

XXXI. ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA
FIZIKA, FÖLDTUDOMÁNYOK ÉS MATEMATIKA SEKCIÓ

Függvényegyenlet megoldása determinánsos módszerrel

Témavezető:

Dr. Boros Zoltán egyetemi docens
Debreceni Egyetem
Természettudományi és Technológiai Kar
Matematikai Intézet
Analízis Tanszék

Készítette:

Nagy Noémi
alkalmazott matematikus MSc
Debreceni Egyetem
Természettudományi és Technológiai Kar

Debrecen

2012. május 17.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A Pexider-egyenlet négyzetre emelésének megoldásairól	6
3. Megjegyzések, következmények	21
Irodalomjegyzék	26

Bevezetés

A Cauchy-féle függvényegyenletnek egy általánosításaként, egy 1903-ban megjelent dolgozatában W. Pexider az

$$f_1(z) + \varphi_1(u) = \psi_1(z + u)$$

$$f_2(z) \cdot \varphi_2(u) = \psi_2(z + u)$$

$$f_3(z) \cdot \varphi_3(u) = \psi_3(zu)$$

$$f_4(z) + \varphi_4(u) = \psi_4(zu)$$

függvényegyenleteket vizsgálta a valós számok halmazán. Ezek az úgynevezett Pexider-egyenletek alapvető fontosságúak a függvényegyenletek elméletében.

Legyen $(X, +)$ egy félcsoporth, $(Y, +, \cdot)$ pedig egy integritási tartomány. Ekkor nyilvánvaló, hogy ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény additív, akkor minden $x, y \in X$ esetén fennáll az

$$[f(x + y)]^2 = [f(x) + f(y)]^2$$

függvényegyenlet is. A megfordítás azonban már nem igaz, hiszen ennek az egyenletnek a teljesüléséből csupán az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{vagy} \quad f(x + y) = -f(x) - f(y)$$

alternatívák valamelyikének fennállása következik. Ez az oka annak, hogy ezt a függvényegyenletet szokás alternatív Cauchy-egyenletnek is nevezni.

A Pexider-egyenlet négyzetre emelésével kapott

$$[f(x \circ y)]^2 = [g(x) + h(x)]^2$$

függvényegyenlet vizsgálatát Daróczy Zoltán 1962-ben kezdeményezte. Az általa felvetett kérdést Vincze Endre 1964-ben megjelent dolgozatában válaszolta meg. A dolgozatban ismertetjük Vincze Endre eredményének ([8]) egy természetes általánosítását. E célból a

Vincze Endre által használt jelöléseket úgy módosítjuk, valamint a módszert megalapozó lemmákat és a főeredményt is úgy fogalmazzuk meg, illetve a bizonyítások lépéseit is úgy írjuk le, hogy azok értelmezhetők és átvihetők legyenek tetszőleges testekbe képező függvényekre.

A főeredményből kiderül, hogy túl azon a nyilvánvaló jelenségen, hogy a négyzetre emelt egyenlet a három függvény egyikének csak a négyzetét határozhatja meg, további, a Pexider-egyenlet megoldásaitól lényegesen különböző megoldások is felléphetnek, az értelmezési tartomány struktúrájától függően. A dolgozatban elegendő feltételeket és példákat adunk olyan struktúrákra, amelyekben vannak, illetve nincsenek ilyen előre nem várt szerkezetű megoldások.

1.1. JELÖLÉS. *Legyen Q tetszőleges halmaz, K egy tetszőleges test, valamint legyenek $F_1, F_2, \dots, F_{kn+n} : Q \rightarrow K$ és $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$. Ekkor a következő jelölést vezessük be:*

$$\Delta(F_1, F_2, \dots, F_n; x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_1(x_2) & \cdots & F_1(x_n) \\ F_2(x_1) & F_2(x_2) & \cdots & F_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n(x_1) & F_n(x_2) & \cdots & F_n(x_n) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Ezen jelöléssel egy-egy, a [3] dolgozatban található lemmára és tételre egy áttekinthetőbb bizonyítást tudunk adni.

1.2. LEMMA. *Ha adott $F_1, F_2, \dots, F_{kn+n} : Q \rightarrow K$ úgy, hogy bármely $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ esetén*

$$\sum_{j=0}^k \Delta(F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2)$$

teljesül, akkor bármely $F : Q \rightarrow K$ és $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in Q$ esetén

$$\sum_{j=0}^k \Delta(F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}, F; x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. $\Delta(F_1, F_2, \dots, F_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$ -et utolsó sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta(F_1, F_2, \dots, F_n; x_1, x_2, \dots, x_n) &= (-1)^{n-1} \{ F_n(x_1) \Delta(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\quad - F_n(x_2) \Delta(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; x_1, x_3, \dots, x_n) + \dots - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} F_n(x_n) \Delta(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \}. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség minden $F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}, F$ függvényre teljesül $j = 0, 1, \dots, k$ esetén az $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ változók mellett, azaz

$$\begin{aligned} &\Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}, F; x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}] \\ &= (-1)^n \{ F(x_1) \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}] \\ &\quad - F(x_2) \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_1, x_3, \dots, x_{n+1}] + \dots - \dots \\ &\quad + (-1)^n F(x_{n+1}) \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_1, x_2, \dots, x_n] \}. \end{aligned}$$

(2) miatt pedig

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^k \Delta(F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}, F; x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ &= (-1)^n \{ F(x_1) \sum_{j=0}^k \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}] \\ &\quad - F(x_2) \sum_{j=0}^k \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_1, x_3, \dots, x_{n+1}] + \dots - \dots \\ &\quad + (-1)^n f(x_{n+1}) \sum_{j=0}^k \Delta[F_{jn+1}, F_{jn+2}, \dots, F_{jn+n}; x_1, x_2, \dots, x_n] \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

A következő tételhez először definiálnunk kell, mikor nevezünk egy függvényrendszert lineárisan függőnek.

1.3. DEFINÍCIÓ. Az $F_1, F_2, \dots, F_n : Q \rightarrow K$ függvényrendszert lineárisan függőnek nevezzük, ha léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_n$ nem egyszerre nulla K -beli konstansok, melyekre

minden $x \in Q$ esetén

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \dots + c_n F_n(x) = 0 \quad (3)$$

teljesül. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $F_1, \dots, F_n$ függvényrendszer lineárisan független.

1.4. TÉTEL. Az $F_1, F_2, \dots, F_n : Q \rightarrow K$ függvények pontosan akkor lineárisan függők, ha tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ esetén teljesül a

$$\Delta(F_1, F_2, \dots, F_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4)$$

azonosság.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy $F_1, F_2, \dots, F_n$ lineárisan függő, azaz (3) teljesül és $c_k \neq 0$ valamely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Ekkor tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ esetén (3)-ból ($x = x_j$ választással)

$$c_1 F_1(x_j) + c_2 F_2(x_j) + \dots + c_n F_n(x_j) = 0$$

adódik, ahol $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. A feltétel szerint ezen egyenletrendszernek van nemtriviális $(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ megoldása, ezért a rendszer determinánsa eltűnik, azaz (4) teljesül.

Most teljes indukcióval megmutatjuk, hogy (4)-ből következik (3). $n = 1$ esetén $\Delta[F_1; x_1] = F_1(x_1) = 0$, melyből következik, hogy van olyan $c_1 \neq 0$, melyre $c_1 F_1(x) = 0$. Tegyük fel, hogy $n-1$ -re igaz az állítás és meg kell vizsgálnunk, hogy n esetén következik-e (4)-ből (3).

Ha

$$\Delta[F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] = 0, \quad (5)$$

akkor az indukciós feltételből következik, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ nem mind nulla konstansok, hogy minden $x \in Q$ esetén

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \dots + c_{n-1} F_{n-1}(x) = 0,$$

tehát

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \dots + c_{n-1} F_{n-1}(x) + c_n F_n(x) = 0$$

$c_n = 0$ és tetszőleges $F_n(x)$ esetén. Ha viszont (5) nem teljesül, azaz léteznek olyan $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in Q$ konstansok, melyekre

$$c_n = (-1)^n \Delta [F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}] \neq 0,$$

akkor legyen $x \in Q$ tetszőleges és alkalmazzuk a (4) azonosságot az $x_j = y_j$ ($j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$), $x_n = x$ pontokra

$$\Delta [F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x] = 0.$$

Ezt a determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtve az alábbi eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} & \Delta [F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x] \\ &= (-1)^{n-1} \{ F_1(x) \Delta [F_2, F_3, \dots, F_n; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}] \\ & \quad - F_2(x) \Delta [F_1, F_3, \dots, F_n; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}] + \dots - \dots \\ & \quad + (-1)^{n-1} F_n(x) \Delta [F_1, F_2, \dots, F_{n-1}; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}] \} \\ &= (-1)^{n-1} \{ c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \dots + c_n F_n(x) \} = 0, \end{aligned}$$

és a $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstansok közül nem mind nulla (mivel $c_n \neq 0$). Így a tételt beláttuk.

□

A Pexider-egyenlet négyzetre emelésének megoldásairól

1962-ben a Sárospatakon megtartott Függvényegyenletek konferencián Daróczy Zoltán felvetette azt a kérdést, mit mondhatunk a Pexider-egyenlet és a négyzetre emelt Pexider-egyenlet kapcsolatáról. Ezen kapcsolat vizsgálatakor Vincze Endre a következő eredmény azon speciális esetét igazolta, amikor a vizsgált függvények komplex értékűek [8]. Az alábbiakban, az előző fejezetnek megfelelően, K tetszőleges testet jelöl.

2.1. TÉTEL. *Legyen $(Q, \circ)$ olyan Abel-félcsoport, ahol az $x \circ y$ minden Q -beli elemet legalább egyszer felvesz, ha x és y befutja a Q elemeit. Ekkor az $f, g, h : Q \rightarrow K$ függvényekre akkor és csak akkor teljesül minden $x, y \in Q$ esetén az*

$$f(x \circ y)^2 = [g(x) + h(y)]^2 \quad (6)$$

függvényegyenlet, ha

(i) *létezik $d, c_1, c_2, c_3 \in K$ és $e : Q \rightarrow K$ úgy, hogy $d^2 = 1$,*

(F1.1) *minden $x, y \in Q$ esetén $d \cdot e(x \circ y) = e(x)e(y)$,*

(F1.2) *minden $x \in Q$ esetén $e(x)^2 = 1$;*

teljesül, továbbá minden $x \in Q$ esetén

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= c_2^2 [1 + c_3^2 + d \cdot 2c_3e(x)] , \\ g(x) &= c_2e(x) - c_1, \quad \text{és} \\ h(x) &= c_2c_3e(x) + c_1; \end{aligned} \quad (7)$$

vagy

(ii) *létezik $d, c_1, c_2 \in K$ és $e : Q \rightarrow K$ úgy, hogy $d^2 = 1$,*

(F2.1) *minden $x, y \in Q$ -ra $d \cdot 2[e(x \circ y) + d] = [e(x) + d][e(y) + d]$,*

(F2.2) *minden $x \in Q$ -ra $d^2 = e(x)^2 = 1$;*

teljesül, továbbá minden $x \in Q$ esetén

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= c_2^2 [5 + d \cdot 4e(x)], \\ g(x) &= c_2 e(x) - c_1 \quad \text{és} \\ h(x) &= c_2 [e(x) + d] + c_1; \end{aligned} \tag{8}$$

vagy

(iii) létezik $c_1, c_2 \in K$ és $\phi : Q \rightarrow K$ úgy, hogy minden $x \in Q$ esetén

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= [\phi(x) + c_1 + c_2]^2, \\ g(x) &= \phi(x) + c_1 \quad \text{és} \\ h(x) &= \phi(x) + c_2; \end{aligned} \tag{9}$$

ahol $\phi(x \circ y) = \phi(x) + \phi(y)$ teljesül minden $x, y \in Q$ esetén.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során többször osztunk kettővel. Ezt nyilván csak akkor tehetjük meg, ha K -ban $2 \neq 0$. Ezért legelőször tárgyaljuk külön a $2 = 0$ esetet. Ekkor minden $k \in K$ esetén $0 = 2k = k + k$ miatt $k = -k$, tehát $a, b \in K$, $a^2 = b^2$ esetén $0 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (a - b)^2$, azaz $a = b$, tehát a (6) egyenletből az

$$f(x \circ y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in Q) \tag{10}$$

Pexider-egyenletet kapjuk, aminek a megoldása bizonyos speciális esetekben egyszerű, illetve általában véve is jelentős szerepet játszik a függvényegyenletek elméletében. Most megmutatjuk, hogy a Q -ra tett feltevéseink mellett (10) megoldásai (9) alakúak.

Legyen $a \in Q$ rögzített. Ekkor (10) és a $\circ$ művelet kommutativitása miatt tetszőleges $x \in Q$ esetén

$$g(x) + h(a) = f(x \circ a) = f(a \circ x) = g(a) + h(x),$$

azaz

$$h(x) = g(x) + A,$$

ahol $A = h(a) - g(a)$. Tehát a (10) egyenletből

$$f(x \circ y) = g(x) + g(y) + A \quad (x, y \in Q) \tag{11}$$

adódik. Továbbá tetszőleges $x \in Q$ esetén

$$g(x \circ a) + g(a) + A = f(x \circ a \circ a) = g(x) + g(a \circ a) + A,$$

tehát

$$g(x \circ a) = g(x) + B \quad (x \in Q),$$

ahol $B = g(a \circ a) - g(a)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges $x, y \in Q$ esetén

$$g(x \circ y) + h(a) = f(x \circ y \circ a) = g(x) + g(y \circ a) + A = g(x) + g(y) + B + A,$$

tehát

$$g(x \circ y) = g(x) + g(y) + C \quad (x, y \in Q), \quad (12)$$

ahol $C = B + A - h(a)$. Tehát a $\phi(x) = g(x) + C$ ($x, y \in Q$) módon definiált $\phi : Q \rightarrow K$ függvényre

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) + \phi(y) \quad (x, y \in Q), \quad (13)$$

$g(x) = \phi(x) - C$, $h(x) = \phi(x) - C + A = \phi(x) + D$ ($x \in Q$) (ahol $D = A - C$) teljesül, továbbá

$$f(x \circ y) = g(x) + h(y) = \phi(x) - C + \phi(y) + D = \phi(x) + \phi(y) + D - C = \phi(x \circ y) + D - C,$$

azaz

$$f(z) = \phi(z) + D - C \quad (z \in Q).$$

Ezzel beláttuk a (9) összefüggéseket $c_1 = -C$, $c_2 = D$ választással.

A továbbiakban feltesszük, hogy K -ban $2 \neq 0$. Ekkor észrevehető, hogy a (6) egyenletben szereplő g és h függvények szerepe felcserélhető, így ez a megoldásokban is megengedett. A (6) egyenlet alapján, valamint a $\circ$ művelet kommutativitása miatt

$$f(x_1 \circ x_2)^2 = [g(x_1) + h(x_2)]^2 = [g(x_2) + h(x_1)]^2,$$

azaz

$$g(x_1)^2 + 2g(x_1)h(x_2) + h(x_2)^2 = g(x_2)^2 + 2g(x_2)h(x_1) + h(x_1)^2$$

teljesül, melyet determinánsos jelöléssel írva

$$\Delta(g^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(1, h^2; x_1, x_2) + 2\Delta(g, h; x_1, x_2) = 0. \quad (14)$$

Ha az 1.2. Lemma alapján bővítünk az 1 függvénnyel és az x_3 változóval, az

$$\Delta(g^2, 1, 1; x_1, x_2, x_3) + \Delta(1, h^2, 1; x_1, x_2, x_3) + 2\Delta(g, h, 1; x_1, x_2, x_3) = 0$$

egyenletet kapjuk, melyből az 1.4. Tétel miatt

$$2\Delta(g, h, 1; x_1, x_2, x_3) = 0$$

adódik, tehát van olyan a, b, c (x -től független) konstans, melyekkel

$$a \cdot g(x) + b \cdot h(x) + c = 0, \quad (15)$$

ahol

$$a, b \text{ és } c \text{ nem egyszerre nullák.} \quad (16)$$

A (15) és (16) feltételek miatt $a = b = 0$ nem lehetséges. Ha tehát $a = 0$, (15)-ből $h(x) = c_1$ konstans következik, ahol $c_1 = -c/b$. Ezt (14)-be írva

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(g^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(1, c_1^2; x_1, x_2) + 2\Delta(g, c_1; x_1, x_2) \\ &= \Delta(g^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(2c_1g, 1; x_1, x_2) \\ &= \Delta(g^2 + 2c_1g, 1; x_1, x_2), \end{aligned}$$

ahonnan

$$g(x)^2 + 2c_1g(x) \equiv k_1, \quad (17)$$

azaz bevezetve a $c_2^2 = c_1^2 + k_1$ jelölést

$$g(x) = -c_1 + c_2e_2(x), \text{ ahol } e_2(x)^2 = 1 \quad (18)$$

következik. Ezek alapján (6)-ból az

$$f(x) = e_1(x)c_2, \text{ ahol } e_1(x)^2 = 1$$

megoldást kapjuk. E megoldásfüggvények pedig speciális esetei a (7) alakú megoldásoknak $c_3 = 0$ választással.

Ha h azonosan konstans, mindig erre az eredményre jutunk. Ezért a továbbiakban feltehető, hogy h nem azonosan konstans, így g -ről is feltehetjük ugyanezt.

Láttuk továbbá, hogy a $h(x) = k$ a (17) egyenlet teljesülését, azaz a $\{g^2, g, 1\}$ függvényrendszer lineáris függőségét vonja maga után. Természetesen ez fordítva nem

igaz. A későbbiek miatt azonban célszerű most vizsgálnunk azt az esetet, mikor a $\{g^2, g, 1\}$ függvényrendszer lineárisan függő.

Tegyük fel tehát, hogy (17) fennáll. Ekkor az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy a $\{g^2, g, 1\}$ függvényrendszer lineáris függőségét pontosan (17) írja le, hiszen ezzel csak azt az esetet nem fedjük le, mikor g azonosan konstans, de ezt az esetet már megvizsgáltunk. Ugyanezért feltehető, hogy (18)-ban e_2 nem azonosan konstans. Helyettesítsük g -t a (6)-ból következő

$$[g(x_1) + h(x_2)]^2 = [g(x_2) + h(x_1)]^2$$

egyenletbe. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$[-c_1 + c_2 e_2(x_1) + h(x_2)]^2 = [-c_1 + c_2 e_2(x_2) + h(x_1)]^2,$$

azaz

$$\begin{aligned} c_1^2 - 2c_1 c_2 e_2(x_1) + c_2^2 - 2c_1 h(x_2) + 2c_2 e_2(x_1) h(x_2) + h(x_2)^2 \\ = c_1^2 - 2c_1 c_2 e_2(x_2) + c_2^2 - 2c_1 h(x_1) + 2c_2 e_2(x_2) h(x_1) + h(x_1)^2. \end{aligned}$$

Ezt determinánsként felírva

$$2\Delta(h - c_1, c_2 e_2 - c_1; x_1, x_2) + \Delta(h^2, 1; x_1, x_2) = 0,$$

melyet ha bővítünk az 1 függvénnyel, átírhatjuk

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Delta(h - c_1, c_2 e_2 - c_1, 1; x_1, x_2, x_3) + \Delta(h^2, 1, 1; x_1, x_2, x_3) \\ &= 2\Delta(h, c_2 e_2, 1; x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

alakba. Léteznek tehát olyan a, b, c konstansok, melyekkel

$$a \cdot h(x) + b \cdot c_2 e_2(x) + c \cdot 1 = 0$$

teljesül. Itt $a = 0$ nem jöhet szóba, mert abból az következne, hogy e_2 konstans, de ezt kizártuk. Így $a \neq 0$, tehát

$$h(x) = c_2 c_3 e_2(x) + c_4,$$

ahol $c_3 = -b/a$ és $c_4 = -c/a$. Helyettesítsük most a g és h megoldásokat a (6) egyenletbe. Így

$$\begin{aligned} f(x \circ y)^2 &= [-c_1 + c_2 e_2(x) + c_2 c_3 e_2(y) + c_4]^2 \\ &= (c_4 - c_1)^2 + c_2^2 [1 + c_3^2 + 2c_3 e_2(x) e_2(y)] + 2c_2(c_4 - c_1) [e_2(x) + c_3 e_2(y)]. \end{aligned}$$

A jobb oldalon csak az utolsó tag nem feltétlenül szimmetrikus x -ben és y -ban, így ez az egyenlet a bal oldal szimmetriája és e_2 nem azonosan konstans volta miatt csak úgy állhat fenn, ha az alábbi egyenletek valamelyike teljesül:

1. $c_2 = 0$,
2. $c_4 - c_1 = 0$,
3. $c_3 = 1$.

Az 1. esetben h konstans lenne, amit már korábban tárgyaltunk.

A 2. esetben $f(x \circ y)^2$ -re az

$$f(x \circ y)^2 = c_2^2 [1 + c_3^2 + 2c_3 e_2(x) e_2(y)]$$

kifejezést kapjuk. Most kihasználva, hogy a bal oldal argumentuma asszociatív, valamint, hogy h nem azonosan konstans,

$$c_2^2 c_3 \neq 0$$

adódik, így

$$e_2(x \circ y) e_2(z) = e_2(x) e_2(y \circ z).$$

Innen viszont az

$$e_2'(y) = \frac{e_2(y \circ z_0)}{e_2(z_0)}$$

jelöléssel

$$e_2(x \circ y) = e_2(x) e_2'(y) = e_2(y) e_2'(x),$$

$$e_2'(x) = c \cdot e_2(x),$$

azaz $e_2(x)^2 = e_2'(x)^2 = 1$ miatt vagy

$$e_2'(x) = e_2(x) \quad \text{vagy} \quad e_2'(x) = -e_2(x),$$

tehát

$$e_2(x \circ y) = e_2(x) e_2(y) \quad \text{vagy} \quad e_2'(x \circ y) = -e_2(x) e_2(y)$$

következik. Így

$$f(x \circ y)^2 = c_2^2 [1 + c_3^2 + d \cdot 2c_3e_2(x \circ y)] ,$$

ahol $d^2 = 1$. Mivel $c_1 = c_4$, ezért

$$g(x) = c_2e_2(x) - c_1, \quad \text{illetve} \quad h(x) = c_2c_3e_2(x) + c_1.$$

Az így kapott megoldások (7) alakúak.

A 3. esetben $f(x \circ y)^2$ -re $c_5 = c_4 - c_1 \neq 0$ és $c_2 \neq 0$ -val adódik, hogy

$$f(x \circ y)^2 = [c_5 + c_2e_2(x) + c_2e_2(y)]^2. \quad (19)$$

Kihasználva a bal oldal argumentumának asszociativitását,

$$\begin{aligned} & c_2^2 [e_2(x \circ y) + e_2(z)]^2 + 2c_5c_2 [e_2(x \circ y) + e_2(z)] \\ &= c_2^2 [e_2(x) + e_2(y \circ z)]^2 + 2c_5c_2 [e_2(x) + e_2(y \circ z)], \end{aligned}$$

melyből az

$$[c_2e_2(x \circ y) + c_5] [c_2e_2(z) + c_5] = [c_2e_2(y \circ z) + c_5] [c_2e_2(x) + c_5]$$

azonosságok kapjuk. Mivel e_2 nem azonosan konstans, ezért van olyan z_0 , melyre

$$c_2e_2(z_0) \neq 0,$$

tehát

$$c_2e_2(x \circ y) + c_5 = \frac{c_2e_2(y \circ z_0) + c_5}{c_2e_2(z_0) + c_5} [c_2e_2(x) + c_5],$$

majd ennek az egyenletnek ismételt alkalmazásával a

$$c_2e_2(x \circ y) + c_5 = c_0 [c_2e_2(x) + c_5] [c_2e_2(y) + c_5]$$

Pexider-egyenletet kapjuk, ahol

$$c_0 = \frac{c_2e_2(z_0 \circ z_0) + c_5}{[c_2e_2(z_0) + c_5]^2}.$$

Nyilván $c_0 \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben e_2 konstans lenne.

Megjegyezzük továbbá, hogy az egész bizonyítás során a Q -nak azt a tulajdonságát, hogy az $x \circ y$ is befutja az egész halmazt, csupán itt használjuk, ugyanis különben csak $e_2(x \circ y)$ konstans voltára tudnánk következtetni.

Tekintve, hogy az e_2 nem azonosan konstans függvény mind a $+1$, mind pedig a -1 értékeket felveszi, de más értéket nem, az előző Pexider-egyenletben szereplő $c_0 [c_2 e_2(x) + c_5]$ függvény is csak két értéket vesz fel, legyenek ezen értékek a és b . Nyilván $a \neq b$. Ekkor az egyenlet bármely szóba jöhető x és y értékpár esetén a következő egyenletek egyikére egyszerűsödik:

1. $aa = a$,
2. $ab = a$,
3. $bb = a$
4. $aa = b$,
5. $ab = b$,
6. $bb = b$.

Szimmetria okok miatt feltehető, hogy éppen $ab = a$.

Itt két esetet különböztetünk meg:

Ha $a = 0$, akkor a bb szorzat $b \neq a$ miatt nem lehet nulla, így $bb = b \neq 0$, azaz $b = 1$.

Ha viszont $a \neq 0$, akkor $ab = a$ alapján $b = 1$ és mivel $a \neq 1$ miatt $aa \neq a$ is teljesül, ezért $aa = b = 1$ -ből $a = -1$ következik. Eszerint az első esetben

$$c_0 [c_2 e_2(u) + c_5] = 0 \quad \text{és} \quad c_0 [c_2 e_2(v) + c_5] = 1, \quad (20)$$

illetve a másodikban

$$c_0 [c_2 e_2(u) + c_5] = 1 \quad \text{és} \quad c_0 [c_2 e_2(v) + c_5] = -1, \quad (21)$$

ahol mindkét esetben az $e_2(u)$ és $e_2(v)$ szükségképpen különböző előjelűek. Így (21) máris figyelmen kívül hagyható, mert $c_0 c_5 = 0$ következik, amiből $c_0 \neq 0$ miatt $c_5 = 0$ következne, ezt az esetet azonban korábban már kizártuk. (20)-ból viszont rögtön látható, hogy $c_5 = d \cdot c_2$ és $d \cdot 2c_0 c_2 = 1$, ahol $d^2 = 1$ és ekkor

$$d \cdot \frac{e_2(x \circ y) + d}{2} = \frac{e_2(x) + d}{2} \frac{e_2(x) + d}{2}.$$

A (19) egyenletből kiindulva a következőképpen számolhatunk:

$$\begin{aligned} f(x \circ y)^2 &= c_5^2 + 2c_2^2 + 2c_5c_2e_2(x) + 2c_5c_2e_2(y) + 2c_2^2e_2(x)e_2(y) \\ &= c_2^2 [3 + d \cdot 2e_2(x) + d \cdot 2e_2(y) + 2e_2(x)e_2(y)] \\ &= c_2^2 \{1 + 2[e_2(x) + d][e_2(y) + d]\} = c_2^2 \{1 + d \cdot 4[e_2(x \circ y) + d]\}, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} f(x \circ y)^2 &= c_2^2 [5 + d \cdot 4e_2(x \circ y)], \\ d \cdot 2[e_2(x \circ y) + d] &= [e_2(x) + d][e_2(y) + d]. \end{aligned}$$

A $c_3 = 1$ -et is figyelembe véve

$$\begin{aligned} g(x) &= c_2e_2(x) - c_3, \\ h(x) &= c_2[e_2(x) + d] + c_3. \end{aligned}$$

E megoldások valóban (8) alakúak.

Ezzel tehát teljesen elintéztük azt az esetet, amikor a $\{g^2, g, 1\}$ függvényrendszer lineárisan függő. Így a következőkben feltehetjük, hogy g és h is olyan függvények, melyeknél a $\{g^2, g, 1\}$ és $\{h^2, h, 1\}$ függvényrendszerek lineárisan függetlenek.

Térjünk most vissza a (15) egyenlethez. Legyen most $a \neq 0$. Ekkor (15)-öt

$$g(x) = k_0h(x) + 2k \tag{22}$$

alakra hozhatjuk, ahol $k_0 = -b/a$ és $2k = -c/a$. Itt feltehető, hogy $k_0 \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben g azonosan konstans lenne, ezt az esetet azonban korábban már tárgyaltuk. Írjuk a (22) megoldást (14)-be:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta([k_0h + 2k]^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(1, h^2; x_1, x_2) + 2\Delta(k_0h + 2k, h; x_1, x_2) \\ &= \Delta([k_0h + 2k]^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(-h^2, 1; x_1, x_2) + \Delta(-4kh, 1; x_1, x_2) \\ &= \Delta([k_0h + 2k]^2 - h^2 - 4kh, 1; x_1, x_2), \end{aligned}$$

tehát

$$[k_0h(x) + 2k]^2 - h(x)^2 - 4kh(x) \equiv k_3,$$

ahol k_3 konstans számot jelöl. A fenti azonosságot átírva a

$$(k_0^2 - 1)h(x)^2 + (4k_0k - 4k)h(x) + 4k^2 - k_3 \equiv 0$$

alakot kapjuk. Mivel feltettük, hogy a $\{h^2, h, 1\}$ függvényrendszer lineárisan független, a fenti azonosság csak a következő két eset valamelyikeként teljesülhet:

1. $k_0 = 1$ és $k_3 = 4k^2$,
2. $k_0 = -1$ és $k = k_3 = 0$.

Így az első esetben a (22) megoldás

$$g(x) = h(x) + 2k, \quad (23)$$

a másodikban pedig

$$g(x) = -h(x) \quad (24)$$

alakba írható.

Most (23)-at (6)-ba írva, a $\circ$ művelet kommutativitása és asszociativitása miatt az

$$f[(x_1 \circ t) \circ x_2]^2 = f[x_1 \circ (t \circ x_2)]^2$$

egyenletet kapjuk, amiből az

$$\begin{aligned} & [h(x_1 \circ t) + 2k]^2 + 2[h(x_1 \circ t) + 2k]h(x_2) + h(x_2)^2 \\ &= [h(x_1) + 2k]^2 + 2[h(x_1) + 2k]h(x_2 \circ t) + h(x_2 \circ t)^2. \end{aligned}$$

egyenlet adódik. Ez azonban felbontva a zárójeleket és megfelelően csoportosítva a tagokat

$$\begin{aligned} & [h(x_1 \circ t) + k]^2 + 2[h(x_1 \circ t) + k][h(x_2) + k] + [h(x_2) + k]^2 \\ &= [h(x_2 \circ t) + k]^2 + 2[h(x_2 \circ t) + k][h(x_1) + k] + [h(x_1) + k]^2 \end{aligned}$$

alakra hozható, melynél bevezetve a

$$h'(x) = h(x) + k, \quad \text{és} \quad (25)$$

$$\tau_t h(x) = h(x \circ t)$$

jelöléseket, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\Delta(\tau_t h'^2, 1; x_1, x_2) + 2\Delta(\tau_t h', h'; x_1, x_2) - \Delta(h'^2, 1; x_1, x_2) = 0. \quad (26)$$

Ha ezt bővítjük a konstans 1 függvénnyel, azt kapjuk, hogy

$$2\Delta(\tau_t h', h', 1; x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Léteznek tehát olyan $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ x -től független konstansok, melyekkel $a(t)$, $b(t)$ és $c(t)$ nem egyszerre nulla esetén

$$a(t) \cdot \tau_t h'(x) + b(t) \cdot h'(x) + c(t) \cdot 1 \equiv 0$$

teljesül. Mivel h nem azonosan konstans, ezért h' sem lehet az, tehát $a(t)$ sehol sem lehet nulla. Így

$$\tau_t h'(x) = h'(x \circ t) = \alpha(t)h'(x) + \beta(t), \quad (27)$$

ahol $\alpha(t) = -b(t)/a(t)$ és $\beta(t) = -c(t)/a(t)$.

A (27) egyenlet alapján $x_1 \circ t$ kommutativitása miatt a

$$\Delta(\alpha, h'; x_1, x_2) + \Delta(\beta, 1; x_1, x_2) = 0 \quad (28)$$

egyenlet írható, majd ezt 1-gyel bővítve

$$\Delta(\alpha, h', 1; x_1, x_2, x_3) = 0$$

következik. Léteznek tehát olyan a , b és c egyszerre nem mind zéró konstansok, melyekkel

$$a \cdot \alpha(x) + b \cdot h'(x) + c \cdot 1 \equiv 0$$

teljesül.

Nyilván $a \neq 0$, mert ellenkező esetben $h'(x)$ azonosan konstans lenne. Így

$$\alpha(x) = k_3 h'(x) + k_4$$

adódik a $k_3 = -b/a$ és $k_4 = -c/a$ jelölések mellett. (28)-ból pedig

$$0 = \Delta(k_3 h' + k_4, h'; x_1, x_2) + \Delta(\beta, 1; x_1, x_2) = \Delta(\beta - k_4 h', 1; x_1, x_2),$$

azaz

$$\beta(x) - k_4 h'(x) = k_5.$$

Ezen megoldásokkal (27)-ből

$$h'(x \circ t) = k_3 h'(t)h'(x) + k_4 h'(x) + k_4 h'(t) + k_5,$$

amiből $k_3 = 0$ esetben

$$h'(x) = \phi(x) - k_5, \text{ ahol } k_4 = 1 \text{ és} \quad (29)$$

$$\phi(x \circ t) = \phi(x) + \phi(t),$$

illetve $k_3 \neq 0$ esetben a $k_5 = (k_4^2 - k_4)/k_3$, $k_6 = 1/k_3$ és $k_7 = -k_4/k_3$ jelöléseket bevezetve

$$h'(x) = k_6\psi(x) + k_7, \quad \text{ahol} \quad (30)$$

$$\psi(x \circ t) = \psi(x)\psi(t),$$

következik [1].

Így (25) és (29) alapján a megoldás

$$h(x) = \phi(x) + k_2, \quad k_2 = -k - k_5$$

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) + \phi(y),$$

(22) miatt pedig

$$g(x) = \phi(x) + k_1, \quad k_1 = k - k_5.$$

Végül (6) szerint

$$f(x \circ y)^2 = [\phi(x) + k_1 + \phi(y) + k_2]^2 = [\phi(x) + \phi(y) + k_1 + k_2]^2,$$

tehát

$$f(x) = e(x) [\phi(x) + k_1 + k_2], \quad \text{ahol } e(x)^2 = 1.$$

E megoldások valóban (9) alakúak.

Írjuk most a (30) megoldást (26)-ba:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(k_6^2\psi(t)^2\psi^2 + 2k_6k_7\psi(t)\psi + k_7^2, 1; x_1, x_2) + 2\Delta(k_6\psi(t)\psi + k_7, k_6\psi + k_7; x_1, x_2) \\ &\quad - \Delta(k_6^2\psi^2 + 2k_6k_7\psi + k_7^2, 1; x_1, x_2) \\ &= k_6^2\psi(t)^2\Delta(\psi^2, 1; x_1, x_2) + 2k_6k_7\psi(t)\Delta(\psi, 1; x_1, x_2) - 2k_6k_7\Delta(\psi, 1; x_1, x_2) \\ &\quad + 2k_6k_7\psi(t)\Delta(\psi, 1; x_1, x_2) - k_6^2\Delta(\psi^2, 1; x_1, x_2) - 2k_6k_7\Delta(\psi, 1; x_1, x_2) \end{aligned}$$

azaz

$$0 = k_6^2 [\psi(t)^2 - 1] \Delta(\psi^2, 1; x_1, x_2) + 4k_6k_7 [\psi(t) - 1] \Delta(\psi, 1; x_1, x_2). \quad (31)$$

Bővítsük ezt az egyenletet ψ -vel:

$$0 = k_6^2 [\psi(t)^2 - 1] \Delta(\psi^2, \psi, 1; x_1, x_2, x_3).$$

(30)-ból látható, hogy $k_6 = 0$ nem jöhet szóva, mert akkor h' azonosan konstans lenne. Ugyanezért a ψ azonosan konstans esetet is elintéztünk tekinthetjük, tehát az előbbi egyenletből

$$\psi(x)^2 = k_8\psi(x) + k_9 \quad (32)$$

következik (ez tartalmazza a $\psi(x)^2 \equiv 1$ esetet is). A (26) és (30) képletek alaján $k_6 \neq 0$ miatt

$$\psi(x) = \frac{1}{k_6} [h(x) + k - k_7]. \quad (33)$$

Ha most (32) fennállna, ez (33)-mal együtt a $\{h^2, h, 1\}$ függvényrendszer lineáris függőségét jelentené. Ezt az esetet azonban az előbbieken már kizártuk. (30)-ból tehát nem adódott megoldás.

Térjünk most vissza a (24) összefüggéshez. Mivel a $\circ$ művelet asszociatív, így minden $x_1, x_2, t \in Q$ esetén

$$f[(x_1 \circ t) \circ x_2]^2 = f[x_1 \circ (t \circ x_2)]^2,$$

ami a (6) függvényegyenlet miatt éppen azt jelenti, hogy

$$g(x_1 \circ t)^2 - 2g(x_1 \circ t)g(x_2) + g(x_2)^2 = g(x_2 \circ t)^2 - 2g(x_2 \circ t)g(x_1) + g(x_1)^2,$$

teljesül. Ezt determinánsos alakba írva és a konstans 1 függvénnyel bővítve

$$\Delta(\tau_t g^2, 1; x_1, x_2) - 2\Delta(\tau_t g, g; x_1, x_2) + \Delta(1, g^2; x_1, x_2) = 0, \quad (34)$$

$$-2\Delta(\tau_t g, g, 1; x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Minden $t \in Q$ esetén léteznek olyan $a(t)$, $b(t)$ és $c(t)$ egyszerre nem mind nulla konstansok úgy, hogy

$$a(t) \cdot \tau_t g(x) + b(t) \cdot g(x) + c(t) \cdot 1 \equiv 0$$

teljesül. Mivel g nem azonosan konstans, ezért $a(t)$ sehol sem tűnhet el, így

$$\tau_t g(x) = \alpha(t)g(x) + \beta(t) \quad (35)$$

lesz, ahol $\alpha(t) = -b(t)/a(t)$ és $\beta(t) = -c(t)/a(t)$.

A (27), (28), (29) és (30) összefüggésekkel teljesen analóg módon kapjuk, hogy

$$g(x) = \phi(x) + k_4, \quad \text{ahol} \quad \phi(x \circ t) = \phi(x) + \phi(t) \quad (36)$$

vagy

$$g(x) = k_5\psi(x) + k_6, \quad \text{ahol} \quad \psi(x \circ t) = \psi(x)\psi(t) \quad (37)$$

fennáll.

A (36) függvénynek természetesen (34)-et is ki kell elégítenie, tehát

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(\phi^2 + 2\phi(t)\phi + \phi(t)^2 + 2k_4\phi + 2k_4\phi(t) + k_4^2, 1; x_1, x_2) \\ &\quad - 2\Delta(\phi + \phi(t) + k_4, \phi + k_4; x_1, x_2) - \Delta(\phi^2 + 2k_4\phi + k_4^2, 1; x_1, x_2) \\ &= 4\phi(t)\Delta(\phi, 1; x_1, x_2). \end{aligned}$$

Ez az egyenlet azonban csak akkor teljesül, ha ϕ azonosan konstans, ami viszont (36) miatt azt jelentené, hogy g is azonosan konstans lenne, tehát ezt az esetet nem vizsgáljuk.

Végül a (37) megoldást írjuk (34)-be:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(k_5^2\psi(t)^2\psi^2 + 2k_5k_6\psi(t)\psi + k_6^2, 1; x_1, x_2) - 2\Delta(k_5\psi(t)\psi + k_6, k_5\psi + k_6; x_1, x_2) \\ &\quad + \Delta(1, k_5^2\psi^2 + 2k_5k_6\psi + k_6^2; x_1, x_2) \\ &= k_5^2 [\psi(t)^2 - 1] \Delta(\psi^2, 1; x_1, x_2) + 2k_6 [1 - k_5] \Delta(\psi, 1; x_1, x_2). \end{aligned}$$

Innen már teljesen úgy haldunk tovább, mint a (31) egyenlet esetében tettük. A ψ -vel való bővítés után kiderül, hogy

$$\psi(x)^2 = k_7\psi(x) + k_8,$$

majd a (37) egyenlet alapján azt kapjuk, hogy ez a $\{g^2, g, 1\}$ függvényrendszer lineáris függőségét jelentené.

Minden esetet megvizsgáltunk, más megoldások tehát nincsenek.

Végül megmutatjuk, hogy (7), (8) és (9) valóban kielégítik a (6) egyenletet. Tekintsük elsőként a (7)-ben felírt függvényhármast. Ekkor

$$\begin{aligned} [g(x) + h(y)]^2 &= [c_2e(x) - c_1 + c_2c_3e(y) + c_1]^2 = c_2^2 [e(x) + c_3e(y)]^2 \\ &= c_2^2 [e(x)^2 + 2c_3e(x)e(y) + c_3^2e(y)^2] = c_2^2 [1 + d \cdot 2c_3e(x \circ y) + c_3^2] \\ &= f(x \circ y)^2. \end{aligned}$$

A (8)-ban g és h helyettesítésével adódik, hogy

$$\begin{aligned}
[g(x) + h(y)]^2 &= [c_2 e(x) - c_1 + c_2 e(y) + d \cdot c_2 + c_1]^2 = c_2^2 [e(x) + e(y) + d]^2 \\
&= c_2^2 [e(x)^2 + 2e(x)e(y) + d \cdot 2e(x) + e(y)^2 + d \cdot 2e(y) + d^2] \\
&= c_2^2 [1 + 2e(x)e(y) + d \cdot 2e(x) + 1 + d \cdot 2e(y) + d^2] \\
&= c_2^2 [1 + 2e(x)e(y) + d \cdot 2e(x) + d \cdot 2e(y) + 2d^2] \\
&= c_2^2 [1 + 2(e(x)e(y) + d \cdot e(x) + d \cdot e(y) + d^2)] \\
&= c_2^2 [1 + 2(e(x) + d)(e(y) + d)] = c_2^2 [1 + d \cdot 4(e(x \circ y) + d)] \\
&= c_2^2 [1 + d \cdot 4e(x \circ y) + 4d^2] = c_2^2 [5 + d \cdot 4e(x \circ y)] = f(x \circ y)^2.
\end{aligned}$$

Majd a (9)-ben ugyanígy számolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
[g(x) + h(y)]^2 &= [\phi(x) + c_1 + \phi(y) + c_2]^2 = [\phi(x) + \phi(y) + c_1 + c_2]^2 \\
&= [\phi(x \circ y) + c_1 + c_2]^2 = f(x \circ y)^2.
\end{aligned}$$

□

Megjegyzések, következmények

3.1. MEGJEGYZÉS. A (7), (8) és (9) megoldásokból kitűnik, hogy a (6) egyenlet még akkor sem ekvivalens a Pexider-egyenlettel, ha f, g, h mindenütt folytonos függvények. Például $x \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) = -cx - k_1 - k_2, \quad g(x) = cx + k_1, \quad h(x) = cx + k_2$$

függvényhármassal a (6) egyenletet kielégíti, de $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén a Pexider-egyenletet nem.

Általában a (6) egyenlet csak $f(x)^2$ -re ad összefüggést, közvetlenül $f(x)$ -re nincs feltételünk.

3.2. MEGJEGYZÉS. Ha $K = \mathbb{Z}_2$, akkor (6) és a Pexider-egyenlet:

$$f(x \circ y) = g(x) + h(y), \quad (38)$$

ahol $x, y \in Q$, nyilvánvalóan ekvivalensek.

3.3. MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy például $e : \mathbb{Z} \rightarrow K, d \in \{-1, 1\}$ esetén a következő feltételek ekvivalensek:

$$\begin{aligned} I. & \quad e(x)^2 = 1 \quad (x \in \mathbb{Z}), \quad de(x+y) = e(x)e(y) \quad x, y \in \mathbb{Z} \\ II. & \quad \text{létezik } \delta \in \{-1, 1\} \text{ úgy, hogy } e(x) = \begin{cases} d, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ \delta, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases} \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Ha az I. feltétel teljesül, akkor minden $x \in \mathbb{Z}$ esetén $de(2x) = e(x)^2 = 1 = d^2$ miatt $e(2x) = d$, illetve $de(x+2) = e(x)e(2) = e(x)d$ miatt $e(x+2) = e(x)$, tehát a II. tulajdonság is fennáll.

Megfordítva, ha a II. feltétel teljesül, akkor behelyettesítéssel (3 esetet megkülönböztetve aszerint, hogy x és y közül hány darab páratlan $[0, 1$ vagy $2]$) ellenőrizhető az I. feltételrendszer érvényessége. $\square$

3.4. ÁLLÍTÁS. Ha Q 2-osztható abban az értelemben, hogy bármely $x \in Q$ esetén létezik $z \in Q$, melyre $x = z \circ z$, akkor $d \in K$, $d^2 = 1$ esetén

$$\begin{cases} e(x)^2 = 1 & (x \in Q) \\ de(x \circ y) = e(x)e(y) & (x, y \in Q) \end{cases}$$

pontosan akkor, ha $e(x) = d$ ($x \in Q$).

$$[de(x) = de(z \circ z) = e(z)^2 = 1]$$

3.5. ÁLLÍTÁS. Ha $(Q, \circ)$ Abel-csoport, akkor $d \in K$, $d^2 = 1$ esetén

$$\begin{cases} e(x)^2 = 1 & (x \in Q) \\ d \cdot 2[e(x \circ y) + d] = [e(x) + d][e(y) + d] & (x, y \in Q) \end{cases}$$

pontosan akkor, ha $e(x) = d$ ($x \in Q$) vagy $e(x) = -d$ ($x \in Q$) (azaz $e : Q \rightarrow \{-1, 1\}$ konstans).

BIZONYÍTÁS. Ha $e(y_0) = -d$ valamely $y_0 \in Q$ esetén, akkor minden $x \in Q$ -ra létezik $u \in Q$ úgy, hogy $x = u \circ y_0$, ezért $d \cdot 2[e(x) + d] = d \cdot 2[e(u \circ y_0) + d] = [e(u) + d][e(y_0) + d] = (e(u) + d) \cdot 0 = 0$, vagyis $e(x) = -d$.

Ha $e(x) \neq -d$ ($x \in Q$), akkor $e(x)^2 = 1 = d^2$ miatt $e(x) = d$ ($x \in Q$). $\square$

3.6. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $(Q, \circ)$ 2-osztható Abel-csoport. Ekkor az $f, g, h : Q \rightarrow K$ függvényekre akkor és csak akkor teljesül minden $x, y \in Q$ esetén a (6) függvényegyenlet, ha létezik $c_1, c_2 \in K$ és $\phi : Q \rightarrow K$ úgy, hogy minden $x \in Q$ esetén

$$f(x)^2 = [\phi(x) + c_1 + c_2]^2,$$

$$g(x) = \phi(x) + c_1 \quad \text{és}$$

$$h(x) = \phi(x) + c_2;$$

ahol $\phi(x \circ y) = \phi(x) + \phi(y)$ teljesül minden $x, y \in Q$ esetén.

3.7. MEGJEGYZÉS. Az előző tétel feltételei teljesülnek például akkor, ha $(Q, \circ)$ speciálisan $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ vagy $(\mathbb{Z}_p, +)$ (ahol $p \geq 3$ prímszám).

3.8. MEGJEGYZÉS. A 2.1. Tételben felsorolt három eset egyike sem hagyható el, ugyanis van olyan, a tétel feltételeinek eleget tevő alaphalmaz, amelyen a három eset mindegyikére adható olyan példa, ami nem állítható elő a másik két esetben leírt formulák egyikével sem.

BIZONYÍTÁS. Először is tegyük fel, hogy $(Q, \circ) = (\mathbb{N}, \cdot)$ és $K = \mathbb{R}$.

I. Ekkor a 2.1. Tétel (iii) esetében $\phi(x) = \ln x$ ($x \in \mathbb{N}$) és $c_1 = c_2 = 0$ választással

$$\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y), \quad (39)$$

$f(x) = g(x) = h(x) = \phi(x)$ (felülről) nem korlátos, tehát (f, g, h) példa a (iii) esetre, de nem tartozik az (i) és (ii) esetekhez, mert azokban minden függvény korlátos.

Másrésről, ha (39) teljesül és $\phi(x_0) \neq 0$ valamely $x_0 \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $\phi(x_0^n) = n\phi(x_0)$ miatt ϕ és vele $g(x) = \phi(x) + c_1$, $h(x) = \phi(x) + c_2$ nem korlátos, tehát az (iii) eset nem konstans példái nem korlátosak.

Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy (i)-nek és (ii)-nek vannak olyan (nem konstans) megoldásai, melyek a másik feltétel-rendszert nem teljesítik.

II. Elsőként vegyünk egy olyan $e_0(x)$ -et, mely teljesíti a rá vonatkozó (i)-beli feltételeket. Ilyen nemkonstans függvény például

$$e_0 \left(\prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j} \right) = d_0 (-1)^{\sum_{j=1}^r \alpha_j}, \quad e_0(1) = d_0,$$

ahol $d_0^2 = 1$. Ekkor legyen $g(x) = h(x) = e_0(x)$, azaz $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 1$, $d = d_0$, $e(x) = e_0(x)$. Így $f(x)^2 = 2(1 + d_0 e_0(x))$. Ez példa (i)-re.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy lehet-e ez a (ii) speciális esete. Ekkor

$$e_0(x) = g(x) = c_2 e(x) - c_1,$$

ami $e_0(x) = 1$ esetén az

$$1 = c_2 e(x) - c_1$$

egyenletet adja, míg $e_0(y) = -1$ esetén a

$$-1 = c_2 e(y) - c_1$$

egyenlethez jutunk. A kapott egyenleteket egymásból kivonva $2 = c_2(e(x) - e(y))$ adódik, melyből következik, hogy $c_2 \neq 0$ és ilyenkor $e(x) \neq e(y)$. Valamint ha $e_0(z) = e_0(w)$, akkor $c_2e(z) - c_1 = c_2e(w) - c_1$, így $c_2(e(z) - e(w)) = 0$, vagyis $e(z) = e(w)$. Ebből az adódik, hogy $e(x) = \delta e_0(x)$ ($x \in \mathbb{N}$), ahol $\delta^2 = 1$.

Tehát

$$1 = c_2\delta - c_1,$$

$$-1 = -c_2\delta - c_1.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy $c_1 = 0$, továbbá így $c_2\delta = 1 = \delta^2$, amiből $c_2 = \delta$ adódik.

Illetve $e_0(x) = h(x) = c_2[e(x) + d] + c_1 = \delta[\delta e_0(x) + d] = \delta^2 e_0(x) + \delta d = e_0(x) + \delta d$, azaz $\delta d = 0$, ami lehetetlen, mert $\delta, d \in \{-1, 1\}$. Tehát ez nem speciális esete (ii)-nek.

III. Vegyük most a (ii) $e(x)$ -re vonatkozó feltételeit teljesítő

$$e_1(x) = \begin{cases} d_1, & \text{ha } x \text{ páratlan} \\ -d_1, & \text{ha } x \text{ páros} \end{cases}, \quad d_1^2 = 1 \quad (40)$$

függvényt. Ekkor legyen $g(x) = e_1(x)$ ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d = d_1$, $e(x) = e_1(x)$ választással), melyből $h(x) = e_1(x) + d_1$ és $f(x)^2 = 5 + 4d_1e_1(x)$ következik. Ez példa (ii)-re.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy lehet-e ez az (i) speciális esete. Ekkor

$$e_1(x) = g(x) = c_2e(x) - c_1,$$

ami $e_1(x) = 1$ esetén az

$$1 = c_2e(x) - c_1,$$

míg $e(y) = -1$ esetén az

$$-1 = c_2e(y) - c_1$$

egyenleteket adja. A kapott egyenleteket egymásból kivonva kapjuk, hogy $2 = c_2(e(x) - e(y))$, melyből következik, hogy $c_2 \neq 0$ és ilyenkor $e(x) \neq e(y)$. Valamint ha $e_1(z) = e_1(w)$, akkor $c_2e(z) - c_1 = c_2e(w) - c_1$ és így $c_2(e(z) - e(w)) = 0$, tehát $e(z) = e(w)$. Ebből adódik, hogy $e(x) = \delta e_1(x)$ ($x \in \mathbb{N}$), ahol $\delta^2 = 1$.

Tehát

$$1 = c_2\delta - c_1,$$

$$-1 = -c_2\delta - c_1.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy $c_1 = 0$ és így $\delta^2 = 1 = c_2\delta$ -ból következik, hogy $c_2 = \delta$.

Illetve $e_1(x) + d_1 = h(x) = c_2c_3e(x) + c_1 = \delta c_3\delta e_1(x) = c_3e_1(x)$, azaz

$$e_1(x)(c_3 - 1) = d_1.$$

Mivel c_3 és d_1 konstansok, ezért ebből azt kapnánk, hogy $e_1(x)$ is konstans, ellentétben a (40) konstrukcióval.

□

Irodalomjegyzék

- [1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* Birkhäuser Verlag, Basel, 1961
- [2] H. W. Pexider, *Notiz über Funktionaltheoreme* Monatsh. Math. Phys., **14** (1903), 293–301.
- [3] E. Vincze, *Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen. I.* Publ. Math. Debrecen, **9** (1962), 149–163.
- [4] E. Vincze, *Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen. II.* Publ. Math. Debrecen, **9** (1962), 314–323.
- [5] E. Vincze, *Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen. III, IV.* Publ. Math. Debrecen, **10** (1963), 191–202.
- [6] E. Vincze, *Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen. III, IV.* Publ. Math. Debrecen, **10** (1963), 283–318.
- [7] E. Vincze, *Über eine Verallgemeinerung der Pexiderschen Funktionalgleichungen* Studia Univ. Babeş-Bolyai, 1962, 103–106.
- [8] E. Vincze, *Alternatív függvényegyenletek megoldásairól*, Mat. Lapok **15** (1964), 179–195.
- [9] E. Vincze, *Beitrag zur Theorie der Cauchyschen Funktionalgleichungen*, Arch. Math. **15** (1964), 132–135.
- [10] E. Vincze, *Über eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Funktionalgleichung*, Funkcialaj Ekvacioj **6** (1964), 55–62.