

OTDK-DOLGOZAT

Horváth Ferenc

M.Sc.

2013

**A TŐKEALLOKÁCIÓ STABILITÁSÁNAK
ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLATA**

**SENSITIVITY ANALYSIS OF
RISK CAPITAL ALLOCATION**

Horváth Ferenc

Kézirat lezárva: 2012. március 25.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Koherens kockázati mértékek	3
Elosztási módszerek és hatékonyság.....	6
A Shapley-féle tőkeallokációs módszer	11
Stabilitási (magbeliségi) arány.....	15
A véletlen korrelációs mátrix generálásának módszere.....	17
Determinisztikus korrelációs mátrix.....	20
Szórás	22
Összegzés.....	24
Hivatkozások.....	26

Táblázatok jegyzéke

- 1. táblázat** Az alegységek, illetve a koalíciók által tartott eszközök értéke 16. oldal
- 2. táblázat** Az alegységek, illetve a koalíciók lehetséges profitjai 16. oldal
- 3. táblázat** Az alegységek, illetve a koalíciók értéke és az alegységek hozzájárulása a koalíciók értékéhez 16. oldal

Bevezetés

Jelen dolgozatomban azt vizsgálom, hogy bizonyos feltételezésekkel élve (például a hozamok eloszlására, a likviditási politikára, a korrelációs mátrixra stb.) a Shapley-féle kockázelosztási módszer milyen mértékben tekinthető stabilnak, illetve melyek azok a feltételek, amelyek teljesülése esetén ez a stabilitás maximális. Önmagában ez a kérdés nehezen értelmezhető, hiszen a kockázelosztási módszerek világa a maga matematikai precizitásával összhangban fekete-fehér: egy adott allokációs módszer vagy stabil, vagy nem. Ezért (is) szükséges a használt fogalmak, az alkalmazott módszerek, illetve a feltételezések pontos definiálása: mit is értünk stabilitás alatt, mit jelent a Shapley-féle tőkeallokációs módszer a befektetések világára vonatkoztatva, mit tekintünk likviditási politikának stb.¹

Dolgozatom motivációjául azoknak a feltételeknek a meghatározása szolgált, amelyek teljesülése esetén a Shapley-féle tőkeallokációs módszer alkalmazása az együttműködő partnerek (különösen a pénzintézetek, illetve befektetési intézmények divíziói) között hatékony és igazságos elosztást tesz lehetővé. Ezeknek a feltételeknek a feltérképezése – ahogyan azt a dolgozatom későbbi részében részletesen kifejtem – elősegíti a hatékony kockázatkezelést, makroszinten pedig – a makroprudenciális elvekkel való erőteljesebb összhang miatt – egy stabilabb pénzügyi rendszer létrejöttét és fennállását.

A következő néhány mondatban bemutatom, hogy leegyszerűsítve miről is van szó. Tegyük fel, hogy van három bank, amelyek befektetési tevékenységet végeznek. A bankok kockázata az Expected Shortfall (ES)² mutató alapján rendre 10, 15 és 20 egység. Ha a három bank koalíciót alkot, azaz úgy döntenek, hogy közösen fektetik be azt az összeget, amelyet eredetileg külön-külön szerettek volna befektetni, a kockázatukat kifejező Expected Shortfall a diverzifikáció miatt csökken: tegyük fel, hogy $10 + 15 + 20 = 45$ egység helyett 35 egység lesz. Mivel a bankok által tartandó tőke³ nagysága – mind szabályozói előírások miatt, mind az adott pénzintézet saját „józan” belátása alapján – szoros összefüggésben van a vállalt

¹ A dolgozat bevezető részében sok, az Olvasó számára ismeretlen fogalom szerepelhet. Kérem, ettől ne ijedjen meg: az előforduló fogalmakat és az értelmezési keretet a későbbiekben részletesen és precízen definiálom.

² Az Expected Shortfallra mint kockázati mutatóra a magyar pénzügyi szaknyelvben nem igazán találni gyakran használt, meghonosodott elnevezést. Olykor a „várható veszteség” kifejezéssel találkozhatunk, de annak kevésbé elterjedt volta (Varga-Haszonits [2009]) miatt dolgozatom további részében az angol Expected Shortfall kifejezést használom. Az Expected Shortfall mutatóról részletesebben ír Jorion [2006].

³ A „tőke” kifejezés itt nem szigorúan a számviteli saját tőke kategóriát jelenti, hiszen a számviteli idegen tőke egyes részei olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyek alapján kockázatkezelési szempontból inkább a saját tőke részeként tekinthetünk rájuk. Például az alárendelt kölcsöntőke számviteli értelemben idegen tőkeként jelenik meg a mérlegben, de a rendelkezésre állása („visszakövetelhetősége”) alapján közelebb áll a saját tőkéhez.

kockázat mértékével (nagyobb kockázat esetén nagyobb tőkét tartanak), a koalíció létrejötte miatti kockázatsökkenés a három intézmény számára azt jelenti, hogy összességében kevesebb tőkét kell tartaniuk. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel továbbá, hogy a bankok által tartandó tőke megegyezik az Expected Shortfall nagyságával. A kevesebb tőke tartása kisebb alternatív költséget (*opportunity cost*) jelent, ezáltal a koalíciót alkotó intézmények jövedelmezősége, profitja nő. A kérdés már csak az, hogy hogyan osztozik meg a három intézmény a koalíció létrejötte miatti pótlólagos profiton, amely annak következtében termelődött meg, hogy nem 45, hanem 35 egységnyi tőkét tartottak. Ez a kérdés megfogalmazható egy másik megközelítésben is: hogyan ossza meg a három intézmény a 10 egységnyi (45 – 35) „tőkemegtakarítást”.⁴ A játékelméleti szakirodalomban különféle módszerek találhatók ennek a kérdésnek a megválaszolására. Dolgozatomban ezek közül a Shapley-féle allokációs módszert fogom részletesen megvizsgálni. Ennek oka, hogy az egyes elosztási módszerek közül egyedül a Shapley módszer felel meg a szimmetrikus (*Equal Treatment Property*) és az ösztönző (*Strong Monotonicity*) tulajdonságnak. Bizonyítható viszont, hogy a Shapley módszer nem stabil, más néven nem magbeli (*Core Compatibility*). Léteznek ugyanakkor olyan körülmények, feltételek, amelyek teljesülése esetén a Shapley módszer stabilitásának hiánya inkább csak elméleti problémának tekinthető, és a gyakorlatban – a dolgozatban később részletesen definiálandó értelemben – a stabilitási arány akár 90% fölé is mehet, sőt a 100%-ot is megközelítheti. Jelen dolgozatomban ezeket a feltételeket tárom fel: meghatározom, hogy minek kell ahhoz teljesülnie, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer mellett, hogy szimmetrikus és ösztönző, a gyakorlati alkalmazás során a stabilitási tulajdonságnak is megfeleljen.

⁴ Ezt a 10 egységet – a későbbiekben majd pontosan definiálva azt – a koalíció értékének fogom nevezni.

Koherens kockázati mértékek

A pénzügyi szakirodalomban a jövőre, jövőbeli kimenetekre vonatkozó bizonyosság fokát három fogalommal szokás jellemezni: egy adott esemény megtörténtében biztosak vagyunk (*bizonyosság*); nem tudjuk pontosan, hogy mi fog történni a jövőben, de vannak elképzeléseink, és a kimeneteket valószínűségi számítási eszközökkel jellemezni tudjuk (*kockázatoság*); vagy egyáltalán semmit nem tudunk a jövőről (*bizonytalanság*). A pénzügyi közgazdaságtanban ezen három fogalom közül a kockázatoság az, amely tudományos szempontból a leginkább érdekes, hiszen ha valamit biztosra tudunk (*bizonyosság*), vagy ha valamiről semmit sem tudunk (*bizonytalanság*), nehéz szakértőként jelentőséggel bíró és felelősségteljes döntést hozni.⁵

Rögtön adódik a kérdés, hogy hogyan mérhetjük valamely befektetési pozíció kockázatoságát. A kockázat mérésére különféle mutatószámok léteznek: a hozam szórása vagy varianciája, a kockázatosított érték (*Value at Risk*, *VaR*), a már a bevezetőben említett Expected Shortfall (*ES*) stb. Ezeket a mutatószámokat, amelyek a kockázat mérésére szolgálnak, kockázati mértékeknek hívjuk. Definiáljunk egy véges valószínűségi mezőt $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$, ahol Ω a lehetséges kimenetek halmazát jelenti. Egy egység (*unit*) – ami lehet például egy bank – véges számú alegységből (*subunit*) – például a bank divíziói – áll. Definiáljunk egy adott i alegységet egy $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változóval⁶; az összes, az $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$ véges valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változó halmazát pedig jelöljük $\mathcal{X}$ -szel. Ekkor a $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezzük. A ρ függvény minden portfólióhoz hozzárendel egy valós számot (amit az egyszerűség kedvéért egy pénzben kifejezett összegként képzelhetünk el), például az adott portfólió szórását vagy VaR-ját.

A kockázati mértékekkel szemben ugyanakkor „jogos” elvárás, hogy bizonyos követelményeknek megfeleljenek, például egy kockázatosabb pozíció magasabb értéket kapjon, mint egy kevésbé kockázatos. Ahhoz, hogy egy kockázati mérték koherensnek nevezhesünk, négy követelménynek kell megfelelnie (Artzner, Delbaen, Eber és Heath [1999]; Csóka [2003]): monotonitás (*monotonicity*), szubadditivitás (*subadditivity*), elsőfokú homogenitás (*positive homogeneity*) és sallangmentesség (*translation invariance*). Azaz: egy ρ kockázati mérték koherensnek nevezünk, ha minden $X_i, X_j \in \mathbb{R}^S$ esetén (ahol S az X_i és X_j

⁵ Előbbi esetben azért, mert bizonyosság esetén a döntés meghozatalához nincs szükség szakértői tudásra; utóbbi esetben pedig azért, mert nem létezik olyan szakértői tudás, amellyel a véletlenszerű tippelésnél hatékonyabb döntéshozatal lehetséges.

⁶ Tehát az X_i -t felfoghatjuk egy véges elemszámú vektornak, ahol a vektor egyes elemeihez tartozó valószínűségek előre rögzítettek, és az X_i vektor tartalmazza a lehetséges profitokat (azaz a lehetséges kimeneteket).

vektorok elemeinek számát, azaz a lehetséges kimenetek számát jelenti) teljesíti a következő négy axiómát:

- monotonitás: ha $X_i \geq X_j$, akkor $\rho(X_i) \leq \rho(X_j)$
- szubadditivitás: $\rho(X_i + X_j) \leq \rho(X_i) + \rho(X_j)$
- elsőfokú homogenitás: minden $\lambda \geq 0$ pozitív valós számra $\rho(\lambda X_i) = \lambda \rho(X_i)$
- sallangmentesség: minden $\alpha \in \mathbb{R}$ számra $\rho(X_i + \alpha 1^S) = \rho(X_i) - \alpha$, ahol 1^S az S elemű összegzővektort jelöli.

A monotonitás azt jelenti, hogy ha egy alegység egyetlen kimenetel esetén sem realizál alacsonyabb hozamot egy másik alegységnél, akkor az előbbi alegység pozíciójának kockázata a ρ kockázati mérték szerint nem lehet nagyobb az utóbbi alegység kockázatánál.

A szubadditivitás értelmezéséhez szükséges egy új fogalom bevezetése: a koalícióé. Jelöljük egy egység alegységeinek a halmazát $\mathcal{N}$ -nel! Ekkor koalíciónak az $\mathcal{N}$ halmaz tetszőleges részhalmazát nevezzük (Solymosi [2009]). Ebből következik, hogy koalíciónak tekinthetjük az üres halmazt is, akárcsak az egy elemű halmazokat, illetve az $\mathcal{N}$ halmaz minden elemét tartalmazó halmazt is.⁷ A szubadditivitás követelménye azt mondja ki, hogy abban az esetben, ha két alegység koalíciót alkot, nem lehet az így létrejött koalíció pozíciójának kockázata a ρ kockázati mérték szerint nagyobb, mint ha a két, koalíciót alkotó alegység pozíciójának kockázatát összeadnánk.

Az elsőfokú homogenitás szerint, ha tekintünk egy tetszőleges alegységet, és az általa tartott pozíciót arányosan megtöbbszörözzük (vagy éppen arányosan valahányad részére csökkentjük), akkor az így létrejövő pozíció ρ kockázati mérték szerinti kockázata az eredeti pozíció kockázatának az új és a régi pozíció nagysága hányadosával megszorzott értéke lesz. Például: ha tekintünk egy tetszőleges portfóliót, és azt megduplázzuk azáltal, hogy a portfóliót alkotó eszközökből kétszer annyit tartunk, mint amennyit eredetileg, az elsőfokú homogenitás kritériumát kielégítő kockázati mérték ilyenkor az újonnan létrejövő portfóliónak éppen kétszer akkora kockázati értéket ad, mint az eredeti portfóliónak.

Végül a negyedik kritérium, a sallangmentesség a készpénz kockázatsökkentő szerepéhez kapcsolódik: ha egy tetszőleges portfólióhoz α egységnyi készpénzt adunk, akkor a ρ szerinti kockázat α egységgel csökken.⁸ A készpénz helyett természetesen bármilyen más

⁷ Az $\mathcal{N}$ halmaz minden elemét tartalmazó (rész)halmazt nagykoalíciónak hívjuk.

⁸ Ezzel összhangban, ha a portfólióból α egységnyi készpénzt vonunk el, a ρ szerinti kockázat α egységgel nő.

kockázatmentes⁹ eszközt is tarthatunk a portfólióban, a sallangmentességnek ugyanúgy igaznak kell lennie, feltéve, hogy az adott eszköz a jövőben egészen biztosan ugyanannyit (nem kevesebbet és nem többet) fog érni, mint a portfólió kockázatosságának vizsgálatakor. A sallangmentesség kritériuma megfogalmazható olyan kockázatmentes eszközre is, amely (explicit vagy implicit) kamatot is hoz a portfólió kockázatosságának vizsgálatát jelentő és a kimenetek bekövetkeztének időpontja között. Ennek részleteiről ír Csóka, Herings és Kóczy [2009].

A leggyakrabban használt kockázati mértékek közé tartozik a szórás (σ) és a kockázatotott érték (*Value at Risk*, *VaR*), ám ezek egyike sem koherens. Koherens kockázati mérték viszont például a szélen mért kockázatotott érték (*Tail Value at Risk*, *Tail Conditional Expectation*) (Meyers [2000]), illetve az Expected Shortfall (*ES*, olykor *Average Value at Risk*, *AVaR* néven találjuk meg a szakirodalomban) (Rachev, Stoyanov és Fabozzi [2008]). Dolgozatom második felében a szimulációkra épülő elemzéseim során az Expected Shortfallt fogom kockázati mértékként használni.

⁹ Lényeges, hogy az adott eszköz kockázatmentes jellege magában foglalja a likviditási kockázattól való mentes-séget is, azaz a jövőben minden nehézség nélkül, költségmentesen pénzzé tehető legyen.

Elosztási módszerek és hatékonyság

Miután létrejött egy koalíció abból a célból, hogy a – megfelelő mérték szerint meghatározott – kockázatát csökkentse, rögtön adódik a kérdés, hogy a diverzifikációból eredő hasznot (ami jelen esetben abban testesül meg, hogy alacsonyabb a tartandó tőke) hogyan osszák meg egymással a koalíció tagjai. Erre a kérdésre a különféle tőkeallokációs módszerek (*capital allocation methods*)¹⁰ adnak választ. A következőkben matematikailag definiálom a tőkeallokációs módszert mint fogalmat (Denault [2001] alapján).

- Tegyük fel, hogy egy adott egység n darab alegységből áll, és minden alegység egyetlen portfóliót tart! Emiatt, hogy minden alegység egyetlen portfóliót tart, a *portfólió* és az *alegység* megnevezések – amennyiben nem ragaszkodunk a szigorú matematikai precizitáshoz – akár szinonimaként, egymással szabadon felcserélve is használhatók, hiszen bár matematikailag két különböző objektumot jelölnek, egyértelműen meghatározzák egymást. Ennek megfelelően a dolgozat további részében én is így, egymással azonos értelemben használom ezt a két kifejezést, éppen a hangsúlyozás szempontjából jobban odaillőt alkalmazva, a háttérben persze hallgatólagosan odafigyelve a matematikai definíció által magában hordozott különbségre, és ha az elnevezés bármilyen félreértésre adna lehetőséget, azt külön jelzem.
- Jelölje az $X_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vektor a i -edik portfólió lehetséges kimeneteleit tartalmazó vektort!
- Az egység kimeneteleit tartalmazó vektort ekkor a következőképpen definiálhatjuk: $X \triangleq \sum_{i=1}^n X_i$. Vegyük észre, hogy az egység az összes alegység koalíciójából jön létre, tehát magát az egységet jelölhetjük $\mathcal{N}$ -nel mint az összes alegységet tartalmazó halmazzal.

¹⁰ A tőkeallokáció (*capital allocation*) kifejezés helyett a szakirodalomban gyakran találkozhatunk a kockázatallokáció (*risk allocation*) kifejezéssel. Az emögött meghúzódó logika a következő: egy adott alegység $\rho(X_i)$ -jét (pénzértékben kifejezve) kockázati tőkének (*risk capital*) nevezzük. A C koalíció azért jön létre, mert a teljes koalíció $\rho(X_C)$ -je kisebb, mint a koalíciót alkotó alegységek egyénileg meghatározott $\rho(X_i)$ -jeinek az összege, azaz „kockázati tőke megtakarítás” keletkezik. Azáltal, hogy ezt a „kockázati tőke megtakarítást” felosztják a koalíciót alkotó alegységek, egyben felosztják a teljes kockázati tőkét is (azaz kiindulási alapként szolgál az eredeti, egyénileg meghatározott kockázati tőkéjük, és ebből kerül levonásra a kockázati tőke megtakarításból rájuk jutó rész). A koalíció kockázati tőkéje viszont (amelyet a tagok az előbbiek szerint felosztanak egymás között) a koalíció kockázatát tükrözi, ezáltal kvázi a kockázatot osztják fel egymás között.

Ugyanakkor kockázatallokáció alatt egyes szerzők gyakran mást értenek, mint amit az előzőekben bemutatam, ezért a dolgozatomban a *tőkeallokáció* vagy a *kockázati tőke allokációja* kifejezéseket fogom használni az egyértelműség kedvéért.

- $\mathcal{A}$ a tőkeallokációs szituációk halmaza: azaz egy olyan halmaz, amelynek elemei az $(\mathcal{N}, \rho, \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}})$ rendezett hármasok, és ezek a hármasok n darab portfóliót, egy ρ koherens kockázati mértéket, illetve az n darab portfólió kimeneteit tartalmazó vektorokat reprezentálnak. Az $(\mathcal{N}, \rho, \{X_i\}_{i \in \mathcal{N}})$ rendezett hármas $X_{\mathcal{N}}^{\rho}$ -val jelölhetjük.
- $\mathcal{K} = \rho(X)$ az egység kockázati tőkéje.
- Így egy tőkeallokációs módszert egy $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényként definiálhatunk, amely minden egyes $X_{\mathcal{N}}^{\rho}$ rendezett hármas egy egyértelmű allokációvá képez le:

$$\Pi : X_{\mathcal{N}}^{\rho} \rightarrow \begin{bmatrix} \Pi_1(X_{\mathcal{N}}^{\rho}) \\ \Pi_2(X_{\mathcal{N}}^{\rho}) \\ \vdots \\ \Pi_n(X_{\mathcal{N}}^{\rho}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{K}_n \end{bmatrix} \text{ úgy, hogy } \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{K}_j = \rho(X) \text{ legyen.}$$

- Egy *koalíció értéke*¹¹ a kockázatkezelés szemszögéből azt mutatja meg, hogy mennyivel (azaz mekkora pénzürtékkel) kisebb a koalíció kockázata, mint a koalíciót alkotó alegységek kockázatának összege, azaz: $v(X_C) \triangleq \sum_{i \in C} \rho(X_i) - \rho(X_C)$.

A szakirodalomban az elosztási módszerek széles körével találkozhatunk. A legismertebbek ezek közül az egyéni kockázattal arányos módszer (*activity based method*) (Hamlen, Hamlen és Tschirhart [1977]), a béta-módszer (*beta-method*), a növekményi módszer (*incremental method*), a költségmódszer (*cost gap method*) (Driessen és Tijs [1986]), az Euler-módszer (*Euler method*), a Shapley-módszer (*Shapley method*) (Shapley [1953]) és a nukleolusz-módszer (*nucleolus method*) (Schmeidler [1969])¹².

Hasonlóan a kockázati mértékek esetéhez, a tőkeallokációs módszerekkel szemben is jogosan támasztunk bizonyos követelményeket. Ilyen követelményekről ír részletesen például Denault [2001] és Kalkbrener [2005]. Elemzésemhez három követelmény definiálására van szükség: szimmetrikusság (*Equal Treatment Property*), ösztönzőség (*Strong Monotonicity*) és stabilitás vagy más néven magbeliség (*Core Compatibility*). Ezen követelmények bemutatása során Balog, Bátyi, Csóka és Pintér [2011a] cikkének gondolatmenetét fogom követni.

¹¹ A játékelméleti szakirodalomban gyakran *karakterisztikus függvénynek* is nevezik a koalíció értékét meghatározó függvényt, a koalíció értéke pedig ennek a függvénynek egy adott helyen (konkrétan a koalíciót létrehozó alegységekhez tartozó helyen) felvett értéke lesz.

¹² Az első négy elosztási módszerről részletesen ír Homburg és Scherpereel [2008].

Egy Π tőkeallokációs módszert szimmetrikusnak nevezünk, ha minden X_N^ρ rendezett hármast és tetszőleges j és k alegységet, illetve tetszőleges $C \subseteq N \setminus \{j, k\}$ koalíciót tekintve az $v(X_{C \cup \{j\}}) - v(X_C) = v(X_{C \cup \{k\}}) - v(X_C)$ egyenlőség fennállása implikálja a $\Pi_j(X_N^\rho) = \Pi_k(X_N^\rho)$ egyenlőség teljesülését. Megfigyelhetjük, hogy az első egyenlőség mindkét oldala egy növekményt tartalmaz: az $v(X_{C \cup \{j\}}) - v(X_C)$ különbség azt mutatja meg, hogy mennyivel fog nőni egy C koalíció értéke, ha csatlakozik a j alegység is a koalícióhoz. Hasonlóképpen értelmezhető az egyenlőség jobb oldala a k alegység csatlakozására a C koalícióhoz. A szimmetrikusság tehát azt követeli meg a tőkeallokációs módszertől, hogy ha két portfólió teljesen azonos a kockázat szempontjából (azaz bármely koalícióhoz való egyéni csatlakozásukkor a koalíció értékét ugyanakkora mértékben változtatják meg, és ez minden koherens kockázati mértékre, illetve minden egységre igaz), akkor ugyanakkora tőkerész jusson rájuk a tőkeallokáció során.

Egy Π tőkeallokációs módszert ösztönzőnek nevezünk, ha minden $X_N^{\rho_1}, Y_N^{\rho_2} \in \mathcal{A}$ és minden $j \in N$ esetén tetszőleges $C \subseteq N$ -re a $v_1(X_{C \cup \{j\}}) - v_1(X_C) \leq v_2(Y_{C \cup \{j\}}) - v_2(Y_C)$ egyenlőtlenség fennállása implikálja a $\Pi_j(X_N^{\rho_1}) \leq \Pi_j(Y_N^{\rho_2})$ egyenlőtlenség fennállását, ahol v_1 a koalíció értékét jelenti akkor, ha az alkalmazott kockázati mérték a ρ_1 , v_2 pedig a koalíció értéke akkor, ha az alkalmazott kockázati mérték a ρ_2 . Y_i a lehetséges profitok (kimenetek) vektorát jelenti ugyanarra az alegységre vonatkozóan, amelyhez az X_i vektor is tartozik, de abban az esetben, ha ez az alegység egy másik (az X_i profitvektortól eltérő profitvektorral rendelkező) portfóliót tart.¹³

Az ösztönzőség kritériuma két részre bontható. Nézzük először az első kritériumot! Eszerint, ha egy tetszőleges alegység bármely koalíció értékéhez való hozzájárulását két, nem feltétlenül azonos kockázati mérték szerint határozzuk meg, és az első kockázati mérték szerint az alegység nem nagyobb mértékben (azaz nem nagyobb összeggel) járul hozzá az adott koalíció értékéhez, mint a második kockázati mérték szerint, akkor a koalíció kockázati tőkéjéből sem juthat rá nagyobb rész (azaz nagyobb összeg), mint a második kockázati mérték használata esetén jutna.¹⁴

¹³ A két portfólió lehet azonos is, azaz az X_i profitvektor megegyezhet az Y_i profitvektorral. A szövegbeli megfogalmazással célok annak érzékeltetése volt, hogy az eltérés megengedett, de semmi nem tiltja a teljes egyezőséget a két portfólió között.

¹⁴ Az ösztönzőségi kritérium ezen része a következőképpen fogalmazható meg: egy Π tőkeallokációs módszert ösztönzőnek nevezünk, ha minden $(X_N^{\rho_1}, X_N^{\rho_2}) \in \mathcal{A}$ és minden $j \in N$ esetén tetszőleges $C \subseteq N$ -re a $v_1(X_{C \cup \{j\}}) - v_1(X_C) \leq v_2(X_{C \cup \{j\}}) - v_2(X_C)$ egyenlőtlenség fennállása implikálja a $\Pi_j(X_N^{\rho_1}) \leq \Pi_j(X_N^{\rho_2})$ egyenlőtlenség fennállását. Tehát a kritérium ezen vetülete felteszi, hogy $X_i = Y_i$, és nem követeli meg, hogy az implikáció $X_i \neq Y_i$ esetén is fennálljon.

Nézzük most az ösztönzőségi kritérium másik részét! Ebben a vetületben a kritérium azt mondja ki, hogy ha egy adott egység egy adott portfóliót tartva nem nagyobb mértékben járul hozzá egy tetszőleges koalíció értékéhez, mint egy másik portfóliót tartva, akkor az első portfólió tartása esetén nem juthat rá magasabb összeg a koalíció kockázati tőkéjéből, mint a második portfólió tartása esetén.¹⁵

Ahhoz, hogy egy tőkeallokációs módszer megfeleljen az ösztönzőségi kritériumnak, szükséges az, hogy a kritérium előbb említett mindkét részének eleget tegyen. A kritérium első része a kockázati mértékek szerint monoton, míg annak második része az alegységek által tartandó portfóliók profitvektora szempontjából az.

A harmadik követelmény a stabilitás. Egy tőkeallokációs módszert stabilnak nevezünk, ha minden X_N^ρ rendezett hármásra a $v(X_N) = \sum_{j \in N} \Pi_j(X_N^\rho)$ egyenlőség fennáll, továbbá minden $C \subset N$ koalícióra érvényes a $v(X_C) \leq \sum_{j \in C} \Pi_j(X_N^\rho)$ összefüggés. Tehát – hasonlóan az ösztönzőségi kritériumhoz – a stabilitás kritériumának való megfelelés is valójában két feltételt szab.

Az első feltétel, mely szerint minden X_N^ρ rendezett hármásra az $v(X_N) = \sum_{j \in N} \Pi_j(X_N^\rho)$ azonosságnak érvényesnek kell lennie, tulajdonképpen azt követeli meg a tőkeallokációs módszertől, hogy a tőkét teljes mértékben ossza fel az alegységek között, azaz a tőke felosztása után ne maradjon olyan tőkerész, amely nem került felosztásra; illetve a felosztandó tőke elegendő legyen arra, hogy minden alegység „megkapja” a rá jutó tőkerészt. Valójában ez a feltétel semmilyen korlátot nem támaszt a tőkeallokációs módszerekkel szemben, hiszen maga a feltétel szerepel a tőkeallokációs módszer általános definíciójában is.

Éppen ezért sokkal érdekesebb a stabilitási kritérium második feltétele, amely azt követeli meg, hogy minden $C \subset N$ koalícióra teljesüljön az $v(X_C) \leq \sum_{j \in C} \Pi_j(X_N^\rho)$ összefüggés.¹⁶ Gyakorlatilag ez a feltétel azt fogalmazza meg, hogy az alegységeknek ne létezzen olyan C koalíciója, amely megalakulván nagyobb értékű, mint a nagykoalíció létrejötte esetén a C koalíciót alkotó alegységekre jutó, elosztott „értékszeletek” összege. Ha létezne ilyen C

¹⁵ Az ösztönzőségi kritérium ezen része a következőképpen fogalmazható meg: egy Π tőkeallokációs módszert ösztönzőnek nevezünk, ha minden $(X_N^\rho), (Y_N^\rho) \in \mathcal{A}$ és minden $j \in N$ esetén tetszőleges $C \subseteq N$ -re a $v(X_{C \cup \{j\}}) - v(X_C) \leq v(Y_{C \cup \{j\}}) - v(Y_C)$ egyenlőtlenség fennállása implikálja a $\Pi_j(X_N^\rho) \leq \Pi_j(Y_N^\rho)$ egyenlőtlenség fennállását. Tehát a kritérium ezen vetülete felteszi, hogy $\rho_1 = \rho_2$, és nem követeli meg, hogy az implikáció $\rho_1 \neq \rho_2$ esetén is fennálljon.

¹⁶ Habár a feltételben megfogalmazott $C \subset N$ megjelölés kizárja, hogy a C koalíció az N minden elemét (azaz minden alegységet) tartalmazó koalíció legyen, valójában ennek megengedése (azaz a $C \subset N$ megjelölés helyett a $C \subseteq N$ megjelölés használata) semmilyen különbséget nem okozna, amennyiben a stabilitási kritérium első feltétele teljesül (azaz amennyiben az $v(X_N) = \sum_{j \in N} \Pi_j(X_N^\rho)$ azonosság fennáll).

koalíció, akkor az létre is jönne (abból a célból, hogy így nagyobb legyen az értéke, azaz alacsonyabb legyen a kockázata, és ezáltal a kockázati tőkéje is alacsonyabb legyen), azaz megakadályozná a nagykoalíció létrejöttét, és ha a nagykoalíció nem jön létre, nem is lehet annak kockázati tőkéjét felosztani a Π tőkeallokációs módszernek megfelelően. Lényeges, hogy a C koalíció állhat akár egyetlen alegységből is, azaz a feltétel magába foglalja azt a kitételt is, miszerint az $\mathcal{N}$ halmazt alkotó bármelyik alegység önmagában (koalíció alkotása nélkül) tekintett értéke nem nagyobb, mint az adott alegységre a nagykoalíció létrejötte és a nagykoalíció kockázati tőkéjének felosztása után jutó tökerész. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az $v(X_j) \leq \Pi_j(X_{\mathcal{N}}^{\rho})$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell minden $j \in \mathcal{N}$ -re. Ettől azonban tovább is léphetünk: mivel az egyes alegységek értéke koalíció alkotása nélkül nulla, az $v(X_j) \leq \Pi_j(X_{\mathcal{N}}^{\rho}), j \in \mathcal{N}$ kritériumot a következőképpen is megfogalmazhatjuk: $\Pi_j(X_{\mathcal{N}}^{\rho}) \geq 0, j \in \mathcal{N}$. Azaz, ha a nagykoalíció értékét a Π tőkeallokációs módszer alapján osztjuk szét, a nagykoalíció értékéből minden alegységnek nemnegatív nagysággal kell részesednie.

A Shapley-féle tőkeallokációs módszer

Bizonyítható, hogy olyan tőkeallokációs módszer, amely – tetszőleges koherens kockázati mérték esetén – kielégíti mindhárom fent említett kritériumot, azaz egyszerre szimmetrikus, ösztönző és stabil, nem létezik (Csóka, Pintér [2010]). Szintén bizonyítható matematikailag, hogy az egyetlen olyan tőkeallokációs módszer, amely egyszerre szimmetrikus és ösztönző, a Shapley-módszer (Young [1985])¹⁷.

A Shapley-féle tőkeallokációs módszer pontos definiálásához először vezessük be a „*j* alegység hozzájárulása a *C* koalíció értékéhez” fogalmat! Egy tetszőleges $X_{\mathcal{N}}^{\rho} \in \mathcal{A}$ rendezett hármasra a *j* alegység *C* koalíció értékéhez való hozzájárulását $v'_j(C)$ -vel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk: $v'_j(C) \triangleq v(X_{C \cup \{j\}}) - v(X_C)$.

Ezt felhasználva már definiálhatjuk a Shapley-féle tőkeallokációs módszert:

$$\Pi_j^{Shapley}(X_{\mathcal{N}}^{\rho}) = \sum_{C \subseteq \mathcal{N} \setminus j} v'_j(C) \frac{|C|! (|\mathcal{N} \setminus C| - 1)!}{|\mathcal{N}|!}, j \in \mathcal{N}.$$

Tekintsünk egy példát a Shapley-módszerre! Tegyük fel, hogy adott egy bank mint egység, és ennek három divíziója (1, 2 és 3) mint alegységek! Két időpont létezik: $t = 0$ és $t = 1$. Jelenleg $t = 0$ -ban vagyunk. $t = 1$ -ben négyféle világállapot lehetséges. Mindhárom alegység egy-egy eszközt tart. Jelenleg (azaz $t = 0$ -ban) mind a négy alegység által tartott eszköz 100-at ér. Az egyes alegységek, illetve az alegységekből létrehozható koalíciók által tartott eszközök értékét $t = 1$ -ben, a különböző világállapotokban az 1. táblázat mutatja, míg az elérhető profitokat a 2. táblázatban találhatjuk.

¹⁷ Egészen pontosan Young [1985] a következőképpen fogalmazta meg tételét: az egyetlen olyan tőkeallokációs módszer, amely kielégíti a szimmetrikusság, az ösztönzőség és a Pareto-optimalitás kritériumát, a Shapley-módszer. A Pareto-optimalitás kritériuma a fentebb definiált stabilitási kritérium első feltételét követeli meg, azaz azt, hogy minden $X_{\mathcal{N}}^{\rho}$ rendezett hármasra az $v(X_{\mathcal{N}}) = \sum_{j \in \mathcal{N}} \Pi_j(X_{\mathcal{N}}^{\rho})$ azonosságnak érvényesnek kell lennie. Mivel – ahogyan azt már korábban is említettem – ezt a tulajdonságot definíció szerint kielégíti minden tőkeallokációs módszer, ezért a tételben ezt figyelmen kívül hagyhatjuk, és elegendő a szimmetrikusság, illetve az ösztönzőség kritériumaira fókuszálnunk.

1. táblázat: Az egyes alegységek, illetve koalíciók által tartott eszközök értéke $t = 1$ -ben, ha mind a három alegység által tartott eszköz értéke $t = 0$ -ban 100 volt.

	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
1. világállapot	110	106	104	216	214	210	320
2. világállapot	86	93	98	179	184	191	277
3. világállapot	101	102	100	203	201	202	303
4. világállapot	104	105	96	209	200	201	305

2. táblázat: Az egyes alegységek, illetve koalíciók által elérhető profit $t = 1$ -ben.

	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
1. világállapot	10	6	4	16	14	10	20
2. világállapot	-14	-7	-2	-21	-16	-9	-23
3. világállapot	1	2	0	3	1	2	3
4. világállapot	4	5	-4	9	0	1	5

Mérjük a kockázatot a legnagyobb veszteség (*maximum loss*) mutatóval! A fenti adatokból könnyen meghatározhatjuk a három alegység, illetve az alegységek által alakítható két- és háromszereplős koalíciók értékét; valamint az egyes alegységek hozzájárulását a koalíciók értékéhez. Ezeket a 3. táblázat tartalmazza.

3. táblázat: Az egyes alegységek, illetve koalíciók értéke; valamint hozzájárulásuk a különböző koalíciók értékéhez.

C	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(C)$	0	0	0	0	2	2	2
$v'_1(C)$	0	0	2	0	0	0	0
$v'_2(C)$	0	0	2	0	0	0	0
$v'_3(C)$	2	2	0	2	0	0	0

A 3. táblázat adatai alapján már meg tudjuk határozni az egyes alegységek Shapley-értékét:

$$\pi_1^{Shapley}(X_N^\rho) = \frac{1}{3}; \pi_2^{Shapley}(X_N^\rho) = \frac{1}{3}; \pi_3^{Shapley}(X_N^\rho) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Láthatjuk az adatokból, hogy az 1. és a 2. alegységek a kockázat szempontjából egyformán viselkednek abban az értelemben, hogy bármelyik alegységgel, illetve már létező koalícióval koalícióra lépve ugyanannyival változtatják meg annak értékét. A szimmetrikusság követelménye ilyen esetekre azt mondja ki, hogy a nagykoalíció értékéből való részesedésüknek is azonosnak kell lenni, ami teljesül is: mindkettejük részesedése (azaz Shapley-értéke) $\frac{1}{3}$.

Az ösztönzőség kritériumának való megfelelést nem tudjuk a példánkon közvetlenül demonstrálni, hiszen ahhoz vagy két különböző koherens kockázati mérték használatával is meg kellene határozni az egyes alegységek Shapley-értékét, vagy újra kellene számolni a Shapley-értékeket egy olyan esetre, amikor az alegységek más portfóliót tartanak. Ahogyan azonban korábban említettem, matematikai úton belátható, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer ösztönző.

Láthatjuk viszont a példánkban azt, hogy a Shapley-módszer megfelel a stabilitási kritérium első követelményének, azaz $v(X_N) = \sum_{j \in N} \pi_j(X_N^\rho)$, hiszen a nagykoalíció értéke 2, az egyes alegységek Shapley-értékének összege pedig hasonlóképpen $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2$. Nem felel meg viszont a stabilitási kritérium második követelményének: két olyan koalíció is kialakulhat, amely meggátolja a nagykoalíció létrejöttét. Tekintsük az 1-es és a 3-as alegységeket! Ha koalícióra lépnek egymással, az általuk létrehozott, két alegységből álló koalíció értéke 2 lesz, így a két alegység ezen a 2 egységnyi értéken osztozhat egymással. Viszont ha a nagykoalíció jön létre, akkor az 1-es alegység $\frac{1}{3}$, a 3-as alegység pedig $\frac{4}{3}$ egységnyi részesedéshez jut, azaz kettejük részesedése összesen csak $\frac{5}{3}$. Ők ketten tehát nem fognak hozzájárulni a nagykoalíció létrejöttéhez, inkább egymással alkotnak koalíciót. Ugyanez megtörténhet a 2-es és a 3-as alegységre is: ők is koalícióra léphetnek egymással, hiszen így a kettejük által létrehozott koalíció értéke 2 lesz, míg a nagykoalíció létrejötte esetén ketten összesen csak $\frac{5}{3}$ arányban részesülnének a nagykoalíció értékéből. Tehát akár az 1-es és a 3-as, akár pedig a 2-es és a 3-as alegységek összefogva meggátolhatják a nagykoalíció létrejöttét, azaz példánkban

is láthatjuk, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer nem stabil, vagy másképpen nem magbéli.

Stabilitási (magbeliségi) arány

Most, miután egy példán keresztül is láthattuk, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer általánosan nem stabil, felvetődik a kérdés, hogy mégis melyek azok a helyzetek, amikor a Shapley-féle tőkeallokáció stabil eredményre vezet? Illetve: mennyiben jelent gyakorlati problémát az a matematikai tény, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer nem elégíti ki a szimmetrikusság, az ösztönzőség és a stabilitás kritériumát egyszerre? Azt láthattuk, hogy maga a módszer szimmetrikus és ösztönző, de az esetek mekkora részében stabil? Erre a kérdésre keresték a választ cikkükben Balog, Bátyi, Csóka és Pintér [2011b]. Tulajdonképpen azt kísérik meg megválaszolni, hogy az a matematikai tény, mely szerint a Shapley-féle tőkeallokációs módszer nem stabil, pusztán elméleti szempontból érdekes, vagy a gyakorlati életben is problémát jelent? Például, ha valamilyen módszertan szerint eljárva azt tudnánk mondani, hogy „a Shapley-féle tőkeallokációs módszer 100 esetből 99-szer stabil”, akkor a stabilitás hiányát inkább tekinthetjük pusztán elméleti jelentőségűnek, mint a gyakorlat szempontjából is relevánsnak. A szerzők vizsgálati módszere a következőképpen foglalható össze:

- Tekintsünk három alegységet!
- Mindhárom alegység egyetlen eszközt tart.
- Az alegységek long pozícióban vannak.
- Két időpontot tekintünk: $t = 0$ és $t = 1$.
- Az egyes alegységek által tartott eszközök hozamát a következőképpen definiáljuk: $r = \ln \left(\frac{\text{eszközérték}_1}{\text{eszközérték}_0} \right)$.
- Az egyes alegységek által tartott eszközök hozama¹⁸ valószínűségi változónak tekinthető, amely normális eloszlást követ nulla várható értékkel és σ_i szórással ($i \in \{1; 2; 3\}$). σ_1, σ_2 és σ_3 független valószínűségi változók, amelyek egyenletes eloszlást követnek a $[0,01; 0,04]$ intervallumon (azaz az eszközök hozamának szórása 1% és 4% között véletlenszerűen alakul).
- Az egyes alegységek által tartott eszközök hozamai közötti korrelációs összefüggéseket meghatározó korrelációs mátrix szintén véletlen jelleggel generálódik.

¹⁸ Itt és a dolgozat további részében mindenhol „hozam” alatt folytonos tőkésítéssel számított hozamot, azaz loghozamot értek.

- Szimuláljunk 1000 lehetséges kimenetelt az egyes eszközök hozamaira vonatkozóan az előző pontban leírtak szerint meghatározott normális eloszlásból!
- Mérjük a kockázatot a 99%-os Expected Shortfall mutatóval!
- A kockázatot meghatározzuk az egyes alegységekre külön-külön, illetve az alegységek által alkotott két- és háromelemű koalíciókra egyaránt.
- Határozzuk meg az egyes koalíciók értékét!
- Határozzuk meg a három alegység Shapley-értékét!
- Állapítsuk meg, hogy az adott esetben a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabil (magbéli)-e!
- Hajtsuk végre a teljes eddigi algoritmust összesen 100 ezerszer, és vizsgáljuk meg, az esetek mekkora részében (hány százalékában) bizonyul a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilnak!

A szerzők azt találták, hogy az esetek kb. 59%-ában a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilnak bizonyult. Ez a stabilitási arány csak kis mértékben változik (kb. 57%-ra csökken), ha normális eloszlás helyett 3, illetve 10 szabadságfokkal bíró Student-féle t-eloszlást használtak. Ha beépítettek a modellbe egyfajta likviditási költséget, a stabilitási arány ugyan nőtt (normális eloszlást használva 68%-ra, három szabadságfokkal rendelkező Student-féle t-eloszlást használva 66%-ra, míg tíz szabadságfokkal rendelkező Student-féle t-eloszlás használata esetén 61%-ra), de annak értéke továbbra is olyan távol esik a 100%-tól, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilitásának hiányát nem tekinthetjük pusztán elméleti problémának: gondolnunk kell annak gyakorlati szempontból felvetett aggályaira is.

Dolgozatomban arra a kérdésre keresem a választ, hogy lehetséges-e olyan feltételek meghatározása, amelyek teljesülése esetén ez a stabilitási arány jelentősen növekedhet, és ha igen, akkor konkrétan melyek ezek a feltételek.

A véletlen korrelációs mátrix generálásának módszere

Az előzőekben említett 59%-os, illetve a modellen bizonyos módosításokat végrehajtva ennél valamivel magasabb stabilitási ráta eléréséhez a szerzők a véletlen korrelációs mátrixot a következőképpen generálták:

- Generáljunk egy 3×3 -as **Ch** mátrixot a következő módon:

$$\mathbf{Ch} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 \cdot a_1 - 1 & 2 \cdot a_2 - 1 & 0 \\ 2 \cdot a_3 - 1 & 2 \cdot a_4 - 1 & 2 \cdot a_5 - 1 \end{bmatrix}, \text{ ahol } a_i \ (i = 1, 2, \dots, 5) \text{ egy, a}$$

$[0; 1]$ intervallumon értéket felvevő, egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Így a $2 \cdot a_i - 1$ transzformált valószínűségi változó szintén egyenletes eloszlást követ, de a $[0; 1]$ intervallum helyett a $[-1; 1]$ intervallumon.

- A **Ch** mátrixot szorozzuk meg a transzponáltjával, és jelöljük az így kapott – szintén 3×3 -as – mátrixot **CM**-mel:

$$\mathbf{CM} = \mathbf{Ch} \cdot \mathbf{Ch}'$$

- A következő módosításokat végezzük el a **CM** mátrix elemein (zárójelben az adott elem sorának és oszlopának száma szerepel):

$$\circ \quad \mathbf{CM}(1, 2) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(1,2)}{\sqrt{\mathbf{CM}(2,2)}}$$

$$\circ \quad \mathbf{CM}(2, 1) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(2,1)}{\sqrt{\mathbf{CM}(2,2)}}$$

$$\circ \quad \mathbf{CM}(1, 3) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(1,3)}{\sqrt{\mathbf{CM}(3,3)}}$$

$$\circ \quad \mathbf{CM}(3, 1) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(3,1)}{\sqrt{\mathbf{CM}(3,3)}}$$

$$\circ \quad \mathbf{CM}(2, 3) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(2,3)}{\sqrt{\mathbf{CM}(3,3) \cdot \mathbf{CM}(2,2)}}$$

$$\circ \quad \mathbf{CM}(3, 2) \rightarrow \frac{\mathbf{CM}(3,2)}{\sqrt{\mathbf{CM}(3,3) \cdot \mathbf{CM}(2,2)}}$$

- A **CM** mátrix főátlójában lévő elemek értéke legyen 1! A **CM** mátrix első sorának és első oszlopának metszetében lévő érték a **Ch** · **Ch'** szorzás elvégzése

után már eleve 1 lesz, így csak a főátlóban lévő másik két elem értékét kell 1-re változtatnunk.

Az ezen lépések elvégzése után kapott mátrix matematikailag bizonyíthatóan pozitív szemidefinit lesz (azaz sajátértékei kivétel nélkül nemnegatívok lesznek); főátlójában 1-esek fognak állni; a főátlóján kívüli elemek a $[-1; 1]$ intervallumból kerülnek ki; és a mátrix szimmetrikus lesz. Ebből következően az így kapott CM mátrixot korrelációs mátrixként értelmezhetjük, ahol a (főátlón kívüli) korrelációk véletlenül generálódnak.

Lehetséges azonban más módon is generálni véletlen korrelációs mátrixot. Ehhez mindenekelőtt abból kell kiindulnunk, hogy milyen tulajdonsággal kell egy korrelációs mátrixnak rendelkeznie: négyzetes és szimmetrikus legyen, főátlójában 1-esek álljanak, a főátlóján kívüli elemei a $[-1; 1]$ intervallumból kerüljenek ki, és a mátrix legyen pozitív szemidefinit. Egy potenciális alternatíva lehet a fentebb bemutatott eljárásra a következő korrelációs mátrix generálási módszer:

- Tekintsünk egy 3×3 -as mátrixot, amelynek főátlójában 1-esek állnak!
- A mátrix „alsó háromszögébe” tartozó elemek (azaz a $(2, 1)$, a $(3, 1)$ és a $(3, 2)$ elemek) legyenek olyan valószínűségi változók kimenetelei, amelyek egymástól függetlenek, egyenletes eloszlást követnek és értékeiket a $[-1, 1]$ intervallumon veszik fel!
- A mátrix „felső háromszögébe” tartozó elemek (azaz az $(1, 2)$, az $(1, 3)$ és a $(2, 3)$ elemek) rendre legyenek egyenlők a mátrix „alsó háromszögébe” tartozó megfelelő elemmel úgy, hogy szimmetrikus mátrixot kapjunk!
- Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott mátrix pozitív szemidefinit-e!
 - Ha igen, készen vagyunk: generáltunk egy korrelációs mátrixot.
 - Ha a kapott mátrix nem pozitív szemidefinit, kezdjük előlről a folyamatot az első ponttól!

Ha ezzel az eljárással generáljuk a három alegység által tartott eszközök hozamai közötti korrelációkat mutató korrelációs mátrixot, a stabilitási arány jelentősen növekedni fog: a korábbi 59%-ról kb. 77,2%-ra.

Egy harmadik lehetséges módszer véletlen korrelációs mátrix generálására a Bendel-Mickey algoritmus (Bendel és Mickey [1978]), amelyről a szerzőpáros eredeti műve mellett

kitűnő leírást találhatunk Davies és Higham [2000] cikkében. Ezt az algoritmust használja többek között a MATLAB 2011b a *gallery('randcorr', N)* függvényében. Ha ezzel a módszerrel generáljuk a korrelációs mátrixot, tovább emelkedik a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilitási aránya: míg az elsőként bemutatott módszerrel 59%-ot, a másodikként bemutatott módszerrel pedig 77%-ot sikerült elérni, a Bendel-Mickey algoritmussal generálva a korrelációs mátrixot a stabilitási arány kb. 88,3% körül alakul.

Determinisztikus korrelációs mátrix

Ha a korrelációs mátrixot nem véletlen jelleggel generáljuk, hanem előre megadjuk determinisztikus jelleggel, és így vizsgáljuk meg a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilitását, újabb érdekes megfigyeléseket tehetünk.

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a három alegység által tartott egy-egy eszköz hozama között nincs lineáris kapcsolat, azaz a hozamok közötti korrelációs együttható értéke rendre nulla. Ekkor a szimulációt lefuttatva azt a megállapítást tehetjük, hogy a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabil: a 100 ezer futtatás mindegyike esetében az alegységek sem önállóan, sem pedig valamilyen kétszereplős koalíciót alkotva nem fogják blokkolni a nagykoalíció létrejöttét, ha a Shapley-féle allokációs módszer szerint történik meg a nagykoalíció létrehozása miatti „nyereség” (azaz a kockázati tőke értékének csökkenése) felosztása. Ha a kimenetek számát lecsökkentjük 1000-ról 100-ra, a stabilitási arány is csökkenni fog: 100%-ról kb. 88%-ra. Ha viszont ezután valamelyest emeljük a kimenetek számát, a stabilitási arány jelentős mértékben növekszik, és nagyon gyorsan konvergál a 100%-hoz. Ha például a kimenetek számát 200-nak választjuk, a stabilitási arány máris 98% körül alakul, míg ha 300-ra emeljük, 99,8% körüli stabilitási arányt figyelhetünk meg. 500 lehetséges kimenetel esetén a stabilitási arány már 99,99%. Mindezek a szimulációs eredmények azt sugallják, hogy abban az esetben, ha a három alegység által tartott eszközök hozama korrelálatlan (és teljesülnek a korábban általános jelleggel bevezetett feltételek, például a lehetséges kimenetek szimulálásakor normális eloszlás használata, az eloszlás szórásának 1% és 4% közötti intervallumból történő generálása egyenletes eloszlásból, stb.), a Shapley-féle tőkeallokációs módszer amellet, hogy szimmetrikus és ösztönző, stabil is, hiszen a lehetséges kimenetek száma a gyakorlatban végtelennek tekinthető.

Vizsgáljuk meg a másik végletet: hogyan alakul a stabilitási arány, ha a három alegység által tartott eszközök hozama között erőteljes lineáris kapcsolat van. Tegyük fel, hogy a korrelációs mátrix a következőképpen néz ki¹⁹:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,9999999999999999 & 0,9999999999999999 \\ 0,9999999999999999 & 1 & 0,9999999999999999 \\ 0,9999999999999999 & 0,9999999999999999 & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁹ Azért nem adhatunk a főátlón kívüli elemeknek 1 értéket, mert abban az esetben a mátrix nem lenne pozitív definit (hiszen lenne két olyan sajátértéke, amely nulla), így a Cholesky-dekompozíció nem lenne egyértelmű.

Ebben az esetben a stabilitási arány rendkívüli mértékben lecsökken: 24,2% körül alacsonyul.

Ha az erőteljes lineáris kapcsolatokat megjelenítő korrelációs együtthatók között negatív értékűek is megjelennek, hasonlóan alacsony stabilitási arányt tapasztalhatunk. Tegyük fel például, hogy a következő korrelációs mátrix írja le a három alegység által tartott eszközök hozamai közötti korrelációt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,9999999999999999 & -0,9999999999999999 \\ 0,9999999999999999 & 1 & -0,9999999999999999 \\ -0,9999999999999999 & -0,9999999999999999 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a stabilitási arány még az előzőnél is alacsonyabb, kb. 20,9% lesz.

Szórás

További érdekes következtetéseket vonhatunk le a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilitási arányára vonatkozóan, ha megvizsgáljuk az egyes alegységek által tartott eszközök hozamának szórását. Az eddigi vizsgálataink során mind a három szórás egy-egy valószínűségi változó egy realizációja volt. Ezek a valószínűségi változók függetlenek voltak egymástól, egyenletes eloszlást követtek, értékeiket pedig a $[0,01; 0,04]$ intervallumon vették fel. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a szórást előre meghatározzuk determinisztikus jelleggel! A továbbiakban következő vizsgálatok során végig a Bendel-Mickey algoritmust fogom használni a véletlen korrelációs mátrix generálására, így benchmarknak a korábbiakban ezen módszer alkalmazásakor (és a szórás sztochasztikus viselkedésének megtartásával) megfigyelt 88,3%-os stabilitási arány tekinthető.

Mindvégig tegyük fel, hogy az előre, determinisztikus jelleggel meghatározott szórás mindhárom alegység eszközének hozamára vonatkozik, azaz a három alegység által tartott eszközök hozama azonos. Rögzítsük először a szórást relatíve alacsony, 1%-os szinten. Ekkor a stabilitási arány valamelyest csökken, 85,7%-ra. Ha a szórást a korábbi intervallum felső határán, 4%-on rögzítjük, a stabilitási arány érdekes módon szintén a sztochasztikus szórás esetén tapasztalt alatt marad, de a csökkenés itt sem jelentős: a stabilitási arány kb. 86,2%. Az sejthető tehát, hogy ceteris paribus a szórást növelve növekszik a stabilitási arány is. Ezt erősíti meg az a megfigyelés, mely szerint 25%-os szórás esetén a stabilitás aránya 89,5%-ra emelkedik, 100%-os szórás esetén a megfigyelhető stabilitási arány már 93,9%, míg 500%-os szórás esetén 98%. Érdekes módon, ha a szórást 1% alá csökkentjük, nem figyelhető meg a stabilitási arány csökkenése az 1%-os szórás esetén tapasztalható 85,7%-os értékről.

Abban az esetben, ha az alegységek által tartott eszközök hozamának szórását nem határozzuk meg előre determinisztikus jelleggel, hanem – az eredeti koncepciónak megfelelően – egyenletes eloszlásból véletlenszerűen generáljuk, szintén azt figyelhetjük meg, hogy minél nagyobb értékek felvételére van lehetősége a szórásoknak, annál nagyobb a stabilitási arány. Ha a szórások által felvehető érték alsó határát 1%-on rögzítjük, a felső határt pedig 25%-ban határozzuk meg, a stabilitási arány 91% körül alakul; ha a felső határt 100%-ban határozzuk meg, a stabilitási arány 92,6% lesz; míg 500%-os felső határ esetén 93,3%-os stabilitási arányt figyelhetünk meg. Láthatjuk, hogy mindhárom esetben a kapott stabilitási arány az eredeti, $[0,01; 0,04]$ intervallum esetén kapott 88,3%-os érték és az egyes felső határok (azaz a 25%, a 100% és az 500%) determinisztikus használata esetén megfigyelt értékek közé esik. A stabilitási arálynak ez a fajta magatartása megfelel a várakozásoknak, hiszen ha engedjük a

szórást sztochasztikusan viselkedni egy adott intervallumon ahelyett, hogy az intervallum felső határának felvételére „kényszerítenénk”, pozitív valószínűség van arra, hogy a felső határtól alacsonyabb értéket vegyen fel, ezáltal pedig – ahogyan azt az előbb, a determinisztikus felső határokkal való vizsgálódáskor megállapítottuk – alacsonyabb stabilitási rátát „produkáljon”.

Összegzés

Dolgozatom alapjául az a tény szolgál, hogy a kockázatkezelés szempontjából nem elég a diverzifikáció miatti hasznót (azaz a kockázat csökkenését) tudomásul venni, hanem ennek a haszonnak a koalíciót alkotó tagok közötti tisztességes, fair elosztására is nagy figyelmet kell fordítani. Mindenekelőtt ennek oka, hogy ha a koalíciót alkotó felek között nincs meg a keletkező haszonnak ilyen jellegű elosztása, maga a koalíció sem jön létre, ez pedig azt jelenti, hogy a kockázatsökkenés mint implicit haszon nem is jön létre, kvázi „nem termelődik meg”. Dolgozatomban pontosan definiáltam a kockázati mértéket és az ehhez kapcsolódó fogalmakat, illetve bemutattam, hogy melyek azok a követelmények, amelyeknek egy kockázati mérték megfelelően koherensnek tekinthető. Felvázoltam, hogy hogyan fogható meg a tőkeallokáció (mint a korábban említett haszon elosztása) matematikailag, és milyen tőkeallokációs módszerek lehettek fel a szakirodalomban. Bemutattam, hogy melyek azok a tulajdonságok, amelyeket „jogosan” követelhetünk meg egy fair tőkeallokációs módszertől, és hogy nem létezik olyan tőkeallokációs módszer, amely koherens kockázati mértékeket alkalmazva mind a három bemutatott kritériumot kielégítené. Kiemelkedő szerepe van ugyanakkor az elosztási módszerek között a Shapley-féle tőkeallokációs módszernek, hiszen ez az egyetlen olyan módszer, amely egyszerre szimmetrikus és ösztönző. Ugyanakkor az, hogy milyen mértékben tekinthető stabilnak (amely a harmadik kritériumot jelenti), több tényezőtől függ. Megvizsgáltam, hogy ezek a tényezők milyen irányban, illetve milyen mértékben befolyásolják a stabilitási arányt.

A tényezők között kiemelt szerepe van a hozamok közötti lineáris kapcsolatot mutató korrelációs mátrixnak (illetve a korrelációs mátrix generálása algoritmusának), továbbá a hozamok szórásának. A véletlen korrelációs mátrixot más-más eljárással generálva eltérő stabilitási arányt kapunk, és az ezen arányok közötti különbség számottevő, majd 30 százalékpontos. Szintén érdekes különbséget fedezhetünk fel az eszközök hozamai közötti lineáris kapcsolat szorossága, illetve a stabilitási arány közötti kapcsolatot vizsgálva: míg független hozamok tekintetében gyakorlatilag stabilnak tekinthető a Shapley-féle tőkeallokációs módszer, addig nagyon erős lineáris kapcsolat esetén a stabilitás aránya alig haladja meg a 20%-ot. Ez tehát azt sugallja, hogy abban az esetben, ha a koalíciót alkotó szereplők olyan eszközöket tartanak, amelyek hozama között a lineáris kapcsolat mértéke elhanyagolható, a Shapley-féle tőkeallokációs módszerrel megosztva a koalíció létrejöttéből származó kockázatsökkenés hasznát egyik szereplő sem fogja megakadályozni a nagykoalíció létrejöttét sem egyénileg,

sem pedig azáltal, hogy két szereplő egymással lépne koalícióra és kihagynák a koalícióból a harmadik szereplőt.

A szórás tekintetében azt állapítottam meg, hogy minél nagyobb az egyes alegységek által tartott eszközök hozamának szórása, annál inkább tekinthető a Shapley-féle tőkeallokációs módszer stabilnak. Tehát ha olyan szereplők együttműködési lehetőségeit vizsgáljuk a gyakorlatban, akik magas volatilitású hozammal rendelkező eszközöket tartanak, nagyobb az esélye annak, hogy egy szereplő sem fogja megakadályozni a nagykoalíció létrejöttét, mint olyan szereplők esetében, akik alacsonyabb volatilitású hozammal rendelkező eszközöket tartanak.

Hivatkozások

ARTZNER, P. – DELBAEN, F. – EBER, J. M. – HEATH, D. [1999]: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, IX. évfolyam, 3. szám, 203-228. oldal

BALOG, D. – BÁTYI, T. L. – CSÓKA, P. – PINTÉR, M. [2011a]: Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. *Közgazdasági Szemle*, LVIII. évfolyam, 7. szám, 619-632. oldal

BALOG, D. – BÁTYI, T. L. – CSÓKA, P. – PINTÉR, M. [2011b]: Properties of risk capital allocation methods. *Working Paper*

BENDEL, R. B. – MICKEY, M. R. [1978]: Population correlation matrices for sampling experiments. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, VII. évfolyam, II. szám, 163-182. oldal

CSÓKA, P. [2003]: Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, L. évfolyam, 10. szám, 855-880. oldal

CSÓKA, P. – HERINGS, P. J. J. – KÓCZY, L.Á. [2009]: Stable allocations of risk. *Games and Economic Behavior*, LXVII. évfolyam, 1. szám, 266-276. oldal

CSÓKA, P. – PINTÉR, M. [2010]: On the impossibility of fair risk allocation. *MPRA Paper*, No. 26515. 2010. november 7-i verzió.

DAVIES, P. I. – HIGHAM, N. J. [2000]: Numerically stable generation of correlation matrices and their factors. *BIT Numerical Mathematics*, XL. évfolyam, 4. szám, 640-651. oldal

DENAULT, M. [2001]: Coherent allocation of risk capital. *Journal of risk*, IV. évfolyam, 1. szám, 1-34. oldal

DRIESSEN, T. S. H., TIJS S. H. [1986]: Game theory and cost allocation problems. *Management Science*, XXXII. évfolyam, 8. szám, 1015-1028. oldal

HAMLEN, S. S. – HAMLEN, W. A. – TSCHIRTHART, J. T. [1977]: The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Schemes. *The Accounting Review*, LII. évfolyam, 3. szám, 616-627. oldal

HOMBURG, C. – SCHERPEREEL, P. [2008]: How should the joint capital be allocated for performance measurement? *European Journal of Operational Research*, CLXXXVII. évfolyam, 1. szám, 208-227. oldal

JORION, P. [2006]: *Value at Risk*. 3. kiadás. New York City: McGraw-Hill

KALKBRENER, M. [2005]: An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance*, XV. évfolyam, 3. szám, 425-437. oldal

MEYERS, G. [2000]: Coherent measures of risk: An exposition for the lay actuary. *Casualty Actuarial Society Forum*, Summer

RACHEV, S. T. – STOYANOV, S. V. – FABOZZI, F. J. [2008]: *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization: The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

SCHMEIDLER, D. [1969]: The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, XVII. kiadás, 6. szám, 1163-1170. oldal

SHAPLEY, L. S. [1953]: A value for n-person games. In: ROTH, A. E. (szerk.) [1988]: *The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge: Cambridge University Press. 2. fejezet

SOLYMOSI, T. [2009]: Kooperatív játékok. *Magyar Tudomány*, CLXX. évfolyam, 5. szám, 547-558. oldal

VARGA-HASZONITS, I. [2009]: *Kockázati mértékek instabilitása*. Ph.D. értekezés. ELTE TTK Fizika Doktori Iskola

YOUNG, H. P. [1985]: Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, XIV. évfolyam, 2. szám, 65-72. oldal