie-csoporton mozgó szabad részecske redukciója

című TDK dolgozat kizárólag saját kutatómunkám eredményeit tartalmazza, ezek az eredmények korábbi TDK dolgozatban még nem szerepeltek. A dolgozat készítése során betartottam a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. tv. szabályait, valamint a dolgozat készítésére vonatkozó szabályokat, különösen a hivatkozások és idézések tekintetében.

Szeged, 2012. április 16.



Görbe Tamás Ferenc