

OTDK-DOLGOZAT

Kiss Tamás

2013

**JÁTÉKELMÉLETI MÓDSZEREK A RENDSZERKOCKÁZAT EL-
OSZTÁSÁBAN**

**GAME THEORETIC METHODS FOR ALLOCATING SYSTEMIC
RISK**

Kiss Tamás

Kézirat lezárva: 2012. március 25.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Kockázatelosztási játékok	4
2.1. A kockázat mérése	4
2.2. A kockázatelosztás mint kooperatív játék	5
2.3. A kockázatelosztás módszerei	10
3. Rendszerkockázat	13
3.1. A pénzügyi fertőzés csatornái	14
3.2. A bankközi kapcsolatok lehetséges értelmezései	16
3.3. A stilizált pénzügyi rendszer	17
3.4. A rendszerkockázati veszteség tulajdonságai	24
4. A rendszerkockázat elosztása	28
4.1. A rendszerkockázati játék felépítése	28
4.2. Allokációs módszerek	31
5. Kitekintés	34
5.1. Rendszerkockázat a gyakorlatban	34
5.2. A modell továbbgondolása	36
6. Összegzés	38

1. Bevezetés

Knight 1921-ben íródott műve fordulópont volt a véletlen események közgazdaságtani értelmezésében. Ő volt az első, aki az addig igen kaotikus kockázat-bizonytalanság dichotómiát egy egyszerű definícióval a helyére tette: „a kockázat olyan helyzetre utal, amelyben a döntéshozó képes valószínűséget kapcsolni a vizsgált véletlenhez. Ezzel szemben a bizonytalanság esetén a döntéshozó nem képes valószínűséget rendelni a véletlenhez.” (Bélyácz [2011] idézi Knight írását). Azaz a kockázat tulajdonképpen nem más, mint mérhető véletlen. Ez a fogalmi kettősség megjelenik a valószínűségek esetén is: az objektív valószínűség mérhető, méghozzá relatív gyakoriságok határértékeként adott, a szubjektív valószínűség pedig csupán a döntéshozó értékelését tükrözi egy adott szituációban.

A szubjektív valószínűség igazából egy rossz fogalom, ugyanis nincs mögötte véletlen tömegjelenség. Száz [2011] javaslata alapján szubjektív valószínűség helyett célszerűbb lehet az esély szót használni, amely az egyéni értékítéletet közvetlenül fejezi ki. Tehát a kockázat és valószínűség, illetve a bizonytalanság és esély fogalompárok összetartoznak.

A dolgozatban hangsúlyozottan a kockázattal foglalkozunk. Ennek oka, hogy szinte végig erősen támaszkodunk a klasszikus valószínűségszámítás eredményeire, amelyek akkor működnek, ha véletlen tömegjelenségek vannak mögöttük. Ha valószínűségről, eloszlásról, várható értékről beszélünk, akkor végig azt gondoljuk, hogy ezek megfigyelhetők, mérhetők, illetve függetlenek a döntéshozótól. Ez utóbbi tulajdonságot kettős értelemben használjuk: egyrészt, egy adott esemény valószínűsége nem függ attól, hogy melyik játékos szemszögéből nézzük a szituációt (ez jelenti a valószínűség objektivitását). Másrészt, a döntéshozó nem képes befolyásolni egy adott esemény valószínűségét.¹ Így amikor például a kockázat elosztására kerül a sor, akkor a döntéshozók egyetértenek abban, hogy mit értenek kockázaton, és abban is, hogy hogyan számszerűsítik a kockázatot.

Ez utóbbi példa igen mesterkéltnek tűnik, de nem önkényes. A dolgozat során ugyanis a kockázatnak ezt a speciális aspektusát szeretnénk megragadni: egy többszereplős szituációban hogyan lehet a kockázatot szétosztani. Ahhoz azonban, hogy átlássuk a problémát, próbáljuk meg megérteni Tasche 2000-es cikke alapján, hogy mit is szeretnénk csinálni egy kockázatosztási szituációban! Vegyünk egy döntéshozót (illetve befektetőt), aki saját forrásokon túl igénybe vesz idegen forrásokat is a befektetéséhez. Ekkor a befektetés kockázata hitelezési kockázattá válik: amennyiben a befektető nem tudja a megfelelő hozamot realizálni az eszközein, akkor a saját forrásaihoz kell fordulnia a kötelezettségeinek kielégítése érdekében. Ha nincs megfelelő mennyiségű saját forrása, akkor csődbe jut, és a hitelezőit veszteség éri. Ez alapján kockázati tőkeként azt a mennyiségű saját forrást (saját tőkét) nevezzük, amely az esetek döntő többségében elégséges ahhoz, hogy a befektető

¹Ez nem természetes feltevés, könyvtárnyi irodalma van azon közgazdasági modelleknek, amelyek éppen az ilyen típusú megkötéseket oldják fel (jellemzően ilyenek az úgynevezett megbízó-ügynök problémák). Jelen dolgozatban azonban a problémát egy más nézőpontból járjuk körbe, erre az aspektusra külön nem térünk ki.

a hitelezőit ki tudja fizetni². A kockázat elosztása során pedig ennek a kockázati tőkének az elosztásáról beszélünk, annak megfelelően, hogy a befektetésnek mi a formája, illetve a hitelező-befektető-befektetés kapcsolatban milyen szereposztás van éppen jelen.

Az első terület, ahol ez a probléma megjelenik, a pénzügyi befektetések világa. Az alapszituáció a következő: vannak kockázatos pénzügyi termékeink (szándékosan nem specifikáljuk őket, bármiről lehet szó, amely valamiféle mérhető véletlent tartalmaz), amelyekből összeállítunk egy portfóliót, és az a kérdésünk, hogy az egyes eszközök milyen arányban járulnak hozzá a portfólió kockázatához. Ezáltal képezhetünk szabályokat arra vonatkozóan, hogy mennyi tőkét tartsunk az egyes eszközökhöz, vagy azonosíthatjuk azokat az eszközöket, amelyek az adott portfólió kockázatához a leginkább hozzájárulnak. Ebben az esetben a hitelező és a befektető nem választható el, hiszen alapvetően arról van szó, hogy a saját eszközeinket hogyan rendezzük el.

A másik esetben van egy vállalatunk, amelynek több részlege van; a vállalat tekinthető a részlegeiből alkotott portfóliónak. Ekkor a kockázat elosztását úgy értelmezhetjük, hogy a teljes vállalkozás kockázatát felosztjuk a részlegek között. Ezt azután - hasonlóan a pénzügyi eszközök esetéhez - használhatjuk tőkekövetelmény számítására, túlságosan kockázatos üzletágak azonosítására, illetve akár az egyes részlegekben dolgozók premizálásának alapjaként is szolgálhat a minél alacsonyabb allokált kockázat. Ebben az esetben jól azonosítható a fent említett hitelező-befektető-befektetés hármass: a vállalat saját és idegen forrásainak tulajdonosai a hitelezők, a menedzsment a befektető, és az egyes részlegek a befektetések.

A dolgozatban azonban egy harmadik területen fogjuk felhasználni a kockázatallokáció módszertanát: a rendszerkockázatoknál. A rendszerkockázat definíciója viszonylag szerteágazó, így a pontos fogalom leírását a későbbi fejezetekre bízuk, most csupán az eddigi analógiát vesszük tovább: vannak bankjaink, amelyek tulajdonképpen egy portfóliót alkotnak: ez a bankrendszer. A menedzsment pedig tulajdonképpen a szabályozó hatóság. Ő az, amelyiknek célja, hogy kezelje a bankrendszer összekapcsolódásaiból fakadó kockázatot, annak érdekében, hogy a „befektetők”, azaz a társadalom ne veszítse el a vagyonát. Ugyan az analógia talán kicsit erőltetett, ennek ellenére látszik, hogy a kockázatallokáció mint elv ebben a kontextusban is érvényes marad.

A dolgozat alapvetően technikai jellegű: célunk egy olyan gondolkodási keret felépítése, amelyben a fent ismertetett problémát, azaz a rendszerkockázat elosztásának kérdését, formális eszközökkel vizsgálni tudjuk. Azaz létre kívánunk hozni egy modellt, amellyel nem csupán meg tudjuk mérni, hogy megfelelően kalibrált paraméterek mellett egy adott stilizált pénzügyi közvetítő rendszernek mekkora a kockázata, hanem arra is képesek leszünk, hogy meghatározott elvek szerint szét tudjuk osztani a modellbeli kockázatot (illetve a

²A *döntő többségében* kikötés alapvetően technikai jellegű, ugyanis, ha annyi tőkét tartana egy befektető, hogy minden pillanatban minden kötelezettségének egyszerre eleget tudjon tenni, akkor tulajdonképpen nem is végezhet befektetési tevékenységet. Ekkor azonban nem vállal kockázatot sem, így a kockázatallokáció szempontjából értelmetlenné válik a további vizsgálat.

Tasche féle értelmezést magunkénak téve a szükséges kockázati tőkét) az egyes szereplők között.

Szerkezetét tekintve a dolgozat az előző gondolatmenetet követi, csak éppen ellenkező irányban: először beszélünk kockázatelosztásról, majd utána megalkotjuk azt a rendszerkockázati modellt, amelyen értelmezni tudjuk a kockázatok elosztását. A témák ilyen formában való elrendezésének alapvetően két oka van, egy technikai és egy tartalmi. A technikai ok, hogy a kockázat elosztása során alapvetően a kooperatív játékelmélet eredményire szeretnénk támaszkodni. Ha azonban a kockázatelosztást teljes egészében, az elméleti alapjaitól felépítve a modell felírásával együtt tárgyalnánk, akkor a hosszas, azonban szükséges elméleti fejtegetésben könnyen elveszhetne a lényeg. A másik, tartalmi oka, hogy előre vesszük a kockázatelosztás módszertanának leírását, hogy így a rendszert leíró modell megalkotásakor folyamatosan figyelemmel tudjuk kísérni, hogy hogyan viszonyul a játékelméleti módszertanhoz: lehet-e, és ha igen, hogyan lehet értelmezni rajta kooperatív játékot.

Ezek alapján a következő felépítést fogjuk követni: a második fejezetben definiálunk számos fogalmat (kockázati mérték, koherencia, kockázatelosztási játék), majd megismerjük a kooperatív játékok egyes tulajdonságait, illetve megoldási módszereit. A következő fejezetben rövid elméleti bevezető után, amelyben definiáljuk a rendszerkockázat fogalmát, ismertetünk néhány korábbi eredményt a rendszerkockázat témakörében, amelyeket szeretnénk szem előtt tartani a saját elméleti keretünk felépítése során. Ezután felírjuk a modellt, amelynek segítségével számos egyszerűsítő feltevést téve számszerűsíteni tudjuk a rendszerkockázatból adódó veszteséget. Ez az érték további vizsgálódásaink alapját jelenti: egyrészt, megvizsgáljuk néhány tulajdonságát, majd, áttérve a negyedik fejezetre, definiáljuk a rendszerkockázati mértéket a rendszerkockázatból adódó veszteség segítségével. Ebben a fejezetben kapcsolódik össze a dolgozat két nagy szerkezeti egysége: a rendszerkockázati mérték definíciója lehetővé teszi, hogy felírjuk a kooperatív játékelméleti modellt a problémára, illetve, a második fejezetben részletesen bemutatott megoldáskonceptiókat alkalmazzuk is. Ezzel tulajdonképpen a dolgozat vezérfonalának végére érünk: elkészítettük a korábbiakban vázolt céloknak megfelelő gondolkodási keretet a rendszerkockázat elosztásával kapcsolatban. Az ötödik fejezet tehát alapvetően kitekintés, mely egyrészt gyakorlati megfontolásokat tartalmaz, másrészt rávilágít a modell egyes kritikus előfeltevéseire, illetve azok lehetséges feloldására. A hatodik fejezetben összefoglalunk.

2. Kockázatelosztási játékok

2.1. A kockázat mérése

Az előző fejezetben megállapítottuk, hogy a kockázat egy jövőbeli kimenetekkel kapcsolatos ismerethiány, ahol a jövőbeli események, és azok valószínűsége (eloszlása) ismert. Ha ezt a definíciót elfogadjuk, abból az következik, hogy a kockázat matematikai, statisztikai eszközökkel mérhető. Mielőtt konkrét mérési technikákról gondolkodnánk, ismerjük meg azt az eszközt, amivel általánosságban mérjük a kockázatot: a kockázati mértéket. Ehhez legyen adott egy eszköz, amelynek a jövőbeli állapotát nem tudjuk, azonban ismerjük a jövőbeli kimeneteit és ezek valószínűségét. Az ilyen eszközöket kockázatosnak nevezzük.

A matematikában van egy jól ismert objektum, amellyel természetes módon tudjuk reprezentálni ezt az eszközt: a valószínűségi változó. A valószínűségi változó és annak eloszlása ugyanis éppen a lehetséges kimeneteket és azok valószínűségét tartalmazza. Vagyis számunkra a kockázatos eszköz egy valószínűségi változó. Ennek segítségével definiálhatjuk a kockázati mértéket, mint a dolgozat egyik központi fogalmát:

1. Definíció. *A ρ kockázati mérték egy $X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol X egy kockázatos eszköz.*

Ez a definíció első látásra nagyon általános, ha azonban közelebbről ránézünk, akkor az univerzalitás kevésbé egyértelmű. A legfőbb észrevétel a definícióval kapcsolatban, hogy egy függvényről van szó, azaz egyértelmű hozzárendelésről, amely ráadásul egy valós számot rendel hozzá egy tetszőleges valószínűségi változóhoz. Ennek a jelentősége abban áll, hogy az akár nagyon bonyolult struktúrával rendelkező valószínűségi változókat egy jól ismert, könnyen kezelhető struktúrára (a valós számokra) képezi le, amely struktúrán már könnyen tudunk műveleteket végezni.

A definíció általánossága azonban a fent leírtak ellenére sem tagadható. Ez az egyszerű meghatározás olyan extrém eseteket is megenged, hogy minden valószínűségi változóhoz ugyanazt az értéket rendeli a függvény, ami semmitmondóvá teszi a definíciót. Ezért leggyakrabban kikötünk bizonyos feltételeket, amelyeket elvárunk egy ρ kockázati mértéktől. A feltételek sokfélék lehetnek, mi azonban kiemelünk egy ismert, és gyakran használt kockázati mérték családot: a koherens kockázati mértékeket.

Koherens kockázati mértékek

A fogalom bevezetése az Artznet et al. [1999] cikkhez köthető, azóta számos kockázattal, kockázatelosztással foglalkozó műben megjelent. Minden szerzőnek megvan a saját definíciója a fogalomra, mi most Csóka et al. [2009] definícióját használjuk folytonos valószínűségi változókra átfogalmazva:

2. Definíció. *Egy $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mérték koherens, ha*

- **Monoton:** $\forall X, Y, X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$

- **Szubadditív:** $\forall X, Y \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- **Pozitív homogén:** $\forall X \quad h \in \mathbb{R}_+ \quad \rho(hX) = h\rho(X)$
- **Eltolásinvariáns:** $\forall X, a \in \mathbb{R} \quad \rho(X + a) = \rho(X) - a$

A koherens kockázati mérték fogalma szorosan kötődik a kockázati mérték egy speciális pénzügyi értelmezéséhez: a biztonsági tőke fogalmához, azaz, ha egy eszköz kockázatát úgy értelmezzük, mint a hozzá rendelendő kockázatmentes eszköz szabályozó számára elfogadható mennyiségét. Ilyen megvilágításban a koherencia axiómák világossá válnak. A *monotonitás* azt fejezi ki, hogy ha egy eszköz bármilyen állapotban többet hoz, mint egy másik, akkor kisebb a kockázata, azaz kevesebb biztonsági tőkét szükséges tartani mellette. A *szubadditivitás* a diverzifikációs hatást tükrözi: két eszköz egyesítve egy portfólióban kisebb kockázatot jelent, mint a portfólió elemeinek kockázata külön-külön. A *pozitív homogenitás* azt jelzi, hogy a portfólió kockázata a méretével arányosan változik. Az *eltolásinvariancia* szerint, ha egy portfólióhoz hozzáteszünk a egységnyi kockázatmentes eszközt, akkor a kockázata pont a -val csökken. Ez utóbbi az a tulajdonság, amely megértéséhez a kockázat biztonsági tőkeként való értelmezése a legtöbbet segít. Általánosságban ugyanis ez a tulajdonság nem lenne elvárható, a fenti értelmezés esetén azonban következményként rögtön adódik.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a fenti axiómarendszer nem kőbe vésett, más tulajdonságok is elvárhatók egy kockázati mértéktől. A szakirodalomban számos kritika éri ezeket az axiómákat (például a pozitív homogenitást és a szubadditivitást a likviditási kockázat elhanyagolása miatt), ráadásul a pénzügyekben a piaci kockázat ma leggyakrabban használt mérőszáma, a Value at Risk nem koherens kockázati mérték, ugyanis megsérti a szubadditivitási axiómát. Azonban ezek a feltevések jó kiindulópontot alkothatnak egy-egy kockázati mérték megítélésében, ráadásul később részletesen megismerjük egy igen kedvező tulajdonságukat, amit most úgy fogalmazunk meg egyszerűen, hogy koherens kockázati mértékek esetén mindig létezik bizonyos értelemben igazságos kockázatelosztás.

2.2. A kockázatelosztás mint kooperatív játék

Eddig egyetlen eszközről beszéltünk, azonban a számunkra érdekes probléma, hogy több eszköz esetén a kockázatot hogyan tudjuk elosztani. Ehhez segítségül hívunk egy ma igen gyorsan fejlődő tudományt, a játékelméletet. E tudomány két fő ága a kooperatív és nemkooperatív játékelmélet. A két terület alapvetően abban különbözik, hogy míg a nemkooperatív játékok esetében a lényeg az egymástól függetlenül döntést hozó játékosok közötti interakciók vizsgálata, addig a kooperatív játékok esetén köthetők úgynevezett felbonthatatlan szerződések, azaz az együttműködés kikényszeríthető, és így a játék tulajdonképpen a játékosok egyes csoportjai (úgynevezett *koalíciók*) közötti kapcsolatokra fókuszál. A kockázatelosztás elemzése során mi elsősorban az utóbbi játékokkal fogunk

foglalkozni, azon belül is az átruházható hasznosságú játékokkal³. Az alábbiakban tehát értelmezzük formálisan, hogy mit is értünk kockázatelosztás alatt.

Tegyük fel, hogy van n darab kockázatos eszköz, és ezek összkockázatát szeretnénk elosztani az egyes eszközök között. Tegyük fel továbbá, hogy van egy kockázati mértékünk, amely koherens (ezt a feltételt később még feloldhatjuk, most azért definiáljuk így a kockázatelosztási játékokat, hogy láthassuk a játék kedvező tulajdonságait). Ekkor a kockázatelosztási játék egy olyan kooperatív játék, amely az n darab eszköz tetszőleges kombinációjához egy kockázati értéket rendel hozzá, azaz:

3. Definíció. Egy kockázatelosztási játék $G = (N, v)$ tartalmaz

- egy N játékosalmazt, $|N| = n$ játékost, $i = 1, \dots, n$
- a játékosokból alkotott C koalíciókat: $C \subseteq N$
- egy értékfüggvényt $v : C \rightarrow \rho(\sum_{i \in C} X_i)$

Az n szereplős kockázatelosztási játékok összességét jelöljük $\mathcal{G}^n$ -el. Mivel ρ -ról feltettük, hogy szubadditív, így a koalíciók értékfüggvényeiről is tudjuk, hogy szubadditívak, azaz

$$\rho(\sum_{i \in C} X_i) = \rho(X_j + \sum_{i \in C^*} X_i) \leq \rho(X_j) + \rho(\sum_{i \in C^*} X_i)$$

, ahol $C = C^* \cup \{j\}$. Ez a tulajdonság gyakran előkerül kooperatív játékok esetén, gyakran külön játékosztályként definiálják az ilyen játékokat.

4. Definíció. Egy $G = (n, v)$ játék szubadditív, ha $\forall C_1, C_2 \subseteq N$ $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ koalícióra

$$v(C_1 \cup C_2) \leq v(C_1) + v(C_2)$$

Mivel a fent definiált játék szubadditív, így a szereplők számára jobb állapot elérését hozhatja, ha együttműködnek. Továbbá az is látható a szubadditivitásból, hogy a nagykoalíció (azaz, amikor az összes játékos kooperál) kockázata legfeljebb akkora, mint az őt alkotó elemek kockázata, azaz $\rho(N) = \rho(\sum_i X_i) \leq \sum_i \rho(X_i)$. A játék igazán akkor válik érdekessé, ha az előbbi kifejezésben szigorú egyenlőtlenség teljesül, azaz a nagykoalíciónak van hozadéka: a portfólió együttesen kisebb kockázatot hordoz, mint az elemei külön-külön.

A fentiekben tehát felvázoltuk a kockázat elosztásának kooperatív játékelméleti modelljét, azonban ezzel még nem kerültünk közelebb a megoldáshoz, ugyanis azt szeretnénk tudni, hogy az egyes eszközök milyen arányban járulnak hozzá a portfólió kockázatához. A válasz, mint oly gyakran a közgazdaságtanban, attól függ, hogy merről közelítjük meg

³Az átruházható hasznosságú játékokban a koalíciók szabadon szétoszthatják a kifizetéseket a tagok között.

a problémát, illetve hogyan definiáljuk a hozzájárulást. Ennek megfelelően a kooperatív játékoknak számos megoldáskonceptiója létezik, melyekből néhányat jelen dolgozatban is leírunk. Azonban ahhoz, hogy a formális kifejtést folytassuk, szükségünk lesz még néhány definícióra, illetve egy fontos játékelméleti eredményre.

Az első az elosztás, ami egy hozzárendelés: egy adott játékban minden játékoshoz hozzárendel egy valós számot, amit nevezzünk kifizetésnek (kockázatelosztási játékok esetében a kifizetések értelmezhetők az egyes portfóliókhoz rendelt kockázatokként). A formális definíció számos kooperatív játékelmélettel foglalkozó műben megtalálható, mi Denault [2001] definícióját követjük:

5. Definíció. *Elosztáson egy $\Phi : \mathcal{G}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt értünk, azaz egy függvény elosztás, ha felírható*

$$\Phi : G \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $\varphi_i \in \mathbb{R}$ az i játékos kifizetése.

Másik, szorosan kapcsolódó fogalom a szétosztás.

6. Definíció. *Egy Φ elosztás szétosztás, ha $\sum_i \varphi_i = v(N)$.*

Vagyis a szétosztás egy olyan speciális elosztás, ami a nagykoalíció értékét osztja szét. A szétosztás központi fogalom számunkra, ugyanis, amikor a kockázatot (vagyis a kockázati tőkét) osztjuk el, akkor arról nem dönthetünk, hogy mekkora legyen a szétosztandó összeg, csak a részesedésekről.

A fenti definíció hibája, hogy megenged olyan elosztást is, hogy egy játékos viseli az összes kockázatot, és a többiek semmit, illetve, kevésbé szélsőséges esetben is, az egyik játékos több kockázatot visel, mint az ő egyedi kockázata. Ez eszközökre értelmezve azt jelenti, hogy egy adott eszközhöz több tőkét kell rendelni a portfólióban, mint ha külön lenne. Ekkor természetesen célszerű az eszközt külön kezelni, vagyis főként olyan eszközök esetén érdemes a kockázatelosztást a fent ismertetett játékelméleti keretben elemezni, ahol az egyes eszközökre allokált kockázat nem haladja meg az eszköz egyedi kockázatát. Ezt nevezzük individuálisan racionális szétosztásnak⁴, azaz

7. Definíció. *Egy Φ elosztás szétosztás individuálisan racionális, ha $\varphi_i \leq \rho(\{i\}) \forall i \in N$.*

A következő fogalomnak, a magnak, egy (rövid) különálló fejezetet szentelünk, ugyanis az egyik legfontosabb kooperatív játékelméleti eredményről van szó, ráadásul a kockázatelosztási játékok esetében egy igen érdekes eredmény mondható ki.

⁴Az angol nyelvű szakirodalomban a szétosztást szokás preimputációnak nevezni, és az individuálisan racionális szétosztást imputációnak, azonban mi maradunk a magyar terminológiánál.

2.2.1. Magbeliség

Az individuális racionalitást továbbgondolva egy játék megoldását megadhatjuk úgy, hogy az ne csak egyénileg, hanem koalíciós értelemben is racionális legyen, azaz hogy az elosztás során egyik koalíció se járjon rosszabbul, ha részt vesz a nagykoalícióban, mint ha kimaradna belőle. Ezt játékelméleti fogalmakkal úgy írhatjuk le, hogy egy elosztás a magban van, ha egyik koalíció sem tudja blokkolni, azaz:

8. Definíció. Legyen $G \in \mathcal{G}^n$ kockázatelosztási játék. Ekkor a Φ elosztás a játék magjában van, ha teljesül rá, hogy

- szétosztás
- tetszőleges C koalícióra $\sum_{i \in C} \varphi_i \leq \rho(C)$.

A magbeliség egyik legfontosabb következménye a stabilitás, azaz érdekeltté válnak a játékosok arra, hogy bennmaradjanak a koalícióban, így ha valamilyen mechanizmus útján sikerül elérni, hogy kialakuljon a nagykoalíció, akkor az stabil lesz.

A magot gyakran már mint megoldási koncepciót tárgyalják, mi itt viszont egy tetszőleges elosztás tulajdonságaként definiáljuk a magbeliséget. Érdekes kérdés lehet, hogy hány olyan megoldása van a játéknak, amelyik magbeli. Erre a mag definíciójából semmilyen következtetést nem tudunk levonni: a magbeli elosztások halmaza lehet egyelemű, a mag azonban állhat több elosztásból is, sőt, az is elképzelhető, hogy a mag nem tartalmaz egy elosztást sem, azaz üres. Ez utóbbi azt jelenti, hogy olyan a játék struktúrája, hogy minden elosztást blokkolni tudja valamelyik koalíció. Ez egy nemkívánatos tulajdonság: azt jelenti, hogy bármit teszünk a kockázat stabil elosztásának érdekében, nem tudunk mindenki számára megfelelő állapotot találni.

Egy igen speciális eredmény fogalmazható meg az általunk vizsgált kockázatelosztási játékokra: ha koherens kockázati mértékekkel dolgozunk, akkor nem merül fel a mag ürességének problémája, azaz a kockázatelosztási játékok magja nemüres. Ennek formális igazolásához teszünk egy rövid elméleti kitérőt: megismerkedünk a teljesen kiegyensúlyozott játékok fogalmával, illetve a kockázatelosztási játékok és a teljesen kiegyensúlyozott játékok kapcsolatával, Csóka et al. 2009-es cikkét felhasználva.

9. Definíció. Legyen $\mathbf{1}_C$ a C koalíció karakterisztikus vektora:

$$(\mathbf{1}_C)_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in C \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

10. Definíció. Egy játék kiegyensúlyozott, ha minden $|2^N|$ elemű $\lambda_C \geq 0$, $\sum_{C \subseteq N} \lambda_C \mathbf{1}_C = \mathbf{1}$ súlyrendszerre igaz, hogy

$$\sum_{C \subseteq N} \lambda_C v(C) \geq v(N).$$

Ennek a definíciónak az értelmezése nem teljesen triviális, ugyanis feltételezi, hogy a játékosok meg tudják osztani magukat a koalíciók között. Ez kockázatelosztási nyelven úgy értelmezhető, hogy az egyes eszközök egyszerre több portfólióban is jelen vannak bizonyos hányadukkal, úgy, hogy a jelenlétek aránya egyre összegződik. Ekkor a koalíciók λ_C -hez tartozó konvex kombinációján azt a koalíciót értjük, amelyben a játékosok λ_C arányban vesznek részt (ne feledjük, λ_C egy vektor, amely minden játékoshoz meghatároz egy részvételi hányadot). Ez alapján a kiegyensúlyozottság a mi értelmezési keretünkben azt jelenti, hogy bárhogyan vesszük az egyes koalíciók kockázatának konvex kombinációit, azok összességében legalább akkora kockázatot eredményeznek, mint a nagykoalíció.

A fenti tulajdonság egy erősebb változata, amikor nem csak a nagykoalícióra követeljük meg a kiegyensúlyozottságot, hanem az összes lehetséges koalícióra. Ezt nevezzük teljesen kiegyensúlyozottnak.

11. Definíció. Egy játék teljesen kiegyensúlyozott, ha $\forall D \subseteq N$ -re a (D, v^D) játék kiegyensúlyozott, azaz $\forall D \subseteq N$, és $\forall \lambda_C \geq 0$, $C \subseteq D$ -re amelyre igaz, hogy $\sum_{C \subseteq D} \lambda_C \mathbf{1}_C = \mathbf{1}$ teljesül, hogy

$$\sum_{C \subseteq D} \lambda_C v(C) \geq v(D).$$

Nyilvánvalóan látszik, hogy minden teljesen kiegyensúlyozott játék kiegyensúlyozott, hiszen megengedjük a $D = N$ esetet is a definícióban.

A következő tétel a fent idézett Csóka et al. 2009 cikk egyik legfontosabb eredménye, amelyben a fent említett játékosztályok kockázatelosztási játékokhoz való viszonyát elemzik.

12. Tétel. Az (N, v) kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, ha ρ koherens.

Bizonyítás. Legyen $D \subseteq N$, illetve $\lambda_C \geq 0$, $C \subseteq D$, amelyre $\sum_{C \subseteq D} \lambda_C \mathbf{1}_C = \mathbf{1}$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor, kihasználva ρ szubadditivitását és pozitív homogenitását:

$$\begin{aligned} \sum_{C \subseteq D} \lambda_C v(C) &= \sum_{C \subseteq D} \lambda_C \rho\left(\sum_{i \in C} X_i\right) = \sum_{C \subseteq D} \rho\left(\sum_{i \in C} \lambda_C X_i\right) \geq \\ &\geq \rho\left(\sum_{C \subseteq D} \left(\sum_{i \in C} \lambda_C X_i\right)\right) = \rho\left(\sum_{i \in D} \left(\sum_{i \in C, C \subseteq D} \lambda_C X_i\right)\right) = \rho\left(\sum_{i \in D} X_i\right) = v(D), \end{aligned}$$

azaz a játék teljesen kiegyensúlyozott. $\square$

A szerzők ennél is többet állapítanak meg a kockázatelosztási játékokról. Belátják, hogy minden teljesen kiegyensúlyozott játékhoz tartozik egy olyan kockázati környezet

(definícióját lásd Csóka et al. [2009] p. 269), amely indukálja a játékot, azaz a teljesen kiegyensúlyozott játékok részhalmazát alkotják a koherens kockázati mértékkal definiált kockázatelosztási játékoknak. Ezt a fenti tétellel összevetve azt kapjuk, hogy a teljesen kiegyensúlyozott játékok és a koherens kockázati mértékkal definiált kockázatelosztási játékok egybeesnek. Nekünk azonban a fent belátott irányra van szükségünk, ugyanis a teljesen kiegyensúlyozottságnak van egy igen kényelmes következménye, amely Bondareva-Shapley tételként ismert (bizonyítás Osborne et al. [1994]-ben megtalálható):

13. Tétel. *Egy játék pontosan akkor kiegyensúlyozott, ha a magja nemüres.*

Mivel minden teljesen kiegyensúlyozott játék kiegyensúlyozott, ezért a tétel ezekre is érvényes, így érvényes azon kockázatelosztási játékokra is, amelyekben a kockázati mérték koherens. Ez egy igen fontos eredmény: azt láttuk be formálisan, hogy minden kockázatelosztási játéknak, amelyben a kockázati mérték koherens, a magja nemüres, azaz létre tudunk hozni olyan kockázatelosztást, amely a portfólió tagjainak tetszőleges koalíciója esetén kisebb kockázatot eredményez, mintha nem csoportosulnának nagykoalícióba. Ez alapján indokolt lehet olyan kockázatelosztási mechanizmusokat keresni, amelyek magelosztást eredményeznek, ugyanis tudjuk, hogy minden esetben lehetőségünk van ilyet találni.

A magbeliségen kívül, melyet jelentősége miatt kiemeltünk, számos más tulajdonság elvárható egy kockázatelosztástól. Ezeket külön nem részletezzük, hanem a következő fejezetben, ahol részletesen foglalkozunk a kockázatallokációs módszerekkel, mindig megemlítjük egy-egy módszerről, hogy milyen tulajdonságokkal bír.

2.3. A kockázatelosztás módszerei

A fent ismertetett játékelméleti keretben a kockázat elosztását meglehetősen általánosan tárgyaltuk: minden játékoshoz hozzárendeltünk egy valós számot (ezt neveztük allokált kockázatnak), amelyek összege szétosztás esetén megegyezett a nagykoalíció kockázatával. Továbbá megvizsgáltuk, hogy stabilitás szempontjából milyen kedvező tulajdonságai lehetnek egy ilyen elosztásnak. Ebben a fejezetben két olyan konkrét módszert ismertettünk, amelyek megadják, hogy milyen hozzárendelési szabály alapján végezzük az elosztást. Ezeket kockázatallokációs sémáknak, kockázatelosztási módszereknek fogjuk nevezni. Az alábbiakban ismertetjük a kétféle módszert: először a viszonylag elemi, de a játékelmélettől kissé távolabb álló egyéni kockázattal arányos allokációt, majd egy klasszikus játékelméleti fogalmat, a Shapley-értéket hívjuk segítségül a kockázatok elosztására.

Egyéni kockázattal arányos módszer

Ez a legegyszerűbb módszer, a szakirodalom kevésbé foglalkozik vele önmagában, általában evidenciaként kezelik. Leírása megtalálható például a Hamlen et al. [1977] cikkben.

A lényege, hogy az egyes játékosok saját kockázatuk arányában részesednek a nagykoalíció kockázatából, azaz:

$$\varphi_i^A = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{i=1}^n \rho(X_i)} \rho(N)$$

ahol φ_i^A jelöli az i játékos számára allokált kockázatot, ha a kockázatelosztást az egyéni kockázattal arányos módszer szerint végezzük.

A módszer előnyei és hátrányai könnyen láthatók. Először is előnye, hogy a koncepciója világos, könnyen érthető. Ez a jellemző igen fontos abban az esetben, ha alkalmazni szeretnénk a gyakorlatban egy szabályt, ugyanis annak olyannak kell lennie, amelyet a végrehajtók is könnyen megértenek. Másik fontos előnye, hogy alacsony az információigénye, ugyanis elegendő ismernünk az egyedek és a nagykoalíció kockázatát. Ez jelentősen csökkenteti a módszer számításigényét. Előnye továbbá, hogy bizonyos értelemben szimmetrikus, azaz az egyforma egyedi kockázatú játékosoknak egyforma mennyiségű lesz az allokált kockázata.

A hátrányok azonban éppen az egyszerűségből fakadnak. Először is, nem veszi figyelembe, hogy a játékosok a különböző koalíciókban különbözőképp viselkedhetnek, és nem ugyanolyan a hozzájárulásuk a koalíciók kockázatához (ha például van egy játékos, amelynek nagy az egyedi kockázata, azonban a diverzifikációs hatás abból adódik, hogy ennek a játékosnak a kockázata csökken, akkor az egyéni kockázattal arányos módszer túl nagy kockázatot allokal hozzá). Másrészt, semmi nem garantálja, hogy stabil elosztást fog eredményezni ez a fajta kockázatallokáció, azaz az egyéni kockázattal arányos módszer esetén a megoldás nem feltétlenül magbéli.

Shapley módszer

Ez egy olyan módszer, ami szorosan kötődik a kooperatív játékokhoz. Az alapötlet Shapley 1953-as cikkében található, azóta számos alkalommal tárgyalták. A módszer lényege, hogy megvizsgálja, hogy az egyes játékosok mennyivel járulnak hozzá minden egyes koalíció kockázatához, és ezeknek veszi az átlagát. Formálisan:

$$\varphi_i^{SH} = \sum_{C \subset N, i \in C} \frac{(|C| - 1)!(n - |C|)!}{n!} [\rho(C \cup \{i\}) - \rho(C)]$$

Bonyolultnak tűnik elsőre a képlet, azonban mégis ez az egyik legegyszerűbb kockázatelosztási módszer, amely ráadásul számos jó tulajdonsággal rendelkezik. Többféle axiomatizálása is létezik, mi itt egyet ismertetünk, amely a kockázatelosztási játékok témakörében a legjobban megfogalmazható (Young [1985] cikke alapján).

14. Állítás. *Legyen Φ egy tetszőleges kockázatelosztási módszer, amely az alábbi tulajdonságokat teljesíti:*

- **hatékony:** $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \rho(N)$
- **szimmetrikus:** $\rho(C \cup \{i\}) - \rho(C) = \rho(C \cup \{j\}) - \rho(C) \quad \forall C \subset N, i, j \notin C \Rightarrow \varphi_i = \varphi_j$
- **erősen monoton:** vegyünk két különböző kockázatelosztási játékot (G_1, G_2) , amelyekben a kifizetésfüggvényeket a (ρ_1, ρ_2) kockázati mértékek definiálják. Ha $\forall C \subset N : \rho_1(C \cup \{i\}) - \rho_1(C) \leq \rho_2(C \cup \{i\}) - \rho_2(C)$, akkor $\varphi_{1,i} \leq \varphi_{2,i}$

Ekkor $\Phi = \Phi^{SH}$, azaz a Shapley-érték az egyetlen kockázatelosztási mechanizmus, amely egyszerre teljesíti ezeket a tulajdonságokat.

Az első két tulajdonság jól érthető: szét tudjuk vele osztani a nagykoalíció kockázatát, és a játék szempontjából ugyanolyan játékosokat egyformán kezeli az elosztás. A harmadik tulajdonság is viszonylag egyszerű: ha az egyik kockázati mérték szisztematikusan kisebb kockázatot rendel egy adott játékoshoz, mint a másik mérték, akkor a játékos első kockázati mérték alapján allokált kockázata is legyen kisebb. Mindegyik tekinthető természetes elvárásnak egy kockázatelosztási módszertől, ezért is meglepő Young eredménye, hogy a Shapley módszer az egyetlen, ami teljesíti mindhárom tulajdonságot.

Még meglepőbb (és bizonyos szempontból lehangolóbb) az állítás, ha hozzátesszük Csóka és Pintér eredményét (Csóka-Pintér [2010]). A cikkben a szerzők megmutatják, hogy miután a Shapley-érték nem biztosít magelosztást, így nem létezik olyan kockázatelosztás, amely teljesíti a fenti három tulajdonságot, és magbéli. A szerzők ezt úgy fogalmazzák meg, hogy nem létezik igazságos kockázatelosztás.

3. Rendszerkockázat

A rendszerkockázat fogalmának meghatározásához De Bandt és Hartmann cikkéhez nyúlunk vissza (De Bandt-Hartmann [2000]). Először is szükségünk lesz a rendszerkockázati esemény fogalmára, amelyre a szerzők kétféle definíciót adnak. *Szűkebb* értelemben rendszerkockázati eseményről beszélhetünk, ha egy adott, a gazdaság szűk szféráját érintő negatív hatás az idő előrehaladtával sorozatos, egyre terjedő negatív következményeket okoz a gazdaság eredetileg nem érintett szereplőinél is. A szűkebb értelmezés esetén a kulcs a dominó-hatás: ahogy telik az idő, az intézmények egyre nagyobb hányadát érinti a probléma annak következtében, hogy kapcsolatban vannak már bajba került intézményekkel. Azaz, ha például egy bank fizetéképtelenné válik belső csalás miatt, és ez más bankoknál veszteséget okoz, akkor az említett csalás szűk értelemben vett rendszerkockázati eseményként értelmezhető. *Széles* értelemben rendszerkockázati esemény a fent leírtakon kívül akkor következik be, ha egy gazdaságot érő sokk a rendszer egészére szimultán módon van negatív hatással. Erre igen aktuális példa a végtörlesztés esete: a bankok egyszerre voltak kénytelenek elszenvedni veszteséget egy rajtuk kívülálló ok (a szabályozási környezet megváltozása) miatt.

Egy rendszerkockázati eseményt erősnek nevezünk, ha a tovagyűrűző hatások miatt olyan bankokat is fizetéképtelenné tesz, amelyek egyébként szolvensek voltak (ezt a jelenséget nevezik a szerzők pénzügyi *fertőzésnek*, mely fogalmat később részletesen megvizsgálunk). Ez a folyamat igen súlyossá válhat, és úgynevezett rendszerválságot okozhat, amely tulajdonképpen olyan fertőzés, amely megbénítja az egyébként jól működő rendszert. A fenti definíciók ismeretében definiálhatjuk a rendszerkockázatot, amely nem más, mint az erős rendszerkockázati események előfordulásának lehetősége.

Látható, hogy egy szűkebb értelemben vett rendszerkockázati eseménynek két fő összetevője van: a sokk és a fertőzési mechanizmus. Alapvetően két típusú sokkot tudunk megkülönböztetni: az egyedi sokkot, amely a pénzügyi rendszer egy elemére hat, és a rendszerszintű hatást, amely több (esetleg minden) intézményre egyidejű hatással van. Ezeket az eseményeket, és az azonnali hatásukat viszonylag könnyen lehet mérni, a stressztesztek és scenarioelemzések könyvtárnyi irodalma foglalkozik azzal, hogy az egyedi és rendszerszintű sokkok azonnali hatását vizsgálja.

A fertőzési, vagy terjedési mechanizmus már egy kifinomultabb módszertant követel, ugyanis itt több tényezőt egyszerre kell figyelembe venni: egyrészt, nem téveszthetjük szem elől, hogy milyen kapcsolatrendszer jellemzi a rendszert leíró hálózatot. Másrészt, a sokkok terjedésének időbelisége is igen fontos szerepet játszik (ezt a problémakört járja körül Battiston et al. [2009]). Tehát a szűkebb értelemben vett rendszerkockázatot hálózatokkal, hálózatok dinamikus tulajdonságainak leírásával tudjuk modellezni.

Az alábbiakban röviden áttekintünk néhány, a szakirodalomban ismert pénzügyi fertőzési modellt, majd ezeket szintetizálva felépítjük azt a keretet, amelyben a kockázatelosz-

tást játékelméleti módszerekkel értelmezni tudjuk.

3.1. A pénzügyi fertőzés csatornái

Az eddigiekben igen általánosan beszéltünk a rendszerkockázatról, azon belül is a pénzügyi rendszer fertőzéséről. Ahhoz, hogy ezt a jelenséget jobban megértsük, meg kell ismerünk azokat a csatornákat, amelyeken keresztül a rendszert érő sokkok továbbterjednek a hálózaton belül. Freixas és Rochet (Freixas-Rochet [2008]) négyféle fertőzési csatornát különböztet meg: a befektetői várakozások változását, az átutalási rendszerek működését, a banki OTC derivatívügyleteket, és a bankközi piacot.

A befektetői viselkedés igen szeszélyes lehet, azonban van egy meglehetősen makacs, az esetek nagyrésztében jelentkező tulajdonsága: a csordaszellem, azaz, ha baj van, akkor egyszerre az összes befektető szeretné biztonságban tudni a pénzét, azaz visszavonulni a befektetésétől. Részleges tartalékolású bankrendszer esetén az ilyen bankrohamok súlyos veszteséget okoznak a bankoknak (ha nem sikerül megállítani a rohamot időben, akkor a bankok csődbe is mennek). Ezt a jelenséget írja le többek között Jacklin és Bhattacharya [1988], illetve Chari és Jagannathan [1988]. A modelleket nem ismertetjük itt részletesen, csupán kiemeljük a központi gondolatot: egy sokk megváltoztatja a hosszú távra befektetők megtérülési várakozásait, amely arra készteti őket, hogy a lejárat előtt visszaváltsák a befektetésüket. Ahogy ez a jelenség terjed, a bankok fizetéseképtelenné válnak, amely tovább rontja a befektetők várakozásait, további likvidálásokat, illetve végül bankcsődöt eredményezve.

A fent ismertetett jelenség nem feltételezi, hogy a bankok egymással kapcsolatban állnak. A másik három fertőzési csatorna azonban a bankokat mint egy hálózat részeit tekinti, azonban ezt is kétféleképpen értelmezhetjük. Az átutalási rendszerek esetén a pénzügyi szektor szereplői kizárólag az ügyfeleken keresztül állnak kapcsolatban. Itt a fertőzést az okozza, hogy nem megfelelő tartalékolás esetén a bank nem tudja teljesíteni ügyfele átutalási megbízásait, és ezzel az átutalást fogadó banknál veszteséget okoz, amely tartalékai így csökkennek, és ő is fizetéseképtelenné válhat. Ezt a jelenséget írja le Freixas és Parigi [1998], kiemelve, hogy ez a probléma csak nettó elszámolási rendszer esetén lehetséges, azaz, amennyiben a bankok közvetlenül, egymás között hajtják végre a tranzakciókat. A szerzők megemlítik a Valós Idejű Bruttó Elszámolási Rendszert (VIBER, Real Time Gross System, RTGS), amely feltételez egy központi bankot és banki tartalékszámházakat. Ez a rendszer a cikk keretein belül lényegében felszámolja a rendszerkockázatot, hiszen VIBER esetén a fertőzés nem terjed tovább, mert a központ kötelezi a tartalékok feltöltésére a bankokat, és átmeneti zavar esetén helytáll a nemfizető bank kötelezettségeiért. Azonban ez a rendszerben hatékonyságvesztést okoz (hiszen a tartalékot a bankok nem tudják tovább hitelezni, illetve befektetni), tehát egy klasszikus közgazdasági trade-off jelentkezik a rendszerkockázat elleni védelem és a hatékonyság között.

Ugyanez az érvelés alkalmazható a derivatívügyletek esetén, ha nettó rendszernek megfeleltetjük az OTC ügyleteket, ahol nincs előírt tőkekövetelmény, a bruttó rendszer pedig a tőzsdei kereskedés letéti követelménnyel. Ekkor a letét tartásának lehetőségköltsége és a rendszer biztonsága közötti átváltás jelenik meg közgazdasági problémaként.

Számunkra a legfontosabb fertőzési csatorna a negyedik, amely a bankközi pénzüi létéből eredezteti a rendszerkockázati eseményeket. Ez az eset alapvetően abban különbözik az előző kettőtől, hogy a bankok közötti kapcsolat itt közvetlen: a tranzakciók nem az ügyfelek megbízásából jönnek létre, hanem - általában kényszer hatására - a bankok más banknál elhelyezett saját betéteiket likvidálják. A leggyakoribb kényszer a likviditási sokk, ami egyszerre a rendszer egy vagy több szereplőjét éri. Likviditási sokk alatt itt egyszerűen azt értjük, hogy hirtelen megnövekszik azon ügyfelek száma, akik szeretnék kivenni a pénzüket a bankból. Ez nem jelent problémát, ha elegendő tartalékkal rendelkeznek a bankok. Ha azonban egy szereplőnél túl nagy likviditási igény keletkezik, akkor ezt csak a más bankoknál elhelyezett betétjének felmondásával illetve csökkentésével tudja teljesíteni. Ez viszont a többi bank azonnal felhasználható eszközeinek állományát csökkenti. Így viszont lehetséges, hogy lesz olyan bank, amely eredetileg likvid volt, de a lecsökkent eszközállománnyal már nem az. Vagyis neki is szüksége lesz a bankközi betéteire. Ezt az érvelést folytatva belátható, hogy a pénzügyi fertőzés igen komoly károkat tud okozni a pénzügyi rendszerben.

3.1.1. Az Allen-Gale modell

Allen és Gale [2000] a fent leírt mechanizmust az ismert Diamond-Dybvig keretben vizsgálja (az eredeti Diamond-Dybvig modell leírása megtalálható a Diamond-Dybvig [1983] cikkben). Alapesetben, amikor nincs sokk, viszont a likviditási igény nem egyenletesen oszlik meg az egyes intézmények között⁵, a rendszer kezelni tudja az ingadozó pénzüszükségletet minden időszakban, ha megfelelően összekapcsolt a bankrendszer. Fertőzés úgy következik be, hogy az egyik banknál egy kis mértékű többlet likviditási igény lép fel, amelyet más banknál elhelyezett betéteiből tud eleget tenni. Ez viszont arra kényszeríti a többi bankot, hogy, amennyiben nincs megfelelő mennyiségű tartalékuk, likvidálják a hosszútávú befektetéseiket, hogy eleget tudjanak tenni a rövid távú kötelezettségeiknek. Azok a bankok azonban, akik feladják hosszútávú pozíciójukat, nem fogják tudni kifizetni a befektetőiket, így csődbe mennek.

Több következtetés is levonható a modellből, amelyek a későbbiekben, a dolgozatban ismertetett modellben is visszaköszönnének. Ezek közül a legfontosabb, hogy a fertőzés továbbterjedése erőteljesen függ a bankrendszert leíró hálózattól. A szerzők többféle esetet vizsgálnak, és megmutatják, hogy egy adott likviditási sokk egy kevésbé összekötött rend-

⁵A probléma nyilvánvalóan érdektelen, ha a likviditási igény egyenletesen oszlik el, ugyanis ekkor az egyforma bankok egyforma mértékű követeléssel néznek szembe, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy a modell szétesik sok kis Diamond-Dybvig modellre.

szert (ahol minden bank csak egyetlen másiknál helyez el betétet) összeomlaszt, míg a szorosabban összefonódott bankok (például, ha minden bank minden bankkal egyszerre hitelezői és adósi kapcsolatban van) túlélnek a krízist. Továbbá, a modell közelebbi ismerete nélkül is látható, hogy a tartalékok (egy időszakos, likvid befektetések, tulajdonképpen az, amit kockázati tőkének nevezünk korábban) szintje jelentős szerepet játszik abban, hogy elkerülhető legyen a rendszerkockázati esemény létrejötte: minél nagyobb tartalékokkal rendelkezik egy bank, annál kevésbé szükséges a bankközi piachoz fordulnia többlet likviditási igény esetén.

3.2. A bankközi kapcsolatok lehetséges értelmezései

Ahhoz, hogy a bankrendszert vizsgáljuk, először is szükség van arra, hogy a kapcsolódások természetét leírjuk. Ez a valóságban természetesen igen bonyolult, ezért célszerű egyszerűsítő feltevésekkel dolgozni, és olyan stilizált bankrendszert használni, amely a számunkra releváns tulajdonságokkal rendelkezik.

Attól függően, hogy a bankok mérlegét hogyan képzeljük el, számos modellváltozat lehetséges. Haldane és May [2011] például egy olyan sematikus banki mérleget ír le, ahol a bankok egymás közötti tevékenysége a mérleg mindkét oldalán megjelenik bankközi hitelek és betétek formájában. Ekkor a fertőzés hatása úgy jelenik meg, hogy amikor egy bank becsődöl, azaz nem tudja teljes egészében visszafizetni a kötelezettségeit, akkor azon bankok, akik hiteleztek neki, szintén elvesztik eszközeik egy részét, mintegy a fertőzés másodkörös hatásának eredményeképpen.

Freixas et al. [2000] egy egészen másféle értelmezését adja a bankrendszer összekapcsolódásának. Ők úgynevezett hitelcsatornákat írnak le (credit line), amelyeket az egyes bankok igénybe vehetnek más intézményektől, amennyiben likviditási szükségletük keletkezik. A szerzők állítása szerint ez a fajta hitelcsatorna csökkenti a likvid eszközök tartásának költségét, azonban a bankrendszert hajlamosabbá teheti a bankrohamokra, illetve, a hitelcsatornák olyan inszolvens bankokat is életben tarthatnak, amelyek ezek nélkül a források nélkül nem lennének képesek működni. Ez utóbbi jelenség azt eredményezi, hogy csökken a bankrendszer hatékonysága, mert gyengül az ösztönzés a rosszul teljesítő bankok bezárására.

Allen et al. [2010] megközelítésében a bankok csak eszközoldalon hajtanak végre egymás között műveleteket. Minden bank egyféle kockázatos befektetésbe helyezi a forrásait. A befektetések hozamai függetlenek, így a diverzifikáció csökkenti a kockázatot. Ezért az intézmények egymás között elcserélik a befektetéseik egy adott hányadát. Ezzel csökkentik a csődkockázatot, ugyanis ugyanakkora eszközérték mellett kisebb lesz annak a valószínűsége, hogy a veszteség eléri a bank tartalékát (itt ismét az Allen-Gale [2000] cikkre utalhatunk vissza, ahol a bankok tartaléka jelentős szerepet játszik a fertőzés elkerülésében). Ugyanakkor, a cikk szerzői feltételezik, hogy a diverzifikációnak költsége van: a

csere során az egyes bankok az újonnan szerzett befektetéseiket ellenőrzik, mivel számukra eddig ismeretlen befektetés jelenik meg a portfóliójukban (az irodalomban ez „due diligence” költségként ismert). A diverzifikáció és due diligence költség közötti átváltáson kívül a bankok rendszerszintű szerveződésének még egy aspektusát megragadják a szerzők: az intézményhálózattól függ, hogy a befektetők miként vélekednek a bankok csődkockázatáról. Figyelembe véve, hogy a befektetők csak akkor hajlandóak a pénzüket a bankban tartani, ha úgy vélik, az nem megy csődbe, különböző hálózatok igen különböző befektetői döntéseket eredményeznek, és ezeken keresztül különböző banki hozamokat generálnak.

Az eddigiekben láthattuk, hogy számos módon írható le a bankrendszer, attól függően, hogy éppen melyik aspektusát szeretnénk vizsgálni. A dolgozat során alapvetően a legutóbb leírt, Allen et al. [2010] cikkben ismertetett alapötletet vizsgáljuk, vagyis szinte kizárólag a bankok eszközoldalára koncentrálnak a saját bankrendszermodellünk felépítése során.

3.3. A stilizált pénzügyi rendszer

Egy bank működése

Először tekintsük azt az esetet, amikor egyetlen bankunk van. Ez természetesen még nem igazi rendszer, azonban fontos megérteni, hogy az egyes bankok hogyan működnek. A bankunkat a mérlegével jellemezzük, amely meglehetősen egyszerű: kétféle forrása van, saját tőke és idegen források, amelyeket kizárólag egyforma bankbetétek képviselnek. A saját tőke alatt a bank jegyzett tőkéjét értjük, illetve beleértjük azokat a tartalékokat, amelyeket a kockázatok ellen képzett az intézmény. A betétállomány kizárólag nagyszámú, kis értékű betétből áll. Normál működési körülmények között a betétekből történő pénzfelvét és az újabb betétek elhelyezése nagyjából egyensúlyban van, így az idegen források mennyiségét állandónak tekinthetjük. Az egyszerűség kedvéért a bank mérlegfőösszegét lenormáljuk 1-re. Ekkor a bank saját tőkéje legyen θ , a betétállomány nagysága pedig $1 - \theta$. A bank a forrásait egyetlen, kockázatos eszközbe fekteti be, jelöljük ennek értékét z^t $t = \{0; 1\}$ -el. Természetesen $z^0 = 1$, hiszen a mérlegazonosságból adódóan a bank eszközeinek ex ante értéke annyi, mint forrásainak értéke. Ezek alapján a bankmérleg sémája az alábbiak szerint ábrázolható:

Eszközök	Források
Befektetés	Saját tőke
(z^0)	(θ)
	Betétek
	$(1 - \theta)$

1. táblázat. Banki mérleg

Az eszköz kockázata az ex post értékén (z^1 -en) keresztül jelenik meg, amely nem előre meghatározott, hanem egy valószínűségi változó (amelyet jelöljünk Z -vel) adja meg

az értékét. Z eloszlásfüggvényét jelöljük F_Z -vel. Az időbeliséget nem szeretnénk tovább megtartani a modellben, vagyis feltételezzük, hogy minden esemény tulajdonképpen egyszerre történik. Ekkor ésszerű feltevés, hogy az eszköz ex post várható értéke ne térjen el a befektetés ex ante értékétől, vagyis $E(Z) = 1$. Ezen kívül a Z változóról egyelőre csupán annyit kötünk ki, hogy a második momentuma véges legyen, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} Z^2 dF_Z < \infty$, vagyis véges szórású valószínűségi változóról akarunk beszélni.

Mivel a rendszerkockázatot szeretnénk elemezni, egyfajta csődfogalom bevezetésére van szükség.

15. Definíció. *A bank csődben van, ha nem tudja kifizetni a betéteseit, azaz $Z \leq (1 - \theta)$. Ezek alapján a bank csődvalószínűsége $P(Z \leq 1 - \theta) = F_Z(1 - \theta)$.*

Ahhoz, hogy a csődeseményt értelmezni tudjuk, szükség van arra is, hogy megmondjuk, mi történik, ha bekövetkezik a csőd. Természetesen ekkor likvidálják a bank befektetését, és a maradékot szétosztják a betétesek között (természetesen, mivel a bank eszközértéke az idegen forrásainak értéke alá került, a saját forrásai elvesztették értéküket, vagyis a bank tulajdonosai nem kapnak semennyit). Feltesszük továbbá, hogy a likvidálásnak van valamekkora költsége, azaz nem a teljes eszközértéket kapják meg a betétesek, csak annak α hányadát ($0 \leq \alpha \leq 1$).⁶ Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\alpha = 0$, azaz a csődbe ment bankból a betétesek pénze elúszik teljes egészében.

A bankrendszer felépülése, jellemzői

Tegyük fel, hogy összesen n darab bank van a pénzügyi rendszerben. Kezdetben mindegyik különálló, és a fent leírtaknak megfelelően viselkedik. Feltesszük továbbá, hogy a bankok forrásoldala nem különbözik, illetve az eszközoldalukat jellemző Z_i valószínűségi változók függetlenek.

A rendszer kialakulását a modellben azzal magyarázzuk, hogy ha több intézmény van jelen, akkor minden egyes szereplőnek lehetősége nyílik kockázatának mérséklésére a befektetési hozamok szóródásának, illetve a csődvalószínűségnek a csökkentésén keresztül. Méghozzá úgy, ha diverzifikálja az eszközoldalát: az egyetlen kockázatos befektetés helyett megállapodik néhány másik bankkal, hogy elcserélik a befektetéseik ex post eredményének egy adott hányadát. Fontos hangsúlyozni, hogy a tranzakciótól függetlenül a befektetett eszközök az eredeti banknál maradnak. Ennek abból a szempontból van csupán jelentősége, hogy likvidáláskor az eredeti befektetés értéke csökken nullára. Vagyis, az i bank csődje esetén $Z_i = 0$.

Legyen tehát az i bank olyan, amely diverzifikálja eszközeit. Ekkor i eszközoldala (jelöljük A_i -vel) az alábbiak szerint írható le:

⁶Ezt az arányszámot a szakirodalomban „recovery rate”-nek nevezik. (Magyarul gyakran megtérülési rátának nevezik, ami félrevezető lehet, ugyanis nem egy befektetés megtérüléséről, azaz hozamáról van szó.)

$$A_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j$$

ahol ϕ_{ij} azt mutatja meg, hogy az i bank a j intézmény kockázatos eszközéből mekkora részt kap, azaz a szerződés i és j bank között $\phi_{ij} Z_j$ eszközről szól. Értelemszerűen ϕ_{ii} azt mutatja meg, hogy a bank az általa eredetileg létrehozott befektetésből mekkora hányadot tart meg, továbbá, mivel ϕ_{ij} -k arányszámok, így $0 \leq \phi_{ij} \leq 1$. Azon bankokra, amelyek nem cserélnék eszközöket, egyszerűen $\phi_{ij} = 0$. Illetve azt is meg kell jegyezni, hogy azonos típusú eszközök cseréje történik, így ex ante összességében nem nyer és nem veszít egy bank a cserével. Ennek feltétele, hogy $\sum_{j=1}^n \phi_{ij} = 1$ teljesüljön. Vagyis tulajdonképpen minden diverzifikáló intézmény a különböző befektetések konvex lineáris kombinációjával rendelkezik. Tegyük fel, hogy azonos típusú eszközökről van szó, abban az értelemben, hogy áruk ex ante nem különbözik egymástól, vagyis az intézmények egy az egyhez cserére hajlandók, így $\phi_{ij} = \phi_{ji}$, tehát a kapcsolatok szimmetrikusak.

Az így kialakult portfóliókról tudjuk, hogy a várható értékük megegyezik a Z_i -k várható értékével, varianciájuk viszont kisebb, ugyanis:

$$E(A_i) = E\left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j\right) = \sum_{j=1}^n E(\phi_{ij} Z_j) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} E(Z_i) = E(Z_i) \sum_{j=1}^n \phi_{ij} = E(Z_i)$$

$$D^2(A_i) = D^2\left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j\right) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^2 D^2(Z_i) = D^2(Z_i) \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^2 \leq D^2(Z_i)$$

Látható, hogy azonos várható hozamot tudnak elérni a bankok, kisebb bizonytalanság mellett, vagyis ebben az értelemben diverzifikálták a kockázatukat. Ennél bonyolultabb kérdés, hogy valóban csökkent-e a csődkockázat. Ha az i bank végrehajtotta a diverzifikációt, akkor a csődvalószínűsége az alábbi formában írható fel:

$$P(A_i \leq 1 - \theta) = P\left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j \leq 1 - \theta\right)$$

Tehát az a kérdés, hogy igaz-e, illetve milyen feltételek mellett igaz a

$$P\left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j \leq 1 - \theta\right) \leq P(Z_i \leq 1 - \theta)$$

egyenlőtlenség. A probléma, hogy $A_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j$ eloszlásáról általános esetben túl kevés az információnk, és a fenti, várható értékre és varianciára vonatkozó összefüggésekből nem következik, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül az alsóági valószínűségekre. Ezért további, igen erős megkötések teszünk Z_i valószínűségi változóról: megköveteljük tőle,

hogy legyen normális eloszlású⁷. Ekkor ugyanis a fenti valószínűségek explicit formában megadhatók, és könnyen összehasonlíthatók.

$$P(Z_i \leq 1 - \theta) = P\left(\frac{Z_i - E(Z_i)}{D(Z_i)} \leq \frac{1 - \theta - E(Z_i)}{D(Z_i)}\right) = \Phi\left(\frac{-\theta}{D(Z_i)}\right)$$

, ahol Φ a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ugyanilyen elven

$$P(A_i \leq 1 - \theta) = \Phi\left(\frac{1 - \theta - E(A_i)}{D(A_i)}\right) = \Phi\left(\frac{-\theta}{D(A_i)}\right)$$

$D(A_i) \leq D(Z_i)$ -ből következik, hogy $\frac{-\theta}{D(A_i)} \geq \frac{-\theta}{D(Z_i)}$, azaz

$$P(A_i \leq 1 - \theta) \leq P(Z_i \leq 1 - \theta)$$

tehát azt láthatjuk, hogy normális eloszlás esetén teljesül a fenti egyenlőtlenség, azaz a csődvalószínűség csökken.

Az eddigiek alapján azt mondhatjuk el, hogy az egyes bankok számára a diverzifikáció szinte kizárólag előnyökkel jár: csökken a befektetésük hozamának szórása, ráadásul csökken az egyéni csődvalószínűség is. Egyetlen hátránya van egyéni szinten a diverzifikációnak: ha az egyik intézmény csődbe megy, akkor a többi, vele kapcsolatban álló intézmény szintén elveszíti a befektetéseinek egy részét. Ez a hatás a teljes pénzügyi rendszerben jelentősen felerősödhet. Egy intézmény csődje továbbgyűrűzhet oly módon, hogy a vele kapcsolatban álló bankok eszközértékét is lecsökkenti, és további bankokat dönthet be, vagyis egy tipikus pénzügyi fertőzés alakulhat ki a modellben. Nézzük meg ezt a jelenséget részletesebben, a vizsgálódásainkat egy bank csődjére szűkítve.

A fertőzés hatása a modellben

Tegyük fel, hogy miután kialakultak a hozamok, a bankrendszerben pontosan egy bank megy csődbe, azaz i bank eszközeinek értéke, $A_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} Z_j \leq 1 - \theta$, míg $\forall l \neq i$ bankra $A_l = \sum_{j=1}^n \phi_{lj} Z_j > 1 - \theta$. Ekkor az i bank befektetését likvidálni kell. Korábban feltettük, hogy $\alpha = 0$, azaz a likvidálás során a bank befektetése elveszti a teljes értékét. Ekkor a bankrendszer többi bankja elveszíti $\phi_{ji} Z_i$ részét az eszközei értékének. Ha ekkor létezik olyan l bank, amelyre $A_l = \sum_{j=1}^n \phi_{lj} Z_j > 1 - \theta$, viszont $\sum_{j \neq i} \phi_{lj} Z_j \leq 0$, akkor a fertőzés továbbterjed, és egy további bank is csődbe jut annak következtében, hogy az első bank csődbe jutott. Ekkor az l bank eszközeit is likvidálják, és így a bankrendszer további veszteséget szenved el, amely további csődökhöz vezethet.

⁷Válasszuk normális eloszlás esetén olyan kicsire a szórást, hogy annak a valószínűsége, hogy egy eszköz értéke nullánál kisebb legyen, gyakorlatilag elhanyagolható.

A rendszer működéséből látszik, hogy azon bankok, amelyek nem kapcsolódnak közvetlenül egy csődbe került intézményhez, azaz amelyekre $\phi_{ji} = 0$, természetesen az első körös hatásokból kimaradnak, azonban a fertőzés továbbterjedése miatt közvetetten az ő eszköztékeikre, illetve csődvalószínűségeikre is hatással lehet a bedőlés. Vagyis a modellben megjelenik a bankrendszer összekapcsoltságának kettős, trade-off jellegű hatása: egyrészt csökkenti az egyedi csődkockázatot, másrészt, egy intézmény csődje esetén a fertőzés miatt sokkal nagyobb veszteségek jelentkezhetnek a rendszerben.

Nézzük meg, mi történik az eszközök várható értékével, amennyiben az egyik intézmény csődbe megy. Ennek az eseménynek a hatása kétféleképpen jelentkezik: egyrészt, az egyes intézmények csődje esetén a velük kapcsolatban lévő bankok eszközállományának egy része elveszik, másrészt, ezáltal pozitív lehet annak a valószínűsége, hogy csődbe megy az egyébként fizetőképese intézmény. Legyen D_i az az esemény, hogy i bank csődbe megy, és a többi bank nem megy csődbe kezdetben. Ekkor j bank eszközállományának várható hozamát az alábbi formában tudjuk megadni:

$$E(A_j|D_i) = (1 - P(D_j|D_i))E\left(\sum_{l=1}^n \phi_{jl}Z_l|D_i\right) + P(D_j|D_i) \cdot 0$$

ahol $P(D_j|D_i)$ annak a valószínűsége, hogy j bank is csődbe megy, amennyiben i csődbe ment. Természetesen ez a valószínűség függ a Z_i valószínűségi változók értékeitől, illetve a rendszer összekapcsoltságát mutató ϕ_{ij} értékektől, méghozzá az alábbiak szerint:

$$P(D_j|D_i) = P\left(\left\{\sum_{l=1}^n \phi_{jl}Z_l|Z_i = 0\right\} \leq 1 - \theta\right) = P\left(\sum_{l \neq i} \phi_{jl}Z_l \leq 1 - \theta\right)$$

Továbbra is fennáll a normális eloszlás feltételezése, azaz az utóbbi valószínűséget explicit módon ki tudjuk számolni:

$$P\left(\sum_{l \neq i} \phi_{jl}Z_l \leq 1 - \theta\right) = \Phi\left(\frac{1 - \theta - \sum_{l \neq i} \phi_{jl}}{D\left(\sum_{l \neq i} \phi_{jl}Z_l\right)}\right)$$

A fenti kifejezésben az eszközállomány várható értékét az alábbiak szerint számoltuk ki:

$$E\left(\sum_{l=1}^n \phi_{jl}Z_l|D_i\right) = E\left(\sum_{l=1}^n \phi_{jl}Z_l|Z_i = 0\right) = E\left(\sum_{l \neq i} \phi_{jl}Z_l\right) = \sum_{l \neq i} \phi_{jl}E(Z_l) = \sum_{l \neq i} \phi_{jl}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy minden eszköz várható értéke egységnyi. A számítás eredménye megfelel az intuíciónak: ha az egyik intézmény csődbe megy, akkor

az ő befektetése elveszik a teljes rendszer számára, míg a többi befektetés hozamának alakulását a csőd nem befolyásolja.

A rendszerkockázat mérőszáma

Az eddigiek alapján meg tudjuk határozni, hogy a rendszerkockázat mennyivel terheli meg az egyes intézményeket. Tehát a rendszerkockázatból adódó veszteséget úgy definiáljuk, mint az egyes intézmények várható hozamának csökkenését annak következtében, hogy az egyik bank csődbe megy. Jelöljük SL_j -vel a j bank rendszerkockázatból adódó veszteségét, amelyet az

$$SL_j = \sum_{i=1}^n (E(A_j) - E(A_j|D_i)) \cdot P(D_i)$$

formulával tudunk megadni. Tudjuk, hogy $E(A_j) = 1$, így a fenti kifejezés csupán a $E(A_j|D_i) \cdot P(D_i)$ kifejezéstől függ.

SL értéke analitikusan még normális eloszlás esetén is nehezen számolható, értékét leginkább szimulációkkal tudjuk meghatározni egyes helyzetekben. Viszont előnye, hogy függ a ϕ_{ij} értékektől, vagyis számos különböző rendszer, amelyben az összekapcsolódás a modellben leírtak szerint történik, leírható vele.

Ahhoz, hogy zárt formulát kapjunk SL_j -re, kössük ki, hogy legfeljebb egy bank mehet csődbe. Ekkor a rendszerkockázatból adódó veszteség tulajdonképpen a bankok eszközértékének csökkenése ennek az egy csődnek a következtében. Jelöljük D -vel azt az eseményt, hogy pontosan egy bank csődbe megy, illetve $\bar{D}$ -vel azt, hogy egy bank sem megy csődbe. A fenti feltételezésből $P(D) + P(\bar{D}) = 1$, illetve $P(D) = \sum_{l=1}^n P(D_l)$. Ekkor a j bank eszközértékét, feltéve, hogy valamelyik bank csődbe van, jelöljük $A_j|D$ -vel. Ennek várható értéke a teljes várható érték tételéből adódik:

$$E(A_j|D) = \sum_{i=1}^n E(A_j|D_i)P(D_i)$$

Tehát a fenti rendszerkockázati veszteséget megadhatjuk a

$$SL_j = 1 \cdot P(D) - E(A_j|D)$$

alakban. Ennek a kifejezésnek az értéke megadható a feladat paramétereinek függvényében. Ehhez alakítsuk át az SL_j -re vonatkozó összefüggést.

$$SL_j = P(D) - E(A_j|D) = \sum_{i=1}^n P(D_i) - \sum_{i=1}^n E(A_j|D)P(D_i) = \sum_{i=1}^n (1 - E(A_i|D_j)) P(D_i)$$

Ebbe a korábban megismert értékeket behelyettesítve:

$$\sum_{i=1}^n (1 - E(A_i|D_j)) P(D_i) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \left[(1 - P(D_j|D_i)) E \left(\sum_{l=1}^n \phi_{jl} Z_l | D_i \right) \right] \right) P(D_i)$$

Felhasználva, hogy feltevésünk szerint csupán egy bank megy csődbe, azaz $P(D_j|D_i) = 0$, illetve behelyettesítve az $E \left(\sum_{l=1}^n \phi_{jl} Z_l | D_i \right) = \sum_{l \neq i} \phi_{jl}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy:

$$SL_j = \sum_{i=1}^n \left(1 - \sum_{l \neq i} \phi_{jl} \right) P(D_i) = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} P(D_i) \quad (3.1)$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $\sum_{l=1}^n \phi_{jl} = 1$. Az eredmény azt tükrözi, amit vártunk: az intézmény rendszerkockázatból adódó veszteségét úgy írhatjuk le, hogy tekintjük az összes olyan esetet, amelyben egy bank csődbe megy. Ezekben az esetekben a j bank elveszíti eszközoldalának azon részét, amelyet a csődbe ment bankkal cserélt el. A $P(D_i)$ valószínűséget, abban az esetben, ha pontosan egy bank megy csődbe, már korábban kiszámoltuk, így ezt behelyettesítve a fent kapott kifejezésbe az alábbi forma adódik:

$$SL_j = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \Phi \left(\frac{-\theta}{D(A_i)} \right) = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \Phi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{i=1}^n \phi_{ij} Z_j \right)} \right) \quad (3.2)$$

Ellenőrzésképp tekintsünk egy szélsőséges esetet. Tegyük fel, hogy a bankrendszer egyáltalán nincs összekapcsolódva. Ekkor

$$SL_j = P(D) - E(A_j|D) = P(D) - E(A_j|D_j)P(D_j) - E(A_j|\overline{D_j})P(\overline{D_j})$$

Tudjuk, hogy $E(A_j|D_j) = 0$, ugyanis pontosan ez volt a definíció: ha a j bank csődbe megy, akkor eszközének értéke automatikusan nulla lesz. Továbbá, mivel nincs összekapcsolódás a bankrendszerben, így $E(A_j|\overline{D_j}) = E(A_j) = 1$. Ezekből tehát

$$SL_j = P(D) - P(\overline{D_j}) = P(D_j)$$

Ugyanezt az eredményt természetesen megkaphatjuk, ha (3.1)-be helyettesítünk be: mivel a bankrendszer nincs összekapcsolódva, így $\phi_{jj} = 1$, illetve $\phi_{ji} = 0$ $i \neq j$, tehát

$$\sum_{i=1}^n \phi_{ji} P(D_i) = P(D_j)$$

Ezen az egyszerű példán egyrészt leellenőriztük, hogy az általunk megkapott képlet helyes,

másrészt azt láthatjuk, hogy a kapott eredmény egybevág a várakozásainkkal: tulajdonképpen azt mutatja, hogy az egy elemből álló „rendszer” kockázata nem más, mint a bank csődvalószínűsége.

3.4. A rendszerkockázati veszteség tulajdonságai

A korábbiakban, amikor a bankközi kapcsolatok értelmezését vizsgáltuk, megemlítettünk egy igen általános jelenséget, amelyet számos szerző megragad a modelljében: a rendszer összekapcsolódásának kettős hatását. Egyrészt, ha létrejönnek kapcsolódások a bankrendszerben, akkor a diverzifikációs hatás miatt csökken az egyes bankok csődvalószínűsége, másrészt, megjelenik a fertőzésből fakadó hatás: az egyes bankok eszközeinek várható értékét csökkenti az a tény, hogy a többi, vele kapcsolatban álló bank csődbe mehet. Ezt a jellemzőt szeretnénk a mi modellünkben is kimutatni.

A bankrendszer összekapcsoltságának mértékét a korábban definiált ϕ_{ji} $i \neq j$ értékekkel tudjuk jellemezni. Ha van két bankrendszer (A és B), amelyben minden paraméter azonos, csupán abban különböznek, hogy az egyikben az i és j bank nagyobb hányadát cseréli el eszközeinek, azaz $\phi_{ji}^A \leq \phi_{ji}^B$, akkor a B bankrendszert nevezhetjük összekapcsoltabbnak. Vagyis ϕ_{ji} változását értelmezhetjük úgy, mint a rendszerbeli kapcsolat erősségének változását. Tehát azt keressük, hogyan hat ϕ_{ji} változása SL_j -re. Természetesen, észben kell tartanunk, hogy ϕ_{ji} egyedül nem változhat, ugyanis a $\sum_{j=1}^n \phi_{ij} = 1$ egyenlőségnek mindig teljesülnie kell. Ezt a problémát például úgy kezelhetjük, hogy feltesszük, hogy a bankközi szerződések egymástól függetlenül köttetnek, azaz ϕ_{ji} változása nincs hatással ϕ_{li} $l \neq i, j$ értékekre, csupán ϕ_{ii} -re, és ϕ_{jj} -re. Ezen feltételezések segítségével formalizálni tudjuk ϕ_{ji} és SL_j kapcsolatát. A teljes differenciálás szabályát felhasználva:

$$\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} = \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{jl}} \frac{d\phi_{jl}}{d\phi_{ji}}$$

Az előzőekben leírt egyszerűsítő feltevésekből az következik, hogy

$$\frac{d\phi_{jl}}{d\phi_{ji}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } l \neq j \\ -1 & \text{ha } l = j \end{cases}$$

Ekkor a keresett differenciál a

$$\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} = \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}} - \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{jj}}$$

formában írható fel.

Az eredményből látszik, hogy amennyiben ϕ_{ji} megváltozik, akkor két, jellegében azonos, de ellentétes előjelű hatás érinti a rendszerkockázatot: az egyik egyfajta közvetlen hatás,

a másik pedig egy közvetett hatás, ami azon keresztül éri a bankot, hogy csökken a saját befektetésének részesedése az összes eszközállományán belül. Ahhoz, hogy az egyes hatások irányát meg tudjuk állapítani, ki kell számolnunk a $\frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}}$ értéket (a szimmetria miatt az eredmény értelemszerűen következni fog $\frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{jj}}$ -re is).

$$\begin{aligned} \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}} &= \frac{\partial \sum_{l=1}^n \phi_{jl} \Phi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj} Z_j \right)} \right)}{\partial \phi_{ji}} = \sum_{l=1}^n \phi_{jl} \phi_{ji} \varphi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj} Z_j \right)} \right) \frac{\theta D^2(Z_i)}{\left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj}^2 D^2(Z_j) \right)^{3/2}} + \\ &+ \Phi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj} Z_j \right)} \right), \end{aligned}$$

ahol φ itt a sztenderd normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ez a derivált igen bonyolult, azonban az előjele könnyedén megállapítható. Φ és φ csak pozitív értékeket vesz fel, $\theta > 0$, és ezenkívül csupán négyzetes jellegű tagok szerepelnek a kifejezésben, így minden ϕ_{ji} -re $\frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}} \geq 0$. Azonban nekünk a teljes változást a

$$\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} = \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{ji}} - \frac{\partial SL_j}{\partial \phi_{jj}}$$

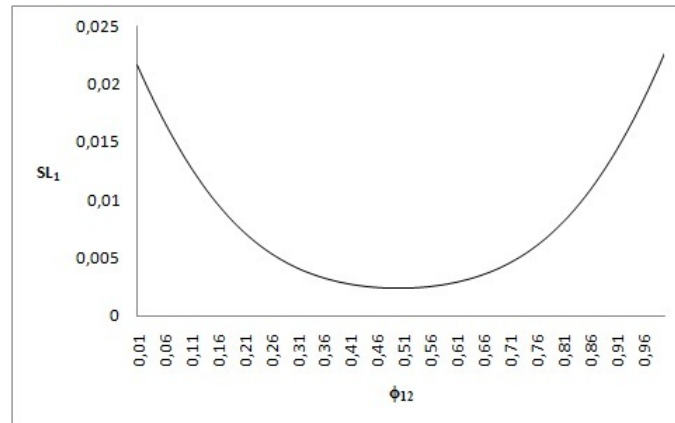
kifejezés írja le. A fenti deriválást ϕ_{jj} -re alkalmazva, és a két deriváltat kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$$\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} = A \sum_{l=1}^n \phi_{jl} (\phi_{ji} D^2(Z_i) - \phi_{jj} D^2(Z_j)) \quad (3.3)$$

ahol $A = \varphi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj} Z_j \right)} \right) \frac{\theta}{\left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj}^2 D^2(Z_j) \right)^{3/2}} > 0$. Vagyis visszakaptuk a kívánt kettős tulajdonságot. Amennyiben az összekapcsolódás foka kisebb (azaz $\phi_{ji} D^2(Z_i) < \phi_{jj} D^2(Z_j)$), akkor a bankközi hálózat diverzifikáló hatása dominál, és így a kapcsolatok erősödésével csökken a rendszerkockázat (azaz $\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} < 0$). Ha viszont a bankok közötti kapcsolat szoros ($\phi_{ji} D^2(Z_i) > \phi_{jj} D^2(Z_j)$), akkor a fertőzés jelensége miatt a további kapcsolódás instabilabbá teszi a rendszert ($\frac{dSL_j}{d\phi_{ji}} > 0$).

Ezt az eredményt jelentősége miatt egy egyszerű példával is illusztráljuk. Tegyük fel, hogy csak két bankból áll a bankrendszerünk. Mindkét intézménynek olyan befektetése van, amelynek a szórása 0,1, azaz $D(Z_1) = D(Z_2) = 0,1$. Továbbá tudjuk, hogy a közös θ értéke 0,2. Ezekkel a paraméterválasztásokkal biztosíthatjuk, hogy a csődvalószínűség nem lesz elhanyagolható, bármilyen összekapcsolódást is nézünk. Továbbá, a viszonylag kis szórás miatt annak a valószínűsége, hogy az egyes befektetések értéke negatívba forduljon,

gyakorlatilag elhanyagolható (normális eloszlás esetén a várható értéktől tíz szórásnyira lévő értékek bekövetkezésének valószínűsége kevesebb, mint 10^{-20}). Ezt a rendszert a ϕ_{12} számos értéke mellett megvizsgáljuk: felosztjuk 100 egyenlő részre a $[0, 1]$ intervallumot, majd minden osztópontot ϕ_{12} egy-egy lehetséges értékének tekintve kiszámoljuk az SL_1 értékeit (értelemszerűen, ebben a teljesen szimmetrikus helyzetben ez meg fog egyezni az SL_2 értékekkel). A számításokat nem részletezzük, azonban az eredményként kapott ábra tanulságos lehet:



1. ábra. Az 1. bank rendszerkockázatból adódó vesztesége ϕ_{12} különböző értékei mellett

Láthatjuk, hogy visszakaptuk a kívánt tulajdonságot: amikor ϕ_{12} értéke alacsony, akkor a rendszerbeli kapcsolatok szorosabbra fűzésével a diverzifikációs hatás miatt csökken a rendszerkockázat, míg a magasabb értékek esetén a ϕ_{12} további növelése emeli a rendszerkockázatot. A példa egyszerű szerkezete ráadásul segít minket abban, hogy pontosan megnevezzük a kockázati forrásokat: a csökkenő szakaszon az első bank rendszerkockázati vesztesége döntően abból származik, hogy ő saját maga csődbe mehet, és ekkor elveszíti a befektetését, míg a növekvő szakaszon a fő kockázati forrás az első bank számára a második bank csődje. A nagy részesedés miatt ugyanis az első bank eszközeinek nagy részét elveszíti, amennyiben a második bank csődbe jut.

Az ábráról még egy fontos dolgot le tudunk olvasni: a görbe minimuma 0,5-nél van, és ezt az eredményt vártuk analitikusan is. Ha ugyanis ránézünk a (3.3) egyenletre, és figyelembe vesszük, hogy $D(Z_1) = D(Z_2)$, akkor azonnal látszik, hogy a derivált értéke pontosan ott nulla, azaz ott van minimuma a függvénynek, ahol $\phi_{12} = \phi_{11}$. Ebből a ϕ_{ij} -re vonatkozó korlátokat kihasználva azt kapjuk, hogy a minimumnak $\phi_{12} = 0,5$ -nél kell lennie, pontosan ahogy az ábrán látszik.

A többi paraméter függvényében is megvizsgálható a rendszerkockázati veszteség. Most azt az esetet vizsgáljuk meg, hogy mi történik SL_j -vel az eszközérték marginális változásának hatására. Mivel azonban a képletben az eszközérték kizárólag a szórásban szerepel, így elegendő azt vizsgálnunk, hogy a szórás változása hogyan módosítja a rendszerkockázati

veszteséget. Vagyis keressük (3.2) deriváltját a j eszköz szórása szerint:

$$\frac{dSL_j}{dD(Z_j)} = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \varphi \left(\frac{-\theta}{D \left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj} Z_j \right)} \right) \frac{-\theta}{\left(\sum_{l=1}^n \phi_{lj}^2 D^2(Z_j) \right)^{3/2}} \frac{1}{2} \phi_{jj} 2D(Z_j)$$

amely kifejezést a fent bevezetett A érték segítségével az alábbi, egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$\frac{dSL_j}{dD(Z_j)} = A \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \phi_{jj} D(Z_j)$$

Erről azonnal látszik, hogy tetszőleges paraméterértékek mellett minden Z_j -re pozitív, vagyis a szórás növekedésével a rendszerkockázat növekszik. Ez szintén igen kíváncsú eredmény: azt mutatja, hogy amennyiben egy intézmény befektetésének kockázata nő, akkor nő a csődvalószínűsége is, és ezen keresztül emelkedik a rendszerkockázata is.

4. A rendszerkockázat elosztása

Az előző fejezetben levezettünk egy modellt, amellyel meg lehet ragadni fontos rendszerkockázati tulajdonságokat: egyrészt azt, hogy a rendszer struktúrájának jelentős hatása van a kockázatra, amely hatás nemlineáris: van olyan tartomány, ahol a rendszert leíró hálózat összekapcsoltságának növekedése csökkenti a kockázatot, van azonban olyan szakasz, ahol a fertőzésveszély miatt a túlzott összefonódás extra kockázatot visz a rendszerbe. Továbbá láttuk azt is, hogy minél kockázatosabb egy intézmény, annál nagyobb rendszerszintű kockázatot okoz.

A dolgozat elején részletesen ismertettük a kockázattal kapcsolatos irodalomban igen népszerű kockázatelosztási játékokat. Ezeket szeretnénk alkalmazni a fent leírt pénzügyi fertőzési modellben a rendszerkockázati veszteség elosztására. Ahhoz, hogy kockázatelosztási játékot tudjunk értelmezni, szükség lesz a játékosok, a koalíciók, és a kifizetésfüggvény definíciójára.

4.1. A rendszerkockázati játék felépítése

A játékosok definíciója a fenti modellből egyértelműen következik: az egyes pénzügyi intézmények a kockázatelosztási játék szereplői, azaz minden játékos egy-egy bankot képvisel. A többi fogalom tisztázása már nem ilyen nyilvánvaló: többféleképpen definiálhatók a koalíciók, és a rajtuk értelmezett kifizetésfüggvény. Ezek leginkább abban tudnak különbözni egymástól, hogy milyen módon változnak a rendszer összekapcsoltságát mutató ϕ_{ji} értékek. Tekintsük most azt az esetet, amikor gyakorlatilag állandóak a ϕ_{ij} értékek. Rögzítsünk előre egy adott rendszert, amelyben legyenek az összekapcsolódást mutató értékek $\phi_{ij} \forall i \neq j$ -re. Ez persze meghatározza ϕ_{jj} -t is. Az így kapott intézményi kapcsolatrendszert tekintsük nagykoalíciónak. Ez igen természetes módon adódik: minden intézmény benne van, ami megfelel a nagykoalíció kooperatív játékelméleti definíciójának. A korábban ismertetett kockázatallokációs módszerek mind a nagykoalíció kockázatát osztják szét, amely segítségével tudunk válaszolni a vizsgált kérdésre: hogyan osszuk szét a rendszerkockázatot az egyes szereplők között.

Miután meghatároztuk a nagykoalíciót, a többi koalíciót a nagykoalícióból fogjuk származtatni, még hozzá egyfajta hasítási módszerrel: koalíción belül meghagyjuk a kapcsolatokat, azonban minden olyan kapcsolatot, amelynek nincs mindkét szereplője a koalíción belül, elvágunk. Formálisan:

16. Definíció. Legyen N az összes játékos halmaza. Ekkor $C \subseteq N$ játékosok részhalmaza

koalíció, ha $\forall i, j \in N$ -re

$$\phi_{ij}(C) = \begin{cases} \phi_{ij}(N) & \text{ha } i, j \in C, i \neq j \\ 0 & \text{ha } i \notin C \text{ vagy } j \notin C \\ 1 - \sum_{i \neq j} \phi_{ij}(C) & \text{ha } i, j \in C, i = j \end{cases}$$

ahol $\phi_{ij}(C)$ mutatja meg az i és j bank összekapcsoltságát a C koalícióban.

Ugyan a definícióban külön nem hangsúlyoztuk, de értelemszerűen $\phi_{ij}(N)$ jelenti a nagy-koalíció rendszerét, azaz az előre rögzített bankközi kapcsolatokat, és megfelelő korlátozások bevezetésével megkapjuk az összes lehetséges koalíciót. A definíció tehát igen egyértelmű, csupán az utolsó sora szorul magyarázatra: tulajdonképpen annyit mond, hogy az egyes intézmények saját befektetéseinek aránya az eszközportfólióban maradékelven adódik. Minden koalícióban meghatározódik, hogy milyen az összekapcsolódás az „alrendszerben”, és a C koalícióban a j bank által el nem cserélt eszközök hányada lesz $\phi_{jj}(C)$.

A következő fontos kérdés a kockázati mérték definiálása. A dolgozat elején úgy definiáltuk a kockázati mértéket, mint egy függvényt, amely valószínűségi változóhoz egy valószínűségi számot rendel hozzá. A modellünkben a valószínűségi változók az egyes befektetések ex post értékei, illetve a belőlük képzett portfóliók. Ha ránézünk a j bank rendszerkockázatból adódó veszteségét meghatározó (3.2) képletre, látható, hogy ez pontosan megfelel a kockázati mérték általános definíciójának: egy valószínűségi változóhoz megfelelő transzformációk során egy valószínűségi számot rendel. Természetesen, ez még igen általános, ugyanis a konkrét érték kiszámításához szükséges ismerni a ϕ_{ij} értékeket. Ezeket azonban a koalíciók fenti definíciója alapján ki tudjuk számítani, azaz adott koalícióra ϕ_{ij} -k rögzítettek. SL_j tehát jó lesz a kockázati mértékünk alapjául, már csak általánosítani kell egy játékosról koalícióra, ezt azonban könnyedén megtehetjük: összegezzük a koalícióban lévő intézmények rendszerkockázatból adódó veszteségét. Formálisan:

17. Definíció. Legyen C koalíció rögzített. Ekkor a C koalíció rendszerkockázati mértéke, $SL(C)$, a rendszerkockázatból adódó veszteségek összege, azaz

$$SL(C) = \sum_{j \in C} SL_j | \phi_{ij}(C)$$

A rendszerkockázati mérték legtöbb tulajdonsága következik SL_j definíciójából. ezek közül csupán kettőt emelünk ki: az egzisztenciát és a koherencia-axiómákhoz való viszonyt. Az elsőről megállapíthatjuk, hogy a rendszerkockázati mérték konstrukciójánál fogva létezik, és egyértelmű, azaz minden koalícióra tudunk értelmezni rendszerkockázatot, és ha két koalíció ugyanolyan, akkor a rendszerkockázati mértékük is megegyezik. Sajnos a második esetben, a koherenciához való viszonyulásban nem vagyunk ilyen szerencsések: SL_j definíciójából következően a pozitív homogenitás biztosan sérül, a normális elosz-

lás eloszlásfüggvényének nemlinearitása miatt. A szubadditivitás sérülésére szintén lehet példát mutatni: ugyan az egyszerűbb esetek többségében teljesül ez a tulajdonság, de konstruálható olyan példa, amelyben egy új szereplő belépése a koalícióba a fertőzési hatás miatt nagyobb bajt okoz, mint ha kimaradt volna a rendszerből⁸. Tehát az általunk definiált rendszerkockázati mérték nem koherens, illetve a belőle képzett kockázatelosztási játék nem lesz szubadditív. Ezt mindig szem előtt kell tartanunk, amikor az alábbiakban definiált rendszerkockázat-elosztási játékot vizsgáljuk.

18. Definíció. *Egy rendszerkockázat-elosztási játék $G = (N, \phi_{ij}, v_S)$ tartalmaz*

- *N bankrendszert, amely összekapcsolódását adott ϕ_{ij} értékek adják*
- *$|N| = n$ bankot, $i = 1, \dots, n$*
- *bankok C koalícióit : $C \subseteq N$*
- *egy rendszerkockázati mértékből származtatott értékfüggvényt $v_S : C \rightarrow SL(C)$*

Az első idekívánczó megjegyzés, hogy adott ϕ_{ij} értékekre a koalíciók egyértelműen meghatározódnak, és egy közönséges kockázatelosztási játékot kapunk vissza. Azonban szükséges a definícióban a különbségtétel a bankrendszer felépítése szerint, hiszen adott N -re és v_S -re számos különböző rendszer, és így különböző játék lehetséges. Egyébként a játék pontosan úgy működik, mint egy klasszikus kooperatív játék. A teljes rendszer kockázatát, azaz az elosztandó kockázatot, úgy kapjuk, hogy vesszük a minden bankot tartalmazó nagykoalíciót, és a rendszerkockázati mértékkel megadjuk a kockázatát. Ezután a koalícióra vonatkozó definícióból meg tudjuk adni az egyes koalíciós értékeket, és valamely megoldáskonceptió segítségével ki tudjuk számolni az allokált kockázatot.

Van azonban egy, már korábban említett probléma a definiált játékkal kapcsolatban: minthogy a kockázati mértékről nem tudtuk garantálni, hogy szubadditív legyen, így a belőle származtatott játék nem lesz szubadditív. Ennek a legfontosabb következménye, hogy nem feltétlenül lehetséges minden esetben individuálisan racionális szétosztás, ugyanis előfordulhat, hogy az allokálni kívánt kockázat több, mint az egyéni kockázatok összege. Ekkor viszont számos, korábban ismerttetett eredmény csak korlátozottan lesz érvényes. Ezek közül a legfontosabb, hogy a rendszerkockázat-elosztási játékok nem lesznek kiegyensúlyozott játékok, így a Bondareva-Shapley tétel nem marad érvényben rájuk: semmi sem biztosítja, hogy olyan játékkal dolgozunk, amelynek a magja nemüres. Tehát, amikor elosztásokat vizsgálunk, akkor nem csupán azt kell megnézni, hogy magbeliek-e, hanem hogy az adott játékban egyáltalán elvárható-e a magbeliség.

⁸A 3.4-es fejezetben bemutatott példából is látható, hogy van olyan szakasz, ahol a jobban összekapcsolódott rendszer nagyobb kockázatot jelent

4.2. Allokációs módszerek

Az utolsó lépés a kockázatelosztási koncepció kiválasztása, azaz a fent definiált játék megoldásának megadása, ami egyben az egyes intézményekre allokalált kockázatok meghatározását is jelenti. A dolgozat első felében ismertettünk két megoldáskonceptiót, amelyek speciális megfontolások nélkül alkalmazhatók a rendszerkockázat elosztására, csupán arra kell tekintettel lenni, hogy azon tulajdonságok, amelyek építenek az alapjáték szubadditivitására, nem maradnak érvényben, illetve mindig ellenőrizni kell őket egy adott szituációban.

Az alábbiakban, mintegy az elméleti fejtegetés lezárásaképp, egy definícióban összefoglaljuk a korábban már említett megoldáskonceptiók rendszerkockázati megfelelőit.

19. Definíció. Legyen $G = (N, \phi_{ij}, v_S)$ rögzített. Ekkor Φ megoldás

- *egyéni kockázattal arányos módszer szerinti, ha*

$$\varphi_i^A = \frac{SL_i}{\sum_{i=1}^n SL_i} SL(N)$$

- *Shapley módszer szerinti, ha*

$$\varphi_i^{SH} = \sum_{C \subset N, i \in C} \frac{(|C| - 1)!(n - |C|)!}{n!} [SL(C \cup \{i\}) - SL(C)]$$

A korábbiakból tudjuk, hogy ezek szétosztások, azaz mindegyik módszerrel elérjük, hogy a nagykoalíció teljes kockázatát (azaz a rendszerkockázatot) szétosszuk. Az alábbiakban nem részletezzük külön a módszereket (ezt a módszertani szakaszban már megtettük), csupán néhány speciális tulajdonságra hívjuk fel a figyelmet.

Az egyéni kockázattal arányos módszernél egy jelölésbeli kérdést kell csupán kihangsúlyozni: az intézmények egyedi rendszerkockázata nem más, mint az egyelemű koalíciók rendszerkockázati mértéke, vagyis, amikor SL_i -t írunk, az egyben $SL(\{i\})$ -t is jelenti. Egyébként a módszer igen nyilvánvaló: aszerint osztja el a rendszer teljes kockázatát, hogy az egyes intézményeknek mekkora a saját kockázata. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy minél valószínűbb, hogy egy intézmény csődbemegy, annál nagyobb kockázatot allokal rá ez a módszer.

A Shapley-érték elve annyiban tér el az egyéni kockázattal arányos módszertől, hogy a teljes kockázatot nem közvetlenül, hanem közvetetten osztja szét, megvizsgálva az egyes intézmények viselkedését minden, őket tartalmazó koalícióban. Minthogy a rendszerkockázatelosztási játék nem tartozik egyetlen olyan jól ismert játékosztályba sem, ahol a Shapley-érték pozitivitása garantált, így a Shapley megoldás olyan allokalációt is eredményezhet, amelyben van olyan intézmény, amelynek a ráosztott kockázata negatív. Ez az eredmény

elsőre furcsának tűnhet, azonban a valóságban ilyen helyzet előfordulhat: a negatív allokált kockázat a mi esetünkben azt jelenti, hogy az adott intézmény bekapcsolódása a rendszerbe annyival csökkenti a rendszer kockázatát, hogy érdemes őt jutalmazni.

Ez utóbbi jelenségre nézzünk egy konkrét példát. Legyen egy három bankból álló bankrendszerünk, melyben az első két bank egyforma jellegű befektetéssel rendelkezik ($D(Z_1) = D(Z_2) = 0, 1$), a harmadik viszont az előzőeknél sokkal kockázatosabb eszközbe fektette a pénzét ($D(Z_3) = 0, 4$). A bankrendszer is igen egyszerűen néz ki: minden intézmény a befektetésének hattizedét megtartja, a többit pedig arányosan elcseréli a másik két szereplővel, azaz $\phi_{12} = \phi_{13} = \phi_{23} = 0, 2$, illetve $\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = 0, 6$. Ekkor, kiszámolva a megfelelő $SL(C)$ értékeket, és alkalmazva a Shapley módszert, az alábbi eredményeket kapjuk:

	SL_i	φ_i^{SH}
1. bank	0,02275	-0,0113
2. bank	0,02275	-0,0113
3. bank	0,3085	0,2764
Összesen	0,354	0,2538

2. táblázat. Negatív Shapley-érték

Láthatjuk, hogy az első két bank Shapley-értéke negatív: vagyis ebben a rendszerben a Shapley módszer szerinti kockázatelosztás jutalmazza a kis kockázatú intézményeket. Ez az eredmény, ha kicsit jobban megvizsgáljuk a táblázat többi értékét, nem meglepő. Első észrevételünk, hogy a harmadik bank kockázata olyan magas, hogy ha ő egyedül állna, mint intézmény, akkor nagyobb kockázatot jelentene, mint az egész rendszer együttvéve. Azaz számára a kockázatelosztásban való részvétel mindenképpen előnyös, hiszen, ha belép a nagykoalícióba, akkor a várható vesztesége legfeljebb 0,2538 lehet, míg egyébként akár 0,3 fölötti veszteséget is elszenvedhet. A két kis kockázatú bank azonban rosszul is járhat: a teljes rendszer 0,2538-as kockázata sokkal magasabb, mint az ő egyedi kockázatuk. A Shapley-érték negativitását itt úgy értelmezhetjük, mint azt a kompenzációt, amellyel a nagy kockázatú intézmény rábírja a kisebbeket arra, hogy vállalják át az ő kockázatának egy részét. Vagyis tulajdonképpen az történik, hogy a rendszerkockázati veszteség elleni tőketartalékot a harmadik banknak kell tartania teljes egészében, és ezen felül még fizetnie kell a másik két banknak az ő általa okozott aránytalanul megnövekedett kockázat miatt.

Azzal, hogy felírtuk a rendszerkockázat-elosztási játékok megoldását, tulajdonképpen a dolgozat fő célkitűzését elértük: sikerült egy olyan modellt megalkotni, amely jól megragadja a rendszerkockázat egyes tulajdonságait, és alkalmas arra, hogy megfelelő átalakításokkal egy kockázatelosztási játékot készítsünk belőle, amelyen tudjuk alkalmazni a kooperatív játékelmélet klasszikus megoldásait. A fejtegetés a témának megfelelően eddig igen absztrakt volt. Azonban a fent ismertetett modellnek fontos gyakorlati vonatkozásai lehetnek: egyrészt, eszközt ad a szabályozók kezébe arra, hogy megmérjék a rendszer koc-

kázatát, másrészt útmutatást adhat arra vonatkozólag is, hogy az összkockázatot hogyan osszuk fel az egyes intézmények között.

5. Kitekintés

5.1. Rendszerkockázat a gyakorlatban

A pénzügyi szabályozás egyik fejlődési iránya, hogy egyre többféle kockázatot vesz figyelembe, amikor egy intézmény szavatolótőke-szükségletét próbálja meghatározni. A szabályozás története részletesen megtalálható Radnai-Vonnák [2010]-ben, most csak néhány fontosabb mozzanatot emelünk ki.

A Basel I. egyezményben még csupán a hitelkockázatot vették figyelembe, mint szavatoló tőkét kívánó kockázati forrást. Ennek megfelelően a tőkeallokáció is igen egyszerű szabály szerint zajlott: a bank által tartandó kockázati tőke az intézmény kockázattal korrigált eszközeinek 8%-a volt (ez az ún. Cook-ráta). Ez volt az első egységes tőkekövetelményszabályozás, azonban egyszerűsége miatt számos bírálat érte. Továbbfejlesztett változata a Basel II. szabályozási keret, amely már sokkal differenciáltabban kezeli a kockázatok: egyrészt, elmozdul az egységes, 8%-os értéktől, és lehetőséget ad az intézmények számára, hogy saját maguk számítsák ki a tőkekövetelményüket, matematikai-statisztikai módszerekkel, előre meghatározott kereteken belül. Másrészt, újabb kockázati tényezők is bekerültek a szavatolótőke-számítás menetébe: a fent említett hitelkockázaton kívül a bankoknak tőkét kell képezniük a működési, és piaci kockázatokra is. Illetve, amikor az egyezmény a felügyelet szerepéről értekezik, kitér azokra a kockázatokra, amelyekhez közvetlenül tőkekövetelményt nem ír elő. Ezeket együttesen reziduális kockázatoknak nevezi, amelybe többek között beletartozik a rendszerkockázat is.

A Basel II. szabályozást igen széleskörűen alkalmazzák, azonban a 2007-ben kirobbant pénzügyi krízis arra sarkallta a döntéshozókat, hogy újragondolják a kereteket. Épp ennek a folyamatnak a közepén tartunk: már igen sok megegyezés született az új, Basel III. névre keresztelt szabályrendszerrel kapcsolatban. A kialakult fő csapásirányokból az látható, hogy a rendszerkockázatot nem tekintik külön szabályozandó kérdésnek: egyrészt, a likviditási kockázat részletes szabályozásával próbálják kezelni a pénzügyi fertőzések egy adott aspektusát, a bankközi piac kiszáradásából adódó kockázatokat (amely kétségtelenül a legnagyobb károkat okozta 2007 és 2009 között az összes rendszerkockázati tényező közül). Másrészt, a rendszerfontosságú intézmény fogalmának bevezetésével, és ezen intézmények különösen szigorú szabályozásával megpróbálják csökkenteni a pénzügyi rendszerben keletkező sokkok továbbgyűrűzésének lehetőségét.

A dolgozatban leírt modell a rendszerkockázat egy olyan aspektusát ragadja meg, amellyel a szabályozás eddig nem foglalkozott: hogyan hat a bankrendszerre, illetve az egyes intézményekre, ha a fertőzés már elindult, azaz egy bank már csődbement. Ezt a kockázatot számszerűsíti tulajdonképpen az általunk definált rendszerkockázati mérték, illetve az ebből származtatott kockázatallokációs játék abban tud útmutatást adni, hogy milyen mértékben járulnak hozzá az egyes intézmények a rendszerkockázathoz. Szabályozói nyelvre lefordítva ez azt jelenti, hogy a modellparaméterek megfelelő kalibrálásával

meghatározható egy adott bankrendszer potenciálisan rendszerkockázatból eredő vesztesége, és az allokációs modellek alkalmazásával meghatározható, hogy egyes intézmények milyen arányban tartunk tőkét ennek a veszteségnek az elkerülése érdekében.

Ez igen egyszerűen hangzik, azonban számos korlátba ütközhetünk, mikor gyakorlatba szeretnénk átültetni a modellt: az egyes bankok lényegében egyformák, legalábbis ugyanolyan méretűek, és szimmetrikus, kizárólag eszközoldali kapcsolatokkal rendelkeznek. Természetesen ezek a problémák részben orvosolhatók a modell kereteit tágítva, azonban mindig szem előtt kell tartanunk, hogy mi is az a kérdés, amit szeretnénk megválaszolni. Ha ugyanis valóban a pénzügyi fertőzések elsőköros hatásaira vagyunk kíváncsiak, akkor ezek az egyszerűsítések nem zavarók a lényeg szempontjából: azaz, amennyiben a szabályozónak van elképzelése a bankrendszer felépítéséről, és az egyes intézmények kockázatáról, akkor ezeket átültetve a rendszert leíró ϕ_{ij} , illetve $D^2(Z_i)$ értékekbe gyakorlatilag a modell egy realizációját kapja, amelyben elvégezhető a kockázatelosztás.

Ha van is valamilyen elképzelése a szabályozónak a bankrendszerről, egyes ϕ_{ij} értékek közvetlen meghatározása komoly nehézséget jelenthet. Azonban van egy közvetett eljárás, amivel jó közelítéseket adhatunk ezekre az értékekre. A modellfeltevésekből tudjuk, hogy a befektetéseink függetlenek, így varianciáik összeadódnak, vagyis $D^2(A_i) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^2 D^2(Z_j)$. Ha tehát ismerjük a befektetések egyedi varianciáját, illetve tudjuk, hogy az egyes intézmények eszközértéke mennyire volatilis, akkor a fenti képletet minden bankra alkalmazva, illetve hozzáadva a $\phi_{ij} = \phi_{ji}$, és $\sum_{j=1}^n \phi_{ij} = 1$ feltételeket egy olyan egyenletrendszert kapunk, amelyből meg tudjuk határozni a kívánt ϕ_{ij} értékeket.

Ez a módszer persze nem ad teljeskörű megoldást a ϕ_{ij} értékekre. Három bank esetén a megoldás egyértelmű, ugyanis kilenc egyenlet és kilenc ismeretlen van a rendszerben, ha azonban már négyre nő a bankok száma, akkor tizenhat ismeretlennel kell megbirkózunk tizennégy egyenlet segítségével. Azaz a rendszernek van két szabadságfoka, tehát két bankközi kapcsolatról kell információval rendelkezünk ahhoz, hogy meg tudjuk határozni az összes ϕ_{ij} értéket. Általánosságban elmondható, hogy egy n intézményből álló rendszer esetén $\frac{n(n-3)}{2}$ kapcsolatról van szükségünk információra az összekapcsolódások teljeskörű leírásához.

Az eljárás hátránya, hogy feltételezi a befektetések és az eszközök volatilitásának ismeretét. Az egyes intézmények eszközértékének változásáról viszonylag egyszerűen tudunk információt szerezni, például beszámolókból, jelentésekből, bármilyen olyan forrásból, ahol a banki eszközökről van valamiféle aggregált adat. De az eszközértéket jól közelítheti akár a piaci kapitalizáció is, amelynek varianciája könnyen számolható a részvények volatilitásának ismeretében. Nagyobb fejtörést okozhat a független (de legalábbis korrelálatlan) eszközök megtalálása, hiszen a pénzügyi világban általában jelentős korreláció van az eszközök között. Azonban léteznek olyan statisztikai eljárások (például főkomponens elemzés), amelyek segítségével olyan mesterséges befektetéseket hozhatunk létre, amik

egymással korrelálatlanok, azonban egy-egy intézménnyel a lehető legszorosabb kapcsolatban állnak. Ez a kérdés azonban túlmutat a dolgozat keretein, így részletesebben nem foglalkozunk vele.

5.2. A modell továbbgondolása

A dolgozatban leírt modell a fent ismertetett gyakorlati aspektuson túl alapvetően két-féle irányban ad teret a további gondolkodásnak, elemzéseknek. Egyrészt, érdemes lehet empirikus vizsgálatokat végezni a felírt összefüggések segítségével. Szimulációs technikával meg lehet határozni különféle bankrendszerekre a rendszerkockázat mértékét, ezek összehasonlító elemzése érdekes eredményekre vezethet. Például meg lehet adni azt a bankrendszerbeli kapcsolódási hálót, amely minimális rendszerkockázatot hordoz. Illetve, az egyes rendszerekre elvégezhető konkrétan a kockázatallokáció. A különböző módszerekkel kapott különböző értékeket összehasonlítva levonhatunk következtetéseket az egyes módszerekről, illetve arról, hogy az egyes módszerek szerinti kockázatallokáció az adott rendszerben mennyire tűnik ésszerűnek, esetleg meglepőnek. További kockázatosztási sémákat is megvizsgálhatunk: az egyéni kockázattal arányos és a Shapley-érték szerinti elosztás csak két, közismert, és nem túl bonyolult módszer, amelyeket jelentőségük miatt mutattunk be a dolgozatban. Azonban elképzelhető, hogy más kockázatosztási módszerek jobban illeszkednek a modellhez. Az itt leírtakból ezekre a kérdésekre nem kaptunk egyértelmű választ, viszont a kérdések felvetése kijelöli a további vizsgálódások egyik lehetséges irányát.

A másik lehetőség a dolgozatban leírtak továbbgondolására, hogy a modell azon feltevéseit oldjuk fel, amelyek eléggé megkötik a kezünket, és csupán azért van rájuk szükség, hogy könnyen értelmezhető eredményeket kapjunk. Ezek közül a legfontosabb talán a befektetések ex post értékeinek normális eloszlása. Ezzel az egyik fő probléma, hogy negatív értékeket is felvehet. Ezt a matematikailag nemkívánatos tulajdonságot például úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy olyan eloszlást választunk, amelynek pozitív a tartója. Ezekkel azonban az a probléma, hogy amikor felírjuk az egyes intézmények eszközállományát a befektetések lineáris kombinációjaként, akkor az így kapott eloszlás típusáról nem tudunk olyan szép eredményt kapni, mint normális esetben, és ezért SL_j értékek, amelyek tulajdonképpen az eszközállományok csődvalószínűségeinek megfelelő transzformáltjai, csak szimulációs technikákkal számíthatók ki. Ez persze elviekben nem jelent akadályt, így a téma továbbgondolása során érdemes lehet kitérni arra is, hogyan tudjuk a modellt közelíteni a valósághoz azáltal, hogy normális helyett más eloszlással dolgozunk.

Hasonlóan zavaró egyszerűsítésnek tűnhet, hogy a bankok a befektetéseiket egy az egyhez arányban cserélik. Ha azonban két befektetés ex post csak a szórásában tér el, akkor indokolt lehet ezt figyelembe venni a cserénél: a kisebb kockázatú fél egyfajta prémiumot várhat el azért, hogy hajlandó elcserélni a befektetésének egy részét egy kockázatosabb

eszközre. Itt az előzőekhez hasonló megfontolások alapján azt mondhatjuk, hogy ugyan ezzel a jelenséggel számolhatunk, de ekkor nem kapunk analitikus eredményt, és csak szimulációkkal van esélyünk mondani valamit az egyes bankok értékeiről, és a koalíciók kockázati mértékéről, így könnyen elveszhet a lényeg a bonyolult számítások között.

6. Összegzés

A 2007-ben kezdődött válság felhívta a figyelmet arra, hogy a pénzügyi világban jelentős kockázati források lehetnek az egyes intézmények közötti kapcsolatok, ugyanis ezek az egyes intézményeket ért sokkokat mintegy idegrendszerként közvetítik a bankrendszer többi szereplője felé. A dolgozatban az ilyen jellegű kockázatokra koncentrálnak: megvizsgáljuk, hogy a pénzügyi fertőzések hogyan hatnak az egyes intézményekre.

A problémát számos aspektusból lehet vizsgálni. A dolgozat során a célunk az volt, hogy ne csupán egy mérőszámot adjunk arra nézve, hogy az egyes intézmények mennyire vannak kitéve a rendszerkockázati eseményeknek, hanem valamilyen normatív leírást mutassunk be azzal kapcsolatban, hogy hogyan kell viselkednie az egyes intézményeknek, hogy elkerüljék a fertőzést. Természetesen a bankok (és a szabályozók) magatartása sokkal összetettebb, mint ahogy azt a dolgozatban megragadjuk, ugyanis itt csupán egy tényezőre koncentrálnak: mekkora szavatoló tőkét tartsanak az intézmények a sokk továbbgyűrűzésének elkerülése érdekében. Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, a kockázatelosztási játékokhoz fordulunk.

A kockázatallokációs játékok általános definíciója után röviden ismertetjük a játék magjának koncepcióját: a játék magja a nagykoalíció értékeinek olyan szétosztásait tartalmazza, amelyeket a játékosok egyik koalíciója sem kíván blokkolni, azaz a játékosok tetszőleges koalíciója jobban jár a nagykoalícióban való maradással, mint a kilépéssel. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy magbéli elosztás esetén bármely koalícióra allokált kockázat kevesebb, mint amekkora a koalíció saját kockázata. Ez a gyakran stabilitásként emlegetett tulajdonság egy kulcseleme a kooperatív játékelméletnek, és ezzel kapcsolatban a szakirodalom egy igen fontos eredményét ismertetjük: amennyiben egy olyan játékkal van dolgunk, ahol a kockázati mérték koherens, akkor sosem üres a játék magja. Ez az eredmény két szempontból fontos: egyrészt, alátámasztja, hogy érdemes kockázati mértéknek olyan függvényt választani, ami teljesíti a koherencia kritériumait, mert ekkor biztosan van remény magbéli elosztásra. Másrészt, az allokációs módszereket ebben az esetben jól jellemezheti a stabilitáshoz való viszonyuk: minthogy tudjuk, hogy létezik olyan allokáció, amely magbéli, ezért érdemes megvizsgálni és összehasonlítani a játék különböző megoldáskonceptióit aszerint, hogy milyen arányban, illetve milyen feltételek mellett eredményeznek a fenti értelemben vett stabil elosztást.

A dolgozatban két olyan módszert ismertetünk, amely segítségével el tudjuk végezni a kockázatok allokációját. Az első, egyéni kockázattal arányos módszer szinte adja magát, azonban gyakorlatilag semmi igazán jó tulajdonsággal nem rendelkezik: azon kívül, hogy ha két játékos egyéni kockázata egyenlő, akkor az allokált kockázatuk is egyforma lesz (ez a szimmetria naív általánosítása), semmi elméleti tulajdonságot nem tudunk róla elmondani. Egyszerűsége miatt azonban mégis vonzó: egyrészt, könnyű megérteni a koncepcióját, így a szabály által allokált kockázat átlátható, könnyen interpretálható. Másrészt, igen

egyszerűen kezelhető, és kevés információ is elegendő a kiszámításához. Így célszerű ezt a módszert kiindulópontként választani, és megnézni, hogy a többi módszer ad-e jelentősen jobb, vagy érdekesebb eredményt, mert ha nem, akkor indokolatlan eltérni az egyszerűbb módszertől. A másik megoldáskonceptió egy klasszikus játékelméleti módszer: az egyes játékosok Shapley-értéke alapján osztjuk szét a kockázatot. Ez számos elméleti jó tulajdonsággal rendelkezik, azonban hátránya, hogy igen számításigényes, minthogy minden játékos összes, őt tartalmazó koalícióhoz való hozzájárulását ki kell számítani, vagyis az elvégzendő számítások mennyisége a játékosok számának növekedésével exponenciálisan növekszik.

A dolgozat vizsgálati fókuszpontja a rendszerkockázat, így a kockázatelosztási játékokkal kapcsolatos elméleti fejtegetéseket egy gyakorlatiasabb rész követi: a rendszerkockázat fogalmának bevezetése után áttekintjük a témakörrel kapcsolatos legfőbb fogalmakat (rendszerkockázati esemény, pénzügyi fertőzés), illetve felidézünk néhány modern, de a témakörben klasszikusnak számító cikket, amelyek ötleteiből merítünk a dolgozat saját modelljének kialakítása során. Ezen cikkek közül az Allen-Gale [2000] cikk két jelentős szempontra is rávilágított, amelyet célszerű figyelembe venni, ha rendszerkockázattal dolgozunk. Egyrészt, arra sarkallt, hogy olyan modellt építsünk fel, ahol a rendszerkockázat függ a rendszert leíró hálózattól, illetve az egyes intézmények összekapcsolódásának mértékétől. Másrészt, a szerzők megmutatták, hogy a tartaléknak jelentős szerepe van abban, hogy elkerülhető legyen a pénzügyi fertőzés. Vagyis, amikor a kockázatelosztási játékokat azzal a céllal használjuk, hogy a kockázati tőkét allokáljuk, akkor tekintettel kell lennünk arra, hogy az egyes intézményekre allokált tőke mennyisége hatással van az intézmény pénzügyi fertőzéssel szembeni ellenállóképességére.

A fentiekben leírtakat szem előtt tartva felírunk egy modellt a rendszerkockázatra, amely egyrészt megragadja a pénzügyi fertőzési jelenségek egyes tulajdonságait, másrészt alkalmas arra, hogy megfelelő megszorításokkal kockázati mértéket tudjunk számolni belőle, és így alkalmazhatóak legyenek rá a kooperatív játékelméleti módszerek. Természetesen, minthogy modellezésről van szó, számos egyszerűsítő feltevéssel élünk. Ezek egy része csupán arra szolgál, hogy a lényeges kérdésekre tudjunk koncentrálni. Ilyen feltevés, hogy minden bank egyetlen befektetéssel rendelkezik, a bankok eszközoldalának egységnyire való normálása, illetve a bankközi kapcsolatok jellegének leegyszerűsítése, vagyis, hogy a bankok csupán egymás között eszközöket cserélnek, és a forrásoldali kérdésekkel nem foglalkozunk. Van azonban olyan feltételezés, amely az analitikus számolhatóságot segíti elő. Ilyen például az eszközök ex post értékének normális eloszlása, amely segítségével zárt képletet kaphatunk a rendszerkockázati veszteségre.

A modellben a pénzügyi fertőzések hatásait szeretnénk megragadni. Ez egy igen ambíciózus vállalkozás, hiszen a fertőzés jellegéből adódóan dinamikus jelenség: az egyes megfertőzött, illetve csődbe jutott intézmények a velük kapcsolatban álló intézményekre továbbterjeszthetik a problémát, és azokat is csődbe vihetik. Ennek az igen bonyolult

kapcsolatrendszernek a leírása helyett a problémát egy alternatív szemszögből közelítjük meg: mit kell tenni ahhoz, hogy elkerülhető legyen a fertőzés. Feltesszük, hogy csupán egy bank megy csődbe, és azt vizsgáljuk, hogy a többi bank ennek hatására mekkora veszteséget szenved el. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy mekkora tőkét kell tartania egy banknak ahhoz, hogy a közvetlen vagy közvetett partnerbankjának csődje esetén őt ne érje károsodás. Ha a csődbe ment bankot véletlenszerűen választjuk, és minden esetben megvizsgáljuk a veszteséget, akkor megkaphatjuk, hogy várhatóan mekkora vesztesége lesz az intézménynek a rendszerkockázatból adódóan. Ez alapján a rendszerkockázati veszteségünk, amelyet SL_j -vel jelölünk a j bank esetén, nem lesz más, mint annak a veszteségnek a várható értéke, amit az intézmény amiatt szenved el, hogy valamely bank csődbe megy.

Megvizsgálva SL_j tulajdonságait, a legfontosabb következtetés, amit levonhatunk, hogy a rendszer összekapcsoltsága és kockázata között nem egyértelmű a kapcsolat. Ha rögzítünk egy rendszert, és csupán egyetlen kapcsolódást változtatunk rajta (azaz azt vizsgáljuk, hogy hogyan hat az egyes intézmények csődvalószínűségére az, hogy két bank között a az összekapcsolódás mértéke változik), akkor azt láthatjuk, hogy megfelelő feltételek mellett gyenge kapcsolódás esetén a diverzifikációs hatás a domináns (azaz, ahogy erősödik a kapcsolat, úgy csökken az egyes intézmények, és így a rendszer kockázata), míg amikor már eleve szorosan együttműködnek a bankok, akkor a kapcsolatok további növelése a fertőzés megnövekedett esélyének következtében növeli a rendszerkockázatot. Tehát visszakaptuk a korábban idézett Allen-Gale [2000] cikkben kapott eredményt, hogy a bankrendszert leíró hálózatnak szerepe van a rendszerkockázat kialakulásában. Ráadásul kicsit tovább is tudunk menni a következtetésekkel, hiszen konkrétan azonosítottunk kétféle hatást a modellben, amelyek ellentétes irányba hatnak: a diverzifikációt és a fertőzést. Illetve, számítások segítségével megállapítottuk, hogy egyes rendszerek esetén melyek azok a szakaszok, ahol az előbbi hatás a domináns, és melyek azok, ahol az utóbbi.

Ez az empirikus tapasztalatokat jól tükröző eredmény egy igen kellemetlen elméleti következménnyel jár. Minthogy a rendszerkockázatból adódó veszteség szubadditivitása nem teljesül minden rendszer esetén, így a belőle képzett kockázati mérték nem lesz koherens. Azaz, ha olyan kooperatív játékot definiálunk, amelyben a kifizetésfüggvény alapja az SL kockázati mérték, akkor semmi nem biztosítja, hogy a játék magja nemüres lesz. Sőt, előfordulhat olyan eset, hogy a teljes rendszer kockázata több, mint az egyéni kockázatok összege, azaz nem lehet individuálisan racionális szétosztást létrehozni. Ez szabályozói nyelvre lefordítva annyit jelent, hogy ha az intézményeket kötelezzük arra, hogy a központi előírt allokációs mechanizmus szerint tartsanak tőkét, akkor lesznek olyan bankok, akiknek érdemes kibújni a szabályozás alól. Természetesen ez a probléma nem teszi lehetetlenné a kockázatelosztási módszerek alkalmazását, de használatuk során mindig körültekintően kell eljárni: nem csak azt érdemes megnézni, hogy az allokáció magbéli-e, hanem azt is, hogy egyáltalán létezik-e magbéli elosztás az adott játékban.

Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a kooperatív játékelméleti módszereket, definiálnunk

kell a játékot. A rendszerkockázat-elosztási játék egyenes általánosítása a kockázatelosztási játékoknak, azonban egy nézőpontból nem teljesen egyértelmű az értelmezés: a koalíciók meghatározása ugyanis számos módon történhet elvileg a modellben, figyelembe véve az összekapcsolódásokat. Talán a legegyszerűbb és legátláthatóbb mód, hogy rögzítünk egy rendszert, és ebből vágásokkal képezzük a koalíciókat, azaz egy koalíción belül a játékosok összekapcsolódása olyan, mint nagykoalícióban, a kívüleső játékosokra pedig úgy tekintünk, hogy egyáltalán nem kapcsolódnak össze. Ez a módszer egyértelműen meghatározza a koalíciókat, és ezáltal a teljes rendszerkockázat-elosztási játékot. Erre a játékra értelmezzük a két korábban megismert módszert, és néhány tulajdonságot felvillantunk, annak fényében, hogy tudjuk, hogy nem koherens kockázati mértékről van szó.

Ezzel megalkottuk azt az elméleti keretet, amelyet a dolgozat elején célul tűztünk ki: egy olyan rendszerkockázati modellt hoztunk létre, amelyen értelmezni tudjuk a kockázatallokációs játékokat. Ezáltal egy olyan eszköz került a kezünkbe, amely egyrészt képes megmérni a rendszerkockázatot, másrészt, útmutatást ad arra nézve, hogy az egyes intézményeknek hogyan kell kockázati tőkét tartani az ilyen típusú kockázatok fedezésére.

A modern pénzügyi irodalom manapság egyik legaktuálisabb témája a kockázatkezelés. A pénzügyi világban számos kockázattal találjuk szembe magunkat, amelyek abból fakadnak, hogy nem ismerjük a jövőt, csak elképzeléseink vannak róla. Ezek egyike a rendszerkockázat, amelynek legfontosabb formája a pénzügyi hálózatokban bekövetkező fertőzések veszélye. A dolgozatban ezt a jelenséget próbáltam meg körüljárni. Minthogy a valóság igen bonyolult, és a kockázatokat soha nem tudjuk megérteni teljes mélységükben, ezért általában modellekhez fordulunk, amelyek célja, hogy megértsük a valóság egy-egy szegletének működését. E dolgozat célja sem lehetett több, mint megérteni a világ egy pici szeletét: hogyan írhatók le modellel azok a rendszerkockázati események, amelyek a mindennapi valóságunk részei. A fennmaradó kérdések ellenére is egy igen rugalmas, számos kérdésre válaszolni tudó modellt írtam fel és vizsgáltam meg, amelyet továbbgondolva hasznos eredmények születhetnek a pénzügyi rendszerkockázat kezelése területén.

Hivatkozások

- [1] Allen, F., Babus, A., Carletti, E., 2010. Financial Connection and Systemic Risk. NBER Working Paper 16177.
- [2] Allen, F., Gale, D., 2000. Financial Contagion. *Journal of Political Economy*, 108, 1-33.
- [3] Artzner, Ph.F., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., 1999. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- [4] Battiston, S., Delli Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B. C., Stiglitz, J. E., 2009. Li-aisons Dangereuses: Increasing Connectivity, Risk Sharing and Systemic Risk, NBER Working Paper No. 15611
- [5] Bélyácz, I., 2011. Kockázat, bizonytalanság, valószínűség. *Hitelintézeti Szemle*, 10. évf. 4. szám, 289–313.
- [6] Chari V. V., Jagannathan, R., 1988. Banking Panics, Information and Rational Expectations Equilibrium. *Journal of Finance*, 43 (3), 749-513.
- [7] Csóka, P., Herings P.J.J., Kóczy L.Á., 2009. Stable Allocations of Risk. *Games and Economic Behavior*, 67 (1), 266–276.
- [8] Csóka, P., Pintér, M., 2010. On the Impossibility of Fair Risk Allocation. MPRA Paper 26515, University Library of Munich, Germany
- [9] Demange, G., 2011. A Contagion in Financial Networks: a Threat Index. Working Paper. Paris School of Economics
- [10] Denault, M., 2001. Coherent Allocation of Risk Capital. *J. Risk* 4, 1–34.
- [11] De Bandt, O., Hartmann, P., 2000. Systemic Risk: A Survey. ECB Working Paper No. 35.
- [12] Diamond, D. W., Dybvig, P. H., 1983. Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity. *Journal of Political Economics* 91, 401-419.
- [13] Freixas, X., Parigi, B., 1998. Contagion and Efficiency in Gross and Net Interbank Payment Systems. *Journal of Financial Intermediation*, 7 (1). 3-31.
- [14] Freixas, X., Parigi, B., Rochet J.-C., 2000. Systemic Risk, Interbank Relations and Liquidity Provision by the Central Bank. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 32(3/2), 611-640.

- [15] Freixas, X., Rochet, J-C., 2008. Microeconomics of Banking. MIT Press, Massachusetts.
- [16] Haldane, G. A., May, M. R., 2011. Systemic Risk in Banking Ecosystem. *Nature* 496, 351-355.
- [17] Hamlen, S.S., Hamlen, W.A., Tschirhart, J.T., 1977. The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Schemes. *The Accounting Review*, 52 (July), 616-627.
- [18] Jacklin, C. J., Bhattacharya, S., 1988. Distinguishing Panics and Information-based Bank Runs: Welfare and Policy Implications. *Journal of Political Economy*, 96 (3), 568-592.
- [19] Knight, F. H., 1921. Risk, Uncertainty, and Profit. Hart, Schaffner & Marx-Houghton Mifflin Co., Boston, MA.
- [20] Osborne M., Rubinstein, A., 1994. A Course in Game Theory. MIT Press, Massachusetts.
- [21] Radnai, M., Vonnák, Dzs., 2010. Banki tőke megfelelési kézikönyv. Alinea-Ramasoft, Budapest.
- [22] Shapley, L.S., 1953. A Value for n-person Games. In: H.W. Kuhn, A.W. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II*, vol. 28 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, 307-317.
- [23] Száz, J., 2011. Valószínűség, esély, relatív súlyok. *Hitelintézeti Szemle*. 10. évf. 4. sz., 336-348.
- [24] Tasche, D., 2000. Risk Contributions and Performance Measurement. Technical document, Munich University of Technology. Available at <http://citeseer.nj.nec.com/tasche99risk.html>