

OTDK-DOLGOZAT

Benedek Márton
BSc

2013

A kvantum-korrelált egyensúly
Quantum correlated equilibrium

Benedek Márton

Kézirat lezárva: 2012. március 26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Példák normál formában	3
2.1. Nemek harca	3
2.2. Gyáva nyúl	7
3. Példa extenzív formában	11
3.1. Brandenburger és La Mura (2011) példája	11
4. Eltérő megközelítések	19
4.1. Általánosított típustér	19
4.2. La Mura (2003) megközelítése	22
5. Összefoglalás	24
Irodalomjegyzék	25

Táblázatok jegyzéke

2.1. A nemek harca játék kifizető mátrixa	3
2.2. Korrelációs mátrix	4
2.3. A nemek harca játék közös priorja	5
2.4. A nemek harca játék várható kifizetései	6
2.5. A gyáva nyúl játék kifizető mátrixa	7
2.6. Korrelációs mátrix	8
2.7. A gyáva nyúl játék közös priorja	9
2.8. A gyáva nyúl játék várható kifizetései	10
3.1. Az alapjáték kifizető mátrixa	13
3.2. A jelzések eloszlása	14
3.3. A játék kifizető mátrixa kvantum korrelációval	15
3.4. A lehetséges jelzéskombinációk	17

Ábrák jegyzéke

3.1. Az alapjáték fája	12
3.2. A módosított játék fája	18

1. fejezet

Bevezetés

A nem-kooperatív játékok legelterjedtebb megoldáskonceptiója, a Nash-egyensúly, megjelenése óta (Nash (1951)) sokat alakult. Abban az értelemben is, hogy bővült az egyensúlyi pontok halmaza, és abban az értelemben is, hogy szűkült. Utóbbira példa a tökéletes egyensúly, míg előbbire a korrelált egyensúly (Aumann (1974), Aumann (1987)), illetve a Nash-egyensúly gyengítésére további példákat találunk Forgó (2010a), Forgó (2010b), Moulin és Vial (1978) cikkeiben.

A kevert stratégiákon értelmezett Nash-egyensúly esetében általában feltesszük, hogy a játékosok egymástól függetlenül választják meg hogyan keverik, milyen valószínűséggel játsszák egyes tiszta stratégiáikat. A korrelált egyensúly esetében feloldjuk ezt a követelményt, és így tetszőleges valószínűségeloszlást megengedünk a stratégia-profilok halmazán. A keverési valószínűségek korrelációjának megengedése magasabb egyensúlyi kifizetéshez juttathatja a játékosokat, az így elérhető egyensúlypontok halmaza bővebb. Ugyanakkor a korábbi egyensúlyi kifizetés is elérhető marad, minden Nash-egyensúly egyben korrelált egyensúly is.

A dolgozatból látni fogjuk, miképp bővíthető tovább az egyensúlyi pontok halmaza, az ún. kvantum-korreláció segítségével. Bizonyos, a kvantummechanikában tapasztalt jelenségek alkalmasnak bizonyultak egy új egyensúlyfogalom megalkotására. A kvantum játékelmélet irodalmában azonban ezidáig megkerülhetetlennek bizonyult a kvantumfizikában magas jártasságot igénylő elméletek alkalmazása, illetve hivatkozásuk. A dolgozat célja, hogy ennek az egyensúlynak tisztán játékelmélet felőli, kvantumfizikától mentes megközelítését adja.

Többféle módja van a kvantum megjelenítésére egy játékelméleti modellben. Gya-

kori például, hogy az Aumann (1974) feltételezte 'korrelációs eszközt' (correlation device), ami a játék kezdetén a játékosok számára egyéni, a kifizetést nem érintő jelzéseket képes küldeni, kiegészítik azzal, hogy a jelzések eloszlása korrelálhat a hagyományosnál bővebb, kvantum módon. A dolgozatban a típusok felől közelítjük meg a kvantum-korrelációt, egy speciális típustér fogalommal.

A típust Harsányi (1967-68) vezette be, pontosan azonban nem definiálta. Úgy írta le, mint egy vektor, ami teljes mértékben karakterizál egy játékost, tartalmazza minden tulajdonságát. Feltevései nyomán Harsányi-féle típusterről beszélünk, ha minden játékos ismeri a saját típusát. Nekem ennél bővebb struktúrára lesz szükségem. Pintér és Udvari (2011) általánosította a típustér koncepcióját, melyben az is előfordulhat, hogy egy játékos nem ismeri a saját típusát, sőt, mint látni fogjuk, ennél több is. Hagományos típustér esetén minden játékos minden egyes világállapotról képes vélekedést formálni, nincs olyan esemény, amelyet ignorál. Általánosított típustér esetében azonban elképzelhető, hogy valamely játékos, adott világállapot fennállása esetén ignorál bizonyos eseményt, azaz nem képes vélekedést formálni a bekövetkezéséről. Ilyen formán az általánosított típustér magában foglal Harsányi és nem-Harsányi típustereket, illetve a hagyományos típustereket is.

Pintér (2011) definiálta az általánosított típustérhez tartozó közös prior(oka)t, amely kulcsfontosságú lesz a kvantum-korreláció megközelítésében. A dolgozatban először normál formában adott példákon keresztül, majd némileg eltérő megközelítéssel, egy extenzív formában adott példán mutatjuk be a korrelált egyensúly egyfajta általánosítását, illetve a kapcsolatát az általánosított típustér és a hozzá tartozó közös prior fogalmakkal. Ezután következnek a legfontosabb formális definíciók, a típusteres modell felépítése, majd a kvantum-korrelált egyensúly egy eltérő iránybeli megközelítése, La Mura (2003) cikkén keresztül. A dolgozatban nem definiált játékelméleti alapfogalmakat, mint például a fent említett korrelált egyensúlyt, a Forgó et al. (2005)-ban leírtak szerint értelmezzük.

2. fejezet

Példák normál formában

2.1. Nemek harca

Az alábbiakban egy jól ismert, normál formában adott játékot, a nemek harcát, vizsgáljuk meg. A játéksituáció egy házaspár esti programjának kiválasztását írja le. Két szórakozási lehetőség, egy bokszmérkőzés (B) és egy operaelőadás (O) között választanak, egymástól függetlenül egy-egy jegyet vásárolva. A férj (1-es játékos) inkább bokszmeccsre menne, míg a feleség (2-es játékos) az operát preferálja, azonban mindketten az együttlétet részesítik előnyben az egyedülléttel szemben.

2.1. *példa* (Nemek harca). Tekintsük az alábbi $(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ játékot, ahol:

- $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza,
- $A_i = \{B, O\}$ az akcióhalmazok, $i \in N$,
- az egyes kimenetekhez tartozó u_i kifizetéseket a 2.1. táblázat tartalmazza.

		Feleség	
		B	O
Férj	B	(10,5)	(1,1)
	O	(0,0)	(5,10)

2.1. táblázat. A nemek harca játék kifizető mátrixa

Mint azt jól tudjuk, ennek a játéknak két tiszta Nash-egyensúlya van, a (B, B) és az (O, O) akciópárok. A játék kevert bővítése egy újabb egyensúlypontot ad, a

korábbi kettőhöz képest lényegesen kevesebb $(\frac{25}{7}, \frac{25}{7})$ kifizetéssel. Azonban az egymástól független keverések megkötésének elhagyásával jelentősen javíthatunk a kifizetéseken. A 2.2. táblázat segítségével elért korrelált egyensúly például oly erőteljes, hogy kvantum-korreláció segítségével nem is tudunk Pareto-szuperior¹ egyensúlyt elérni. Néhány megállapítást mindenesetre tehetünk.

	B	O
B	$1/2$	0
O	0	$1/2$

2.2. táblázat. Korrelációs mátrix

Ennek érdekében módosítsuk a játékot! Először is tegyük fel, hogy mindkét játékosnak két típusa van. Az egyik típus legyen az úgymond önző, aki a saját preferenciáját helyezi előtérbe, a másik az önzetlen, aki a házastárs kedvére akar tenni. Aumann (1987) nyomán helyezzük magunkat egy 'külső megfigyelő' (outside observer) nézőpontjába, és tegyük fel, hogy mindkét játékos a t_i^1 típusa esetén a B , t_i^2 típusa esetén az O akciót választja. Ez azt jelenti, hogy a férj t_1^1 típusa követi a saját preferenciáját, t_1^2 típusa pedig igyekszik a feleség kedvére tenni, illetve a feleség esetében a t_2^1 típus az önfeláldozó, míg t_2^2 típusa esetén cselekszik a saját ízlése alapján.

Vizsgáljunk egy olyan szituációt, amelyben a játékosok nem ismerik a saját típusukat, abban az értelemben, hogy tetszőleges, adott világállapot mellett nem (feltétlenül) 1 valószínűséget rendelnek az adott világállapotnak megfelelő típusukhoz. Ehelyett az egyes világállapotokban van valamilyen vélekedésük a saját típusukra vonatkozóan. Ugyanakkor tegyük fel, hogy a másik típusát illetően nem is képesek vélekedést formálni. Mint azt később látni fogjuk, ez általánosított típustér mellett lehetséges.

Most adjuk meg a játékosok konkrét vélekedéseit, amelyek tehát csak a saját típusukra vonatkoznak, és azokat megfeleltethetjük az önző és önzetlen jellegű viselkedéssel. Legyen a férj viselkedése olyan, hogy függetlenül a világállapottól 0,8 valószínűséggel önző és 0,2 valószínűséggel önfeláldozó. Tegyük fel, hogy a feleség ettől valamivel eltérően vélekedik, az alábbiak szerint. Azon világállapotokban, melyekben önző típu-

¹Pareto-szuperior alatt az alábbiértjük: A Pareto-szuperior B -hez képest, ha $A \geq B$, ahol a $\geq$ az azonos dimenziójú vektorok közötti olyan relációt jelöli, mely szerint A minden komponense nagyobb, vagy egyenlő, mint B vonatkozó komponense, és legalább egy komponensben szigorúan nagyobb.

sú, a férjhez hasonlóan 0,8 valószínűséggel valóban önzően viselkedik, viszont azokban az esetekben, melyek során önzetlen típusú, már csak 0,6 valószínűséggel viselkedik önzően.

Ezzel megadtuk a játékosok típusfüggvényeit, amelyek tehát a különböző világállapotokban megadják, miként vélekednek a játékosok. Ha adott világállapotban a típusfüggvények konzisztensek egymással, akkor azt mondjuk, hogy a játéknak létezik közös priorja. Hagyományos típustér esetében a közös prior egyértelmű, és ekkor a típusfüggvények átmenet-valószínűségek, Harsányi-féle típustér esetén jellemzően feltételes valószínűségek. Általánosított típustér mellett azonban ez nem feltétlenül van így. Először is, adott típusfüggvényekhez, ha egyáltalán létezik, többféle közös prior is tartozhat, amelyek merőben eltérő játékhöz, és ezáltal egyensúlypontokhoz vezethetnek. Továbbá adott közös prior sem adja meg egyértelműen a típusfüggvényeket, így általánosított típustér esetében egyik sem tekinthető redundánsnak.

	(B, B)	(B, O)	(O, B)	(O, O)
(B, B)	0,3	0,5	0,1	0,1
(B, O)	0,1	0,7	0,1	0,1
(O, B)	0,4	0,4	0	0,2
(O, O)	0,2	0,6	0	0,2

2.3. táblázat. A nemek harca játék közös priorja

Ennek megfelelően a 2.3. táblázatban külön megadjuk a közös priort, melyben a típusok helyén a hozzájuk rendelt akciókat jelenítettük meg. A táblázat első sora az alábbi képpen értelmezhető: amikor mindkét játékos a B akciót választja, a (B, B) kimenetel 0,3 valószínűséggel, a (B, O) kimenetel 0,5 valószínűséggel, míg a további kettő kimenetel egyaránt 0,1 valószínűséggel következik be. A táblázat további sorai ugyanígy értelmezhetők.

A kimenetek efféle bizonytalansága többek között az akciók feletti nem teljes kontroll következménye. Ugyanis amikor például a férj - jelen esetben a világállapottól függetlenül - a B akciót választja, annak is 0,2 valószínűséggel O akció lesz az eredménye. Mindez fennáll függetlenül attól, hogy a feleség milyen akciót választ. Ezt el is várjuk a közös priortól, hiszen egyik játékos sem tudja megkülönböztetni a másik típusait, még csak vélekedést sem formál róluk, így nem is tapasztalhat mást a többi

játékos különböző típusai mellett. Láthatólag a közös prior ennek megfelelően tükrözi a típusfüggvényeknél rögzített vélekedéseket, mindkét játékos esetében.

	Kifizetések
(B, B)	$(4, 3)$
(B, O)	$(2, 2, 2, 2)$
(O, B)	$(5, 4, 4, 4)$
(O, O)	$(3, 6, 3, 6)$

2.4. táblázat. A nemek harca játék várható kifizetései

A 2.4. táblázatban találhatók a játékosok várható kifizetései, az úgymond szándékolt akciók mellett. Ahogy egymás típusáról, úgy a másik játékos által játszott akciókról sem tudnak véleményt formálni a játékosok, így ettől függetlenül választanak optimális stratégiát. Így az (O, B) domináns, kvantum-korrelált egyensúlyba jutnak. Ugyanis ha a férj az opera helyett a bokszmérkőzést választaná, 5,4 helyett 4, illetve 3,6 helyett 2,2 kifizetéshez jutna, attól függően, hogy a feleség B vagy O akciót választ. Ugyanígy a feleségnek nem éri meg eltérni a B akciótól, hiszen így a 4,4 helyett csak 3,6, a 3 helyett csak 2,2 várható kifizetést ér el, a férj választásától függően. Más egyensúlypont tehát nincs.

Az eredmény azt sugallja, hogy a játékosok túlzásba vitték az önfeláldozást. A férj elment az operába, a feleség a bokszmeccsre, amely eredetileg a legrosszabb kimenetelnek számított. Láthatólag bővült a lehetséges egyensúlypontok halmaza, ráadásul a fentebb említett korrelált egyensúllyal szemben domináns egyensúlyt kaptunk. Az, hogy pont ez a kimenetel lett egyensúlyi, természetesen a közös prior eredménye. Alkalmas közös priorral előállítható bármelyik kimenetel domináns egyensúlyként - akár a típusfüggvények változatlansága mellett is -, ahogyan elérhető lehetne a klasszikus korrelációval produkált Pareto-optimalis kifizetésvektor is.

Kiemelünk két pontot, amely elválasztja egymástól a korrelált és a kvantum-korrelált egyensúlyt. Az egyik a közös prior jellege, ugyanis a 2.3. táblázatban szereplő közös priort nem lehetséges a 2.2. táblázathoz hasonló hagyományos korreláció alakjában megadni. A másik a vélekedések sajátossága, melyekhez szükség van az általánosított típustérre. Egy ilyen közös priorhoz ugyanis elengedhetetlen, hogy a játékosok ne ismerjék saját típusukat, illetve hogy a másik típusáról ne is tudjanak vélekedést

alkotni.

2.2. Gyáva nyúl

Az előbbiekben egy vegyes motívumú játékot vizsgáltunk, a nemek harca játékban találunk koordinációs- és konfliktusprobléma feszültségét is. Az alábbiakban szintén egy klasszikus példát, a gyáva nyúl játékot vizsgáljuk meg, melyben ezek a motívumok igen hasonlóak. Ugyanakkor itt már az az állapot, melyben az egyik fél kooperál, a másik verseng, nem Pareto-szuperior az együttes kooperáció vagy együttes versengés valamelyikéhez képest (jelen esetben az együttes kooperációhoz viszonyítva). Úgy fogjuk találni, hogy a nemek harcával ellentétben a gyáva nyúl esetében, bizonyos szempontból, a korrelált egyensúlyi kifizetéseknél magasabb kifizetést állíthatunk elő kvantum-korreláció segítségével.

A játék mögött húzódó történet a következő. A két játékos bátorságát akarja demonstrálni, ezért autóba ülnek és elindulnak egymás felé egy úton. Aki előbb elrántja a kormányt, az gyávának minősül, és így úgymond a másikuk nyeri a játékot, ő minősül bátornak. Ha egyikük sem rántja el a kormányt, akkor hiába tekinthetők mindketten bátornak, összeütköznek, az eredmény katasztrófa. Végül ha mindketten (egyszerre) elrántják a kormányt, akkor gyávának minősülnek ugyan, de lényegesen jobban járnak mint ütközés esetén.

2.2. *példa* (Gyáva nyúl). Tekintsük az alábbi $(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ játékot, ahol:

- $N = \{1, 2\}$ a játékosok halmaza,
- $A_i = \{N, K\}$ az akcióhalmazok, $i \in N$, ahol az N akció jelöli a bátorságot (nem tér ki), a K akció a gyávaságot (kitér),
- az egyes kimenetekhez tartozó u_i kifizetéseket a 2.5. táblázat tartalmazza.

		2-es játékos	
		N	K
1-es játékos	N	(0,0)	(7,2)
	K	(2,7)	(6,6)

2.5. táblázat. A gyáva nyúl játék kifizető mátrixa

A nemek harcához hasonlóan két tiszta Nash-egyensúlya van a játéknak, az (N, K) és (K, N) , illetve a kevert (de nem tiszta) egyensúlyi kifizetés ezúttal is viszonylag alacsony, mindössze $(\frac{24}{9}, \frac{24}{9})$. A számtalan korrelált egyensúly közül a 2.6. táblázat által elért kifizetés Pareto-szuperior a többihez képest, a két tiszta Nash-egyensúlyt leszámítva. Látni fogjuk, hogy kvantum-korrelációval elérhető Pareto-szuperior kifizetés, és ehhez ezúttal is szükségünk lesz az általánosított típustérre.

	N	K
N	0	$2/5$
K	$2/5$	$1/5$

2.6. táblázat. Korrelációs mátrix

Az általánosított típustér definiálásához az alábbiakat kell meghatároznunk. Először is meg kell adni a játék bizonyos, jellemzően egyik játékoshoz sem köthető paramétereit. Meg kell határozni a lehetséges világállapotokat, mely az olyan, teljes információs játékok esetén, mint a 2.1. és 2.2. példák, megfeleltethetők a játékosok típuskombinációival. Meg kell adnunk továbbá a játékosok által birtokolt információt, illetve azt, hogy ezek alapján az információk alapján miként vélekednek az egyes világállapotokról. Minden játékos esetén egy partíció a világállapotok halmazán mutatja meg, hogy az adott játékos mely világállapotokat tudja megkülönböztetni egymástól. Ez a partíció reprezentálja a játékos informáltságát, melyek alapján formálja vélekedéseit. A vélekedéseket jellemzően típusfüggvényekkel adjuk meg, melyek harmonizálnak a játékosok információs partícióival. Oly módon, hogy ha egy játékos két világállapotot nem tud megkülönböztetni egymástól, akkor ezekben a világállapotokban szükségképpen megegyeznek a vélekedései.

Ezután a 2.1. példához hasonlóan, konkretizáljuk az általános típustér egyes elemeit. Ezúttal is tegyük fel, hogy mindkét játékosnak két típusa van, így az i játékos típusalmaza $T_i = \{t_i^1, t_i^2\}$. Ismét tekintsünk egy olyan szituációt, amikor a játékosok nem ismerik (pontosan) saját típusukat, míg a másik típusáról nem is tudnak vélekedést formálni. Így mindkét játékos információs partíciója két elemű, meg tudja különböztetni azokat a világállapotokat, melyekben t_i^1 típusú, azoktól a világállapotoktól, melyekben t_i^2 típusú. Definiáljuk a játékosok vélekedéseit, mindkét játékos és minden világállapot esetén az alábbiak szerint: t_i^1 típus esetén 0,6 valószínűséggel tart-

ja az i játékos magát t_i^1 típusúnak, míg t_i^2 típus esetén 0,8 valószínűséggel tartja magát t_i^2 típusúnak. A típusfüggvényeket követően pedig megadjuk a közös priort, melyet a 2.7. táblázat tartalmaz.

	(t_1^1, t_2^1)	(t_1^1, t_2^2)	(t_1^2, t_2^1)	(t_1^2, t_2^2)
(t_1^1, t_2^1)	0,5	0,1	0,1	0,3
(t_1^1, t_2^2)	0,2	0,4	0	0,4
(t_1^2, t_2^1)	0,2	0	0,4	0,4
(t_1^2, t_2^2)	0	0,2	0,2	0,6

2.7. táblázat. A gyáva nyúl játék közös priorja

A közös prior sorai úgy értelmezhetők, mint feltételes valószínűségeloszlások² a játékosok (saját típusaikról alkotott) vélekedésein, melyben a feltétel egy adott világállapot. Ennek megfelelően, ha rögzítjük azt a világállapotot, melyben mindkét játékos 1-es típusa szerepel, a közös prior szerint 0,5 valószínűséggel tartja a két játékos egyaránt 1-es típusúnak magát, 0,3 valószínűséggel gondolják egyszerre 2-es típusúnak magukat, míg a másik két lehetőség egyaránt 0,1 valószínűségű. Miközben a játékosok ebből továbbra is annyit tudnak meg, amennyit a típusfüggvényük, illetve az információs partíciójuk megenged. Mivel a másik típusáról nem tudnak vélekedést formálni, annyit észlelnek, hogy a saját t_i^1 típusuk valószínűsége $0,5 + 0,1 = 0,6$, és a saját t_i^2 típusuk valószínűsége $0,1 + 0,3 = 0,4$. Mintha a közös prior kitöltené azokat a réseket, amiket a típusfüggvények nem fednek le, miközben láthatólag megőrzi a vélekedéseket. Mindkét játékos esetében, minden világállapotban ugyanígy tapasztaljuk, hogy a közös prior konzisztens a típusfüggvényekkel, ami eleve feltétele a létezésének.

Ismét Aumann (1987)-t követve tegyük fel, hogy mindkét játékos t_i^1 típusa esetén az N , t_i^2 típusa esetén a K akciót választja. Így a közös prior a korábbiakhoz hasonló módon is értelmezhető: amikor mindkét játékos az N akciót választja, az (N, N) kimenetel valószínűsége 0,5, a (K, K) kimenetelé 0,3, a fennmaradó kettőé pedig egyaránt 0,1. Az egyes szándékolt akciópárok esetén ezekkel a valószínűségekkel súlyozva a kimeneteleket, megkapjuk a játék várható kifizetéseit.

Mivel a játékosok nem tudnak vélekedést formálni a másik játékos típusáról, és így az általa választott akcióról sem, domináns egyensúlyt keresünk. A 2.8. táblázatban

²Ennek megfelelően a közös priort tartalmazó táblázat sorai 1-re összegződnek.

	Kifizetések
(N, N)	$(2,7, 2,7)$
(N, K)	$(5,2, 3,2)$
(K, N)	$(3,2, 5,2)$
(K, K)	$(5,4, 5,4)$

2.8. táblázat. A gyáva nyúl játék várható kifizetései

található várható kifizetésekből láthatjuk, hogy a (K, K) domináns, kvantum-korrelált egyensúly. A korábbi példához hasonló gondolatmenettel kapjuk ugyanis, hogy ha bármelyik játékos egyoldalúan eltérne a K akciótól, akkor 5,4 helyett 5,2, illetve 3,2 helyett 2,7 várható kifizetéshez jutna, a másik játékos akciójától függően.

Így mindkét játékos egyensúlyi kifizetése 5,4, miközben a 2.6. táblázat által elért korrelált egyensúlyi kifizetés csupán 4,8, amely így is Pareto-superior minden egyéb korrelált egyensúlyhoz képest, a viszonylag egyoldalúnak tekinthető tiszta Nash-egyensúlyokat kivéve. A kapott kvantum-korrelált egyensúly azonban egyenlően oszt el, több, mint 9 egységnyi kifizetést.

3. fejezet

Példa extenzív formában

Ebben a fejezetben egy extenzív formában adott példán keresztül mutatjuk be a kvantum-korrelált egyensúlypontok a korrelált egyensúlyinál bővebb halmazát, illetve az ehhez kapcsolódó fogalmakat, a kvantum egy némileg eltérő megjelenítésével.

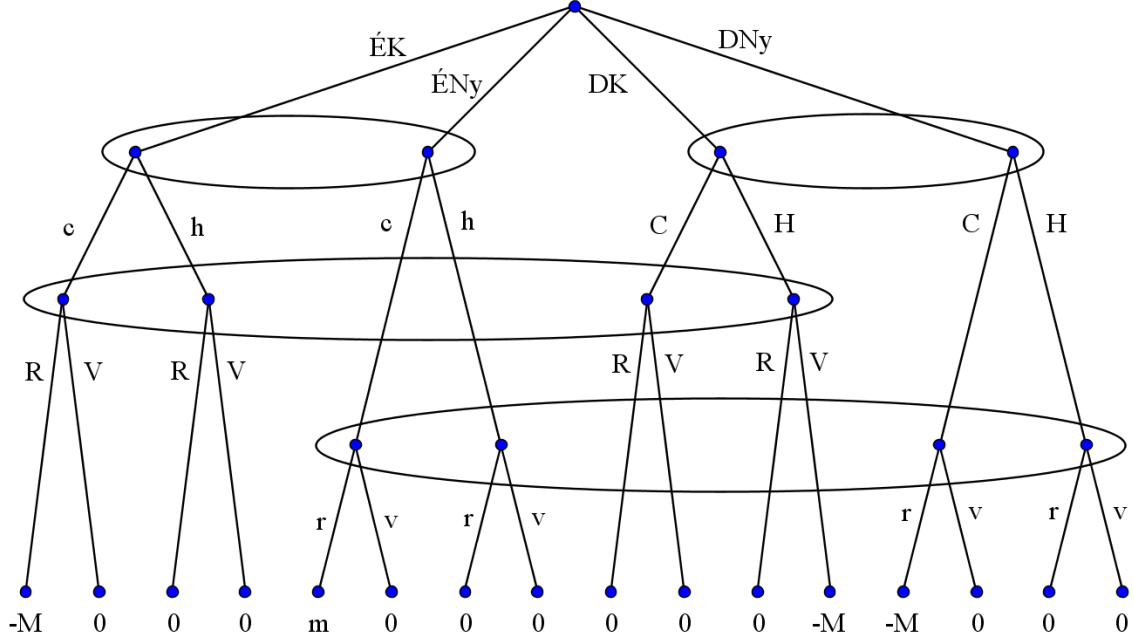
3.1. Brandenburger és La Mura (2011) példája

A példa, melyet az alábbiakban vizsgálunk Brandenburger és La Mura (2011)-től származik. Az alábbi döntési szituációt írja le, melyben egy nem tökéletes emlékezettel rendelkező döntéshozó, és a természet vesznek részt. A döntéshozó a természetet követően hoz egy döntést, majd ezután egy újabbat úgy, hogy nem emlékszik pontosan milyen körülmények között és milyen döntést hozott. A döntéshozó úgymond két különböző mentális állapota, melyekben nem tud a másik állapotról, hasonló ahhoz az esethez, mikor két játékos nem tud a másik típusáról, vagy választott stratégiájáról vélekedést formálni. Ennek megfelelően módosítjuk a feltételeket a példa kétszereplős játékra való átültetésekor. A döntéshozóval ellentétben a játékosok már rendelkeznek a tökéletes emlékezet tulajdonsággal, a kifizetéseket pedig úgy értelmezzük, hogy mindkét játékos kifizetése megegyezik a döntéshozóéval¹.

3.1. *példa.* Két játékos játszik egy játékot, melyben nem tudják pontosan hol vannak. Egyaránt $1/4$ valószínűséggel lehetnek Észak-Keleten (ÉK), Észak-Nyugaton (ÉNy), Dél-Keleten (DK) vagy Dél-Nyugaton (DNy). Az 1-es játékos nem tudja megkülön-

¹Szerepelhetne például ugyanezen értékek fele is, mint a döntéshozó kifizetésének egyfajta felosztása, de értelemszerűen a döntéseket ez nem befolyásolná.

böztetni Keletet Nyugattól, csak Északot Déltől, míg a 2-es játékos éppen fordítva. Mindkettejüknek minden helyzetben két cselekvés közül kell választani. Az 1-es játékos Északon játszhat c -t vagy h -t, Délen C -t vagy H -t; a 2-es játékos Keleten játszhat R -t vagy V -t, Nyugaton r -t vagy v -t. A 3.1. ábrán látható a szituáció, melyen mindkét játékos kifizetését az adott érték jelöl. Feltesszük, hogy $0 < m < M$.



3.1. ábra. Az alapjáték fája

Ebben a játékban a világhallapotok halmaza az $\Omega = \{\text{Észak-Kelet}, \text{Észak-Nyugat}, \text{Dél-Kelet}, \text{Dél-Nyugat}\}$, melynek elemeit jelölje rendre $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ illetve ω_4 . Az 1-es játékos meg tudja különböztetni az ω_1 -et és ω_2 -t az ω_3 és ω_4 világhallapotoktól, így az informáltságát reprezentáló partíció az $\mathcal{M}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$. Hasonlóan adódik a 2-es játékos esetében az $\mathcal{M}_2 = \{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}\}$ információs partíció. Ennek megfelelően mindkét játékos ismeri a saját típusát, és tegyük fel, hogy emellett egyaránt $1/2$ valószínűséget rendel a másik játékos különböző típusaihoz.

3.2. állítás. *A 3.1. példában leírt játékban a korrelált egyensúlyi kifizetés 0.*

Az állítás az alábbi módon igazolható. Látható, hogy a pozitív m kifizetés csak úgy érhető el, ha az 1-es játékos Északon c -t, a 2-es játékos Nyugaton r -t játszik, miközben a $-M$ kifizetéseket értelemsszerűen el akarják kerülni. Tegyük fel tehát, hogy a 2-es

játékos Nyugaton r -t játszik. Ez azonban történhet Délen is, ezért hogy elkerüljék a $-M$ kifizetést, az 1-es Délen H -t kell, hogy játsszon. Ugyanígy a 2-es játékos Keleten R -t játszik, hogy elkerülje a negatív kifizetést Dél-Keleten. Így az 1-es játékos Északon nem játszhat c -t. Ebből látható, hogy bármilyen valószínűséggel keverve - megengedve a kevert stratégiák esetleges korrelációját is - jutnának el az m kifizetéshez, ugyanilyen valószínűséggel eljutnak legalább egy $-M$ kifizetéshez is. Mivel $M > m$, ez negatív kifizetést eredményez, miközben 0 értelemszerűen elérhető.

Mindez jól látható a játék ex-ante stratégiai formájából is. A játékosok stratégiai cselekvéspárok, amik megadják mit lépnek az egyik, illetve másik típusuk esetén. Az ilyen stratégiapárok melletti kifizetéseket tartalmazza a 3.1. táblázat. Ha például az 1-es játékos a cC , a 2-es játékos pedig az Rr stratégiáját játssza, akkor az 1-es játékos c akciót választ, ha Észak típusú, C -t, ha Dél típusú, illetve a 2-es játékos R akciót választ, ha Kelet típusú, r -t, ha Nyugat típusú. Ez ω_1 fennállásakor $-M$, ω_2 esetében m , ω_3 mellett 0, míg ω_4 -nél ismét $-M$ kifizetést eredményez. A táblázatban szereplő értékek nem veszik figyelembe a világállapotok eloszlását. Azt azonban könnyű látni, hogy ezzel nem tettünk mást, mint vettük a kifizetések 4-szeresét, ami nyilvánvalóan nem befolyásolja az optimális stratégia kiválasztását. A 3.1. táblázatban a nullák kivételével minden elem negatív, továbbá az ábrához hasonlóan, mindkét játékos kifizetése a kifizetési mátrixban szereplő érték.

		2-es játékos			
		Rr	Rv	Vr	Vv
1-es játékos	cC	$m-2M$	$-M$	$m-M$	0
	cH	$m-M$	$-M$	$m-M$	$-M$
	hC	$-M$	0	$-M$	0
	hH	0	0	$-M$	$-M$

3.1. táblázat. Az alapjáték kifizető mátrixa

3.3. *példa.* Módosítsuk az előző példát! Ebben az esetben a játékosok már nem tudják megkülönböztetni az egyes világállapotokat, de kapnak róla egy-egy jelzést. Az 1-es játékos már nem tudja (pontosan) megkülönböztetni Északot Déltől, viszont kap egy jelzést, ami alapján vélekedést formál arról, hogy Északon vagy Délen van. Hasonlóan, a 2-es játékos arról kap jelzést, hogy Keleten vagy Nyugaton van, és ez alapján formálja

vélekedéseit.

A 3.3. példa esetében tehát a játékosok már nem ismerik a saját típusukat, csupán a kapott jelzés alapján vélekednek róla, tegyük fel azonban, hogy a másik játékos típusáról nem is tudnak vélekedést formálni. Így a játék fája a 3.2. ábra lesz, mellyel egy lényegesen bonyolultabb fát kaptunk. Éppen emiatt, a lényeges változásokat az alábbiakban kiemeljük. A fa első két szintjén a természet lép, először kiválasztja a fennálló világállapotot, majd a játékosoknak küldött jelzéseket. Ezután az 1-es játékos információs halmazai következnek, melyeket a kapott jelzése szerint tud elkülöníteni. A stratégiája ennek megfelelően egy-egy, az eredeti játékhoz képest némileg módosult - arra, hogy pontosan miként, később visszatérünk - akciót rendel az egyes érkező jelzésekhez. Ugyanígy adódnak a 2-es játékos esetében az információs halmazok, stratégiák illetve akciók.

Az egyes világállapotokban érkező jelzések valószínűségeloszlásait a 3.2. táblázat tartalmazza, ahol $\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, az arany metszés arány reciproka.

		Jelzések			
		É'K'	É'Ny'	D'K'	D'Ny'
Világállapotok	ÉK	0	φ^3	φ	φ^4
	ÉNy	φ^5	φ^4	φ^4	φ
	DK	φ^3	φ^2	φ^2	0
	DNy	0	φ	φ^3	φ^4

3.2. táblázat. A jelzések eloszlása

Alapvető elvárás a jelzésekkel szemben, hogy ne közöljenek olyan információt a játékosokkal, amit nem tudhatnak. Tegyük fel, hogy az ω_1 világállapotban vagyunk, azaz az 1-es játékos Észak típusú, a 2-es játékos Kelet típusú. Annak a valószínűsége, hogy ekkor az 1-es játékos Észak jelzést észlel $0 + \varphi^3$, míg annak, hogy Dél jelzést észlel $\varphi + \varphi^4$. Most rögzítsük az ω_2 világállapotot, tehát az 1-es játékos továbbra is Észak típusú, a 2-es játékos viszont már Nyugat típusú. Ekkor az érkező Észak és Dél jelzések valószínűsége rendre $\varphi^5 + \varphi^4$ illetve $\varphi^4 + \varphi$. Mivel azonban $\varphi^3 = \varphi^4 + \varphi^5$, az 1-es játékos számára a jelzés semmit sem közöl a másik játékos típusáról, a sajátjáról viszont igen. Ugyanezt kapjuk mindkét játékosra, minden világállapotban, tehát a jelzések teljesítik az elvárásainkat: mindenki a saját típusáról tud vélekedést formálni,

de a másik játékoséről nem.

Amint fentebb említettük, a két játékban az akciók és a stratégiák némileg eltérőek. A módosított játékban a $c'H'$ stratégia jelentése az, hogy az 1-es játékos c' -t játszik ha Észak jelzést kap, és H' -t ha Dél jelzést. Ez annyit tesz, hogy Észak jelzés esetén az előző játékbeli c vagy C akciót játssza, azt, amelyre valójában lehetősége adódik; ugyanígy Dél jelzés esetén ez h vagy H akciót is jelenthet.

A 3.3. táblázat tartalmazza a módosított játék kifizető mátrixát, melyből következik a 3.4. állítás. A mátrixban szereplő kifizetéseknél ezúttal sem vettük figyelembe a világállapotok eloszlását. Mindaz azonban most is igaz, amit az előző példánál megállapítottunk ezzel kapcsolatban, továbbá a 3.4. állítás még akkor is fennáll, ha az ω_2 világállapot tetszőleges pozitív valószínűséggel következik be.

3.4. állítás. *A 3.3. példában leírt játékban kvantum-korrelációval elérhető pozitív egyensúlyi kifizetés.*

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy kapjuk a 3.3. táblázatban szereplő kifizetési mátrixot. Vizsgáljuk meg például a $(h'C', V'r')$ stratégiaprofil esetét. Ez $\acute{E}'K'$ jelzéskombináció esetén a (h', V') akciópárt eredményezi, mely az ω_1, ω_2 és ω_4 világállapotokban 0, ω_3 világállapot esetében viszont $-M$ kifizetést eredményez. Ezutóbbi valószínűsége, azaz, hogy ω_3 világállapot mellett $\acute{E}'K'$ jelzés érkezik, a 3.2. táblázat alapján φ^3 . Ehhez hasonlóan az $\acute{E}'Ny'$ jelzésekre kapjuk a 0, $D'K'$ jelzések mellett szintén a 0, illetve $D'Ny'$ jelzéskombináció esetén a $\varphi^4(-M) + \varphi m + \varphi^4(-M)$ várható kifizetéseket. Ezeket összegezve² kapjuk a $\varphi m - (\varphi^2 + \varphi^4)M$ várható kifizetést.

	$R'r'$	$R'v'$	$V'r'$	$V'v'$
$c'C'$	m-2M	$\varphi^3 m - (1 - \varphi^4)M$	$(1 - \varphi^3)m - (1 + \varphi^4)M$	0
$c'H'$	$\varphi^3 m - (1 - \varphi^4)M$	$\varphi^5 m$	$\varphi^4 m - (1 + \varphi^3)M$	$-\varphi^2 M$
$h'C'$	$(1 - \varphi^3)m - (1 + \varphi^4)M$	$\varphi^4 m - (1 + \varphi^3)M$	$\varphi m - (\varphi^2 + \varphi^4)M$	$-\varphi M$
$h'H'$	0	$-\varphi^2 M$	$-\varphi M$	$-M$

3.3. táblázat. A játék kifizető mátrixa kvantum korrelációval

A 3.3. táblázatból az is kiderül, hogy a pozitív $\varphi^5 m$ egyensúlyi kifizetéshez vezető $(c'H', R'v')$ mellett a két 0 kifizetést eredményező $(c'C', V'v')$ és $(h'H', R'r')$, illetve a

²Továbbra is feltételezve, hogy az egyes világállapotok egyaránt $1/4$ valószínűséggel következnek be, majd, hasonlóan az előző esethez, a kifizetés 4-szeresét véve, illetve felhasználva, hogy $\varphi^3 + \varphi^4 = \varphi^2$.

$(h'C', V'r')$ stratégiaprofil is Nash-egyensúlyi. Utóbbi esetben az egyensúlyi kifizetés előjele m és M viszonyaitól függ. Ha m elég közel van M -hez³, akkor a kifizetés pozitív, ám $\varphi^5 m$ -nél egész addig kisebb, amíg $m < M$. Ha azonban m kellően távol van M -től, akkor negatív egyensúlyi kifizetéshez jutunk, ami az alapjátékban kizárt volt. A kifizetési mátrix összes többi eleme mindenképp negatív (és nem egyensúlyi).

Érdeemes észrevenni, hogy a kifizetések alakulásának köszönhetően a játékosok érdekei tökéletesen egybevágnak. A pozitív és negatív kifizetéshez is csak együtt juthatnak el. A játék szituációjából fakadóan kooperálni azonban nem tudnak. A probléma, amellyel szembesülnek, tisztán koordinációs jellegű. Ha képesek úgymond elfelejteni a típusukat és ehelyett rábízni magukat a jelzésekre, az úgy tudja koordinálni a cselekvéseiket, ahogy ők maguk nem, így többet érhetnek el.

Ezt a koordinációt a korábbi példákhoz hasonlóan ismét a közös prior hajtja végre, ugyanis a 3.2. táblázatban található jelzések eloszlása a módosított játék közös priorja. A közös priorból kiolvashatók a típusfüggvények, ha tudjuk, hogy hol értelmezettek. Jelen esetben, a korábbi példákhoz hasonlóan, csak a saját típusaikról formálnak vélekedéseket a játékosok, így a különböző (saját) típusaik által elkülöníthető világállapotok szerint értelmezzük a típusfüggvényeket.

Brandenburger és La Mura (2011) alapján megmutatjuk, hogy a 3.2. táblázat nem állhat elő hagyományos korreláció formájában. A játékosok saját típusaira vonatkozó jelzések halmazának jelölésére vezessük be a $T'_1 = \{\acute{E}', D'\}$ és $T'_2 = \{K', Ny'\}$ jelöléseket. A 3.4. táblázat tartalmazza a lehetséges jelzéskombinációkat a különböző típusok mellett. Rögzítsünk egy μ valószínűségi eloszlást a jelzéskombinációk $\Omega' = T'_1 \times T'_2$ halmazán, és vizsgáljuk meg a 3.2. táblázat 0 mezőit. A táblázat első sorában lévő 0 az Észak-Kelet világállapot mellett érkező Észak és Kelet jelzések valószínűségére vonatkozik, így ennek alapján:

$$\mu(\{\omega^{(1)}\}) + \mu(\{\omega^{(3)}\}) + \mu(\{\omega^{(5)}\}) + \mu(\{\omega^{(11)}\}) = 0.$$

A közös priorban szereplő további két 0 mezőre hasonlóan adódnak:

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega^{(4)}\}) + \mu(\{\omega^{(8)}\}) + \mu(\{\omega^{(10)}\}) + \mu(\{\omega^{(13)}\}) &= 0, \\ \mu(\{\omega^{(11)}\}) + \mu(\{\omega^{(13)}\}) + \mu(\{\omega^{(15)}\}) + \mu(\{\omega^{(16)}\}) &= 0. \end{aligned}$$

³Ha $M < \frac{\varphi}{2\varphi^4 + \varphi^3} m$.

	Észak	Dél	Kelet	Nyugat
$\omega^{(1)}$	É'	D'	K'	Ny'
$\omega^{(2)}$	D'	D'	K'	Ny'
$\omega^{(3)}$	É'	É'	K'	Ny'
$\omega^{(4)}$	É'	D'	Ny'	Ny'
$\omega^{(5)}$	É'	D'	K'	K'
$\omega^{(6)}$	D'	É'	K'	Ny'
$\omega^{(7)}$	É'	É'	Ny'	Ny'
$\omega^{(8)}$	É'	D'	Ny'	K'
$\omega^{(9)}$	D'	D'	K'	K'
$\omega^{(10)}$	D'	D'	Ny'	Ny'
$\omega^{(11)}$	É'	É'	K'	K'
$\omega^{(12)}$	D'	É'	Ny'	Ny'
$\omega^{(13)}$	É'	D'	K'	K'
$\omega^{(14)}$	D'	D'	Ny'	K'
$\omega^{(15)}$	D'	É'	K'	K'
$\omega^{(16)}$	D'	É'	Ny'	K'

3.4. táblázat. A lehetséges jelzéskombinációk

Innen következik, hogy $\mu(\{\omega^{(i)}\}) = 0$, ha $i \in \{1, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16\}$. Ugyanakkor az Észak-Nyugat világállapot mellett érkező Észak és Kelet jelzések valószínűségére kapjuk, hogy:

$$\mu(\{\omega^{(5)}\}) + \mu(\{\omega^{(8)}\}) + \mu(\{\omega^{(11)}\}) + \mu(\{\omega^{(13)}\}) = \varphi^5 \neq 0.$$

Innen adódik, hogy nincs olyan μ valószínűségi eloszlás, amely a 3.2. táblázatban szereplő közös priorral megegyező, hagyományos korrelációt szolgáltatna.

A 3.2. táblázatban található közös prior 0 mezői amiatt is kiemelkedő fontosságúak, mert pont ezek a 0 valószínűségek esnek a $-M$ kifizetésekre a $(c'H', R'v')$ stratégiaprofil esetén, így kaphatunk pozitív egyensúlyi kifizetést.

4. fejezet

Eltérő megközelítések

4.1. Általánosított típustér

Ebben a fejezetpontban megadjuk bizonyos, helyenként már korábban is használt, a kvantum-korrelált egyensúlyhoz kapcsolódó játékelméleti fogalom formális definícióját. A legfontosabb ilyen fogalom az általánosított típustér (Pintér és Udvari (2011)), illetve a hozzá tartozó közös prior (Pintér (2011)). Mivel a véges eset is elegendő, az egyszerűbb felépítés érdekében Pintér (2011) módjára építkezünk.

Jelölje N a játékosok véges halmazát, tegyük fel, hogy $0 \notin N$ és legyen $N_0 = N \cup \{0\}$ a kibővített játékoshalmaz, mely 0-as játékosként tartalmazza a természetet. Először definiáljuk a világállapotok halmazát Aumann (1999) alapján.

4.1. definíció (Világállapotok tere). *Jelölje Ω véges halmaz a világállapotok halmazát, és legyen minden $i \in N_0$ esetén $\mathcal{M}_i$ partíciója Ω -nak. Továbbá legyen $\mathcal{M} = \bigvee_{i \in N_0} \mathcal{M}_i$ az $\mathcal{M}_i$ partíciók közös finomítása, azaz a legdurvább (legkevésbé finom) partíció, mely tartalmazza az $\mathcal{M}_i$ partíciókat.*

Az Ω elemei az egyes világállapotok, az $\mathcal{M}_i$ partíció reprezentálja az i játékos informáltságát, azaz hogy mely világállapotokat képes megkülönböztetni.

Egy játékos típusa tartalmazza a játékos összes tulajdonságát, így a rendelkezésre álló információit is, amely alapján formál vélekedéseket az egyes eseményekkel kapcsolatban. Ezeket a vélekedéseket típusfüggvényekkel jelenítjük meg a típustér definíciójában.

4.2. definíció (Általánosított típustér). *Legyen $(\Omega, \mathcal{M}_i)_{i \in N_0}$ a világállapotok tere. Ek-*

kor a $(P, \Omega, \{\mathcal{M}_i\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ struktúrát a P paraméterterre épülő típustérnek nevezzük, ahol

- $g : \Omega \rightarrow P$, melyre minden $A \subseteq P$ esetén létezik $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathcal{M}_0 \cup \{\emptyset\}$, hogy $g^{-1}(A) = \cup_{j=1}^n M_j^1$ fennáll, illetve
- $f_i : \Omega \rightarrow \Delta(\Omega, \mathfrak{M})$, melyre minden $A \subseteq \Delta(\Omega, \mathfrak{M})$ esetén létezik $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathcal{M}_i \cup \{\emptyset\}$, hogy $f_i^{-1}(A) = \cup_{j=1}^n M_j$ fennáll, ahol $i \in N$.

A P véges paraméterter tartalmazza a modell jellemzően nem köztudott paramétereit, melyek nem köthetők egy játékoshoz sem. Úgy is szokás utalni az elemeire, mint a természet típusai. Feltesszük, hogy minden $A \subseteq P$ részhalmaz egy esemény. A g tekinthető a természet típusfüggvényének, ami összeköti a világállapotokat a paraméterter elemeivel. A definícióban a g -vel szemben állított kritérium azt az elvárást jeleníti meg, hogy a természet $\mathcal{M}_0$ által reprezentált informáltságát őrizze meg a természet típusfüggvénye. Ezáltal minden esemény g -inverz képe előállítható a partíció elemeiből, vagy másképpen, ha két világállapot megkülönböztethetetlen az $\mathcal{M}_0$ partíció alapján, akkor azok g képe megegyezik.

A $\Delta(\Omega, \mathfrak{M})$ az Ω bizonyos részhalmazain értelmezett valószínűségi mértékek halmaza. Konkrétan $\mathfrak{M}$ tartalmazza az olyan algebrákat Ω -n, melyek generátorrendszere durvább (kevésbé finom), mint $\mathcal{M}$. Ebbe a $\Delta(\Omega, \mathfrak{M})$ halmazba képez az f_i , az i játékos típusfüggvénye, amely tehát egy-egy valószínűségi mértékkel adja meg a játékos vélekedéseit az egyes világállapotokban.

Elképzelhető tehát, hogy egy adott valószínűségi mérték nem értelmezett valamely $A \subseteq \Omega$ eseményen. Ekkor azt mondjuk, hogy az adott világállapot mellett a játékos ignorálja az A eseményt, azaz nem formál vélekedést a bekövetkezéséről. Ez egy rendkívül lényeges különbség a hagyományos és az általánosított típustér között. Hasonlóan a természet típusfüggvényéhez, az f_i típusfüggvények is megőrzik az i játékos $\mathcal{M}_i$ partíciók által reprezentált informáltságát, azaz ha két világállapot megkülönböztethetetlen az $\mathcal{M}_i$ partíció alapján, akkor azok f_i képe megegyezik.

Harsányi-féle típustér esetén minden játékos ismeri saját típusát, így abban a véges esetben, amikor minden lehetséges típus valószínűsége pozitív, a játékosok típusfüggvényei feltételes valószínűségeloszlások. Amennyiben ezek a feltételes valószínűségek

¹Feltesszük, hogy az üres szumma az üres halmaz.

konzisztensek, akkor létezik a játéknak közös priorja, és egyértelműen meghatározott.

Általánosított típustér esetében a konzisztencia fogalma is átalakul. Hagyományos típustérrel szemben kevesebbet jelent, azt, hogy a játékosoknak egyetlen világállapotban sem árulhat el többet vagy kevesebbet a közös prior, mint a típusfüggvényük. Általánosított típustér esetében, a játékosok adott világállapotban inkonzisztens vélekedései mellett is lehet a játéknak közös priorja. Ha ugyanis a játékosok az adott világállapot különböző szegmenseit illetően rendelkeznek információval, és emiatt nincsenek összhangban vélekedéseik, az általánosított típustér rendelkezhet közös priorral – sőt, a közös prior esetlegesen alkalmas lehet a típusfüggvények közötti efféle rések kitöltésére. Továbbá az általánosított típustérhez tartozó közös prior általánosságban nem egyértelmű, jellemzően még rögzített típusfüggvények esetén sem.

4.3. definíció (Közös prior). *Az $f : \Omega \rightarrow \Delta(\Omega, \mathcal{M})$ függvény a $(P, \Omega, \{\mathcal{M}_i\}_{i \in N_0}, g, \{f_i\}_{i \in N})$ általánosított típustérhez tartozó közös prior, ha minden $\omega \in \Omega$ világállapot, $i \in N$ játékos és $A \subseteq \Omega$ esemény esetén, melyekre $f_i(\omega)$ az A eseményen értelmezett, az alábbi fennáll:*

$$f(\omega)(A) = \sum_{\omega' \in \Omega} f_i(\omega')(A) f(\omega)(\{\omega'\}).$$

A közös prior tehát úgy fogja össze a játékosok vélekedéseit, hogy minden világállapotban megad egy valószínűségi mértéket, amely konzisztens a játékosok típusfüggvényeivel, az adott világállapotban. Ilyen formán a közös prior a játékosok közös típusfüggvényének tekinthető. Mint a példákban is láttuk, ez több is lehet, mint egyszerű 'összesítése' a játékosok vélekedéseinek.

Minden adott, hogy definiáljuk a játékot, mely alkalmasnak tűnik egy általánosított korrelált egyensúly bevezetésére. Ez a Bayesi-játék jól ismert formája, kiegészítve az általánosított típustérrel.

4.4. definíció (Általánosított Bayesi-játék). *Az (általánosított) Bayesi-játék az $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, \mathcal{T})$ struktúra, ahol*

- N a játékosok véges halmaza,
- A_i az i játékos akcióhalmaza, $i \in N$,
- $s_i : T_i \rightarrow A_i$ az i játékos stratégiája, S_i az ezeket tartalmazó stratégiahalmaz, $i \in N$,

- $u_i : P \times A \rightarrow \mathbb{R}$ az i játékos kifizetőfüggvénye, ahol $A = \times_{i \in N} A_i$, $i \in N$,
- $\mathcal{T}$ általánosított típustér.

A kvantum-korrelált egyensúly definíciója azonban nem adódik triviálisan, ami azt illeti, sehogy nem adódik. Problémákkal szembesülünk mind azon a téren, hogyan definiáljuk az egyensúlyt ott, ahol a típusfüggvények nem értelmezettek, mind azzal az elvárással kapcsolatban, hogy hagyományos (vagy Harsányi-féle) típustér esetén visszakapjuk a korrelált egyensúlyt. A normál formás példák esetében Aumann (1987)-t követve domináns egyensúlyt kaptunk, ami megkönnyítette a dolgunkat: ha létezik domináns egyensúly, az egész biztosan teljesíti a követelményeinket. Ezzel szemben az extenzív forma esetében egy eltérő módszert alkalmaztunk, a 3.3. táblázatban szereplő kifizetési mátrix várható értékeinek kiszámításánál beépültek a jelzések (közös prior) a kifizetésekbe, majd Nash-egyensúlyt kerestünk.

Ha viszont, például a gyáva nyúl esetében azt kaptuk volna, hogy ha egy játékos eltér a K akciójától, akkor rosszabbul és jobban is járhat (ezeket azonban mérlegelni képtelen), akkor úgymond 'óvatos' és 'merész' egyensúlyok bevezetésére lenne szükség. Óvatos alatt azt értjük, hogy ez esetben a K akció egyensúlyi, ha onnan eltérve a játékos rosszabbul járhat, illetve ugyanígy a merész esetre, ha onnan eltérve nem járhat jobban.

4.2. La Mura (2003) megközelítése

A kvantum játékelmélet irodalmában számos kvantum-korrelált egyensúlyfogalmat találunk, azonban úgy tűnik, mind igényel bizonyos jártasságot egyszerre kvantumfizikában és játékelméletben. Ezek közül La Mura (2003) felépítését vizsgáljuk meg, ugyanis minimálisan támaszkodik kvantumfizikára.

A kvantum bevezetése a modellbe Aumann (1974) korrelációs eszközének segítségével történik, melyről La Mura (2003) felteszi, hogy klasszikus információs jelzéseken túl képes független kvantum jelzések sorozatát (kvantumbit) is küldeni. A kvantum-összefonódás jelensége teszi lehetővé, hogy kvantumbitek összekapcsolódásából olyan korreláció jöjjön létre, melyet a klasszikus valószínűségszámítás nem tud megalkotni. Említésre kerül az efféle jelzések fizikai hordozója (jellemzően például egy neutron

spinje vagy egy foton polarizációja), melyek alkalmazására ezentúl mérés-ként hivatkozunk.

A példa, melyet La Mura (2003) vizsgál, egy tisztán koordinációs problémát leíró Bayesi-játék, melyben mindkét játékos ismeri a saját típusát, és ennek megfelelően választ akciót. Ekkor a hatékony korrelált egyensúlyi kifizetés $(4, 4)$. Ha azonban feltesszük, hogy mindkét játékos (jelzésként) megkapja egy teljesen összefonódott kvantumbit-pár egy-egy felét, illetve mindkét játékos számára elérhetővé tesszük a választást három, fent említett mérés közül, akkor kvantum-korrelációval elérhetünk Pareto-superior kifizetést.

Ennek módja Aumann (1987)-ra emlékeztet, ugyanis mindkét játékos típusaihoz hozzárendelünk egy-egy mérést, melynek eredményeihez hozzárendelünk egy-egy akciót. Arról, hogy ennek hátterében mi is zajlik le, egyebet nem tudunk, azonban a kvantummechanika szabályszerűségei (mint egyfajta fekete dobozon keresztül) elvezetnek egy táblázathoz, mely megadja nekünk a Pareto-superior $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ kifizetést.

A definíciókból kiderül, hogy La Mura (2003) felépítése a korrelált egyensúlyig összhangban áll a típus-terest megközelítéssel, lényeges eltérés nem észlelhető. Összehasonlítva például a két Bayesi-játék definícióját a különbség csupán annyi, hogy a mi esetünkben ami típus illetve típusfüggvény, az La Mura (2003) cikkében jelzés illetve 'jelzésfüggvény' (signal function), illetve hogy a mi esetünkben explicit módon jelenik meg a típus-ter. A kvantum-korrelált egyensúly definíciója pedig egyszerűen a korrelált egyensúly definíciójának kiegészítése az elérhető mérések közül való alkalmas választással.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat szerkezete az érthetőséget szem előtt tartva lett kialakítva. A már jól ismert bevezető példák célja az volt, hogy bemutassák a kvantum-korrelált egyensúlypontok a korrelált egyensúlypontokénál bővebb halmazát, illetve, hogy fokozatosan bevezetve ismertesse a kapcsolódó általánosított típustér (Pintér és Udvari (2011)) és a hozzá tartozó közös prior (Pintér (2011)) fogalmakat. A modell felépítésében szintén a könnyebb megértés céljából kerültük az absztrakt megközelítést, a véges esetre szorítkozva. A részletesebben kidolgozott, extenzív formában adott példán keresztül szintén láthattuk, hogy a kvantum-korreláció segítségével miként bővül az egyensúlyi pontok halmaza, ami által elérhetővé válhat a korrelált egyensúlyhoz képest Pareto-szuperior, kisebb illetve azzal megegyező kifizetést biztosító egyensúly is.

A korrelált egyensúly általánosításához kulcsfontosságúnak bizonyult az általánosított típustér, amely megengedi, hogy a játékosok ne formáljanak vélekedést mindenről, illetve, hogy ne ismerjék saját típusukat. Ez valójában a valóságtól nem túlzottan elrugaszkodott feltevés, hiszen számtalan alkalommal fordul elő, hogy félreismerjük magunkat. Igen gyakran tévesen mérjük fel saját képességeinket, az az eredmény azonban meglepő, hogy ezáltal jobban is járhatunk.

A dolgozat célja, a kvantum-korrelált egyensúly, mint az általánosított típustér és a hozzá tartozó közös prior nem triviális alkalmazásaként való bemutatásán túl, az is volt, hogy egy jelenségre, a kvantummechanika megközelítése felől jövő, úgymond 'fekete doboz' jellegű szemlélet helyett, egy tisztán döntéelméleti magyarázatot adjon. A korreláció úgymond végrehajtója, a kvantum játékelmélet irodalmában igen gyakori megközelítéssel, a Brandenburger és La Mura (2011) cikkében megjelenő 'kvantum-

korrelációs eszközzel' (quantum correlation device) szemben az általánosított típustér-
hez tartozó közös prior.

Irodalomjegyzék

- Aumann RJ (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* 1:67–96
- Aumann RJ (1987) Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality. *Econometrica* 55(1):1–18
- Aumann RJ (1999) Interactive epistemology i: Knowledge. *International Journal of Game Theory* 28:263–300
- Brandenburger A, La Mura P (2011) Quantum decision theory. Manuscript
- Forgó F (2010a) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. *Mathematical Social Sciences* 60(3):186–190
- Forgó F (2010b) Generalized correlated equilibrium for two-person games in extensive form with perfect information. *Central European Journal of Operations Research* 19(2):201–213
- Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2005) Játékelmélet
- Harsányi J (1967-68) Games with incomplete information played by bayesian players part i., ii., iii. *Management Science* 14:159–182, 320–334, 486–502
- La Mura P (2003) Correlated equilibria of classical strategic games with quantum signals. Manuscript
- Moulin H, Vial JP (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. *International Journal of Game Theory* 7(3):201–221
- Nash J (1951) Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics* 54(2):286–295
- Pintér M (2011) Common priors for generalized type spaces. Munich RePEc Personal Archive, ID: 34118

Pintér M, Udvari Z (2011) Generalized type spaces. Munich RePEc Personal Archive, ID:
34107