

A Kaluzsnyin–Krasner-tétel egy általánosítása

Dékány Tamás

matematikus mesterszakos hallgató

TDK dolgozat

TÉMAVEZETŐ: Bálintné Dr. Szendrei Mária

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2012

Bevezetés

A dolgozatban egy jól ismert csoportelméleti tételt általánosítunk bizonyos félcsoporthoz tartozóakra. A csoportbővítések alapvető szerepet játszanak a csoportok struktúraelméletében és a csoportvarietások elméletében is. Kaluzsnyin és Krasner ([2]) bebizonyította, hogy tetszőleges N, H csoportok esetén N bármely H -val való bővítése beágyazható N megfelelően nagy direkt hatványának H -val vett szemidirekt szorzatába, az úgynevezett $N \wr H$ koszorúszorzatba.

A félcsoporthoz tartozó fontos osztályát alkotják az ún. teljesen egyszerű félcsoporthoz tartozók. Ezek egymással izomorf csoportok egyesítésekként állnak elő, és így sokszor felbukkannak a félcsoporthoz tartozó elméletben mint a csoportok természetes általánosításai. A dolgozatban a Kaluzsnyin–Krasner-tételt általánosítjuk a teljesen egyszerű félcsoporthoz tartozó csoportokkal való bővítéseire.

Egy S teljesen egyszerű félcsoport tetszőleges ρ csoportkongruenciája meghatároz egy N normálosztót S minden G maximális részcsoporthoz tartozóan, ezek uniója az egységelem ρ -osztály, mely teljesen egyszerű részfélcsoport S -ben, valamint S/ρ izomorf G/N -nel. Bebizonyítjuk, hogy ha U tetszőleges teljesen egyszerű félcsoport, H pedig csoport, akkor U bármely bővítése H -val beágyazható olyan V teljesen egyszerű félcsoportnak H -val vett szemidirekt szorzatába, amelyben a maximális részcsoporthoz tartozó U maximális részcsoporthoz tartozóan megfelelően nagy direkt hatványai. Továbbá rámutatunk, hogy van olyan U teljesen egyszerű félcsoport és H csoport, valamint U -nak olyan H -val vett bővítése, amely nem ágyazható be az $U \wr H$ koszorúszorzatba.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Bálintné Dr. Szendrei Mária Tanárnőnek, aki hasznos tanácsaival, és gondos munkájával segített a dolgozat megírásában.

1. Előismeretek, előzmények

A dolgozat első fejezete a szükséges előismereteket tartalmazza, melyek jó-részt megtalálhatók [1]-ben és [3]-ban.

Alapfogalmak

Adott S nemüres halmazon adott $\cdot$ művelettel rendelkező $S = (S, \cdot)$ struktúrát *félcsoportnak* nevezünk, ha a $\cdot$ művelet asszociatív. Ha egy félcsoportnak van egységeleme, azt a csoportoknál megszokott módon 1 -gyel jelöljük, S -et pedig *monoidnak* nevezzük. Legyen

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{ha } S \text{ monoid} \\ S \cup \{1\}, & \text{ha } S \text{ nem monoid,} \end{cases}$$

ahol az utóbbi esetben feltesszük, hogy $1 \notin S$, és az $S \cup \{1\}$ halmazra úgy terjesztjük ki az S -en értelmezett műveletet, hogy 1 egységelem legyen, azaz legyen tetszőleges $s \in S$ esetén $s1 = 1s = s$ és $1 \cdot 1 = 1$.

Egy S félcsoport tetszőleges a elemét *regulárisnak* nevezzük, ha létezik olyan $x \in S$, amelyre $axa = a$. Az S félcsoportot *reguláris félcsoportnak* nevezzük, ha minden eleme reguláris. Azt mondjuk, hogy x az a *elem inverze*, ha $axa = a$ és $xax = x$. Az a elem inverzeinek halmazát $V(a)$ -val jelöljük. Nem nehéz megmutatni, hogy egy $a \in S$ elem pontosan akkor reguláris, ha van inverze.

Félcsoportokon ugyanúgy definiálhatjuk a komplexusszorzást, ahogyan csoportokon vagy gyűrűkben szoktuk. Ha valamely nemüres $A \subseteq S$ -re $SA \subseteq A$, akkor A -t *balideálnak*, ha $AS \subseteq A$, akkor A -t *jobbideálnak* nevezzük. Ha A jobb- és balideál is, akkor A -t *ideálnak* nevezzük.

Ha a tetszőleges elem az S félcsoportban, akkor a legszűkebb balideál, mely tartalmazza a -t, éppen $S^1a = Sa \cup \{a\}$. Ezt az a által generált *balideálnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy $a \mathcal{L} b$, ha $S^1a = S^1b$. Az $\mathcal{L}$ -reláció egy ekvivalenciareláció S -en. Hasonlóan definiálhatjuk az $\mathcal{R}$ -relációt is, azaz $a \mathcal{R} b$ pontosan akkor, ha $aS^1 = bS^1$. Megjegyezzük, hogy reguláris félcsoportok esetén S^1 helyett S -et írhatunk a relációk definíciójában.

A definíciókból könnyen kiolvasható a következő állítás:

1. Állítás. *Legyen S reguláris félcsoport, és legyenek a, b tetszőleges elemek S -ben. Ekkor $a \mathcal{L} b$ pontosan akkor, ha létezik olyan $u, v \in S$, amelyre $a = ub$ és $b = va$. Hasonlóan $a \mathcal{R} b$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $s, t \in S$, amelyre $a = bs$ és $b = at$.*

Definiálható az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ ekvivalenciák metszete, mely szintén ekvivalencia, és jele $\mathcal{H}$. Bizonyítható, hogy $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Így a legszűkebb $\mathcal{L}$ -et és $\mathcal{R}$ -et tartalmazó ekvivalencia éppen $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$.

Definiálhatjuk az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációk kétoldali változatát is: legyen $a \mathcal{J} b$, ha $S^1 a S^1 = S^1 b S^1$. Világos, hogy $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$, és így $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. A fenti öt relációt összefoglaló néven *Green-relációknak* nevezzük.

Teljesen egyszerű félcsoporthok

Egy félcsoporthot *egyszerűnek* nevezünk, ha nincs valódi ideálja. Az egyszerű félcsoporthokon $\mathcal{J} = S \times S$. Az egyszerű félcsoporthok ekvivalens karakterizációját mondja ki a következő állítás:

2. Állítás. *Egy S félcsoporth akkor és csak akkor egyszerű, ha $SaS = S$ minden $a \in S$ -re, azaz tetszőleges $a, b \in S$ elem esetén létezik olyan $x, y \in S$, amelyre $xay = b$.*

Tetszőleges S félcsoporthon az idempotens elemek halmazát $E(S)$ -sel jelöljük. Ha $E(S)$ nemüres, akkor $E(S)$ -en bevezethető egy részbenrendezés, amit *természetes részbenrendezésnek* hívunk. Eszerint tetszőleges $e, f \in E(S)$ -re legyen $e \leq f$, ha $ef = fe = e$. Egy idempotens elemet *primitívnek* nevezünk, ha minimális elem $E(S)$ -ben a természetes részbenrendezésre nézve. Egy félcsoporthot *teljesen egyszerű félcsoporthnak* nevezünk, ha egyszerű, és létezik primitív idempotens eleme.

Legyen G csoport, I, Λ nemüres halmazok és $P = (p_{\lambda i})$ egy $\Lambda \times I$ típusú mátrix G elemeiből. Legyen $S = I \times G \times \Lambda$, amelyen bevezetjük a következő szorzást:

$$(i, g, \lambda) \cdot (j, h, \mu) = (i, gp_{\lambda j}h, \mu).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy így félcsoporthot kapunk, melyet $M(G; I, \Lambda; P)$ -vel jelölünk, és *Rees-mátrix félcsoporthnak* nevezünk. A P mátrixot *szendvics-mátrixnak* hívjuk.

3. Tétel (Rees). *Tetszőleges G csoport, I, Λ nemüres halmazok és G elemeiből álló $\Lambda \times I$ típusú $P = (p_{\lambda i})$ mátrix esetén az $M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporth teljesen egyszerű félcsoporth. Fordítva, minden teljesen egyszerű félcsoporth izomorf egy Rees-mátrix félcsoporthtal.*

A továbbiakban a teljesen egyszerű félcsoporthokra mindig úgy gondolunk, mint Rees-mátrix félcsoporthokra. Tetszőleges $S = M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporthban könnyen látható a definíciók alapján, hogy az idempotensek halmaza:

$$E(S) = \{(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) : i \in I, \lambda \in \Lambda\},$$

és minden idempotens elem primitív. A Green-relációkkal kapcsolatban egyszerűen ellenőrizhetők S -ben a következők:

$$(i, g, \lambda) \mathcal{R} (j, h, \mu) \Leftrightarrow i = j$$

és

$$(i, g, \lambda) \mathcal{L}(j, h, \mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

Így S egyetlen $\mathcal{D}$ -osztályból áll, $\mathcal{H}$ -osztályai pedig

$$H_{i\lambda} = \{(i, g, \lambda) : g \in G\} \quad (i \in I, \lambda \in \Lambda),$$

ahol $H_{i\lambda}$ részcsoport S -ben — ezek éppen S maximális részcsoportjai —, egységeleme $(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda)$, és $H_{i\lambda}$ izomorf G -vel. Például a $G \rightarrow H_{i\lambda}$, $g \mapsto (i, p_{\lambda i}^{-1}g, \lambda)$ leképezés izomorfizmus. Ez a meggondolás mutatja, hogy tetszőleges S teljesen egyszerű félcsoporth reguláris, hiszen minden eleme benne van valamely maximális részcsoportjában.

A következőkben kimondunk néhány tételt a Rees-mátrix félcsoporthokról, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

4. Tétel. *Az $M(G; I, \Lambda; P)$ és $M(K; J, M; Q)$ Rees-mátrix félcsoporthok pontosan akkor izomorfak, ha létezik olyan $\varphi: G \rightarrow K$ izomorfizmus, olyan $\psi: I \rightarrow J$, $\chi: \Lambda \rightarrow M$ bijekció, valamint olyan $u_i, v_\lambda \in K$ ($i \in I, \lambda \in \Lambda$) csoportelem, amelyre fennáll a*

$$p_{\lambda i}\varphi = v_\lambda q_{\lambda\chi, i\psi}u_i$$

egyenlőség minden $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ esetén.

Legyen $M(G; I, \Lambda; P)$ tetszőleges Rees-mátrix félcsoporth, a φ, ψ, χ leképezéseket válasszuk identikusnak, és rögzítsünk egy $j \in I, \mu \in \Lambda$ elemet. Ekkor a 4. Tétel szerint tetszőleges $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ esetén megválaszthatók a $v_\lambda, u_i \in G$ elemek úgy, hogy $q_{\mu i} = q_{\lambda j} = 1$ teljesüljön. Ekkor tehát a Q szendvicsmátrix μ indexű sorában és j indexű oszlopában minden elem a csoport egységeleme. Az ilyen szendvicsmátrixról azt mondjuk, hogy *normalizált* (μ, j) -ben.

5. Következmény. *Tetszőleges teljesen egyszerű félcsoporth izomorf egy olyan $M(G; I, \Lambda; Q)$ Rees-mátrix félcsoporthtal, ahol a Q szendvicsmátrix normalizált.*

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $1 \in I \cap \Lambda$, és a Rees-mátrix félcsoporthunk szendvicsmátrixa $(1, 1)$ -ben normalizált, azaz tetszőleges $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ esetén $p_{\lambda 1} = p_{1i} = 1$.

Azt mondjuk, hogy az S félcsoporth ρ kongruenciája *csoportkongruencia*, ha S/ρ csoport. Ekkor az S/ρ csoport egységeleme, mint S részhalmaza részfélcsoporthot alkot S -ben. Ezt a ρ csoportkongruencia *magjának* nevezzük és $\text{Ker } \rho$ -val jelöljük. A következőkben leírjuk a csoportkongruenciákat a teljesen

egyszerű félcsoporthokon. Ehhez először kimondunk egy általános tételt a teljesen egyszerű félcsoporthok kongruenciáiról. Legyen $S = M(G; I, \Lambda; P)$ olyan Rees-mátrix félcsoport, ahol a P szendviczmátrix normalizált. Azt mondjuk, hogy $(N, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ *kapcsolt hármas* S -en, ha $\mathcal{S}$ ekvivalenciareláció I -n, $\mathcal{T}$ ekvivalenciareláció Λ -n, valamint N olyan normálosztó G -ben, amelyre teljesül a következő tetszőleges $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ esetén:

$$\text{ha } (i, j) \in \mathcal{S} \text{ vagy } (\lambda, \mu) \in \mathcal{T}, \text{ akkor } p_{\lambda i} p_{\mu i}^{-1} p_{\mu j} p_{\lambda j}^{-1} \in N.$$

A kapcsolt hármasokon természetes módon definiálható egy részbenrendezés a következőképpen:

$$(N_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{T}_1) \subseteq (N_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_2) \Leftrightarrow N_1 \subseteq N_2, \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2, \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2.$$

A kongruenciák és a kapcsolt hármasok közötti kapcsolatot írja le a következő tétel.

6. Tétel. *Legyen $S = M(G; I, \Lambda; P)$ olyan Rees-mátrix félcsoport, ahol a P szendviczmátrix normalizált. Ekkor létezik rendezéstartó bijekció S kongruenciáinak halmazáról a kapcsolt hármasok halmazára, és viszont. Így a kapcsolt hármasok hálót alkotnak a rajtuk definiált részbenrendezésre nézve, és ez a háló izomorf S kongruenciahálójával.*

A tétel szerint minden ρ kongruencia meghatároz egy kapcsolt hármas S -en, legyen ez $(N_\rho, \mathcal{S}_\rho, \mathcal{T}_\rho)$. Legyen most ρ csoportkongruencia S -en. Mivel S/ρ csoport, így könnyen adódik, hogy $\mathcal{S}_\rho = I \times I$ és $\mathcal{T}_\rho = \Lambda \times \Lambda$. Továbbá a kapcsolt hármasok definíciójából látjuk, hogy tetszőleges $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$, esetén $(i, 1) \in \mathcal{S}_\rho$ és $(\lambda, 1) \in \mathcal{T}_\rho$ miatt $p_{\lambda i} p_{1i}^{-1} p_{11} p_{\lambda 1}^{-1} \in N_\rho$, azaz $p_{\lambda i} \in N_\rho$. Így tehát $(i, g, \lambda) \rho (j, h, \mu)$ pontosan akkor teljesül, ha $gh^{-1} \in N_\rho$. A most leírtakat adják a következő tétel nemtriviális részét.

7. Tétel. *Legyen $S = M(G; I, \Lambda; P)$ olyan Rees-mátrix félcsoport, ahol a P szendviczmátrix normalizált. Tegyük fel, hogy N olyan normálosztó a G csoportban, amely tartalmazza a P szendviczmátrix összes elemét. Defináljuk a ρ relációt S -en oly módon, hogy tetszőleges $(i, g, \lambda), (j, h, \mu) \in M(G; I, \Lambda; P)$ esetén legyen*

$$(i, g, \lambda) \rho (j, h, \mu) \Leftrightarrow gh^{-1} \in N. \quad (1)$$

Ekkor ρ csoportkongruencia S -en, valamint S/ρ izomorf a G/N faktorcsoporttal, és $\text{Ker } \rho = M(N; I, \Lambda; P)$.

Fordítva, S minden csoportkongruenciája (1) alakú valamely N normálosztóra G -ben. ahol P minden eleme N -beli.

A dolgozatban szükségünk lesz teljesen egyszerű félcsoporthoz direkt hatványára is. Ezek szintén teljesen egyszerűek, és könnyen ellenőrizhető, hogy megadhatók az alábbi módon:

8. Tétel. *Legyen $S = M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporthoz, X pedig tetszőleges halmaz. Ekkor*

$$S^X \cong M(G^X; I^X, \Lambda^X; P^X),$$

ahol $P^X = (p_{\xi, \eta}^X)$ a következő mátrix: tetszőleges $\xi \in \Lambda^X$, $\eta \in I^X$ esetén $p_{\xi, \eta}^X: X \rightarrow G$, $x p_{\xi, \eta}^X = p_{x\xi, x\eta}$ ($x \in X$).

A tételbeli izomorfizmus minden $F: X \rightarrow S$ leképezéshez azt az (η, f, ξ) leképezéshármaszt rendeli, amelyre $\eta: X \rightarrow I$, $f: X \rightarrow G$, $\xi: X \rightarrow \Lambda$, és minden $x \in X$ -re

$$xF = (x\eta, xf, x\xi).$$

Félcsoporthoz csoporttal vett szemidirekt szorzatai, koszoszorzata

A csoportok esetében ismert szemidirekt szorzatfogalmat könnyen általánosíthatjuk a következőképpen. Legyen S tetszőleges félcsoporthoz, és H tetszőleges csoport, amely automorfizmusokkal hat balról — röviden hat — S -en. Defináljunk szorzást az $S \times H$ Descartes-szorzaton a következő módon: tetszőleges $(s, A), (t, B) \in S \times H$ -ra legyen

$$(s, A)(t, B) = (s \cdot {}^A t, A \cdot B).$$

A kapott struktúra félcsoporthoz — speciálisan csoport, amennyiben S csoport —, melyet az S félcsoporthoz H -val vett *szemidirekt szorzatának* nevezünk, és $S \rtimes H$ -val jelölünk.

A következő állítás jellemzi az $\mathcal{L}$ - és $\mathcal{R}$ -relációt az ilyen szemidirekt szorzatban.

9. Állítás. *Legyen S reguláris félcsoporthoz, és H csoport, amely hat S -en. Tekintsük az így meghatározott $S \rtimes H$ szemidirekt szorzatot. Ekkor tetszőleges $(s, A), (t, B) \in S \rtimes H$ esetén*

$$(1) (s, A) \mathcal{R} (t, B) \Leftrightarrow s \mathcal{R} t \text{ fennáll } S\text{-ben},$$

$$(2) (s, A) \mathcal{L} (t, B) \Leftrightarrow {}^{A^{-1}}s \mathcal{L} {}^{B^{-1}}t \text{ fennáll } S\text{-ben}.$$

A most definiált szemidirekt szorzás nem vezet ki a teljesen egyszerű félcsoporthoz köréből:

10. Állítás. *Legyen S teljesen egyszerű félcsoporth, és H csoport, amely hat S -en. Ekkor az így kapott $S \rtimes H$ szemidirekt szorzat is teljesen egyszerű félcsoporth.*

Most egy speciális szemidirekt szorzatot fogunk bevezetni. Legyen S tetszőleges félcsoporth, H pedig tetszőleges csoport. Tekintsük az S^H direkt hatványt. Ennek elemei a $H \rightarrow S$ leképezések, szorzatuk pedig pontonként van értelmezve: ha $f, f': H \rightarrow S$ leképezések, akkor ff' az a $H \rightarrow S$ leképezés, amelyre tetszőleges $A \in H$ esetén $A(ff') = (Af)(Af')$. Az S^H direkt hatványon természetes módon definiálható H hatása az argumentumokon való szorzással: tetszőleges $f: H \rightarrow S$ és $A \in H$ esetén legyen ${}^A f$ az a $H \rightarrow S$ leképezés, amelyre $B({}^A f) = (BA)f$ teljesül minden $B \in H$ esetén. Könnyen látható, hogy ez valóban hatás, és így definiálva van az ehhez tartozó $S^H \rtimes H$ szemidirekt szorzat. Ezt nevezzük az S félcsoporth H -val vett *koszorúszorzatának*, és $S \wr H$ -val jelöljük.

Megjegyezzük, hogy ha S csoport, akkor $S \wr H$ is az. Továbbá vegyük észre azt, hogy adott S félcsoporth és H csoport esetén az $S \wr H$ koszorúszorzat egyértelműen meghatározott, míg az $S \rtimes H$ szemidirekt szorzat többféle lehet attól függően, hogy H hogyan hat S -en.

Ha S teljesen egyszerű félcsoporth, azaz $S = M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporth, akkor az S^H direkt hatványra a 8. Tétel szerint $M(G^H; I^H, \Lambda^H; P^H)$ Rees-mátrix félcsoporth formában gondolhatunk, ahol $P^H = (p_{\xi\eta}^H)$, és

$$Ap_{\xi\eta}^H = p_{A\xi, A\eta} \quad \text{minden } A \in H\text{-ra.} \quad (2)$$

A koszorúszorzat definíciójában szereplő hatás ekkor a következő: tetszőleges $A \in H$ és $(\eta, f, \xi) \in M(G^H; I^H, \Lambda^H; P^H)$ esetén ${}^A(\eta, f, \xi) = ({}^A\eta, {}^A f, {}^A\xi)$, ahol ${}^A\eta: H \rightarrow I$, ${}^A f: H \rightarrow G$ és ${}^A\xi: H \rightarrow \Lambda$ rendre az a leképezés, amelyre $B({}^A\eta) = (BA)\eta$, $B({}^A f) = (BA)f$ és $B({}^A\xi) = (BA)\xi$ minden $B \in H$ -ra. Így az $S \wr H$ koszorúszorzat helyett az $M(G^H; I^H, \Lambda^H; P^H) \rtimes H$ szemidirekt szorzattal dolgozhatunk, ahol a hatást az előbb definiáltuk.

Megjegyezzük, hogy P^H definíciója szerint

$$A({}^B p_{\xi\eta}^H) = (AB)p_{\xi\eta}^H = p_{(AB)\xi, (AB)\eta}^H = p_{A({}^B\xi), A({}^B\eta)}^H = A p_{B\xi, B\eta}^H,$$

tehát

$${}^B p_{\xi\eta}^H = p_{B\xi, B\eta}^H \quad (3)$$

minden $B \in H$ esetén.

A Kaluzsnyin–Krasner-tétel

Emlékeztetünk a csoportbővítés fogalmára. Legyenek G, K, H tetszőleges csoportok. Azt mondjuk, hogy G a K bővítése H -val, ha van olyan N normálisztó G -ben, amelyre $N \cong K$ és $G/N \cong H$.

A csoportelmélet egy fontos tétele a következő ([2]):

11. Tétel (Kaluzsnyin–Krasner). *Legyenek N, H csoportok. Ekkor az N csoport minden bővítése H -val beágyazható N -nek H -val vett koszorúszorzatába.*

Bizonyítás. Legyen a G csoport az N csoport H -val vett bővítése. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy N normálosztó G -ben, valamint $G/N = H$. A H csoport elemeire a gN, hN ($g, h \in G$) és az A, B jelöléseket is használjuk, és N jelöli a csoport egységelemét. Ebben a csoportban minden esetben kiírjuk a szorzásjelet a tényezők közé.

Először kiválasztunk G -ben minden N szerinti mellékosztályból egy-egy elemet, speciálisan N -ből az egységelemet. Az $A \in H$ elemhez tartozó reprezentáns elemet r_A jelöli, így speciálisan $r_N = 1$.

Rögtön adódik tetszőleges $A \in H$ -ra és $g \in G$ -re, hogy $r_A g N = r_{A \cdot g N} N$, azaz $r_A g r_{A \cdot g N}^{-1} \in N$.

Most már definiálhatjuk a következő leképezést:

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow N \wr H, \quad g \mapsto (f_g, gN), \text{ ahol} \\ f_g: H &\rightarrow N, \quad A \mapsto r_A g r_{A \cdot g N}^{-1}. \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy φ beágyazás. Először az injektivitást ellenőrizzük. Tegyük fel, hogy $g, h \in G$ -re $g\varphi = h\varphi$. Ekkor a második komponensek megegyeznek, így $gN = hN$. Az első komponensekben lévő két leképezés is egyenlő, ezért minden $A \in H$ -ra megegyezik az értékük. Speciálisan $N f_g = N f_h$, azaz $r_N g r_{gN}^{-1} = r_N h r_{hN}^{-1}$. Így a $gN = hN$ egyenlőségből azonnal adódik, hogy $g = h$.

Végül belátjuk, hogy φ homomorfizmus. Legyenek $g, h \in G$ tetszőleges elemek. Ekkor a definíciók szerint

$$(g\varphi)(h\varphi) = (f_g, gN)(f_h, hN) = (f_g \cdot {}^g f_h, ghN),$$

és

$$(gh)\varphi = (f_{gh}, ghN).$$

Itt tetszőleges $A \in H$ esetén

$$\begin{aligned} A(f_g \cdot {}^g f_h) &= (A f_g)(A({}^g f_h)) = (A f_g)((A \cdot gN) f_h) \\ &= (r_A g r_{A \cdot g N}^{-1})(r_{A \cdot g N} h r_{A \cdot ghN}^{-1}) \\ &= r_A g h r_{A \cdot ghN}^{-1} \\ &= A f_{gh}. \end{aligned}$$

Tehát $(g\varphi)(h\varphi) = (gh)\varphi$ tetszőleges $g, h \in G$ -re, azaz φ valóban homomorfizmus. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

2. Teljesen egyszerű félcsoporthatóság bővítései csoportokkal

A dolgozatban megvizsgáljuk, hogyan lehet általánosítani a csoportelméleti Kaluzsnyin–Krasner-tételt teljesen egyszerű félcsoporthatóság csoportokkal vett bővítéseire.

Legyen S és U teljesen egyszerű félcsoporthatóság és H csoport. Azt mondjuk, hogy S az U teljesen egyszerű félcsoporthatóság bővítése H -val, ha S -en létezik olyan ρ csoportkongruencia, amelyre $\text{Ker } \rho \cong U$ és $S/\rho \cong H$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\text{Ker } \rho = U$ és $S/\rho = H$.

A Kaluzsnyin–Krasner-tétel közvetlen általánosítása az lenne, hogy az S teljesen egyszerű félcsoporthatóságot beágyazzuk az $U \wr H$ koszorúszorzatba. A fejezet második részében kiderül, hogy ez általában nem lehetséges. Ezért az első részben S -nek olyan beágyazását keressük valamely $V \rtimes H$ szemidirekt szorzatba, ahol a maximális részcsoporthatóságok „szintjén” a beágyazás ugyanúgy történik, mint a Kaluzsnyin–Krasner-tételben.

Beágyazhatóság szemidirekt szorzatba

Legyen adott egy tetszőleges $S = M(G; I, \Lambda; P)$ teljesen egyszerű félcsoporthatóság és rajta egy ρ csoportkongruencia. Ekkor az S/ρ csoportot jelöljük H -val, a $\text{Ker } \rho$ részfélcsoporthatóságot pedig U -val. Tehát S az U teljesen egyszerű félcsoporthatóság H -val vett bővítése. Célunk az, hogy az S félcsoporthatóságot olyan $V \rtimes H$ szemidirekt szorzatba ágyazzuk be, ahol a V teljesen egyszerű félcsoporthatóság maximális részcsoporthatóságjai az U félcsoporthatóság maximális részcsoporthatóságjainak direkt hatványai, és a beágyazás ezekre a részcsoporthatóságokra megszorítva lényegében ugyanaz, mint a Kaluzsnyin–Krasner-tétel szerinti beágyazás. Ehhez megfelelően módon kell megválasztani V $\mathcal{R}$ - és $\mathcal{L}$ -osztályainak halmazát, valamint V szendvicsmátrixát.

12. Tétel. *Tetszőleges teljesen egyszerű U félcsoporthatóság valamely H csoporttal vett bővítése beágyazható egy teljesen egyszerű V félcsoporthatóság H -val vett szemidirekt szorzatába, ahol a V félcsoporthatóság maximális részcsoporthatóságjai U maximális részcsoporthatóságjainak direkt hatványai.*

Bizonyítás. A Kaluzsnyin–Krasner-tétel bizonyításához hasonlóan megadunk egy alkalmas V félcsoporthatóságot, azon H -nak egy hatását, majd egy alkalmas beágyazást a V félcsoporthatóság H -val vett szemidirekt szorzatába. Legyen U -nak H -val vett bővítése az $S = M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporthatóság, ahol a P szendvicsmátrix normalizált. Ekkor definíció szerint adott S -en egy ρ csoportkongruencia, amelyre $S/\rho \cong H$, valamint $U \cong \text{Ker } \rho$. A 7. Tétel

alapján létezik olyan N normálosztó G -ben, amelyre a P szendviczmátrix minden eleme N -beli, $H \cong G/N$, és $U \cong M(N; I, \Lambda; P)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $H = G/N$, és $U = M(N; I, \Lambda; P) \subseteq S$. A Kaluzsnyin–Krasner-tételnél megszokott módon, most is gN, hN és A, B jelöli H elemeit, N az egységelem jele, és a szorzásjelet mindig kiírjuk. Továbbá bármely $g \in G$ esetén jelölje f_g a Kaluzsnyin–Krasner-tételnél definiált N^H -beli leképezést.

Most megadjuk a bizonyításban alkalmazott V félcsoporthat. Legyen $V = M(N^H; I, H \times \Lambda; Q)$, ahol Q elemei a következő elemei az N^H direkt hatványnak: tetszőleges $(B, \lambda) \in H \times \Lambda$ és $j \in I$ esetén legyen

$$q_{(B, \lambda), j}: H \rightarrow N, \quad A \mapsto r_{A \cdot B} p_{\lambda j} r_{A \cdot B}^{-1}.$$

Mivel $p_{\lambda i} \in N$, látható, hogy $q_{(B, \lambda), j} = {}^B f_{p_{\lambda j}}$. A H csoport a Kaluzsnyin–Krasner-tételnél leírtak szerint hat N^H -n. Továbbá a H csoport balról szorzással hat $H \times \Lambda$ -n, azaz az ${}^A(B, \lambda) = (A \cdot B, \lambda)$ ($(B, \lambda) \in H \times \Lambda$, $A \in H$) egyenlőség nyilvánvalóan hatást definiál a $H \times \Lambda$ halmazon. Most definiáljuk a H csoport hatását V -n a következőképpen: tetszőleges $A \in H$ és $(i, f, (B, \lambda)) \in V$ esetén legyen

$${}^A(i, f, (B, \lambda)) = (i, {}^A f, {}^A(B, \lambda)).$$

Ez valóban hatás, ugyanis ha $A \in H$ és $(i, f, (B, \lambda)), (j, f', (C, \mu)) \in V$, akkor

$$\begin{aligned} {}^A(i, f, (B, \lambda)) \cdot {}^A(j, f', (C, \mu)) &= (i, {}^A f, (A \cdot B, \lambda))(j, {}^A f', (A \cdot C, \mu)) \\ &= (i, {}^A f q_{(A \cdot B, \lambda), j} {}^A f', (A \cdot C, \mu)) \\ &= (i, {}^A f q_{(B, \lambda), j} {}^A f', (A \cdot C, \mu)) \\ &= {}^A(i, f q_{(B, \lambda), j} f', (C, \mu)) \\ &= {}^A[(i, f, (B, \lambda))(j, f', (C, \mu))]. \end{aligned}$$

Ez a hatás meghatároz egy $V \rtimes H = M(N^H; I, H \times \Lambda; Q) \rtimes H$ szemidirekt szorzatot.

Definiáljuk a φ leképezést a következőképpen:

$$\varphi: M(G; I, \Lambda; P) \rightarrow M(N^H; I, H \times \Lambda; Q) \rtimes H,$$

ahol

$$(i, g, \lambda) \mapsto ((i, f_g, (gN, \lambda)), gN).$$

Megmutatjuk, hogy φ beágyazás. Az injektivitás ellenőrzése azonos a Kaluzsnyin–Krasner-tételnél látottal, annyival kiegészítendő, hogy a képelemekből i és λ egyértelműen kiolvasható.

Ha belátjuk, hogy φ homomorfizmus, a tételt bebizonyítottuk. Legyenek $(i, g, \lambda), (j, h, \mu)$ tetszőleges elemek $M(G; I, \Lambda; P)$ -ből. Ekkor

$$\begin{aligned} (i, g, \lambda)\varphi(j, h, \mu)\varphi &= ((i, f_g, (gN, \lambda)), gN)((j, f_h, (hN, \mu)), hN) \\ &= ((i, f_g, (gN, \lambda)) \cdot {}^{gN}(j, f_h, (hN, \mu)), ghN) \\ &= ((i, f_g, (gN, \lambda))(j, {}^{gN}f_h, (ghN, \mu)), ghN) \\ &= ((i, f_g \cdot q_{(gN, \lambda), j} \cdot {}^{gN}f_h, (ghN, \mu)), ghN), \end{aligned}$$

továbbá

$$[(i, g, \lambda)(j, h, \mu)]\varphi = (i, gp_{\lambda j}h, \mu)\varphi = ((i, f_{gp_{\lambda j}h}, (gp_{\lambda j}hN, \mu)), gp_{\lambda j}hN).$$

Mivel tudjuk, hogy $p_{\lambda j} \in N$, ezért $gp_{\lambda j}hN = ghN$. Így a két középső komponens, ami N^H -beli leképezés, egyenlőségét elegendő igazolni. Legyen $A \in H$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} A(f_g \cdot q_{(gN, \lambda), j} \cdot {}^{gN}f_h) &= (Af_g)(Aq_{(gN, \lambda), j})(A \cdot gN)f_h) \\ &= r_A g r_{A \cdot gN}^{-1} r_{A \cdot gN} p_{\lambda j} r_{A \cdot gN}^{-1} r_{A \cdot gN} h r_{A \cdot ghN}^{-1} \\ &= r_A g p_{\lambda j} h r_{A \cdot ghN}^{-1} \\ &= r_A g p_{\lambda j} h r_{A \cdot gp_{\lambda j}hN}^{-1} \\ &= A(f_{gp_{\lambda j}h}). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

Beágyazhatóság koszorúszorzatba

Ebben a fejezetben példát adunk arra, hogy teljesen egyszerű félcsoporthal vett bővítése nem mindig ágyazható be a koszorúszorzatukba. Legyen $S = M(G; I, \Lambda; P)$ az U teljesen egyszerű félcsoporthal vett bővítése. Mint fent láttuk, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $N \triangleleft G$, $H = G/N$, $U = M(N; I, \Lambda; P)$, valamint a P szendvicsmátrix minden eleme N -ből való. Tegyük fel, hogy létezik $S \rightarrow U \wr H$ beágyazás. Az előző fejezet végén leírtak értelmében ez ekvivalens azzal, hogy létezik

$$\varphi: S \rightarrow M(N^H; I^H, \Lambda^H; P^H) \rtimes H$$

beágyazás. A 9. Állítás alapján az $M(N^H; I^H, \Lambda^H; P^H) \rtimes H$ szemidirekt szorzatban egy tetszőleges $[(\eta, f, \xi), A]$ elem $\mathcal{R}$ -osztálya csak η -tól függ, $\mathcal{L}$ -osztálya pedig A -tól és ξ -től. Mivel a φ beágyazás $\mathcal{R}$ -ekvivalens elemeket

$\mathcal{R}$ -ekvivalensekbe, $\mathcal{L}$ -ekvivalenseket $\mathcal{L}$ -ekvivalensekbe visz, ebből következik, hogy

$$\forall i \in I \exists \eta_i \in I^H; \forall (A, \lambda) \in H \times \Lambda \exists \xi_{A,\lambda} \in \Lambda^H,$$

amelyre

$$(i, g, \lambda)\varphi = [(\eta_i, f_g^{i\lambda}, \xi_{gN,\lambda}), gN],$$

ahol $f_g^{i\lambda} \in N^H$.

Mivel tudjuk, hogy φ homomorfizmus, ezért

$$(i, g, \lambda)\varphi \cdot (j, h, \mu)\varphi = (i, gp_{\lambda j}h, \mu)\varphi,$$

azaz

$$[(\eta_i, f_g^{i\lambda}, \xi_{gN,\lambda}), gN][(\eta_j, f_h^{j\mu}, \xi_{hN,\mu}), hN] = [(\eta_i, f_{gp_{\lambda j}h}^{i\mu}, \xi_{ghN,\mu}), ghN].$$

Ebből következnek az alábbiak:

$$f_g^{i\lambda} p_{\xi_{gN,\lambda}, gN\eta_j}^H \cdot {}^{gN}f_h^{j\mu} = f_{gp_{\lambda j}h}^{i\mu}, \quad (4)$$

$${}^{gN}\xi_{hN,\mu} = \xi_{ghN,\mu}. \quad (5)$$

Világos, hogy (5) ekvivalens a következővel:

$$\xi_{A,\mu} = {}^A\xi_{N,\mu} \quad (\mu \in \Lambda, A \in H).$$

Így a továbbiakban $\xi_{N,\mu}$ helyett röviden ξ_μ -t és $\xi_{A,\mu}$ helyett ${}^A\xi_\mu$ -t írunk. Ezek után vegyük észre, hogy (3) alapján (4) ekvivalens a következővel:

$$f_{gp_{\lambda j}h}^{i\mu} = f_g^{i\lambda} \cdot {}^{gN}p_{\xi_\lambda\eta_j}^H \cdot {}^{gN}f_h^{j\mu}. \quad (6)$$

Ebből $g = h = 1$, illetve $g = p_{\lambda i}^{-1}$, $j = i$ helyettesítéssel, $1, p_{\lambda i}^{-1} \in N$ -et használva következnek az alábbiak:

$$f_{p_{\lambda j}}^{i\mu} = f_1^{i\lambda} \cdot p_{\xi_\lambda\eta_j}^H \cdot f_1^{j\mu}, \quad (7)$$

valamint

$$f_{p_{\lambda i}^{-1}}^{i\lambda} = (p_{\xi_\lambda\eta_i}^H)^{-1}, \quad (8)$$

ugyanis $f_1^{i\mu} = f_{p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda i}1}^{i\mu} = f_{p_{\lambda i}^{-1}}^{i\lambda} p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_1^{i\mu}$.

Ha $p_{\lambda i} = 1$, akkor a

$$\iota_{i\lambda}: G \rightarrow N^H \rtimes H, \quad g \mapsto (p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_g^{i\lambda}, gN) \quad (9)$$

leképezés injektív csoporthomomorfizmus. Ugyanis (6) alapján $p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_{gh}^{i\lambda} = p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_{gp_{\lambda i}h}^{i\lambda} = p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_g^{i\lambda} \cdot {}^{gN}(p_{\xi_\lambda\eta_i} f_h^{i\lambda})$, így

$$(p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_g^{i\lambda}, gN)(p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_h^{i\lambda}, hN) = (p_{\xi_\lambda\eta_i}^H f_{gh}^{i\lambda}, ghN),$$

azaz $\iota_{i\lambda}$ homomorfizmus, injektivitása pedig következik φ injektív voltából.

Most megadunk egy megfelelő G csoportot, benne egy N normálosztót és egy $M(G; I, \Lambda; P)$ Rees-mátrix félcsoporthat, amelyre nem létezik beágyazás. Legyen $G = \mathbb{Z}_7 \rtimes [\bar{2}]$ az a csoport, ahol $\mathbb{Z}_7$ a mod 7 additív csoport, $[\bar{2}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ a $\bar{2}$ által generált részcsoporthat a mod 7 redukált maradékosztályok $\mathbb{Z}_7^*$ multiplikatív csoportjában, és a $[\bar{2}]$ elemei szorzással hatnak $\mathbb{Z}_7$ -en. Tehát a G -beli művelet a következő: $(a, k)(b, h) = (a + kb, kh)$, ahol az összeadás és a szorzás is modulo 7 értendő. Könnyen ellenőrizhető, hogy $N = \{(a, \bar{1}) : a \in \mathbb{Z}_7\}$ normálosztó G -ben, melyet azonosítunk $\mathbb{Z}_7$ -tel, valamint, hogy $H = G/N \cong [\bar{2}]$. Legyen $I = \Lambda = \{1, 2\}$, és legyen a P szendvicxmátrixban $p_{11} = p_{12} = p_{21} = (\bar{0}, \bar{1})$, a G egységeleme, és legyen $p_{22} = (\bar{1}, \bar{1})$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz egy harmadrendű elemre G -ben, és az összes harmadrendű elemre $N^H \rtimes H$ -ban. Látható, hogy $(\bar{0}, \bar{2})(\bar{0}, \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{1})$, azaz $(\bar{0}, \bar{2})$ és $(\bar{0}, \bar{4})$ egymás inverzei, valamint mindketten harmadrendű elemek. Mivel $3 \nmid 7$, ezért N^H -ban nincs harmadrendű elem, így $N^H \rtimes H$ harmadrendű elemei $(t, \bar{2})$ vagy $(t, \bar{4})$ alakúak. Egyszerűen ellenőrizhető — bár erre nem lesz szükségünk —, hogy $(t, \bar{2})$, illetve $(t, \bar{4})$ pontosan akkor harmadrendű, ha $\bar{1}t + \bar{2}t + \bar{4}t = \bar{0}$. Egyszerű számolással azonnal adódik, hogy $(t, \bar{4})^{-1} = (\bar{2}(-t), \bar{2})$ és $(t, \bar{2})^{-1} = (\bar{4}(-t), \bar{4})$.

Tekintsük a (9)-ben definiált leképezést az $i = \lambda = 1$ esetben:

$$\iota_{11} : G \rightarrow N^H \rtimes H,$$

ahol $p_{22}\iota_{11} = (h, \bar{1})$ és $h = p_{\xi_1\eta_1}^H f_{p_{22}}^{11}$. Mivel tudjuk, hogy ι_{11} injektív, ezért harmadrendű elem képe csak harmadrendű elem lehet, azaz a következő két eset egyike áll fenn.

1. eset: $(\bar{0}, \bar{4})\iota_{11} = (t, \bar{4})$. Ekkor $(\bar{0}, \bar{4})^{-1}p_{22}(\bar{0}, \bar{4})\iota_{11} = (\bar{2}(-t), \bar{2})(h, \bar{1})(t, \bar{4}) = (\bar{2}(-t) + \bar{2}h + \bar{2}t, \bar{1}) = (\bar{2}h, \bar{1})$. Ugyanakkor $(\bar{0}, \bar{4})^{-1}p_{22}(\bar{0}, \bar{4}) = p_{22}^2$, és $p_{22}^2\iota_{11} = (h, \bar{1})(h, \bar{1}) = (2h, \bar{1})$. Így $\bar{2}h = 2h$, mint leképezések, azaz tetszőleges $i \in H$ esetén $i(\bar{2}h) = i(2h)$, ami miatt $(\bar{2}i)h = ih + ih = \bar{2}(ih)$. Így $\bar{2}h = \bar{2}(\bar{1}h)$ és $\bar{4}h = \bar{2}(\bar{2}h) = \bar{4}(\bar{1}h)$. Mivel tudjuk, hogy h nem az N^H csoport egységeleme, így $\bar{1}h \neq \bar{0}$, ami miatt $\bar{1}h \neq \bar{2}h$, $\bar{1}h \neq \bar{4}h$ és $\bar{2}h \neq \bar{4}h$, azaz h három különböző értéket rendel H elemeihez, amelyek egyike sem az egységelem.

2. eset: $(\bar{0}, \bar{4})\iota_{11} = (t, \bar{2})$. Ekkor az 1. esethez hasonló számolással kapjuk, hogy $\bar{2}h = \bar{4}(\bar{1}h)$ és $\bar{4}h = \bar{2}(\bar{1}h)$, ami miatt ebben az esetben is látszik, hogy h három különböző értéket rendel H elemeihez, amelyek egyike sem az egységelem.

Ugyanakkor (7) és (8) szerint

$$f_{p_{22}}^{11} = f_{(\bar{0}, \bar{1})}^{12} p_{\xi_2\eta_2}^H f_{(\bar{0}, \bar{1})}^{21} = (p_{\xi_2\eta_1}^H)^{-1} p_{\xi_2\eta_2}^H (p_{\xi_1\eta_2}^H)^{-1},$$

azaz

$$h = p_{\xi_1\eta_1}^H f_{p_{22}}^{11} = p_{\xi_1\eta_1}^H (p_{\xi_2\eta_1}^H)^{-1} p_{\xi_2\eta_2}^H (p_{\xi_1\eta_2}^H)^{-1}. \quad (10)$$

Tehát h -t elő tudjuk állítani, mint a szendvicsmátrix két sorának és két oszlopának metszetében lévő négy elem és inverzeik megfelelő sorrendben vett szorzata. Ugyanakkor a P^H szendvicsmátrix (2)-beli definíciója alapján tetszőleges $i \in H$ és $k, l \in \{1, 2\}$ esetén

$$ip_{\xi_k \eta_l}^H = p_{i\xi_k, i\eta_l},$$

azaz

$$ip_{\xi_k \eta_l}^H = p_{22} \Leftrightarrow i\xi_k = i\eta_l = 2.$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$ip_{\xi_1 \eta_1}^H = ip_{\xi_2 \eta_2}^H = p_{22} \Leftrightarrow ip_{\xi_2 \eta_1}^H = ip_{\xi_1 \eta_2}^H = p_{22}.$$

Emiatt nem lehet egyetlen i -re sem egyszerre két átlós elem képe p_{22} , hiszen (10) miatt $ih = (\bar{0}, \bar{1})$ lenne, ami ellentmond a fentieknek. Ezért minden i -re a négy elemből legalább kettő G egységeleme, és ha pontosan kettő, akkor azok egy sorban vagy egy oszlopban vannak. Így a megfelelő négytényezős szorzat értéke csak $(\bar{0}, \bar{1}), p_{22}^{-1}$, vagy p_{22} lehet. Tehát (10) miatt tetszőleges $i \in H$ esetén $ih \in \{(\bar{0}, \bar{1}), p_{22}, p_{22}^{-1}\}$. Ez azonban ellentmond annak, hogy a fentiek értelmében $ih \neq (\bar{0}, \bar{1})$, és h három különböző elemet rendel H elemeihez.

Ez az ellentmondás mutatja, hogy nem létezik

$$\varphi: S \rightarrow M(G^H; I^H, \Lambda^H; P^H) \rtimes H$$

beágyazás. Ezzel igazoltuk a következőt:

13. Tétel. *Létezik olyan teljesen egyszerű félcsoport, amely valamely U teljesen egyszerű félcsoport H csoporttal vett bővítése, és amely nem ágyazható be az $U \wr H$ koszorúszorzatba.*

Hivatkozások

- [1] J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, London Math. Soc. Monographs, New series No. 12, 1995.
- [2] M. Krasner, L. Kaloujnine, Produit complet des groupes de permutations et problème d'extensions de groupes. II, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13** (1950), 208-230.
- [3] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, Singapore, 1988.