

TDK dolgozat

Az adatátviteli sebesség optimalizálásának egy
differenciálegyenletes modellje

Balázs István

Témavezető: Dr. Krisztin Tibor

Szegedi Tudományegyetem,
Bolyai Intézet

2012

1. Bevezetés

Egy olyan differenciálegyenlet-rendszert vizsgálunk, amelyben a megoldástól is függő késleltetés van. Az időkésleltetést egy nem folytonos jobb oldalú közönséges differenciálegyenlet definiálja. A probléma a számítógépes hálózatok adatátviteli sebességének (a hasznosság és az ár függvényében való) optimalizálásában merül fel. A nem-folytonosság ellenére megmutatjuk, hogy a rendszer egy folytonos szemi-dinamikai rendszert definiál. Bizonyos feltételek mellett az optimumhoz (ami egy egyensúlyi helyzet) való globális konvergenciát igazolunk. Az optimum körüli periodikus megoldások létezésére is bizonyítunk eredményeket.

Új eredmények a dolgozatban: a probléma tárgyalásához megfelelő fázistér konstruálása, a fázistérben a megoldások létezésének, egyértelműségének és kezdeti adatoktól való folytonos függésének igazolása, továbbá a periodikus viselkedés lehetőségének megmutatása.

Jelölje x az adatátviteli sebességet. Feltesszük, hogy ez a és b között változik, ahol $0 < a < b$. $U(x)$ az x adatátviteli sebesség hasznossága és $p(x)$ a sebesség x -edik egységének ára. U és p monoton növekvő függvények. U kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan konkáv, p C^1 -sima. A $V(x) = U(x) - \int_0^x p(y)dy$ függvényt szeretnénk maximalizálni, V maximumhelye x_* . Kelly az [1]-ben bizonyította, hogy az

$$x'(t) = \kappa [x(t)U'(x(t)) - x(t)p(x(t))], \quad \kappa > 0$$

egyenlet megoldása x_* -hoz konvergál, ami az egyetlen egyensúlyi helyzet.

Ranjan, La és Abed a [2]-ben és a [3]-ban vizsgálta ennek az egyenletnek az időkésleltetési változatát: Tegyük fel, hogy a felhasználó $x(t)$ sebességgel küldi az adatokat a szervernek. A szerver a beérkező adatokat egy $q(t)$ hosszú sorban tárolja, $C \in (a, b)$ kapacitással dolgozza fel, és $T > 0$ idő alatt küldi vissza a felhasználónak. A sor hossza korlátos, $0 \leq q(t) \leq B$. Tegyük fel, hogy a felhasználó az ár változására csak $\tau_1(t)$ idővel késleltetve reagál. Ekkor a problémát a következő egyenletrendszerrel lehet modellezni:

$$x'(t) = \kappa [x(t)U'(x(t)) - x(t - \tau_1(t))p(x(t - \tau_1(t)))] \quad (1)$$

$$\tau_1(t) = T + \frac{q(t - \tau_1(t))}{C} \quad (2)$$

$$q'(t) = Q(q(t), x(t)) = \begin{cases} x(t) - C, & \text{ha } 0 < q(t) < B \\ [x(t) - C]^+, & \text{ha } q(t) = 0 \\ [x(t) - C]^-, & \text{ha } q(t) = B, \end{cases} \quad (3)$$

ahol $[x(t) - C]^+ = \max\{0, x(t) - C\}$ és $[x(t) - C]^- = \min\{0, x(t) - C\}$.

A [2]-ben a szerzők bizonyították, hogy bizonyos U és p függvények esetén az (1)-(3) egyenletrendszer megoldása is konvergál az optimumhoz, ami az egyetlen egyensúlyi helyzet. A cikkben a megoldás létezésének és egyértelműség bizonyítása nem korrekt, ezért a dolgozatom egyik célja ennek a helyes bizonyítása.

2. A megoldás létezése, egyértelmősége és korlátossága

Definíció: A késleltetés akkor maximális, ha $q = B$, legyen ez a maximum $h = T + B/C$.

Definíció: Jelölje C_h a $[-h, 0]$ -ból $\mathbf{R}$ -be képező folytonos függvények Banach-terét a $\|\phi\| = \max_{-h \leq s \leq 0} |\phi(s)|$ normával. Ha $u : (t_0, t_1) \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos és $t - h, t \in (t_0, t_1)$, akkor $u_t \in C_h$ definíciója: $u_t(s) = u(t + s)$, $-h \leq s \leq 0$.

Definíció: $K = \sup\{|\kappa[\alpha U'(\alpha) - \beta p(\beta)]| : \alpha, \beta \in [a, b]\}$. $K > 0$, mert U' és p nem konstans az $[a, b]$ intervallumon.

Definíció: Legyen $E = \left\{ \phi : [-h, 0] \rightarrow [a, b] : \left| \frac{\phi(s_1) - \phi(s_2)}{s_1 - s_2} \right| \leq K, \# \{s \in [-h, 0] : \phi(s) = C\} < \infty \right\}$ és $F = \left\{ \psi : [-h, 0] \rightarrow [0, B] : \forall s_1, s_2 \ a - C \leq \frac{\psi(s_1) - \psi(s_2)}{s_1 - s_2} \leq b - C \right\}$, ahol $\#S$ jelöli az S halmaz számosságát. E és F metrikus terek a következő távolságfüggvényekkel: $d_E(\phi, \bar{\phi}) = \|\phi - \bar{\phi}\|$, $d_F(\psi, \bar{\psi}) = \|\psi - \bar{\psi}\|$.

Definíció: Az $x : [0, \omega] \rightarrow \mathbf{R}$, $q : [0, \omega] \rightarrow \mathbf{R}$ függvények az (1)-(3) egyenletrendszer megoldásai a $\phi \in E$, $\psi \in F$ kezdeti feltétellel, ha

- (i) x folytonos, $x|_{[0, \omega)}$ differenciálható, $x_t \in E$ minden $t \in [0, \omega)$ esetén, $x_0 = \phi$;
- (ii) q folytonos, $q_t \in F$ minden $t \in [0, \omega)$ esetén, $q_0 = \psi$;
- (iii) létezik olyan $\tau_1 : [0, \omega) \rightarrow [T, h]$ Lipschitz-folytonos függvény, amely minden $t \in [0, \omega)$ esetén teljesíti a (2) egyenletet;
- (iv) az (1) egyenlet teljesül minden $t \in (0, \omega)$ esetén;
- (v) a (3) egyenlet teljesül majdnem minden $t \in (0, \omega)$ esetén.

A lépések módszere:

- 1.) Legyen $n = 0$.
- 2.) Oldjuk meg a (2) egyenletet az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon.
- 3.) Oldjuk meg az (1) egyenletet az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon.
- 4.) Oldjuk meg a (3) egyenletet az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon.
- 5.) Növeljük n értékét 1-gyel, majd térjünk vissza a 2. lépéshez.

2.1. Tétel: Ha $q_{nT} \in F$, akkor τ_1 létezik, egyértelmű és Lipschitz-folytonos az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon.

Bizonyítás: Rögzített t -re $\tau_1(t)$ az $G(s) = 0$ egyenlet megoldása, ahol $G(s) = s - T - \frac{q(t-s)}{C}$, $s \in [T, h]$.

$$G(T) = T - T - \frac{q(t-T)}{C} = -\frac{q(t-T)}{C} < 0$$

$$G(h) = h - T - \frac{q(t-h)}{C} = T + \frac{B}{C} - T - \frac{q(t-h)}{C} = \frac{B - q(t-h)}{C} > 0$$

Tegyük fel, hogy $s_1 \neq s_2$.

$$\begin{aligned}\frac{G(s_1) - G(s_2)}{s_1 - s_2} &= \frac{s_1 - T - \frac{q(t-s_1)}{C} - s_2 + T + \frac{q(t-s_2)}{C}}{s_1 - s_2} = 1 + \frac{1}{C} \frac{-q(t-s_1) + q(t-s_2)}{s_1 - s_2} = \\ &= 1 + \frac{1}{C} \frac{q(t-s_1) - q(t-s_2)}{s_2 - s_1} = 1 + \frac{1}{C} \frac{q(t-s_1) - q(t-s_2)}{(t-s_1) - (t-s_2)} \geq 1 + \frac{a-C}{C} = \frac{a}{C} > 0\end{aligned}$$

G folytonos, szigorúan monoton növekvő, $G(T) < 0$, $G(h) > 0$, ezért az $G(s) = 0$ egyenletnek minden $t \in [nT, (n+1)T]$ esetén pontosan egy megoldása létezik.

Legyen $t_1, t_2 \in [nT, n(T+1)]$, $t_1 \neq t_2$.

$$\tau_1(t_1) - \tau_1(t_2) = T + \frac{q(t_1 - \tau_1(t_1))}{C} - T - \frac{q(t_2 - \tau_1(t_2))}{C} = \frac{q(t_1 - \tau_1(t_1)) - q(t_2 - \tau_1(t_2))}{C}$$

Tudjuk, hogy q Lipschitz-folytonos a $[-h, nT]$ intervallumon, ezért

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{q(t_1 - \tau_1(t_1)) - q(t_2 - \tau_1(t_2))}{t_1 - \tau_1(t_1) - t_2 + \tau_1(t_2)} \in [a - C, b - C]. \\ \frac{\tau_1(t_1) - \tau_1(t_2)}{t - t_2} &= \frac{1}{C} \frac{q(t_1 - \tau_1(t_1)) - q(t_2 - \tau_1(t_2))}{t_1 - t_2} = \frac{\alpha}{C} \frac{t_1 - \tau_1(t_1) - t_2 + \tau_1(t_2)}{t_1 - t_2} = \\ &= \frac{\alpha}{C} \left(1 - \frac{\tau_1(t_1) - \tau_1(t_2)}{t_1 - t_2} \right),\end{aligned}$$

ahonnan

$$\frac{\tau_1(t_1) - \tau_1(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\frac{\alpha}{C}}{1 + \frac{\alpha}{C}} = \frac{\alpha}{C + \alpha} \in \left[\frac{a - C}{a}, \frac{b - C}{b} \right]$$

következik. Ezért τ_1 Lipschitz-folytonos az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon.

2.2. Tétel: Tegyük fel, hogy $aU'(a) > bp(b) \geq ap(a) > bU'(b)$. Ekkor az x biztosan nem lép ki az $[a, b]$ intervallumból.

Bizonyítás:

Ha egy $t \geq 0$ időpontban $x(t) = a$, akkor

$$x'(t) = \kappa(aU'(a) - x(t - \tau_1(t))p(x(t - \tau_1(t)))) \geq \kappa(aU'(a) - bp(b)) > 0.$$

Ha $x(t) = b$, akkor

$$x'(t) = \kappa(bU'(b) - x(t - \tau_1(t))p(x(t - \tau_1(t)))) \leq \kappa(bU'(b) - ap(a)) < 0.$$

2.3. Tétel: Ha $x_{nT} \in E$ és $q_{nT} \in F$, akkor x létezik, egyértelmű és folytonosan differenciálható $[nT, (n+1)T]$ -n.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az eljárás 2. lépését már végrehajtottuk. Tudjuk, hogy $x(t - \tau_1(t))$ Lipschitz-folytonos az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon, U' és p is Lipschitz-folytonos, így a Picard-Lindelöf-tétel miatt $[nT, (n+1)T]$ -n egyértelműen létezik az $x'(t) = \kappa(x(t)U'(x(t)) - x(t - \tau_1(t))p(x(t - \tau_1(t)))) = \kappa(x(t)U'(x(t)) - \mu(t))$ egyenlet megoldása. Az (1) egyenlet jobb oldalán minden függvény folytonos, ezért x' folytonos, x folytonosan differenciálható.

2.4. Tétel: Ha $x_{nT} \in E$ és $q_{nT} \in F$, akkor az x az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon csak véges sok helyen veheti fel C -t.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az eljárás 2. lépését már végrehajtottuk, de az x értéke az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon végtelen sok helyen egyenlő C -vel, legyenek ezek a helyek $t_1, t_2, \dots$. Ekkor a Rolle-féle középértéktétel miatt létezik olyan $\xi_1, \xi_2, \dots \in [nT, (n+1)T]$ sorozat, amelyre $x'(\xi_n) = 0 \ \forall n \in \mathbf{Z}_+$.

Legyen $g(x) = \kappa x U'(x)$ és $f(x) = \kappa x p(x)$. Ekkor az (1) egyenlet a következő alakban írható

$$x'(t) = g(x(t)) - f(x(t - \tau_1(t))) \quad (4)$$

Legyen $y(t) = x'(t)$.

$$y'(t) = g'(x(t))x'(t) - f'(x(t - \tau_1(t)))x'(t - \tau_1(t))(1 - D\tau_1(t)),$$

ahol $D\tau_1(t)$ a $\tau_1(t)$ függvény deriváltja, azokban a t pontokban létezik, ahol $q(t - \tau_1(t))$ differenciálható, azaz majdnem minden t -re létezik. Legyen $M(t) = g'(x(t))$ és $N(t) = f'(x(t - \tau_1(t)))(1 - D\tau_1(t))$. $|D\tau_1(t)| < 1$, ezért $N(t) > 0$ minden t -re. Ekkor y -ra a következő egyenlet teljesül majdnem minden t -rel:

$$y'(t) = M(t)y(t) - N(t)y(t - \tau_1(t)) \quad (5)$$

Legyen $z(t) = e^{-\int_0^t M(s)ds} y(t)$.

$$z'(t) = e^{-\int_0^t M(s)ds} (-M(t)y(t) + y'(t)) = -e^{-\int_0^t M(s)ds} N(t)y(t - \tau_1(t))$$

$$z(t - \tau_1(t)) = e^{-\int_0^{t-\tau_1(t)} M(s)ds} y(t - \tau_1(t))$$

$$z'(t) = -e^{-\int_0^t M(s)ds} N(t) e^{\int_0^{t-\tau_1(t)} M(s)ds} z(t - \tau_1(t))$$

Legyen $P(t) = e^{-\int_{t-\tau_1(t)}^t M(s)ds} N(t)$. Ekkor z -re a következő differenciálegyenlet teljesül:

$$z'(t) = -P(t)z(t - \tau_1(t)), \quad (6)$$

ahol $P(t) > 0$. Jelölje $sc(z_t)$ a z_t függvény előjelváltásainak számát, azaz $sc(z_t) = \sup\{n : \exists -h \leq s_0 < \dots s_n \leq 0 : z_t(s_{i-1})z_t(s_i) < 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$. Ekkor az eddigi feltevések miatt $sc(z_{(n+1)T}) = \infty$. A z függvénynek majdnem minden t -re létezik a deriváltja, ezért $sc(z'_{(n+1)T}) = \infty$. A (6) egyenlet miatt, ha valamely t -re $z'(t) > 0$, akkor $z(t - \tau_1(t)) < 0$, és ha $z'(t) < 0$, akkor $z(t - \tau_1(t)) > 0$. De emiatt $sc(z_{nT}) = \infty$, ami azt jelenti, hogy az x már az $[nT - h, nT]$ intervallumon is végtelen sokszor veszi fel C -t, ami ellentmond az $x_{nT} \in E$ feltételnek.

Az indirekt feltevés ellentmondáshoz vezet, tehát a tétel igaz.

2.5. Tétel: Ha $x_{nT} \in E$ és $q_{nT} \in F$, akkor q létezik és egyértelmű $[nT, (n+1)T]$ -n, $q_{(n+1)T} \in F$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a 2. és 3. lépést már végrehajtottuk. Az $x(t)$ ismeretében a (3) egyenlet három különböző differenciálegyenletet jelent attól függően, hogy q értéke egyenlő-e 0-val vagy B -vel. A 2.4. tétel miatt a q az $[nT, (n+1)T]$ intervallumon véges sok közönséges differenciálegyenlet megoldásából adódik. Az így kapott megoldás folytonos $[nT, (n+1)T]$ -n. Legyen $t_1 \neq t_2$; feltehető, hogy $t_1 < t_2$.

$$\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q(q(t), x(t)) dt$$

$x(t) \in [a, b]$, ezért $Q(q(t), x(t)) \in [a - C, b - C]$.

$$\begin{aligned} a - C &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (a - C) dt \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q(q(t), x(t)) dt \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (b - C) dt = \\ &= b - C \end{aligned}$$

$$a - C \leq \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} \leq b - C$$

2.6. Következmény: Az (1)-(3) egyenletrendszernek létezik a megoldása a $[-h, \infty)$ intervallumon. Az $(x(t), \tau_1(t), q(t))$, $t \geq -h$ megoldás egyértelmű, az $[a, b] \times [T, h] \times [0, B]$ halmazon belül változik, τ_1 Lipschitz-folytonos, $x_t \in E$ és $q_t \in F$ minden $t \geq 0$ -ra.

Bizonyítás: Ha $x_{nT} \in E$ és $q_{nT} \in F$, akkor az eljárás 2.-4. lépéseinek végrehajtása után a 2.1.-2.5. tételek miatt $x_{(n+1)T} \in E$ és $q_{(n+1)T} \in F$ is teljesülni fog. Teljes indukcióval a megoldás kiterjeszthető a $[-h, \infty)$ intervallumra.

3. Folytonos függés a kezdeti függvényektől

Az $E \times F$ metrikus tér a következő távolságfüggvénnyel:

$$d((\phi, \psi), (\bar{\phi}, \bar{\psi})) = d_E(\phi, \bar{\phi}) + d_F(\psi, \bar{\psi})$$

Definíció: Legyen $\Phi : [0, \infty) \times E \times F \rightarrow E \times F$, $(t, \phi, \psi) \mapsto (x_t^{\phi, \psi}, q_t^{\phi, \psi})$, ahol $(x_t^{\phi, \psi}, q_t^{\phi, \psi})$ az $x_0 \equiv \phi$, $q_0 \equiv \psi$ kezdeti függvényekhez tartozó megoldás.

3.1. Tétel: A Φ egy folytonos szemi-dinamikai rendszer az $E \times F$ téren.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a (ϕ, ψ) és $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ kezdeti függvények adottak. Jelölje (x, τ_1, q) a (ϕ, ψ) -hez, $(\bar{x}, \bar{\tau}_1, \bar{q})$ a $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ -hez tartozó megoldást. Legyen $0 \leq t \leq T$ tetszőleges. $\tau_1(t), \bar{\tau}_1(t) \geq T$, ezért $t - \tau_1(t)$ -ben és $t - \bar{\tau}_1(t)$ -ben a függvényértékek már ismertek.

Tegyük fel, hogy $\tau_1(t) > \bar{\tau}_1(t)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t) &= T + \frac{\psi(t - \tau_1(t))}{C} - T - \frac{\bar{\psi}(t - \bar{\tau}_1(t))}{C}t = \frac{\psi(t - \tau_1(t)) - \psi(t - \bar{\tau}_1(t))}{C} + \\ &+ \frac{\psi(t - \bar{\tau}_1(t)) - \bar{\psi}(t - \bar{\tau}_1(t))}{C} \leq \frac{\psi(t - \tau_1(t)) - \psi(t - \bar{\tau}_1(t))}{t - \tau_1(t) - t + \bar{\tau}_1(t)} \frac{\bar{\tau}_1(t) - \tau_1(t)}{C} + \\ &+ \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{C} \leq \frac{a - C}{C}(\bar{\tau}_1(t) - \tau_1(t)) + \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{C}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{a}{C}(\tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t)) &\leq \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{C}, \\ \tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t) &\leq \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{a}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, ha $\bar{\tau}_1(t) > \tau_1(t)$, akkor $\tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t) \leq \frac{\|\bar{\psi} - \psi\|}{a}$, ezért $|\tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t)| \leq \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{a}$.

Jelölje $\mathcal{L}(\cdot)$ az adott függvényhez tartozó Lipschitz-állandót.

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &= |\phi(0) - \bar{\phi}(0) + \kappa \int_0^t (x(s)U'(x(s)) - \phi(s - \tau_1(s))p(\phi(s - \tau_1(s))) - \\ &- \bar{x}(s)U'(\bar{x}(s)) + \bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s))p(\bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s))))ds| \leq \|\phi - \bar{\phi}\| + \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)U'(x(s)) - \\ &- \bar{x}(s)U'(\bar{x}(s))| + \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |\phi(s - \tau_1(s))p(\phi(s - \tau_1(s))) - \phi(s - \bar{\tau}_1(s))p(\phi(s - \bar{\tau}_1(s)))| + \\ &+ \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |\phi(s - \bar{\tau}_1(s))p(\phi(s - \bar{\tau}_1(s))) - \bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s))p(\bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s)))| \leq \|\phi - \bar{\phi}\| + \\ &+ \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)U'(x(s)) - \bar{x}(s)U'(\bar{x}(s))| + \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{x}(s)U'(\bar{x}(s)) - \bar{x}(s)U'(\bar{x}(s))| + \\ &+ \kappa t \mathcal{L}(\phi p(\phi))|\tau_1(t) - \bar{\tau}_1(t)| + \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |\phi(s - \bar{\tau}_1(s))p(\phi(s - \bar{\tau}_1(s))) - \bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s)) \\ &p(\phi(s - \bar{\tau}_1(s)))| + \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s))p(\phi(s - \bar{\tau}_1(s))) - \bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s))p(\bar{\phi}(s - \bar{\tau}_1(s)))| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \|\phi - \bar{\phi}\| + \kappa t \|x_t - \bar{x}_t\| U'(a) + \kappa t b \mathcal{L}(U') \|x_t - \bar{x}_t\| + \kappa t \mathcal{L}(\phi p(\phi)) \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{a} +$$

$$+ \kappa t \|\phi - \bar{\phi}\| p(b) + \kappa t b \mathcal{L}(p) \|\phi - \bar{\phi}\|$$

Ebből $\|x_t - \bar{x}_t\|$ -t kifejezve:

$$\|x_t - \bar{x}_t\| \leq \frac{\|\phi - \bar{\phi}\| + \kappa t \mathcal{L}(\phi p(\phi)) \frac{\|\psi - \bar{\psi}\|}{a} + \kappa t \|\phi - \bar{\phi}\| p(b) + \kappa t b \mathcal{L}(p) \|\phi - \bar{\phi}\|}{1 - \kappa t U'(a) - \kappa t b \mathcal{L}(U')} =$$

$$= c_1(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_2(t) \|\psi - \bar{\psi}\|,$$

$$\text{ahol } c_1(t) = \frac{1 + \kappa t + \kappa t b \mathcal{L}(p)}{1 - \kappa t U'(a) - \kappa t b \mathcal{L}(U')} \text{ és } c_2(t) = \frac{\kappa t \mathcal{L}(\phi p(\phi))}{a(1 - \kappa t U'(a) - \kappa t b \mathcal{L}(U'))}.$$

Tetszőleges g függvényre legyen $D^+g(t) = \limsup_{0 < \delta \rightarrow 0} \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $q(t)$, $\bar{q}(t)$, $x(t)$ és $\bar{x}(t)$ értékétől függetlenül mindig teljesül, hogy $D^+|q(t) - \bar{q}(t)| \leq |x(t) - \bar{x}(t)|$.

Például, ha $0 < q(t) < B$ és $\bar{q}(t) = B$:

Ha $\bar{x}(t) \leq C$, akkor $D^+|q(t) - \bar{q}(t)| = \bar{x}(t) - x(t) \leq |x(t) - \bar{x}(t)|$.

Ha $\bar{x}(t) > C$, akkor $D^+|q(t) - \bar{q}(t)| = C - x(t) \leq \bar{x}(t) - x(t) \leq |x(t) - \bar{x}(t)|$.

$$|q(t) - \bar{q}(t)| \leq |\psi(0) - \bar{\psi}(0)| + \int_0^t D^+|q(s) - \bar{q}(s)| ds \leq \|\psi - \bar{\psi}\| + \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds \leq$$

$$\leq \|\psi - \bar{\psi}\| + t \|x_t - \bar{x}_t\| \leq \|\psi - \bar{\psi}\| + t c_1(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + t c_2(t) \|\psi - \bar{\psi}\| =$$

$$= c_3(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_4(t) \|\psi - \bar{\psi}\|,$$

ahol $c_3(t) = t c_1(t)$ és $c_4(t) = 1 + t c_2(t)$.

$$d(\Phi(t, \phi, \psi), \Phi(t, \bar{\phi}, \bar{\psi})) = d((x_t, q_t), (\bar{x}_t, \bar{q}_t)) = \sup_{-h \leq s \leq 0} |x_t(s), \bar{x}_t(s)| +$$

$$+ \sup_{-h \leq s \leq 0} |q_t(s), \bar{q}_t(s)| = \max\left\{ \sup_{-h \leq s \leq -t} |\phi(t+s) - \bar{\phi}(t+s)|, \sup_{-t \leq s \leq 0} |x(t+s) - \bar{x}(t+s)| \right\} +$$

$$+ \max\left\{ \sup_{-h \leq s \leq -t} |\psi(t+s) - \bar{\psi}(t+s)|, \sup_{-t \leq s \leq 0} |q(t+s) - \bar{q}(t+s)| \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sup_{-h \leq s \leq 0} |\phi(s) - \bar{\phi}(s)|, \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{x}(s)| \right\} + \max\left\{ \sup_{-h \leq s \leq 0} |\psi(s) - \bar{\psi}(s)|, \right.$$

$$\left. \sup_{0 \leq s \leq t} |q(s) - \bar{q}(s)| \right\} = \max\{ \|\phi - \bar{\phi}\|, c_1(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_2(t) \|\psi - \bar{\psi}\| \} +$$

$$+ \max\{ \|\psi - \bar{\psi}\|, c_3(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_4(t) \|\psi - \bar{\psi}\| \} = c_1(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_2(t) \|\psi - \bar{\psi}\| +$$

$$+ c_3(t) \|\phi - \bar{\phi}\| + c_4(t) \|\psi - \bar{\psi}\| \leq c_5(t) d((\phi, \psi), (\bar{\phi}, \bar{\psi})),$$

ahol $c_5(t) = \max\{c_1(t) + c_3(t), c_2(t) + c_4(t)\}$.

4. Globális stabilitás

Legyen x, τ_1, q az (1)-(3) egyenletrendszer megoldása. Normalizáljuk az időt, legyen $z(s) = x(s \cdot T)$. Ekkor az (1) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\nu z'(s) = z(s)U'(z(s)) - z(s - \tau(s))p(z(s - \tau(s))), \quad (7)$$

ahol $\nu = \frac{1}{T\kappa}$ és $\tau(s) = \frac{\tau_1(s)}{T}$. Vegyük a következő helyettesítést:

$$y(t) = z(t)U'(z(t)) =: g(z(t))$$

$$\text{és } f(z(t)) := z(t)p(z(t)).$$

Feltevés: (i) $g'(z) < 0$, ha $z \in [a, b]$.
(ii) $f'(z) > 0$, ha $z \in [a, b]$.
(iii) f és g Lipschitz-folytonos $[a, b]$ -n.

$$z(t) = g^{-1}(y(t)) \implies z'(t) = \frac{y'(t)}{g'(g^{-1}(y(t)))}$$

$$\nu y'(t) = g'(g^{-1}(y(t))) [y(t) - f(g^{-1}(y(t - \tau(t))))]$$

Legyen $\bar{\kappa}(y) = -g'(g^{-1}(y))$ és $G(y) = f(g^{-1}(y))$. Ezekkel a helyettesítésekkel a (7) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\nu y'(t) = \bar{\kappa}(y(t)) [G(y(t - \tau(t))) - y(t)] \quad (8)$$

Feltevés: Legyen $I = [c, d] \subseteq [g(b), g(a)]$ invariáns a G leképezésre.

Legyen $d_{max} = 1 + \frac{B}{CT}$ a τ maximális értéke, $X = C([-d_{max}, 0], \mathbf{R}_+)$ és $X_I = \{\phi \in X : \phi(s) \in I \forall s \in [-d_{max}, 0]\}$.

4.1. Tétel: Ha $\phi \in X_I$ és y_ϕ a (8) megfelelő megoldása, akkor $y_\phi(t) \in I$ minden $t \geq 0$ -ra. Ez azt jelenti, hogy I a (8) egyenlet invariáns halmaza.

Bizonyítás: Indirekten tegyük fel, hogy $\phi \in X_I$ olyan, hogy $y_\phi(t) \notin I$ valamilyen $t \geq 0$ -ra. Legyen t_0 az első időpont, amelyre a megoldás elhagyja az I -t, azaz

$$t_0 = \inf\{t : \forall \delta > 0 \exists t_1 : t < t_1 < t + \delta, \text{ és } y_\phi(t_1) \notin I\}.$$

Először tegyük fel, hogy $y_\phi(t_0) = d$. Ebben az esetben minden $\delta > 0$ -ra van olyan t_2 pont, amelyre $t_0 < t_2 < t_0 + \min\{\delta, 1\}$, $y_\phi(t_2) > d$ és $y'_\phi(t_2) > 0$. $1 \leq \tau(t_2) \leq d_{max}$ és I invariáns G -re, ezért

$$y'_\phi(t_2) = \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2)) [G(y(t_2 - \tau(t_2))) - y_\phi(t_2)]}{\nu} \leq \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2)) [d - y_\phi(t_2)]}{\nu} < 0,$$

ami ellentmond $y'_\phi(t_2) > 0$ -nak.

Hasonlóan, tegyük fel, hogy $y_\phi(t_0) = c$. Ebben az esetben minden $\delta > 0$ -ra van olyan t_2 pont, amelyre $t_0 < t_2 < t_0 + \min\{\delta, 1\}$, $y_\phi(t_2) < c$ és $y'_\phi(t_2) < 0$.

$$y'_\phi(t_2) = \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2))[G(y(t_2 - \tau(t_2))) - y_\phi(t_2)]}{\nu} \geq \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2))[c - y_\phi(t_2)]}{\nu} > 0,$$

ami ellentmond $y'_\phi(t_2) < 0$ -nak.

A következő tételben azt az esetet vizsgáljuk, amikor G -nek van egy aszimptotikusan stabil y^* fixpontja. Legyen J_0 a vonzási tartománya, azaz $G^n(y_0) \rightarrow y^*$, ha $n \rightarrow \infty$, minden $y_0 \in J_0$ -ra.

4.2. Tétel: Minden $\nu > 0$ -ra és $\phi \in X_{J_0}$ -ra $\lim_{t \rightarrow \infty} y_\phi(t) = y^*$.

4.3. Lemma: Tegyük fel, hogy a zárt J intervallumot G önmagára képezi. Ha $G(J)$ egyik végpontja sem fixpont, akkor minden $\phi \in X_J$ -re létezik egy véges $t_0 = t_0(\phi, \nu, \kappa)$, amelyre $y_\phi(t) \in G(J)$ minden $t \geq t_0$ -ra.

Bizonyítás: Az 5.1. tételből következik, hogy $y_\phi(t) \in J$ minden $t \geq 0$ -ra. Két esetet vizsgálunk:

Először tegyük fel, hogy $\phi(0) \in G(J)$. Indirekten tegyük fel, hogy $y_\phi(t)$ elhagyja a $G(J)$ intervallumot, legyen t_0 az első ilyen időpont. Tegyük fel hogy a jobb $y_\phi(t)$ a jobb végpontján hagyja el $G(J)$ -t. Ekkor minden (t_0, t_1) intervallum, ahol $t_1 > t_0$, tartalmaz olyan t_2 pontot, amelyre $y_\phi(t_2) > \sup G(J)$ és $y'_\phi(t_2) > 0$. De $y_\phi(t) \in J$ minden $t \in [t_0 - d_{max}, t_0]$ -ra, ezért

$$y'_\phi(t_2) = \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2))[G(y(t_2 - \tau(t_2))) - y_\phi(t_2)]}{\nu} \leq \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t_2))[d - y_\phi(t_2)]}{\nu} < 0,$$

ami ellentmond $y'_\phi(t_2) > 0$ -nak. A másik eset, amikor az y a bal végpontnál hagyja el $G(J)$ -t, hasonlóan kezelhető.

Most tegyük fel, hogy $\phi(0) \notin G(J)$. Feltehető, hogy $\phi(0) > \sup G(J)$. Ekkor $y_\phi(t)$ szigorúan monoton csökkenő minden $t \in [0, t_0]$ -ra, ahol $t_0 \leq \infty$ az első olyan időpont, amelyre $y_\phi(t_0) = \sup G(J)$. Először belátjuk, hogy $t_0 < \infty$. Indirekten tegyük fel, hogy $y_\phi(t) > \sup G(J)$ minden $t \geq 0$ -ra. Az $y_\phi(t)$ monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért létezik a határértéke: $\bar{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_\phi(t) \geq \sup G(J)$. $\bar{y}$ nem lehet a G fixpontja, ezért $\bar{\kappa}(\bar{y})(\bar{y} - G(y)) = \delta > 0$. A (8) egyenlet miatt

$$y'_\phi(t) = \frac{\bar{\kappa}(y_\phi(t))[G(y(t - \tau(t))) - y_\phi(t)]}{\nu} < -\frac{\delta}{2\nu},$$

elégg nagy t -re. Ebből következik, hogy $y_\phi(t) \rightarrow -\infty$, ha $t \rightarrow \infty$, ami ellentmond y korlátosságának. A $\phi(0) < \inf G(J)$ eset hasonlóan kezelhető. Tehát $t_0 < \infty$, így alkalmazható a bizonyítás első fele, $y_\phi(t) \in G(J)$ minden $t > t_0$ -ra.

A 4.2. tétel bizonyítása: Tetszőleges $\phi \in X_{J_0}$ -ra legyen $m = \inf\{\phi(s), s \in [-d_{max}, 0]\}$ és $M = \sup\{\phi(s), s \in [-d_{max}, 0]\}$. Tudjuk, hogy $[m, M] \subseteq J_0$. Legyen J' a legkisebb zárt invariáns intervallum, ami tartalmazza $[m, M]$ -et, ez részhalmaza J_0 -nak. Ennek az intervallumnak a létezését garantálja, hogy J_0 invariáns G -re. G aszimptotikusan stabil fixpontjának létezéséből következik, hogy $J' \supset G(J') \supset G(G(J')) \supset \dots$ és $\bigcap_{i \geq 0} G^i(J') = \{y^*\}$. Az 5.3. lemma alkalmazásával adódik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y_\phi(t) = y^*$.

4.4. Tétel: Ha $J_0 = [g(b), g(a)]$, akkor tetszőleges $z_0 \in C([-d_{max}, 0], [a, b])$ -re $z(t) \rightarrow x^*$, ha $t \rightarrow \infty$.

Bizonyítás: Ha $z_0(t) \in [a, b]$ minden $t \in [-d_{max}, 0]$ -ra, akkor $y(t) \in [g(b), g(a)]$ minden $t \in [-d_{max}, 0]$ -ra. y konvergens és g bijektív, $z(t) = g^{-1}(y(t))$ minden t -re, ezért z is konvergál az (7) egyenlet egyetlen egyensúlyi helyzetéhez, x^* -hoz.

4.5. Következmény: Ha $J_0 = [g(b), g(a)]$, akkor tetszőleges $x_0 \in E$ -re és $q_0 \in F$ -re $x(t) \rightarrow x^*$, ha $t \rightarrow \infty$.

5. Linearizáció, lokális stabilitás, Hopf-bifurkáció

Vizsgáljuk a (7) egyenlet $z \equiv x_*$ megoldásának stabilitását. Feltehető, hogy $x_* < C$, különben a szerver nem tudná feldolgozni az összes beérkező adatot, az nem lenne optimális. Ha $\forall t \geq 0 \quad z(t) < C$, akkor $q \equiv 0$ és $\tau \equiv 1$, z -re a következő konstans késleltetésű differenciálegyenlet teljesül:

$$\nu z'(t) = z(t)U'(z(t)) - z(t-1)p(z(t-1)) \quad (9)$$

A (9) egyenlet a következő alakban írható:

$$z'(t) = \frac{z_t(0)U'(z_t(0)) - z_t(-1)p(z_t(-1))}{\nu} =: f(z_t) \quad (10)$$

Az f funkcionál deriváltja:

$$\begin{aligned} Df(\phi)\chi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\phi + \epsilon\chi) - f(\phi)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\phi(0) + \epsilon\chi(0))U'(\phi(0) + \epsilon\chi(0)) - (\phi(-1) + \epsilon\chi(-1))p(\phi(-1) + \epsilon\chi(-1))}{\nu\epsilon} = \\ &= \frac{\chi(0)U'(\phi(0)) + \phi(0)U''(\phi(0))\chi(0) - \chi(-1)p(\phi(-1)) - \phi(-1)p'(\phi(-1))\chi(-1)}{\nu} \end{aligned}$$

Ha $\phi \equiv x_*$, akkor

$$Df(x_*)\chi = \frac{U'(x_*) + x_*U''(x_*)}{\nu}\chi(0) - \frac{p(x_*) + x_*p'(x_*)}{\nu}\chi(-1)$$

Legyen $c_1 = \frac{U'(x_*) + x_*U''(x_*)}{\nu}$ és $c_2 = \frac{p(x_*) + x_*p'(x_*)}{\nu} > 0$. Ekkor $D_e f(x_*)\chi = c_1\chi(0) - c_2\chi(-1)$. A (7) egyenlet linearizáltja az $z \equiv x_*$ megoldás körül:

$$v'(t) = D_e f(x_*)v_t = c_1v_t(0) - c_2v_t(-1) = c_1v(t) - c_2v(t-1) \quad (11)$$

Keressük a (11) megoldását $v(t) = e^{\lambda t}$ alakban.

$$\lambda e^{\lambda t} = c_1 e^{\lambda t} - c_2 e^{\lambda(t-1)}$$

$$\lambda + c_2 e^{-\lambda} = c_1 \quad (12)$$

Keressük a (12) egyenlet megoldását $\lambda = \xi + i\eta$ alakban.

$$\lambda + c_2 e^{-\lambda} = \xi + i\eta + c_2 e^{-\xi - i\eta} = \xi + i\eta + c_2 e^{-\xi}(\cos \eta - i \sin \eta) = c_1$$

Ekkor ξ és η a következő valós egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} \xi + c_2 e^{-\xi} \cos \eta = c_1 \\ \eta - c_2 e^{-\xi} \sin \eta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Tegyük fel, hogy $\xi = 0$, majd fejezzük ki c_1 -et és c_2 -t az egyenletből:

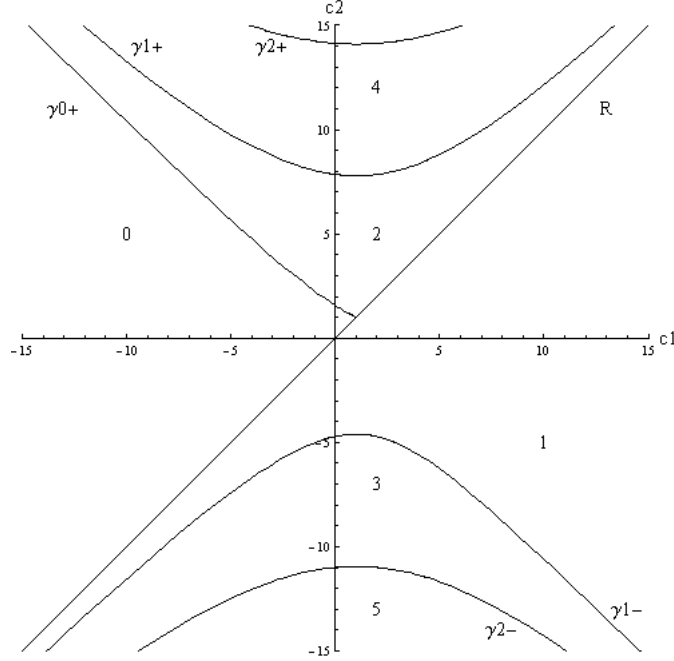
$$c_1 = \eta \operatorname{ctg} \eta, \quad c_2 = \frac{\eta}{\sin \eta}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$I_k^- = ((2k-1)\pi, 2k\pi), \quad I_k^+ = (2k\pi, (2k+1)\pi),$$

$$\gamma_k^- = \left\{ \left(\eta \operatorname{ctg} \eta, \frac{\eta}{\sin \eta} \right) : \eta \in I_k^- \right\}, \quad \gamma_k^+ = \left\{ \left(\eta \operatorname{ctg} \eta, \frac{\eta}{\sin \eta} \right) : \eta \in I_k^+ \right\},$$

ahol $k \geq 0$ egész. Ábrázoljuk a $\gamma_k^\pm$ görbék a paramétersíkon:



Az ábrán a számok azt jelölik, hogy a megfelelő görbék közötti paraméterértékek mellett a (12) egyenletnek hány pozitív valós részű gyöke van. Tudjuk, hogy $c_2 > 0$, ezért elég a felső félsíkkal foglalkozni. Az $R = \{(c_1, c_2) : c_1 = c_2\}$ egyenestől jobbra a (12) egyenletnek van egy pozitív valós megoldása, tőle balra nincs.

5.1. Következmény: Ha a (c_1, c_2) pont a paramétersíkon az R -től balra, γ_0^+ alatt található, akkor az (1)-(3) egyenletrendszer $x \equiv x_*$, $\tau_1 \equiv T$, $q \equiv 0$ megoldása aszimptotikusan stabil, különben instabil.

A γ_0^+ görbét a következő egyenletrendszer írja le:

$$\begin{cases} c_2 \cos \eta = c_1 \\ c_2 \sin \eta = \eta \end{cases} \quad \eta \in (0, \pi) \quad (14)$$

Emeljük négyzetre az egyenleteket, majd adjuk össze.

$$c_2^2 = c_1^2 + \eta^2 \implies \eta = \sqrt{c_2^2 - c_1^2}$$

Ezt helyettesítsük be a (14) egyenlet első tagjába.

$$c_2 \cos \sqrt{c_2^2 - c_1^2} = c_1, \quad \sqrt{c_2^2 - c_1^2} \in (0, \pi) \quad (15)$$

5.2. Következmény: Ha c_1 -re és c_2 -re a (15) egyenlet teljesül, akkor az (1)-(3) egyenletrendszernek a (c_1, c_2) paraméterértéknél Hopf-bifurkációja van.

6. Felhasznált irodalom

- [1] F. Kelly, A. Maulloo, D. Tan:
Rate Control for Communication Networks: Shadow Prices, Proportional Fairness and Stability
Journal of the Operational Research Society, 49(3): 237-252, 1998. március.
- [2] P. Ranjan, R. J. La, E. H. Abed:
Global Stability with a State-Dependent Delay in Rate Control
Proc. Conference on Time-Delay Systems, Belgium, 2004.
- [3] P. Ranjan, R. J. La, E. H. Abed:
Global Stability in the Presence of State-Dependent Delay in Rate Control
Proc. Conference on Information Sciences and Systems, pp. 1099-1104, Princeton, 2004.
- [4] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther:
Delay Equations
Springer-Verlag, 1995.
- [5] H. Smith:
An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences
Springer, 2011.
- [6] F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther, J. Wu:
Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications
Handbook of Differential Equations, Elsevier B. V., 2006.

7. Nyilatkozat

„Alulírott Balázs István kijelentem, hogy a TDK dolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy TDK dolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.”

8. Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	1
2. A megoldás létezése, egyértelműsége és korlátossága.....	2
3. Folytonos függés a kezdeti függvényektől.....	5
4. Globális stabilitás.....	8
5. Linearizáció, lokális stabilitás, Hopf-bifurkáció.....	11
6. Felhasznált irodalom.....	13
7. Nyilatkozat.....	14