

OTDK - dolgozat

Bajkó Attila
Maknics Anita
Tóth Krisztián

2013

A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról - Demográfiai esettanulmány
Lee-Carter modell alkalmazásával

The sustainability of the Hungarian pension system - A case study using the
Lee-Carter model

Kézirat lezárásnak időpontja: 2012. március 25.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. A népességszám előrejelzéséről általánosságban (Maknics Anita)	3
3. A Lee-Carter modell (Maknics Anita)	5
4. A Lee-Carter alapmodell hiányosságai és bővítési lehetőségei (Maknics Anita)	8
5. Demográfiai előrejelzés (Bajkó Attila)	15
5.1. Adatállomány és tesztelés	15
5.2. Modell paraméterek, becslései és eredmények	16
5.2.1. Mortalitási index	16
5.2.2. Halandóság (q_x)	18
5.2.3. Születéskor várható élettartam (e_0)	19
5.2.4. Fertilitás és populáció méret	20
6. Nyugdíjmodell (Tóth Krisztián)	23
6.1. A bevételi oldal meghatározása	23
6.2. A kiadási oldal meghatározása	25
6.3. A modell által adott eredmények	25
7. Konklúzió	29
8. Felhasznált irodalom	31

1. Bevezető

A nyugdíjrendszer fenntarthatósága és az öregedő társadalom olyan fogalmak, amikről nagyon sokat lehet hallani manapság. Dolgozatunkban az öregedő társadalom miatt fennálló, a nyugdíjrendszer fenntarthatóságával kapcsolatos témával foglalkozunk. Mégpedig úgy, hogy a Lee-Carter modell segítségével előrejelezzük a magyar népességszámot, aztán pedig ezt a számítást felhasználjuk arra, hogy elemezzük a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságát. A téma aktualitását nem kell nagyon indokolni, hiszen a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatósága egy égető kérdés manapság.

A dolgozatban arra keressük a választ, hogy a magyar nyugdíjrendszer adott paraméterek mellett mikor lesz várhatóan deficites. Illetve azt szeretnénk megtudni, hogy mekkora járulékkulcs és nyugdíjkorhatár emelés lenne szükséges ahhoz, hogy ezt a helyzetet elkerüljük. Emellett a két fő kérdés mellett persze olyan kérdésekre is választ kapunk, minthogy miképpen alakulhat Magyarország népességszáma a 2020-as évek végére, vagy milyen bővítési lehetőségei lehetnek a Lee és Carter által először 1992-ben publikált Lee-Carter modellnek.

A dolgozat felépítését illetően azt a gondolatmenetet követjük, hogy először a használt modellről szóló szakirodalmat foglaljuk össze. Kezdve onnan, hogy a modell egyik felírója, Lee szerint mik a népességszám előrejelzésének a nehézségei, illetve ezek kezelési módjai. Majd az eredeti Lee-Carter modellt mutatjuk be. Kitérve később ennek a bővítési és alkalmazási lehetőségeire. Az elmélet után mi magunk is alkalmazzuk a modellt arra, hogy Magyarország népességszámát és különböző demográfiai mutatóit előrejelezzük a 2020-as évek végéig. Ezen adatok birtokában pedig igyekszünk megválaszolni a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságának kérdéseit. Mégpedig úgy, hogy mind a bevételi, mind pedig a kiadási oldalra vonatkozóan számításokat végzünk. A dolgozat végén pedig levonjuk a számítások alapján a következtetéseket. Azt már itt a dolgozat elején szeretnénk tisztázni, hogy nyugdíjrendszerrel kapcsolatos probléma közelségét és mértékét szeretnénk meghatározni, viszont az ezt kezelő lehetséges lépésekre nem terjed ki elemzésünk.

2. A népességszám előrejelzéséről általánosságban

A népességszám előrejelzése egy nagyon sok lehetőséget nyújtó kutatási terület. De miért is igaz ez az állítás? Lee érvelése [1998] szerint egyrészt, mert a népességgel kapcsolatos mutatók jól előrejelezhetőek. Ennek egyszerű oka az, hogy a demográfiai mutatók lassan és csak fokozatosan változnak évről évre. Ezek után azonban felvetődik a következő kérdés, hogyha jól előrejelezhető, akkor hogyhogy olyan sokféle módszert, megközelítést dolgoznak ki a kutatók. Ez azért van, mert az előrejelzések nem biztosak, számos feltételezés bizonytalan a modellekben. És ennek következményeként az előrejelzésnek lesznek hibái, ha a valós aktuális adatokkal összevetik utólag őket. Mivel ezek a hibák, illetve a bizonytalanság minden módszernél jelen van, így a demográfustól az várható el, hogy valahogy kezeli, illetve jelzi ezeket.

Lee [1998] többféle módszert említ a korábbi szakirodalom alapján a bizonytalanság kifejezésére. Hagyományos megközelítésként említi, amikor többféle verziót vázol fel a demográfus. Általában háromfélét szoktak, ha az adott változó alacsony szinten vesz fel értékeket, közepes illetve magas szinten. Ezzel kapcsolatban Lee azt veti fel hibának, hogy nincsenek feltüntetve valószínűségek, hogy az egyes verzióknak mi a bekövetkezési esélye. Ráadásul sokszor félreviszik a becslést. Ez sokszor látható is, mert néha úgy alakul, hogy - már nem sokkal az előrejelzés készítésének dátuma után - az aktuális értékek kívül esnek azon az intervallumon, amit az alacsony és a magas érték meghatároz az adott időpontra.

A bizonytalanság forrását Lee [1998] részletesen kifejti. Egyrészt egészen lebontja a kérdést az egyén szintjére. Egyéni szinten a demográfiával kapcsolatos kérdések időpontja - például terhesség/ gyermekáldás, betegség, halál - bizonytalan. És ha ebből indulunk ki, akkor véges számú egyén aggregálása esetén a demográfiai változóknak - például a mortalitásnak - van egy véletlen eleme. Ha belegondolunk, akkor egy ország népessége is véges számú egyénből áll. Viszont a népesség számának nagyságrendje miatt ez a kérdés ott már nem okoz problémát, mert ez az említett véletlen elem viszonyítva az adott változó nagyságrendjéhez képest elenyésző. De ezenkívül még számos oka lehet a bizonytalanságnak. Nemcsak a jövőbeli történések okozhatnak bizonytalanságot, hanem például a meglévő adatok is lehetnek hibásak. Főleg a pár évtizeddel korábbi adatok tartalmazhatnak mérési hibát. Ennek oka, hogy akkoriban még nem állt rendelkezésre a maihoz hasonló informatikai rendszer az adatok nyilvántartásához. De persze a legfőbb bizonytalanságot a jövőbeli történések jelentik. Például politikai döntések is nagy befolyásoló tényezőket jelentenek. Ugyanis ha egy drasztikus döntés születik - például valamilyen módon támogatják a gyermekvállalást - , akkor az jelentős hatással lehet a demográfiai számok alakulására. Hasonlóképpen társadalmi vagy orvostudományi változások is hasonló nagy erejű befolyást okozhatnak. Az elsőre példaként többek között a nők tömeges munkába állását hozza

Lee [1998], míg a másodikra a fogamzásgátló módszerek fejlődését és elterjedését. Itt lehet megemlíteni a katasztrófákat is - például környezeti katasztrófák -, amik még hirtelenebb és váratlanabb sokkot okozhatnak a demográfiai adatokra. Egy harmadik nagyobb kategóriája a bizonytalanság forrásának az magával a modell felírásával kapcsolatos. Ez jelenthet modellspecifikációs, de paraméterbecslési hibát is.

Lee [1998] ezt a kérdéskört a következőképpen összegzi: a különböző módszerek különböző bizonytalanságot vesznek figyelembe, míg másokat figyelmen kívül hagynak. Az megszokott - képtelenség számszerűsíteni ugyanis -, hogy az elsőként említett egyéni szintről induló, valamint esetleges katasztrófa miatt fennálló bizonytalansággal nem számolnak a demográfusok. Az azonban vita tárgya, hogy melyik statisztikai modell számol a politikai, társadalmi, orvostudományi döntések, változások és eredmények által fenyegető bizonytalansággal.

A bizonytalanság forrásainak összeszedése egy fontos pont, hiszen így lehet érzékeltetni, hogy mennyi buktatója lehet az előrejelzésnek. De még fontosabb a kezelése, így a bizonytalanság kérdésének kifejtése után a hagyományos kezelési mód mellett egy másik lehetőséget is mutat Lee [1998]. Tanulmánya középpontjában tulajdonképpen a valószínűségi megközelítés áll - az angol nyelvű szakirodalomban 'probabilistic approach' -ként szerepel, a magyar fordítás saját elnevezés. A hagyományos utat azért említi, hogy elmondja a fenntartásait róla, illetve, hogy témáját legyen mivel szembe állítani. Ez a valószínűségi megközelítés is abból indul ki, hogy valahogy jelezni és kezelni kell a bizonytalanságot. Ennek kétféle módja van: valószínűségi eloszlással, illetve születések és halálozások valószínűségi modellezésével. A valószínűségi eloszlással dolgozó módszerek alapvetően a következő ötletek közül használják valamelyiket:

- vagy a múltbeli előrejelzések pontosságát vizsgálják,
- vagy elemzik a múlt demográfiai idősorának a szóródását,
- vagy szakértői szemmel próbálják a jövőbeli adatokat megbecsülni,
- vagy sztochasztikus megújulással számolnak.

A gyakorlatban azonban az a jellemző, hogy ezeknek a megközelítéseknek egy kombinációját használják az előrejelzéseknél. Nem véletlen, hogy a valószínűségi előrejelzésről ír Lee, hiszen az egyik fejlesztője volt a Lee-Carter modellnek. A Lee-Carter modell pedig a mortalitás kor szerinti valószínűségi eloszlását használja. A továbbiakban a modellel kapcsolatos elmélet kerül bemutatásra.

3. A Lee-Carter modell

Az először 1992-ben publikált Lee-Carter modell jelentőségét az adja, hogy ez egy sokszor alkalmazott módszer a mortalitás hosszútávú előrejelzésére. Az eljárás használja a statisztikai időszorelemzési módszereket, valamint a mortalitás kor szerinti eloszlásának megközelítését is. Lee és Carter [1992] tanulmányuk elején tisztázzák, hogy a modell felírása során nem céljuk az orvosi és társadalmi tényezők mortalitásra gyakorolt hatását külön vizsgálni. Ezzel arra utalnak, hogy nem térnek ki egyesével a lényeges orvosi eredmények - például halálos betegségek gyógymódjai, illetve megelőzése terén elért eredmények - mortalitásra vonatkozó hatására. Azt is előre kijelentik, hogy egy modell sem tud minden kor illetve idő szerinti változást pontosan leírni. Ugyanis néhány változó nagyon szabálytalanul vesz fel értékeket bizonyos időszakokban. És ez sokszor abból ered, hogy vannak egyes időperiódusban addig fenn nem álló és később sem jellemző körülmények. Erre példaként az 1918-19-es spanyolnátha járványt hozzák fel, aminek hatására minden népességgel kapcsolatos mutató nagyon kiugró értékeket produkált. De erről és ennek kezeléséről még később lesz szó. A modellt ismertető tanulmányban egy alkalmazást is rögtön bemutatnak. Az Egyesült Államok mortalitását modellezték, illetve jelezték előre módszerükkel. 1900-tól 1989-ig voltak adataik, így ennek alapján írták fel a modellt, majd 1990-től jeleztek előre. A modell többféle jelölésbeli felírása megtalálható a szakirodalomban. Mi a Lee és Carter [1992] tanulmányában olvasható alakját és jelöléseket alkalmazzuk a modell ismertetése során.

A Lee-Carter módszerrel fel lehet írni egy kortól és időtől függő mortalitási valószínűség logaritmusát ($\ln(m_{x,t})$), ami három tagot összegez. Az első (a_x) egy kor szerint változó komponens, ami független az időtől, a második tag ($b_x k_t$) egy időtől függő és egy kortól függő változó szorzata, a harmadik tag ($e_{x,t}$) pedig egy hibatag. Az egyenlet ezek alapján a következő:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t}, \quad (1)$$

másképpen felírva:

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x k_t + e_{x,t}}. \quad (2)$$

Az egyenletben szereplő változók közül az a_x azt mutatja meg, hogy mi az átlagos mortalitási értéke az adott korosztálynak. A $b_x k_t$ szorzatban a második tényező - a szakirodalomban a mortalitási index kifejezést szokták rá használni, a továbbiakban mi is így hivatkozunk rá - az általános mortalitási szint változását mutatja, míg az első tényező korosztályonként mutatja meg azt, hogy milyen mértékben változik a mortalitás, ha az általános mortalitási szint változik. A b_x mutatóval kapcsolatban Lee és Carter [1992] megjegyzi, hogy negatív értéket is felvehet bizonyos x kornál. Ez azért van, mert ez mutatja azt, hogy annál a korosztálynál nő a mortalitás, míg más korosztálynál csökken. A k változóról pedig azt említik meg, hogyha lineáris időben, akkor

a mortalitás minden kor esetén egy megfelelő konstans exponenciális ráta alapján változik. Ha a k a negatív végtelenhez tart, akkor - mivel exponenciális rátáról van szó - a korszpecifikus ráták nullához tartanak. Ami azt eredményezi, hogy negatív halálozási ráta még ebben az esetben sem fordulhat elő a modellben. Ez a tulajdonság pedig csökkenti annak a lehetőségét, hogy az előrejelzés lehetetlen eredményt adj. Az összeg harmadik tagjától az az elvárás, hogy kis varianciával rendelkezzen. Emögött az áll, hogy azt feltételezzük, hogy a variancia nagyrészt a k_t változó magyarázza és így a reziduális hibatag fehér zaj.

Ahhoz, hogy egyértelmű megoldást kapjunk további feltételeket kell felírni Lee [2000] tanulmánya alapján. Mégpedig a következőket:

$$\sum b_x = 1 \quad (3)$$

és

$$\sum k_t = 0. \quad (4)$$

Ezek mellett a feltételek mellett a a_x az $\ln(m_{t,x})$ értékeinek az átlagát adja a különböző x értékekre.

A másik fő momentum a k_t változók becslése a modellezés során. Olyan k_t értéket keresünk, ami kielégíti a következő egyenletet:

$$D_t = \sum e^{(a_x + b_x k_t)} N_{x,t}, \quad (5)$$

ahol D_t a halálozások száma a t . időszakban, és $N_{x,t}$ pedig az x korú népesség száma a t . időszakban. De a k értékének ilyen módon való megtalálását csak az értékek egy tartományon belüli keresgélésével lehet megtenni. Semmilyen analitikus megoldás nem létezik erre.

A k_t változót sztochasztikus idősor folyamatként érdemes modellezni. A Box-Jenkins módszerrel lehet megfelelő modellt keresni ezen belül. A tapasztalatok szerint az eltolásos véletlen bolyongás jól modellezi k_t változását. Így a modell második egyenlete a következő:

$$k_t = c + k_{t-1} + u_t. \quad (6)$$

Ez az egyenlet sokszor van kibővítvé más tagokkal is. Ez a modell bővítésének - a pontosabb előrejelzés felé tett - egy lehetősége, amiről a későbbiekben még lesz szó.

És ha megvan a modell a k_t mortalitási indexre, akkor előre lehet jelezni az értékét. Aminek a segítségével pedig - az $\ln(m_{x,t})$ egyenletet is felhasználva - különböző, a halandósági táblákban is megtalálható változókat lehet előrejelezni.

Ezek közül a változók közül kiemelendő a születéskor várható élettartam. Ennek oka, hogy ezzel a változóval már Lee és Carter [1992] is külön foglalkozott, másrészt könnyen értelmezhető fontos összegző változóról van szó.

Az elméleti modell felvázolása után fontos még néhány technikai információt kiemelni, amit Wilmoth [1993] foglalt össze a számításokról. Az (1) egyenletben az $m_{x,t}$ egy megfigyelt változó, míg az a_x , b_x és k_t paraméterek. A (3) és (4) feltételek felírása után a modell alkalmas arra, hogy minimalizáljuk az eltérések négyzetösszegét, azaz

$$\min [e_{x,t}] = \min \left[\sum (f_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2 \right]. \quad (7)$$

Ebben az egyenletben az $f_{x,t}$ a megfigyelt halálozási rátákat jelenti. A legegyszerűbb módja ennek, ha a_x -et egyenlővé tesszük az $f_{x,t}$ mátrix sorainak átlagaival. A b_x és k_t paramétereket pedig az $f_{x,t} - a_x$ mátrix szinguláris érték szerinti felbontásából kapjuk. Ez a számítás ugyanazt az eredményt adja, mint a Lee-Carter modellben javasolt módszer.

4. A Lee-Carter alapmodell hiányosságai és bővítési lehetőségei

Az 1992-es publikálás óta számos alkalmazását, továbbfejlesztését és kritikáját publikálták szerzők a Lee-Carter modellnek. A kritikák és az alkalmazás során szerzett tapasztalatok szerteágazóak, de mégis érdemes rövid említést tenni ezekről.

Lee [2000] összefoglaló tanulmányában - amit majdnem tíz évvel a modell első publikálása után írt - felhívta a figyelmet számos problémára, hiányosságra a modellel kapcsolatban, kezdve a következővel. Lee és Carter [1992] az Amerikai Egyesült Államok mortalitását modellezte 1900 és 1990 között. Ez alatt az időszak alatt a mortalitási index ($k(t)$) csökkenő függvénye meglepően jól közelíthető egy lineáris függvénnyel. Azonban ennek a függvénynek a feltételezése más időszekre már korán sem biztos, hogy igaz. Például, ha azt feltételezzük, hogy ez a 19. századra is igaz, akkor olyan magas mortalitási indexet kapunk, aminek értéke már lehetetlen. És azt is meg kell itt jegyezni, hogy a csökkenő halálozás alapvetően 20. századi jelenség a fejlődő országokban. Ami melleleg az egyik meghatározó oka az öregedő társadalomnak, ami kimondottan korunk problémája.

Itt említjük meg, de nem a modell hibája, hogy az 1990-ig meglévő Amerikai Egyesült Államokat leíró adatok a születéskor várható élettartamról jól közelíthetőek növekvő lineáris függvénnyel. Lee és Carter [1992] meg is említ ezzel kapcsolatban egy érdekes adatot. 1900-ban még 47 év volt a születéskor várható élettartam, míg 1988-ban már 75 év. Ha ennek a trendnek a lineáris folytatását feltételezték volna, akkor azt kapták volna eredményül, hogy 2065-ben 100 év lesz ugyanez a mutató. Ami nyilván nem fedi majd a valóságot.

Egy újabb probléma a modellel Lee [2000] szerint, hogy azt is feltételezi, hogy az egyes korosztályok esetén a mortalitás csökkenése mindig ugyanolyan mértékű marad időről időre. Azaz az $\ln(m_{x,t})$ egyenlet meredeksége - t szerinti deriváltja - konstans. Azaz:

$$\frac{d\ln(m_{x,t})}{dt} = b_x \frac{dk_t}{dt} = konstans. \quad (8)$$

Ez pedig nem nagyon állja meg a helyét a gyakorlatban. Ugyanis ha egy adott korosztálynál nézzük a mortalitás csökkenésének az ütemét, az nagyon változó. Az alapmodell nem kezeli ezt a problémát. Persze lehet a bővíteni a modellt ilyen irányba, hogy vegye figyelembe az egyes korosztályok esetén beálló változásokat. De nem lehet tudni, hogy a változtatások az előrejelzés pontosságát mennyire segítik, ahhoz képest mintha nem lett volna a modell bővítve.

Egy másik hiányosság, hogy a modell nem tartalmaz semmi további információt a mortalitás jövőbeli trendjéről, csak azt feltételezi, hogy a jelen trend folytatódik. Lee [2000] véleménye szerint a következő módszer volna a legjobb. Először előrejelezni annak feltételezése mellett, hogy az eddigi trend fog a későbbiekben is folytatódni. Majd módosítani az alapmodellt asze-

rint, hogy a hosszútávú trend ehhez képest milyen lesz. Azonban ehhez elég konkrét elképzelések kellenek, amit alá is kell tudni támasztani. Ehhez adatok pedig ritkán állnak rendelkezésre.

A hiányosságok és kritika mellett Lee [2000] bővítési lehetőségeket is ismertet a jobb előrejelzés érdekében. Ezek közül azonban nem mindegyiknél kell a modell egyenleteinek a bővítésére gondolni. Lee ugyanis több olyan módszert is említ, ami több esetre való felbontást használ. Elsőként a nem szerinti felbontást részletezi. Ennél a férfi és női adatokra vonatkozó előrejelzést az alapmodell két külön alkalmazásának veszi. Ezzel persze megnő a modell dimenzióinak a száma. Ezen úgy lehet segíteni, ha a korosztály szerinti csoportoknál vesszük külön a férfi és női adatokat. Így a k mortalitási index idősorára csak egyetlen becslést és előrejelzést kell készíteni. De az a_x és b_x változók már különböző értékeket vesznek fel a két nemnél. Nagyon hasonló módszer ehhez a földrajzi alapon történő felbontás, ami szintén egy lehetőség.

Megint hasonló, de technikailag azért nem teljesen megegyező módszer a halál oka alapján történő felbontás. Wilmoth [1993] megemlíti, hogy Lee és Carter célja, azaz a teljes mortalitás előrejelzése mellett a halál oka szerinti trendek előrejelzése is hasznos információt hordoz. Ha a halál oka szerint tekintjük az adatokat, akkor igaz az, hogy bizonyos korosztályoknál bizonyos halál módok rátája 0. Azonban a modellillesztő folyamat ezt módosítja, hogy elkerülje a $\ln(0)$ kifejezést, amit nem lehet értelmezni. Ez a probléma nem jelentkezik azonban, ha a modell súlyozott legkisebb négyzetek módszere segítségével van illesztve. Ahol a súly mindig az adatmátrix megfelelő cellájának eleme, azaz a halálozások száma x éves korban, a t . évben. A súlyozott legkisebb négyzetek módszerének van egy másik előnye is. Japán adatokra és becslésekre hivatkozva azt állítja Wilmoth, hogy a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével illesztett modell egész pontos becslést ad nagyobb halálozású korokra. Wilmoth felírta a minimalizálási problémát súlyozott legkisebb négyzetének módszerével is:

$$\sum w_{x,t} (f_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2, \quad (9)$$

ahol $w_{x,t}$ a súlyt jelöli, ami jelen esetben a halálozások száma x korban t . évben. A minimalizálási feladathoz ugyanazokat a korlátokat használja ((3) és (4)), mint amit az alapmodell felírásánál már korábban bevezettünk. A feladat úgy oldható meg, ha ennek a minimalizálandó kifejezésnek vesszük a parciális deriváltjait a változók szerint. Ezzel a következő három egyenletet kapjuk.

$$\hat{a}_x = \frac{\sum w_{x,t} (f_{x,t} - \hat{b}_x \hat{k}_t)}{\sum w_{x,t}} \quad (10)$$

$$\hat{b}_x = \frac{\sum w_{x,t} \hat{k}_t (f_{x,t} - \hat{a}_x)}{\sum w_{x,t} \hat{k}_t^2} \quad (11)$$

$$\hat{k}_t = \frac{\sum w_{x,t} \hat{b}_x (f_{x,t} - \hat{a}_x)}{\sum_x w_{x,t} \hat{b}_x^2} \quad (12)$$

Ezek után olyan megoldásokat kell keresni a változókra, amik mindhárom egyenletet egyszerre kielégítik. Persze más megoldási menete is lehet a minimalizálási problémának, például a szimplex algoritmus is jó módszer erre többek között.

Wilmoth [1993] a legkisebb négyzetek módszerén kívül más technikai megoldást is kínál a Lee-Carter modell paramétereinek a becslésére. Ez pedig a Maximum Likelihood módszer. Ehhez fel kell írni egy valószínűségi modellt, melynek alapján felírható a log-likelihood függvény, amit majd maximalizálunk. Wilmoth szerint - Brillinger korábbi eredményére hivatkozva - a $D_{x,t}$ jól közelíthető $\lambda_{x,t}$ átlagú Poisson eloszlással, ahol $\lambda_{x,t} = m_{x,t}E_{x,t}$. Innen a likelihood függvény:

$$L(d; \lambda) = \frac{\lambda^d e^{-\lambda}}{d!}. \quad (13)$$

A log-likelihood függvény ebben az esetben - amit mindkét oldal logaritmizálásával kapunk:

$$l(d; \lambda) = d \ln(\lambda) - \lambda - \ln(d!). \quad (14)$$

Ha azt feltételezzük, hogy a megfigyelések függetlenek, akkor a következőképpen összegezhjük a log-likelihood függvényt:

$$l = \sum (d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t} - \ln(d_{x,t}!)). \quad (15)$$

A megoldás azok a $\lambda_{x,t}$ értékek lesznek, amik maximalizálják az előbbi egyenletet. Mivel a harmadik tényezője a kifejezésnek nem függ $\lambda_{x,t}$ -tól, így elég csak a következő kifejezést maximalizálni - mivel a (15) kifejezés további része nem befolyásolja a megoldást:

$$l = \sum (d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t}). \quad (16)$$

Ha nincs semmilyen kikötés $\lambda_{x,t}$ -re, akkor könnyű belátni, hogy a maximum $\lambda_{x,t} = d_{x,t}$ esetén van. Fentebb a $\lambda_{x,t}$ -t a következő egyenlettel írtuk fel: $\lambda_{x,t} = m_{x,t}E_{x,t}$. A maximum likelihood becslés menete így úgy néz ki, hogy a $\lambda_{x,t}$ -t helyettesíteni kell $e^{a_x + b_x k_t} E_{x,t}$ -vel a log-likelihood egyenletben, és úgy maximalizálni - azaz parciálisan deriválni, majd egyenlővé tenni nullával - az egyes változók szerint.

Wilmoth technikai módszerei után egy újabb, az alapmodellhez képesti bővítés: dummy változó használata a mortalitás index egyenletében. Ezt azonban annyiban nem lehet újításnak tekinteni, hogy már Lee és Carter is használta 1992-ben az első alkalmazásnál, azaz az Egyesült Államok mortalitásának modellezésénél. Ahogy korábban volt már róla szó, az Egyesült Államok k_t mortalitási indexe meglepő módon jól közelíthető csökkenő lineáris függvénnyel 1900-1989-ig. Azonban az 1918-19-es években a demográfiai mutatók nagyon kiugró értékeket produkáltak. Ennek van egy nagyon ésszerű magyarázata, mégpedig hogy ezekben az években spanyolnátha járvány pusztított. Mivel ez a járvány egyszeri nagy sokk volt, így a hatását Lee

és Carter ki akarta szűrni a modellből, és erre a célra használták a dummy változót. Mégpedig úgy, hogy a mortalitási index változásának az egyenletéhez hozzáadtak egy dummy változót - ami ezekben az években 1 értéket vesz fel, míg minden más évben 0-át - megszorozva egy együttthatóval - aminek értéke a trendtől való eltérés. Ennek megfelelően a változás egyenlete:

$$\Delta k_t = k_t - k_{t-1} = c + \rho D_t + \epsilon_{x,t}. \quad (17)$$

Egy újabb érdekesség Hanewald [2009] tanulmánya, ami a mortalitási index és makroökonomiai változók alakulása között húz párhuzamot. Annyiban kapcsolódik ez a tanulmány az előző témához, hogy a technikai megoldást itt is a dummy változók jelentik. Hanewald hat ország - Ausztrália, Kanada, Franciaország, Japán, Spanyolország és az Egyesült Államok - adatait dolgozta fel 1950-től 2005-ig. Arra a következtetésre jutott, hogy a mortalitási index nem egy látens változó, ami kiszámíthatatlanul változik, hanem egy külső hatások által befolyásolt változó. Eddig azt láttuk, hogy a k_t változó véletlen bolyongásként van felírva. Hanewald [2009] azonban megvizsgálta a korrelációs együtttható alakulását a mortalitási index fluktuációja és makroökonomia változók - mégpedig a reál GDP növekedése, valamint a munkanélküliségi ráta változása - között. Korrelációt számolt az egész periódusra, meg három kisebb - 1951-1970-ig, 1971-1990-ig, 1991-2005-ig tartó - periódusra is. Ebből két következtetést vont le. Az Amerikai Egyesült Államok és Ausztrália adatainál szignifikánsan pozitív korrelációt talált a reál GDP növekedés és a mortalitási index között mindkét nem esetében. Kanadára nézve ugyanez csak a férfiakra nézve igaz. Szignifikánsan negatív kapcsolatot talált a japán munkanélküliségi ráta változása és a mortalitási index között mindkét nemre. Ausztrália esetén ez csak a nőkre igaz. Második eredménye, hogy az országoknál strukturális változást lehet megfigyelni a gazdasági feltételek és a mortalitási index kapcsolatában a már említett rövidebb időszakokban. Az adatok részletezése nélkül, csak a változás nagyságát érzékeltetni említjük meg a következő adatokat. Míg 1951-1970 között a legtöbb ország korrelációja a mortalitási index változása és a reál GDP növekedés között pozitív volt - például az USA-ban 0,4 -, addig 1991-2005 között ugyanerre negatív korrelációt talált. Hanewald így ezekre a váltásokra használt dummy változót a Δk_t egyenletében. A dummy változó akkor vesz fel 1 értéket, ha az adott kisebb periódusba eső időpillantról van szó, egyébként 0 az értéke. Ezzel a megoldással egy egyenlettel fel lehet írni az egész 1950-2005-ig tartó periódusra a Δk_t alakulását.

Hanewald tanulmánya egyben jó átvezetés, hogy az elméleti általános fejtegetések után kicsit belenézzünk a modell országokra való alkalmazásának tapasztalataiba is. Ugyanis az egyes országokról szóló tanulmányok is sok érdekes megoldást tartalmaznak, természetesen ezeket nem lehet általános érvényűnek venni. Egy ilyen alkalmazásra példa a Coelho [2001] által írt tanulmány a portugál tapasztalatról. A tanulmányból két dolgot szeretnénk kiemelni. Egyrészt

Coelho modellje kor szerint nem ω számú kategóriát határoz meg, hanem 5 éves intervallumú korosztályokat képez. Ettől eltérés csak a két végletnél van. 0-tól 4 éves korig két csoportra osztotta az embereket: egy 1 éves alatti és egy 1 éves és 4 éves kor közötti csoportra. Az utolsó csoport pedig a 85 évesnél idősebbeket foglalja magában. Ez a 85 évesnél idősebb korcsoport pedig eléggé jelentős szerepet tölt be. Hiszen Coelho [2001] szerint 1942-ben az összes haláleset 5,5 %-a kapcsolódott ehhez a korcsoporthoz, míg 1999-ben már több mint a 25 %-a az eseteknek. Ez a tény pedig a korcsoport felbontását igényelné, azonban ezzel gondok vannak az adatok elérhetőségével és minőségével kapcsolatos problémák miatt, főleg ha nem olyan közeli múltból valók az adatok. Hasonló probléma felmerült Lee és Carter számolása során is - nekik is csak egy számadatuk volt a 85 éves és annál idősebb korosztály halálozásáról. Ők végül - korábbi kutatások alapján - azt a módszert választották, hogy feltételezték, hogy a halálozás ebben a korosztályban a kor emelkedésével lineárisan csökken. Mivel azonban Portugália mortalitására nem született még korábban hasonló tanulmány, ami alapján hasonló feltételezéssel lehetne élni, így Coelho inkább hagyta aggregálva a korosztály adatait. Másik érdekesség a k_t változó értékeinek alakulása. A amerikai esetről már láttuk, hogy meglepő módon jól közelíthető az idősor egy lineáris függvénnyel. Ugyanez igaz a portugál adatokra is. De ha még pontosabban akarjuk közelíteni, akkor két különböző lineáris függvénnyel lehet közelíteni, azaz van egy strukturális törés 1976 körül. És ez a k_t idősorán jól látható változás az 1974-76-os politikai változásokat mutatja: ekkor sokat javultak a gazdasági feltételek és sokat fejlődött például a közegészségügy is, ami a mortalitás csökkenéséhez vezetett - így a k_t idősorának grafikonja meredekebb lett.

A svéd alkalmazásról szóló tanulmány nagyon részletes. A demográfiai adatok nyilvántartásának svéd történelmével kezdődik Wang [2007] értekezése. Itt az is meg van említve, hogy habár 1750-től 2004-ig csökkenő trendje van a mortalitásnak, több olyan időpont is volt, amikor hirtelen megnőtt. Ilyen volt az 1772-73-as aratási hiány, 1808-09-es finn háború, és a korábban már említett 1918-19-es spanyolnátha járvány időszaka. A "történelmi bevezetőnek" megfelelően a Lee-Carter modell felírása is hosszú időszak alapján történik ennél az alkalmazásnál. Mégpedig 1860-tól 2004-ig. Érdekesség, hogy a mortalitási index férfi trendjében 1965 után látható egy váltás. Ezt a szerző a dohányzási szokások változásának tulajdonítja. Wang [2007] megemlíti, hogy a modell felírása, az a_x, b_x, k_t paraméterek becslése után csak a mortalitási indexet kell előrejelezni. Lee és Carter ezt eltolásos véletlen bolyongás egyenletével tette meg, azaz:

$$\hat{k}_t = \hat{k}_{t-1} + \theta + \epsilon_t. \quad (18)$$

Ahol a θ paraméter az eltolás, amit a következőképpen lehet becsülni:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{k}_T + \hat{k}_1}{T - 1}. \quad (19)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\hat{\theta}$ értékét az első és az utolsó mortalitási index értéke határozza meg. Wang [2007] szakít ezzel a megoldással tanulmányában és azt mondja, hogy θ meredeksége az utolsó öt mortalitási index átlagától függjön. Azaz az újítás egyenletekben kifejezve:

$$\hat{k}_{T+\Delta t} = \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta}_T, \quad (20)$$

ahol

$$\hat{k}_T = \frac{\hat{k}_T + \hat{k}_{T-1} + \hat{k}_{T-2} + \hat{k}_{T-3} + \hat{k}_{T-4}}{5}. \quad (21)$$

Ezek után pedig legkisebb négyzetek módszerével megtalálja a $\hat{\theta}_T$ meredekségét. Ezek után:

$$\theta_T = \frac{\sum k_{T+(\Delta t)}\Delta t}{\sum (\Delta t)^2}. \quad (22)$$

Wang [2007] azt is tanulmányozta, hogy hogyan változik az előrejelzés pontossága, hogyha a modell felírásához használt időszak hosszát változtatja. Az ellenőrizhetőség kedvéért olyan időszakra jelzett előre, ami már a múlthoz tartozik, azaz van róla adat. Így például abban az esetben, amikor 100 évre jelzett előre 1900-tól kezdte az előrejelzést. A körülbelül 100 és 50 éves intervallumra vonatkozó eredményeket táblázatba foglalta, annak megfelelően, hogy az előrejelzés mennyire volt jó vagy rossz - az öt fokozatú skála: nagyon rossz, rossz, megfelelő, jó, nagyon jó. A táblázatban nemek szerint 25-től 29 éves, 45-től 49 éves, 65-től 69 éves és 85-től 89 éves korig értékelt. Ezek alapján a következő következtetést lehet levonni. Az 50 éves előrejelzés pontosabb, mint a 100 éves.

Utoljára pedig egy olyan tanulmányt említünk, ami tulajdonképpen minden eddig említett összefog. Lee és Miller [2000] ugyanis majd tíz évvel a modell publikálása után írtak egy értékelő tanulmányt, amiben a fent említett észrevételeket, alkalmazásokat is szinte kivétel nélkül megemlíti. A modell sikerességének legfőbb okaként az egyszerűségét emelik ki. Igaz, hogy több lépésből áll a modell, mégis minden lépés egyszerű. Ráadásul a modell a tényleges mortalitási adatokra épít, emellett pedig statisztikai eszközöket használ a modell felírásánál. Az eddigi tapasztalatok mind azt mutatják, hogy a k változó a múltban elég lineáris trendet követett valóban, és az eltolásos véletlen bolyongás jól illeszkedik. Ez a közel linearitás pedig nagy segítség az előrejelzésben. Itt a születéskor várható élettartamot hozzák fel ellenpéldaként, aminek nemlineáris trajetóriái vannak.

Persze azt is megemlíti, hogy számos kritika és javaslat is született a modell publikálása óta. Kritikaként Lee és Miller [2000] a következőket gyűjtötte össze. Volt, aki azt hozta fel kritikaként, hogy a valószínűségi sávok túl szűkek. Mások azt kifogásolták, hogy a korszpecifikus

ráták olyan alacsonyak, hogy nem lehet azt feltételezni, hogy sokkal tovább csökkennek még. Volt, aki hiányolta az orvosi tényezők hatását az előrejelzésből. Volt olyan kritika is, ami azt vetette fel, hogy az a_x és b_x változókat nem kellene állandónak tekinteni az idők során. Ezek után kitértek azokra a munkákra, amik nagyon hasznos és érdekes bővítései az alapmodellnek. Ezekre külön nem térünk ki, mert ez a fejezet ezekről szól.

Végezetül, a már általunk is említett kritikákra ad választ Lee és Miller. Egyrészt ők azt tapasztalták, hogy 50 éves előrejelzésnél a valószínűségi határok inkább túl szélesek, minthogy túl keskenyek. Az igaz, hogy még távolabbi előrejelzésnél valóban kicsit szűkek, mert csak 80-90%-a esik a tényleges adatoknak az előrejelzett határok közé, szemben az elvárt 95%-kal. A korszpecifikus rátával kapcsolatban az az állításuk, hogy a mortalitás tovább fog csökkenni. Az igaz, hogy 10-től 50 éves korig a csökkenés lassul a többi korosztályhoz képest. És ennek a lassulásnak köze van az alsó határokhoz is. Habár az is igaz, hogy másik megközelítésből azt lehet mondani, hogy a nagyon fiatal és az idős korosztály esetében a mortalitás csökkenése nagyon fel van gyorsulva. Az orvostudományi tényezők vizsgálatával kapcsolatban azt a kérdést tették fel, hogy hogyan kellene bele venni az előrejelzésbe? Megemlítik, hogy a számítások, amik ilyen szakértői véleményen alapulnak folyamatosan túl alacsony becslést adnak. Valamint az átlagos négyzetes hibája is nagyobb annak a módszernek, mint a Lee-Carter módszeré. A a_x és b_x változók időtől függővé tételével egyetértenek. Emellett azzal érveltek, hogy az évszázad második felében a mortalitás csökkenése az idősebb korosztálynál a fiatalabb korosztályhoz képest sokkal nagyobb volt, mint az első ötven évben.

Összességében úgy zárják az értékelést, hogy bár tisztában vannak a módszer hiányosságaival, de mindemellett jobban működik mint azt először várták. Az eddigi alkalmazások alapján a Lee-Carter modell megbízható eredményt ad, amennyire előre lehet becsülni. Azt sose lehet pontosan tudni, hogy mit hoz a jövő, de mindenesetre a Lee-Carter modell egy jó alapot ad a tervezéshez.

5. Demográfiai előrejelzés

A Lee-Carter modellt, ahogy az előző fejezetekben ezt láthattuk, elsősorban és leggyakrabban demográfiai (mortalitás) előrejelzésre használják. Jelen fejezetben a modell segítségével próbálunk meg előrejelzést adni a magyarországi halandóságra. Továbbá az így kapott adatokkal a férfi és női populációt szeretnénk számszerűsíteni. A fő cél az a számításokkal, hogy rávilágítsunk a nyugdíjrendszer esetleges demográfiai változások által gerjesztett feszültségeire. Amit szinte mindenhol a világon a tartós trendszerű előregező társadalmak okoznak.

5.1. Adatállomány és tesztelés

Az adatsorunk [11] terjedelmére való tekintettel fontos szempontnak éreztük a modell vizsgáztatását. Így elsősorban az volt a fő kérdés, hogy a modell milyen bázisból építkezzen annak érdekében, hogy a lehetőségekhez mérten a pontosságot is szem előtt tartsuk. Ennek megfelelően 1950, 1960, 1970, 1980 és 1989-ban kezdődő periódusban származó adatok alapján alapján becsültük a modell paramétereit 2000-ig. Ezt követően a 2001-től 2009-ig tartó periódusra jeleztünk előre. Annak érdekében tettük ezt, hogy az így kapott becsült mortalitási táblánkat összehasonlítsuk a tény adatokkal (2001 - 2009). A mortalitás táblák tesztelését χ^2 teszt segítségével végeztük. Annak érdekében, hogy ellenőrizhetővé váljon a becsült halálozási valószínűségek valóban a tény valószínűségek halmazából származó mintának tekinthető-e. Tehát a kérdés az, hogy binomiális eloszlást követ-e a minta $E_x q_x$ várható értékkel és $E_x q_x p_x$ varianciával. Ennek megfelelően a hipotézis:

$$H_0 : \theta_x (E_x q_x ; E_x q_x p_x). \quad (23)$$

Kiszámításának a módja:

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(\theta_x - E_x q_x)^2}{E_x q_x p_x}. \quad (24)$$

A tesztelést 1 – 24 éves korosztályokra végeztük, hiszen várhatóan ez a generáció fogja meghatározni a nyugdíjrendszert a becsült periódusra. Az így számított szabadságfok: $24 - 2 - 1$.

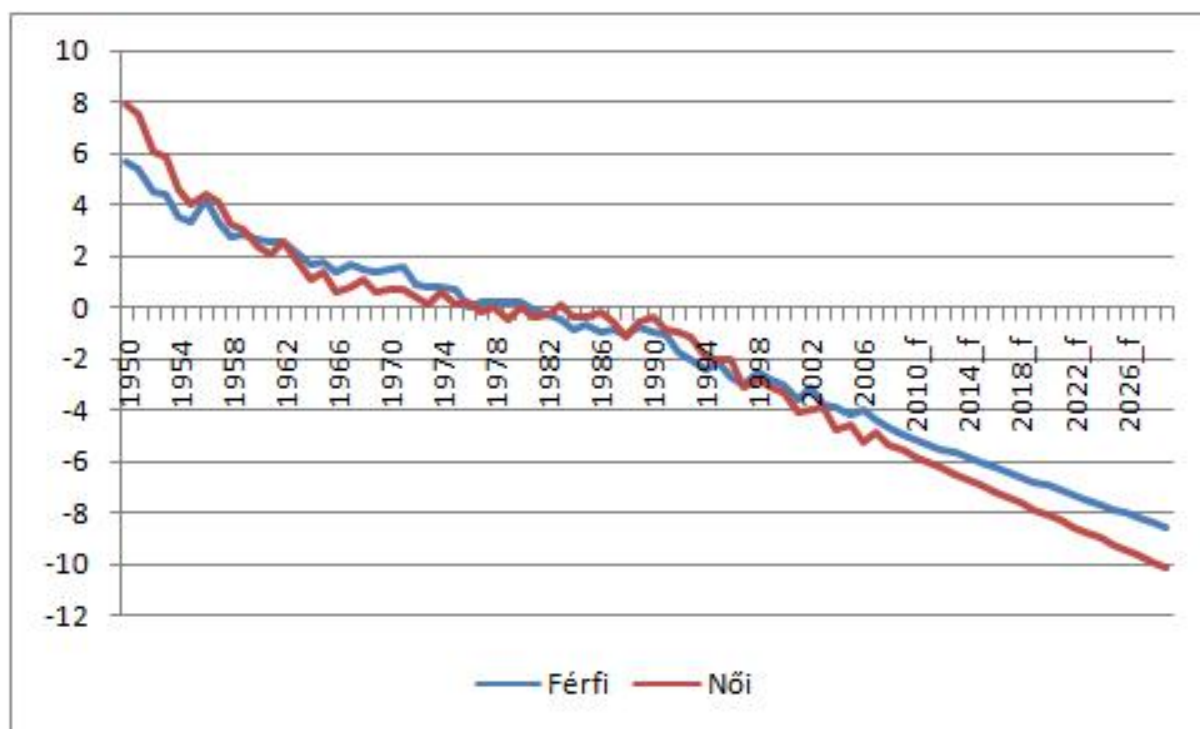
Az így kapott eredmények alapján az illeszkedés a női mortalitás táblára majdnem minden bázisból indított előrejelzésben elfogadható. Azonban a férfi halandósági valószínűségekre sok esetben, jellemzően 1950 - 2000, 1960 - 2000, 1970 - 2000-re elutasítható a nullhipotézis. Az 1980 és 1989-es adatokra azonban a férfi mortalitási tábla is elfogadható. Ennek tudatában az 1980 - 2009-es bázist választottuk bázis időszaknak, amiből a modell paramétereit becsüljük. Ugyanakkor, az 1989-es bázisból indított tesztelés során még tovább javultak a tesztelési eredmények, de ezt az időtávot elvetettük. Mivel úgy gondoltuk, hogy 1989 - 2009-es időtáv már

nem elég hosszú, egy hosszabb előrejelzés elvégzéséhez. Természetesen a χ^2 teszteket a teljes mortalitási táblára is elvégeztük, mely alapján az empirikusan megfigyelt értékek szintén az 1989 - 2009-es időtávon voltak a legalacsonyabbak. Azonban itt a nullhipotézist elutasításra kerültek minden teszt során, mivel a szabadságfok növekedése által indukált inverz χ^2 értéke nem növekedett olyan mértékben, ahogy az empirikus érték. De ez nem is volt meglepő.

5.2. Modell paraméterek, becslései és eredmények

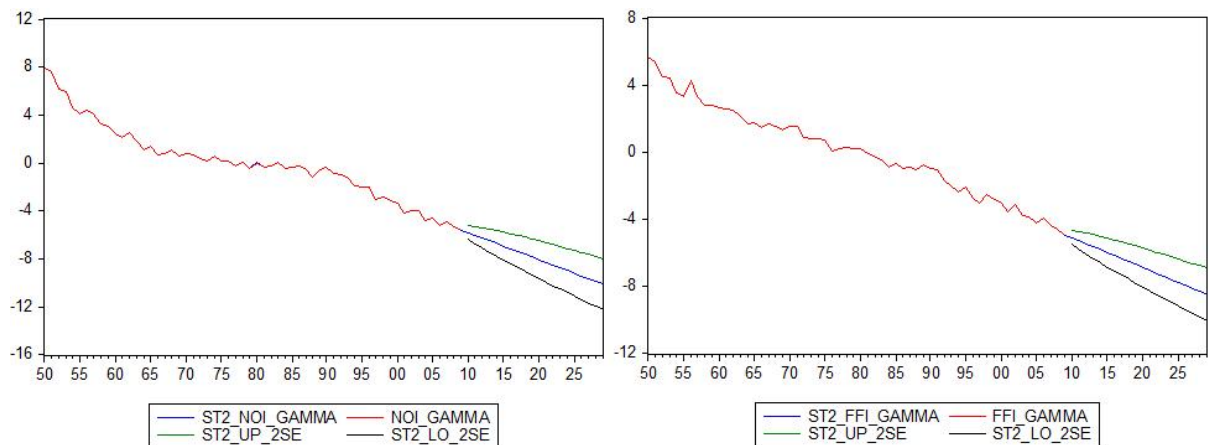
5.2.1. Mortalitási index

A megfelelő transzformációk és az alap mátrixok meghatározását követően az előrejelzéshez kulcs fontosságú paraméterek becslése következett. Így a $b_x k_t$ értékeket a (18) egyenlet alapján jeleztük előre, természetesen alkalmazva a (19) egyenlet által számított driftes tagot. A 1. ábrán



1. ábra. tény és előrejelzett mortalitási index

a női és férfi mortalitás indexek alapján jól látható, hogy nem jelentősen, de a női nagyobb mértékben csökken, mint a férfi mortalitás index. A mortalitási indexeket nemcsak a (18) egyenlettel jeleztük előre, hanem Eviews idősorelemző program segítségével is. A mortalitási indexekre ARIMA folyamatot illesztettünk. Ennek eredményét az 2. ábrán láthatjuk. Az tény, hogy mortalitási indexek értéke folyamatosan csökken, vagyis egy nem konstans várható értékű folyamatról van szó. Ennek megfelelően nem stacionárius idősorra gyanakodhatunk. Ezt igazolja a három

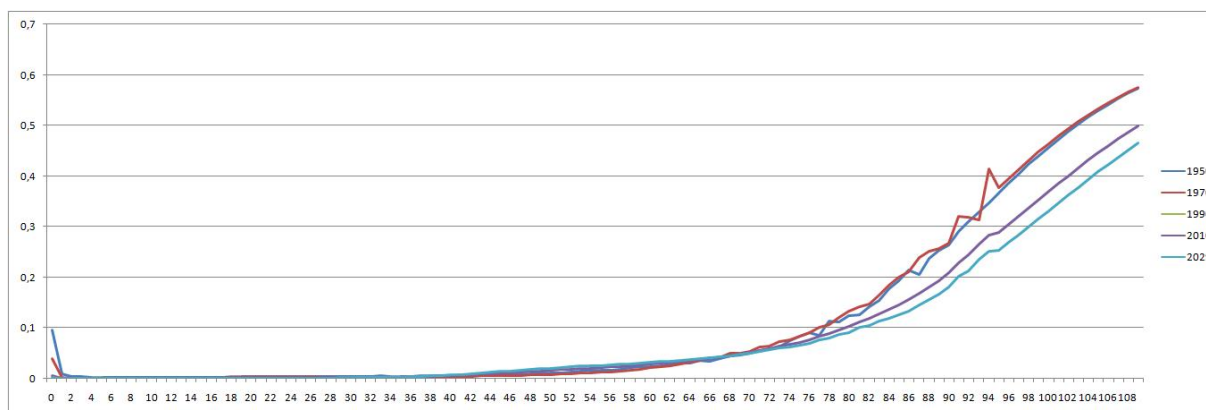


2. ábra. mortalitási index előrejelzése ARIMA folyamattal

(*Augmented Dickey-Fuller, Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin és Phillips-Perron*) teszt is. Melyekből kitűnik, hogy egységgyök folyamatokról van szó. A korrelogramot vizsgálva látszik, hogy az eredmények nem robusztusak. Ezért egyszeri differenciálásra van szükség. Ezt követően, a női és férfi mortalitás indexre egy $ARIMA(1,1,1)$ folyamat illeszkedett megfelelően, ahol még a paraméterek is szignifikánsak. A női mortalitás indexre illesztett ARIMA modell magyarázó ereje (0.9829), míg a férfi modell esetében (0.9883).

5.2.2. Halandóság (q_x)

A férfi halandóság alakulása a 3. ábrán jól látható (x tengely = kor, y tengely = valószínűség), ahogy haladunk az időben előre, úgy javulnak a halálozási valószínűségek. Egyre jobban lejjebb tolódnak a görbék, mely már arra is utal, hogy a várható élettartamok is növekednek. A férfiak esetében a halálozási valószínűségek hozzávetőlegesen a 78. életévtől kezdenek el drasztikusan emelkedni. A görbék 80-90 év feletti szakasza azonban nem feltétlen releváns, hiszen a különböző mortalitás táblák ezen része jelentős véletlen hibával terhelt adatokat tartalmaz. A 4. ábrán



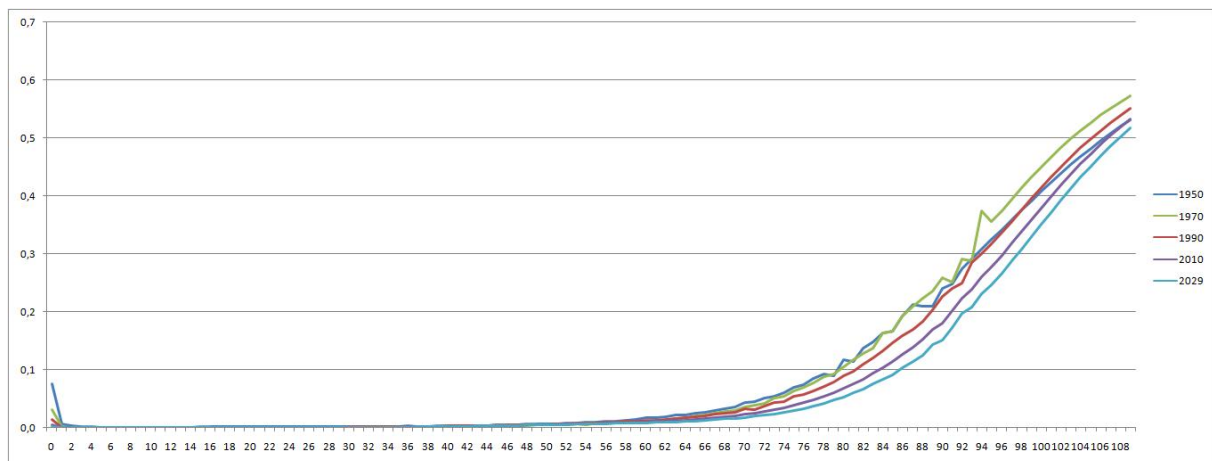
3. ábra. férfi halandóság változása

a női halálozási valószínűségek találhatók. Ahol a görbék az 58. életévig szinte egy vonalon mozognak, de 58. életévtől már elkezdnek egyre erőteljesebben külön válni. A halálozási valószínűségek exponenciális növekedése a 83. évtől kezd el gyorsulni. A két ábra jól mutatja, hogy mindkét nem esetében a csecsemőhalandóság nagy arányban csökkent, mára szinte eltűnt. Ezzel együtt az időskori halálozás is csökkenőben van. További észrevétel, hogy a férfi q_x -ek esetében megfigyelhető a halálozási valószínűségek emelkedése 40 és 66 életévek között. Ennek megfelelően az vizsgált 1950 és 2029 periódushoz tartozó férfi halálozási valószínűségek 40 és 66 életév között folyamatosan emelkedett.

Természetesen a többi lejárta (1970, 1990, 2010) e két görbe között helyezkedik el, mutatva a folyamatos változást, ahogy a halálozási valószínűségek folyamatosan konvergálnak a magasabb értékekhez. Ennek egyik fő oka lehet a modern korral járó fokozott stressz faktor, ami párosul a mozgásszegény életmóddal. A másik nem ábráján ilyen jellegű tendencia nem figyelhető meg a 40-66 éves korosztályok között.

A 3. és a 4. ábrákból is következik, hogy a lakosság várható élettartam növekszik, de ez külön is számítható, természetesen az alapmodellre építve. A várható élettartam meghatározása az alábbi módon történik:

$$e_x = \frac{\sum_{k=l}^{\omega-x} l_{x+k}}{l_x} \quad (25)$$



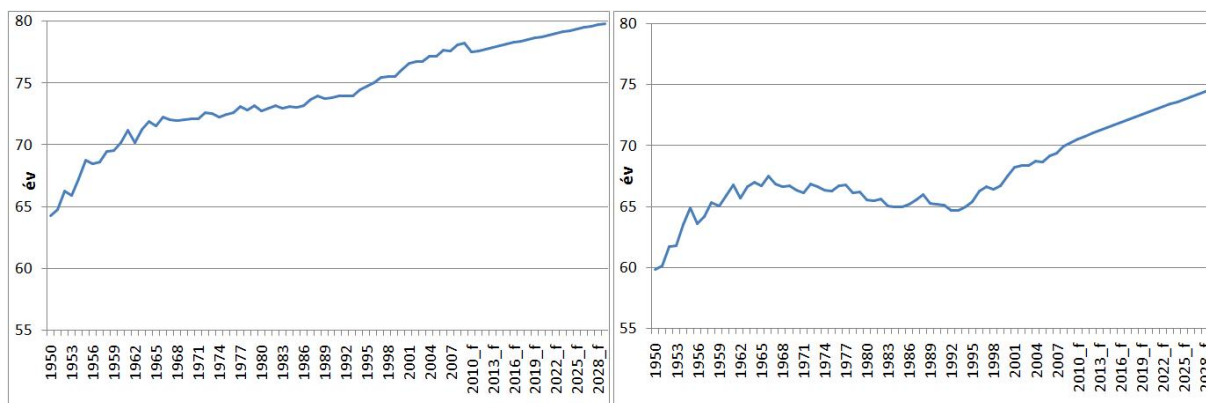
4. ábra. női halandóság változása

ahol:

- x az életkor
- l_x az x éves élők száma, 100 000-es induló populációval
- ω a populációban lévő feltételezett maximális életkor

5.2.3. Születéskor várható élettartam (e_0)

Demográfiában használatos mutató a születéskor várható élettartam, mely fontos jelzőszáma lehet egy közösség társadalmi, gazdasági fejlettségének. A fenti képletből könnyedén számítható, hiszen ez esetben $x = 0$ paraméterre kell szummázni. A 5. ábrából látható is a születéskor várható élettartam növekedése, mely eltérő nők és férfiak esetében. Nők esetében 2029-es évrea születéskor várható élettartam 79.83 év míg férfiak esetében ez a szám mintegy öt évvel alacsonyabb (74.62 év). Ez is tükrözi azt a folyamatot, hogy a nők átlagosan 5-6 évvel élnek tovább mint a férfiak. Ezen értékek kalkulálásakor eltérő bázisból indultak a becslések. Női kalkulálás esetében 1980-as becslésből, azonban a férfi adatok számítása során 1989-as bázisból történt az előrejelzés, mivel itt a trend illesztését nagy arányban eltorzította volna a rendszerváltás előtti csökkenő trend. Azonban ez 1989 – 1990-től megváltozott és ismét emelkedő trendbe váltott.



5. ábra. nők(bal) és férfiak(jobb) születéskor várható élettartam

5.2.4. Fertilitás és populáció méret

Fertilitás, vagyis a termékenységi arányszám, nagyban meghatározza persze a mortalitással egyetemben a társadalom méretének jövőképét. Mint ilyen igen fontos mérőszámot szintén fontosnak tartottuk beemelni az elemzésünkbe, mivel a nyugdíjrendszer egyik lába a jövőbeni befizetők (aktívak) és nyugdíjasok aránya. Amely nagyban meghatározza a fenntarthatóságot. Fertilitás számításának a módja[4]:

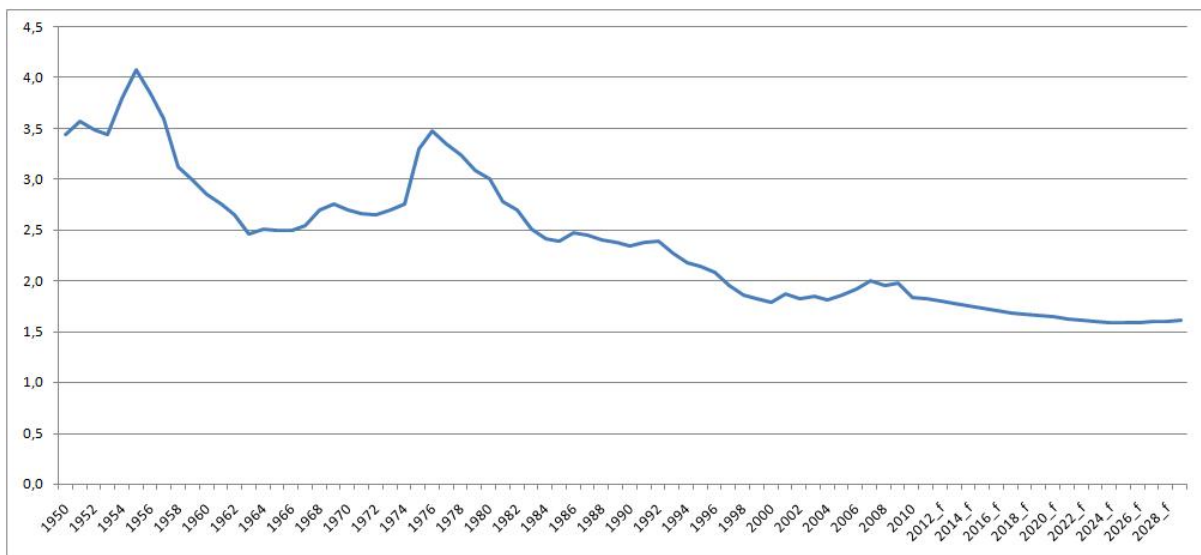
$$Tfr = \frac{Sz_{sz}}{N_t} \cdot 100 \quad (26)$$

Ahol:

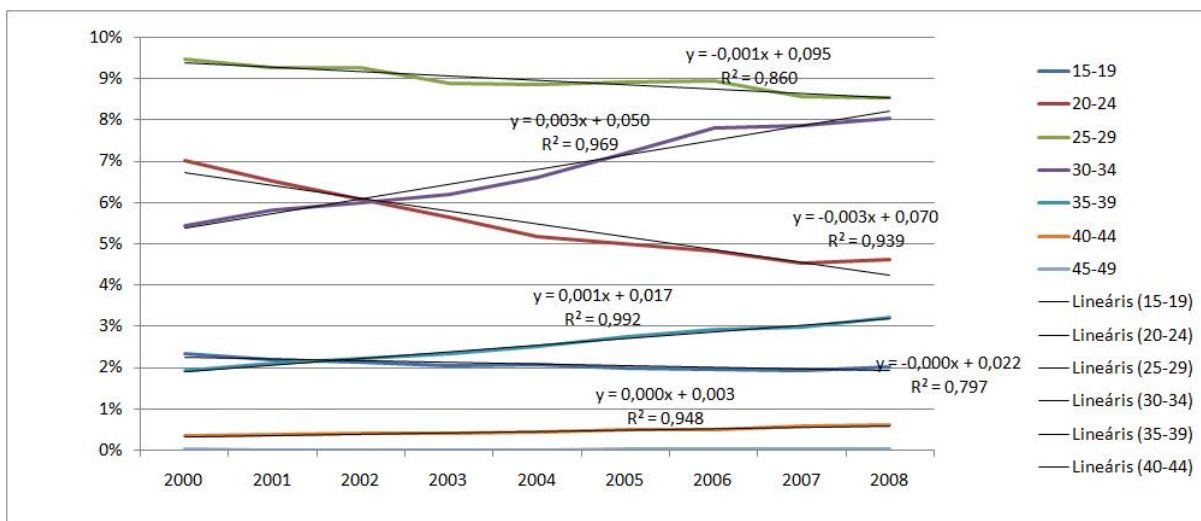
- Sz_{sz} : születések száma
- N_t : termékeny korú női népesség

A termékeny korú női népesség száma a 15 – 49 éves női népesség. Ahhoz, hogy a népesség ne csökkenjen tartósan, a fertilitási ráta értékének minimum 2,1-es értéket [15] el kell érnie. Amennyiben ez az érték nem áll fenn, akkor különböző társadalmi, gazdasági feszültségek keletkeznek (pl.: *nyugdíjrendszer, migráció*). A 6 ábrán látható, hogy Magyarországon hogy alakult a fertilitási arányszám. Szembetűnő a csökkenő trend. A csúcs időszakban 1956-ban a 4,0 értéktől folyamatos a csökkenés. Két csúcs az első az ún. Ratkó-korszak, amikor nagyon alacsonyra csökkent a mortalitás és az abortusz tilalom miatt megnövekedett a termékenység. A második csúcs a csökkenő trendben az ún. Ratkó-unokák megszületése és szintén az abortusz szigorítása magyarázza. Ezt a két kiugrást kivéve egyenletesen csökkent a termékenység, mely ráta még az ezredforduló előtt elérte a minimum értéket a 2,1-t. 1995-től már a fertilitási ráta a minimum érték alatt ingadozva csökkent tovább.

A népesség előrejelzésben három fajta fertilitással számoltunk: egy konstans csökkenő trenddel, egy kevésbé csökkenő és egy kevésbé javuló népesedési trenddel. A csökkenés/növekedés



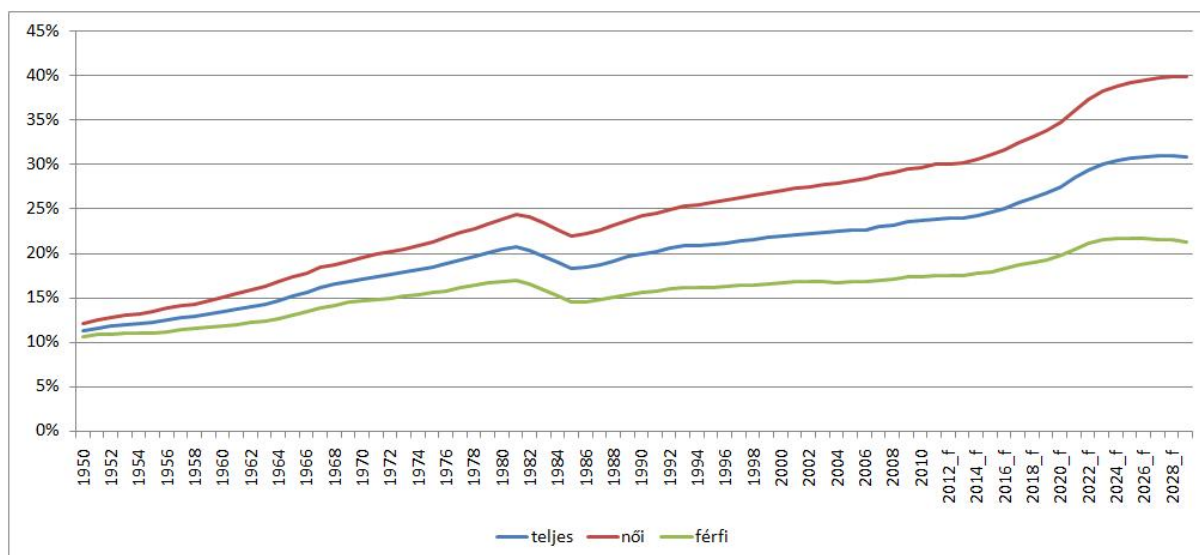
6. ábra. fertilitási ráta



7. ábra. korosztályos szülési arány

mértéke minden esetben a konstans trendtől $+/- \Delta 10\%$ volt. Ezen módosítás egyik irányban sem indukált jelentősebb mértékű populáció növekedést/csökkenést.

Ezt követően meghatározásra került a becsült paraméterek segítségével és az eddig bemutatott eredményekre építve a populáció mérete. Ahol azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a születések számának minden esetben 55%-a fiú a maradék pedig lány gyermek volt. A születésszám meghatározásának alapját képezte, a KSH által 2000 – 2008-as periódusra közölt női korosztályos szülési arány. Amely adatokra lineáris regressziót (7. ábra) illesztve jeleztünk előre, a regresszió magyarázó ereje minden esetben magas volt R^2 (0.790 – 0.969). Így meghatároztuk a születésszámokat amire a már említett 55%/45% arányt alkalmaztuk. Ezek után egyszerű rekurzióval adódtak a populáció részletes számai. Melynek eredményei a 9. ábrán láthatóak,



8. ábra. nemenkénti és teljes időskori függőségi ráta

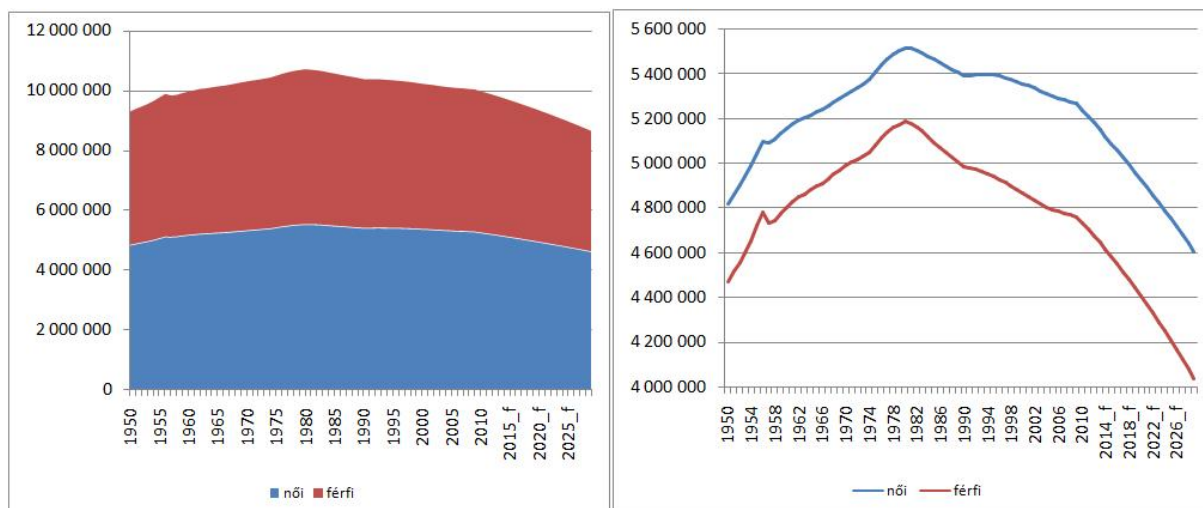
ahol szintén látható két enyhébb kiemelkedés, ami szintén a Ratkó-korszak és az unokáiknak a nyoma. Itt sem mondható el más, mint az, hogy a magyar lakosság hasonlóan a világ számos államához fogyóban van. Az előrejelzés alapján 2029-re hozzávetőlegesen 8 639 328 fővel lehet számolni, melyből 4 603 656 fő lesz nő nemű míg a fennmaradó 4 035 671 fő a férfi.

A populáció és ezen halmazon belül a nemek megoszlása mellett nyugdíjrendszer finanszírozhatóságát figyelembe véve beszédes demográfiai mutató az időskori függőségi ráta. Amely az elméleti aktív népesség 19 – 65 év közöttiek száma és a 65év felettiek arányát mutatja meg. Ami a nyugdíjrendszer szempontjából - pláne egy felosztó-kirovó rendszer esetében - kulcsfontosságú mutató. Így a mutató kiszámításának a módja:

$$\text{függőségi ráta} = \frac{\sum_{i=66}^{\omega} x_i}{\sum_{i=19}^{65} x_i} \quad (27)$$

A 8. ábrán látható, hogy az időskori függőségi ráta monoton módon növekszik. Mind a női, mind a férfi és ebből következően a teljes öregségi függőségi ráta is.

Ezen adatok önmagukban sem túl üdvöztetőek, azonban a társadalomra a nyugdíjrendszeren keresztül visszacsatolva tovább gazdasági hatásai is várhatóak. Ezt a problémakört járja körül a következő fejezet, vagyis hogy miképpen hat a demográfiai változások sora a nyugdíjrendszerre.



9. ábra. populáció nemek közötti megoszlása

6. Nyugdíjmodell

A korábbiakban bemutatott demográfiai modell eredményeinek felhasználásával, ebben a fejezetben létrehozunk egy modellt a magyar nyugdíjrendszer várható bevételeinek és kiadásainak előrejelzésére, különös tekintettel arra hogy e fenti kettő különbsége várhatóan mikor válik negatívvá. A modell alapgondolata, hogy a magyar nyugdíjrendszer, lévén felosztó-kirovó rendszerről beszélünk, a mindenkor folyó bevételeiből teljesíti folyó kiadásait. Így a rendszer fenntarthatóságához elegendő vizsgálni a bevételek, és a kiadások várható jövőbeni alakulását, illetve ezek egymáshoz viszonyított arányát.

6.1. A bevételi oldal meghatározása

A nyugdíjrendszer bevételeit egyrészt a munkaadó által befizetett nyugdíjbiztosítási járulék, másrészt pedig a munkavállaló által fizetett nyugdíjjárulék határozza meg. Mindkét járulék, a bruttó bér százalékában van meghatározva, így az összes befizetés meghatározásához, már csak az átlagos bruttó bérre, valamint a foglalkoztatottak számára van szükségünk. Tekintsük az alábbi képletet, melyet a modellezés során használtunk.

$$\text{Bevételek} = \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 L_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) \cdot (1 - u) \cdot (\bar{w} \cdot b \cdot 12) \quad (28)$$

ahol:

- $i = 1, 2$ azt jelöli hogy férfi vagy női adatokról van-e szó
- $j = 1, 2, 3, 4, 5$ pedig rendre a 0-14, 15-24, 25-64, 65-74, 75-110 beosztású korosztályok megfelelő adatait indexeli

- $L_{i,j}$ jelöli a Lee-Carter modell által előrejelzett népességi adatok alapján az adott korcsoportokban élők számát férfi-női megbontásban.
- $a_{i,j}$ jelölje az i nemű és j -edik korcsoportban élő gazdaságilag aktív személyek számának, a csoport teljes népességével vett hányadosát. Röviden az adott nem és korcsoport aktivitási rátáját. Ezzel a paraméterrel kapcsolatban feltesszük, hogy $j = 1, 5$ esetén $a_{i,j} = 0$, azaz a 0-14 éves és a 75-110 éves korosztályból senki sem dolgozik, és ez a jövőben is így marad majd. A 2,3,4-es korcsoportok esetén a KSH honlapján elérhető 1992-2010 közti adatokat vizsgálva kiválasztottuk a legjobban illeszkedő ARIMA modellt, és ennek segítségével becsültünk előre a vizsgált időszakra (2011-2029). A használt ARIMA modellek paraméterei a férfiaknál a különböző korcsoportokra rendre (2,1,1), (0,1,2), (0,0,2), míg a nőknél (0,1,2), (1,1,0), (1,1,1).
- u jelöli a gazdaságilag aktívakon belül a munkanélküliek arányát, azaz a munkanélküliségi rátát. Ennek előrejelzéséhez, szintén a KSH honlapján elérhető 1992-2010 adatokra illesztettünk ARIMA modelleket, melyek közül a legjobban illeszkedőt ((1,1,4) paraméterűt) használva végeztük el az előrebecslést.
- $\bar{w}$ jelöli a foglalkoztatottak bruttó átlagkeresetét. Ennek előre becsléséhez, a KSH, bruttó átlagkeresetek 1960-2010 tartó idősorára illesztett ARIMA modellek közül a legjobban illeszkedő ARIMA(1,1,1) modellt használtuk.
- b -vel jelöltük a bruttó bér százalékában megállapított munkaadó által fizetett nyugdíjbiztosítási járulék, valamint a munkavállaló által fizetett nyugdíjjárulék összegét. Jelen modellben azzal a feltevessel élünk, hogy ez a százalékos érték a jövőben változatlanul a 2011-es szinten marad. 2012 elejével ugyan a munkaadói nyugdíjbiztosítási járulékot az egészségbiztosítási és munkaerő-piaci járulékkal összevonták, úgynevezett szociális hozzájárulási adóvá, ám ennek mértéke éppen az előző kettő százalékos mértékének az összege. Így feltételezzük, hogy az egyben beszedett szociális hozzájárulási adóból befolyt összeg változatlan arányban kerül szétosztásra a két terület között.

Tehát az egyenlet első két tagja az előző fejezetben számolt demográfiai adatokból, a korcsoportos aktivitási rátákat, valamint a munkanélküliségi rátát felhasználva, megadja a foglalkoztatottak összlétszámát. A harmadik tag pedig megadja az egy foglalkoztatottra jutó átlagosan befizetett járulék abszolút nagyságát éves szinten.

6.2. A kiadási oldal meghatározása

A nyugdíjmodell kiadási oldalának meghatározása az alábbi képlet alapján történt, ehhez összesen hat különböző paramétert használtunk fel.

$$\text{Kiadások} = \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=4}^5 L_{i,j} \right) \bar{p} \cdot 12 + \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 L_{i,j} \cdot a_{i,j} \right) \cdot \bar{w} \cdot r \cdot 12 \quad (29)$$

ahol:

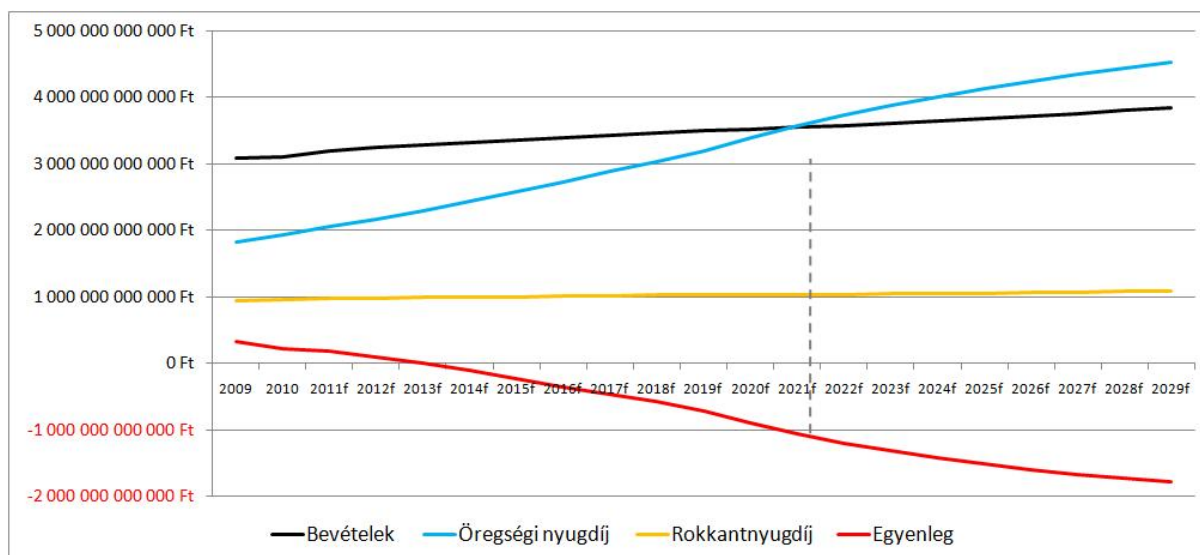
- $\bar{p}$ jelöli a saját jogú nyugdíjasok átlagnyugdíját. Ennek becsléséhez a KSH 2000-2010-es időszak átlagnyugdíjainak idősorára lineáris regressziót illesztettünk ($R^2 = 0,998$), és ezt használva becsültünk előre.
- r jelöli a rokkantnyugdíjakra kifizetett összeget a bruttó bér százalékában. Ezen értékre és annak jövőbeni alakulására vonatkozóan a Jelentés a nyugdíj és időskor kerekasztal tevékenységéről [2010] című könyvben találtunk információt.

Látható, hogy a fenti képlet első tagja, a kifizetett öregségi nyugdíjak értékét adja meg, míg a második a kifizetett rokkantnyugdíjak értékéről szolgáltat információt. A kiadási oldal ilyen módon történő felírása több implicit feltételezést is magában hordoz, melyek a következők:

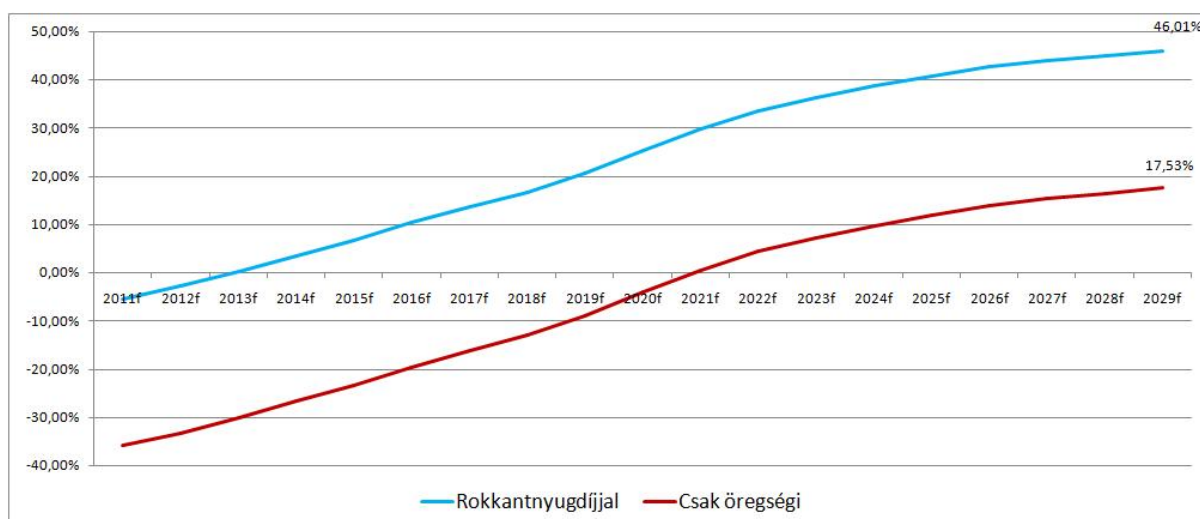
- Az első tag felírásából következik, hogy a modellben nem vesszük figyelembe a korengedményes nyugdíjazás lehetőségét. Az is látszik, hogy az öregségi nyugdíj korhatárát a jelenleg érvényben lévő szabályozásnak megfelelően 65 évben állapítjuk meg, továbbá, hogy 65 éves korában minden embernél elkezdik folyósítani a nyugdíjjáradékot, függetlenül attól, hogy rendelkezik-e aktív munkaviszonnyal. Ez utóbbi feltevés elsőre életidegennek tűnhet, azonban a jelenlegi szabályozás szerint, az öregségi nyugdíjkorhatárt elérők esetében csak akkor nem indul meg a járadék folyósítása, ha azon túl, hogy rendelkezik aktív munkaviszonnyal, az éves jövedelme meghaladja a mindenkor minimálbér 18-szorosát. Így, ez a feltételezés csak minimális hatással van a végeredményre.
- A kiadási oldallal kapcsolatban egy további fontos feltételezés, illetve modell egyszerűsítés az, hogy nem foglalkozunk a nem saját jogú nyugdíjak által generált kiadással, tehát mind az özvegyi nyugdíjakkal, mind pedig az árvaellátásokkal kapcsolatos kifizetéseket nullának tekintjük.

6.3. A modell által adott eredmények

Nyugdíjmodellünket a hazai adatokra futtatva kapott eredményeket az alábbi ábra szemlélteti.

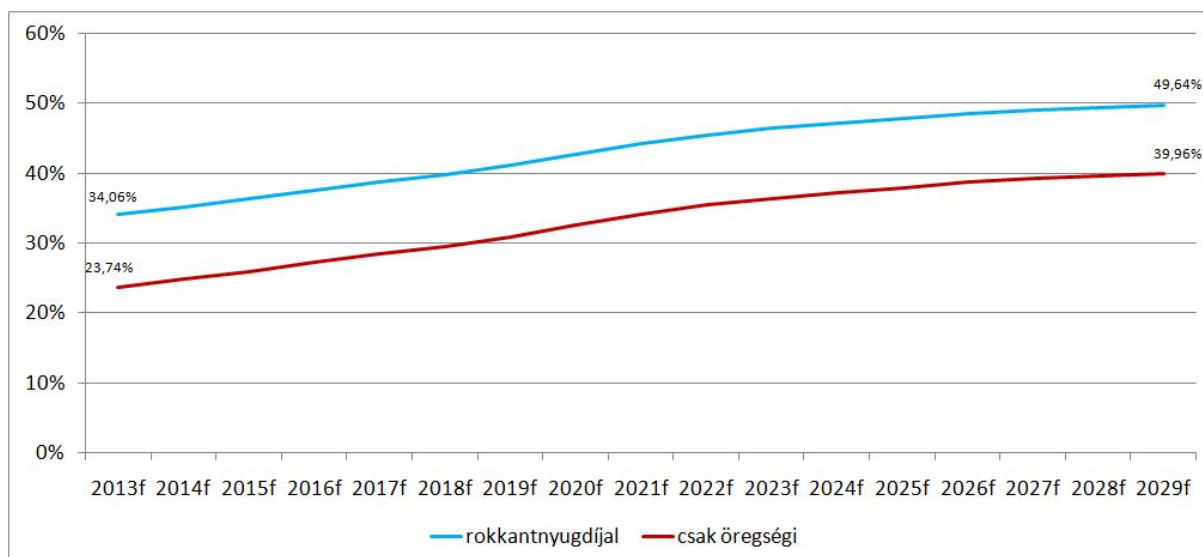


10. ábra. A nyugdíjrendszer bevételei, kiadásai és egyenlege éves szinten



11. ábra. Hiány mértéke a teljes bevétel arányában

A modellünk eredményei alapján látható (10.ábra), hogy amennyiben a nyugdíjrendszerben nem történik változás a járulék mértékek, és a nyugdíjkorhatár tekintetében, valamint ha a többi paraméter is az általunk előrejelzett módon alakul, akkor a magyar nyugdíjrendszer 2013-ra már az özvegyi és árvaellátások nélkül is deficitessé lesz. Ez a hiány pedig az idő múlásával csak fokozódik. A 10. ábrából az is világosan látszik, hogy a nyugdíjrendszer hiányát első sorban a kedvezőtlen demográfiai változások, azaz a magyar társadalom elöregedése okozza. Így nem meglepő, hogy a problémát az sem oldaná meg tartósan, ha a rokkant ellátást kivezetnénk a rendszerből. A modell ugyanis ebben az esetben is, még a vizsgált periódus vége előtt (egész pontosan 2021-től) deficitessé váló, és évről évre egyre nagyobb hiánnyal küzdő rendszert jelez előre.



12. ábra. Nullszaldós rendszerhez minimálisan szükséges járulékkulcsok

A 11. ábrán jól látható, hogy a rendszer változatlansága esetén a hiány mértéke 2029-re a teljes járulékbérvétel mintegy 46,01%-át tenné ki. Csak az öregségi nyugdíjakat tekintve ugyan ez az arány 17,53%-os lenne. Amennyiben ezt a deficitet a járulékkulcsok növelésével kívánnánk kiegyenlíteni, úgy 2029-re a munkavállalói nyugdíjjárulék, valamint a munkáltató által fizetett nyugdíjbiztosítási járulék bruttó bérben kifejezett százalékos kulcsai összegének közel 50%-ra kellene emelkednie, a jelenlegi 34%-os szintről. A járulékkulcsok emelése abban az esetben is szükségessé válik, ha csupán a nyugdíjrendszer öregségi nyugdíjakkal kapcsolatos részét kívánjuk fenntartani. Természetesen ekkor a minimálisan szükséges emelés mértéke az előző esetben szükséges 16 százalékpont helyett mindössze 6 százalékpont. Egy ilyen, 2013-tól folyamatosan nullszaldós modellben a minimálisan szükséges járulékkulcsokat az 12. ábra mutatja.

Így látható, hogy ahhoz hogy a nyugdíjrendszer ne legyen deficitese, a járulékkulcsokat olyan mértékben kellene emelni, amely már jelentősen megterhelné a gazdaságot.

Az állam kezében a járulékkulcsok emelésén kívül, többek közt még a nyugdíjkorhatár emelésének lehetősége van (a nyugdíjak csökkentésének, illetve az öngondoskodásra való áttérés ösztönzésének lehetőségével dolgozatunkban azért nem foglalkoztunk, mert a nyugdíjak összege modellünkben exogén változóként szerepel). Így modellünkben vizsgáltuk a nyugdíjkorhatár emelésének hatásait is. A kapott eredményeinket az 1. táblázat mutatja (az első sor a feltételezett nyugdíjkorhatárt, még a második sor a rendszer deficitessé válásának időpontját mutatja).

Ez alapján látható, hogy az öregségi nyugdíjkorhatárt ceteris paribus egészen 72 éves korig kellene emelni 2029-ig, ha el szeretnénk kerülni, hogy a nyugdíjrendszerben hiány keletkezzen. Egy ilyen mértékű emelés végrehajtása azonban valószínűleg kivitelezhetetlen lenne, annak társadalmi következményei miatt.

Összességében látható, hogy önmagában egyik módszer sem képes a problémára elfogadható megoldást adni. Ezért megvizsgáltuk a járulékkulcsok, és a nyugdíjkorhatár emelés együttes lehetőségét is. Mivel a 70 év fölötti nyugdíjkorhatár feltételezése a magyar halandósági viszonyok mellett irreálisan magas lenne, ezért azt tesszük fel, hogy a nyugdíjkorhatár 68 évre emelkedik. Emellett az érték mellett a rendszerben 2020-tól jelentkezik hiány. Ahhoz hogy ezt kiküszöböljük, és 2029-ig ne legyen deficit a rendszer, a járulékokat összesen 8,29 százalékponttal 42,29%-ra kellene emelni.

nyugdíjkorhatár	65	66	67	68	69	70	71	72
év	2013	2015	2018	2020	2023	2025	2028	nem megy csődbe

1. táblázat. rendszer deficitessé válásának éve különböző nyugdíjkorhatárok esetén

Így összességében látható, hogy a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságának megőrzése érdekében, az elkövetkezendő 10-15 évben a nyugdíjkorhatár, valamint a járulékkulcsok változtatásánál jóval komolyabb reformokra lesz szükség.

7. Konklúzió

Dolgozatunkban arra voltunk kíváncsiak, hogy a magyar nyugdíjrendszer adott paraméterek mellett meddig fenntartható még. Hiszen nagyon sokat hallani arról, hogy az öregedő társadalom és a felosztó-kirovó jellegű rendszer miatt az ország komoly problémákkal fog szembesülni pár éven belül. Illetve azt is szeretnénk volna megtudni, hogy milyen járulékkulcs és nyugdíjkorhatár emelés lenne szükséges ahhoz, hogy a rendszer fenntartható maradjon.

Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolásához a Lee-Carter modellel jeleztük előre Magyarország demográfiai mutatóit a 2020-as évek végéig. A modell alkalmazása előtt azonban annak elméletét is részletesen áttekintettük. Megtudtuk, hogy az először húsz éve publikált modellt számos ország demográfusai alkalmazták már előrejelzéseikhez. A modell pedig jól teljesített az előrejelzések aktuális értékekkel való összevetése alapján. A modell sikerességét a felírói annak tulajdonítják, hogy egyszerű lépésekből áll. A modell Magyarországra vonatkozó alkalmazása során megtudtuk, hogy 2029-re Magyarország népessége várhatóan a 8 640 000 főt sem fogja elérni, azaz jelentősen csökkenni fog. Ebből kicsit több mint 4 640 000 fő lesz nő, míg a férfiak száma a 4 100 000 főt se fogja elérni. Ezen adatok mellett a nyugdíjrendszer vizsgálata miatt az időskori függőségi ráta a másik fő mutató. Nem meglepő módon azt az eredményt kaptuk, hogy ennek hatására várhatóan az időskori függőségi ráta 2029-ig monoton nőni fog. 2029-re a teljes népességre nézve a 30%-ot is meghaladhatja. Ezen adatok tudatában - azaz, hogy a népességszám ennyire le fog csökkenni várhatóan, az időskori függőségi ráta pedig ennyire megnő várhatóan ennek következtében - az, hogy a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatósága égető kérdés, beigazolódott.

Az azonban, hogy a nyugdíjrendszer mikor lesz deficitese továbbra is kérdéses maradt. Ehhez felírtunk egy nyugdíjmodellt, ami előrejelzi a rendszer bevételeit és kiadásait. Azt az eredményt kaptuk ezzel, hogy a nyugdíjrendszer az adott paraméterek mellett már 2013-ban deficitese lesz, és ez a deficit folyamatosan nő az előrejelzett időszak végéig. Arra is kíváncsiak voltunk, hogy mikor válna deficitessé a nyugdíjrendszer, ha csak az öregségi nyugdíjakat vesszük figyelembe és a rokkantsági nyugdíjakat nem. Erre azt az eredményt kaptuk, hogy így a modell csak 2021-ben válna deficitessé. Ezek után felmerül a kérdés, hogy adott a probléma, hogy lehetne megoldani. Erre egyik válasz, hogy a járulékkulcsot lehetne növelni. Erre vonatkozóan elvégeztünk egy érzékenységvizsgálatot. Ez a vizsgálat azt az eredményt hozta, hogy közel 50%-ra kellene emelni a járulékkulcsot, ami egy nagyon magas érték. Másik lehetőség a nyugdíjkorhatár emelés, amit ceteris paribus 72 évre emelve lehet kitolni a problémát 2029-ig. Harmadik lehetőség a két intézkedés együttes alkalmazása. Ez 2029-ig akkor tolja ki a problémát, ha járulékkulcsot 42,29%-ra, a nyugdíjkorhatárt pedig 68 évre emelik.

Ezek alapján összességben azt lehet mondani, hogy Magyarországon is fennálló öregedő népesség problémája már éveken belül komoly gondokat fog okozni a nyugdíjrendszerben többek között. A számok - azaz a dátumok közelsége, illetve a kellő változtatás nagy mértéke - mutatja a probléma nagyságát. A változtatások elkerülhetetlenek, de a szükséges lépések többfélék lehetnek.

8. Felhasznált irodalom

1. Banyár J. [2003]: Életbiztosítás, Aula
2. Baran, Gáll, Ispány, Pap [2007]: Forecasting Hungarian Mortality Rates Using The Lee - Carter Method, *Acta Oeconomica* Vol.57(1) pp.21-34
3. Coelho, Edviges [2001]: The Lee - Carter Method for Forecasting Mortality – The Portuguese experience, Statistics Portugal - Department of Demographic and Social Statistics
[http : //circa.europa.eu/irc/dsis/jointestatunece/info/data/paper_coelho.pdf](http://circa.europa.eu/irc/dsis/jointestatunece/info/data/paper_coelho.pdf)
(letöltési időpont: 2012. március 10.)
4. Gavril, Flora [2002]: Demográfiai alapismeretek, CEU
[http : //www.policy.hu/flora/demografia.htm](http://www.policy.hu/flora/demografia.htm)
(letöltési időpont: 2012. március 15.)
5. Holtzer, Péter [2010]: Jelentés a nyugdíj és időskor kerekasztal tevékenységéről, Miniszterelnöki Hivatal, Budapest
6. Hanewald, Katja [2009]: Mortality modeling: Lee-Carter and the macroeconomy, Discussion Paper
[http : //edoc.hu-berlin.de/series/sfb-649-papers/2009-8/PDF/8.pdf](http://edoc.hu-berlin.de/series/sfb-649-papers/2009-8/PDF/8.pdf)
(letöltési idő: 2012. február 10.)
7. Lee, Ronald [1998]: Probabilistic Approaches to Population Forecasting, *Population and Development Review*, 24:156-190.
[http : //www.jstor.org/discover/10.2307/2808055?uid = 3737592&uid = 2129&uid = 2&uid = 70&uid = 4&sid = 55941854023](http://www.jstor.org/discover/10.2307/2808055?uid=3737592&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=55941854023)
(letöltési időpont: 2012. március 10.)
8. Lee, Ronald [2000]: The Lee-Carter method for forecasting mortality with various extensions and applications,
North American Actuarial Journal, 4(1): 80-93.
[http : //www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2000/january/naaj0001_5.pdf](http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2000/january/naaj0001_5.pdf)
(letöltési időpont: 2012. február 10.)
9. Lee, Ronald; Carter, Lawrence [1992]: Modeling and forecasting US mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 87(419): 659-675.
[http : //www.jstor.org/discover/10.2307/2290201?uid = 3737592&uid = 2129&uid = 2&uid = 70&uid = 4&sid = 55941854023](http://www.jstor.org/discover/10.2307/2290201?uid=3737592&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=55941854023) (letöltési időpont: 2012. február 10.)

10. Lee, Ronald; Miller, Timothy [2000]: Evaluating the Performance of Lee-Carter Mortality Forecasts, University of California, Berkeley webpage
www.demog.berkeley.edu/rlee/papers/LCAssess8.pdf
(letöltési időpont: 2012. március 10.)
11. Life table: The Human Mortality Database, *[http : //www.mortality.org/](http://www.mortality.org/)*
(letöltési időpont: 2012. március 15.)
12. Wang, Jenny Zheng [2007]: Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model, Mathematical Statistics, Stockholm University
[http : //www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf](http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf)
(letöltési időpont: 2012. március 10.)
13. Járulékkulcsok mértéke: Nemzeti Foglalkoztatási Szolgálat, *[http : //www.afsz.hu](http://www.afsz.hu),*
(letöltési időpont: 2012. március 20.)
14. Wilmoth, John R. [1993]: Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change, Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley
[http : //www.demog.berkeley.edu/jrw/Papers/LCtech.pdf](http://www.demog.berkeley.edu/jrw/Papers/LCtech.pdf)
(letöltési időpont: 2012. március 10.)
15. Willke [1998]: Global Depopulation - A Reality?, lifeissues.net webpage
[http : //www.lifeissues.net/writers/willke/willke07depopulation.html](http://www.lifeissues.net/writers/willke/willke07depopulation.html)
(letöltési időpont: 2012.március 20.)