

OTDK-DOLGOZAT

Gyetvai Attila, Török Tamás
BA

2013

Biform játékok

Biform games

Gyetsvai Attila, Török Tamás

Kézirat lezárva: 2012. március 26.

Tartalomjegyzék

1. A biform játékról (Török)	1
1.1. Egy példa a biform játékra	2
2. A magabiztossági együtttható (Török)	5
2.1. Az eredeti játék	5
2.2. Módosított játék	6
2.3. A biform játék a magabiztossági együtttható nélkül	8
3. A nukleolusz (Gyetvai)	9
4. Az innovációjáték (Gyetvai)	12
4.1. A módosított játék megoldása	12
4.2. Egyéni túlkínálat	14
4.3. Kollektív túlkínálat	15
4.4. Egyensúly vagy túlkereslet	17
5. Reflektálás a modellel kapcsolatos kérdésekre (Török)	18
5.1. A mag üressége	18
5.2. Kooperatív játékok közötti választás a nem-kooperatív szakaszban . .	18
5.3. Episztemológiai feltételezések	19
A. Az eredeti játék magjának számítása (Gyetvai)	21
B. A módosított játék magjának számítása (Gyetvai)	21

Ábrák jegyzéke

1. A branded-ingredient stratégia	3
2. A módosított játék magjának vetülete	7

Kivonat

Dolgozatunkban Brandenburger és Stuart (2007) biform játékmmodelljét és annak megkérdőjelezhető vonásait mutatjuk be. A biform játék két szakaszból áll: az első szakaszban döntéshozó szereplők nem-kooperatív döntésükkel alakítják a játék következő szakaszának környezetét, ahol egymással kooperálnak. Alternatív modellt adunk a biform játékra, ami megoldást nyújt azokra a problémákra, amelyek az eredeti modellben előfordulnak. Egy innovációsjáték keretein belül illusztráljuk az alternatív modellünket, és reagálunk az eredeti cikkben felmerült, a modell feltevéseivel kapcsolatos kérdésekre.

1. A biform játékról (Török)

A közgazdaságtan a játékelméletet már Neumann János óta használja ahhoz, hogy különböző döntési helyzeteket elemezzen és értelmezzen. A játékelmélet alapvetően két ágra osztható: a nem-kooperatív és a kooperatív típusra. Különböző módszertannal különböző kérdésekre keresi a választ e két elmélet. Míg a nem-kooperatív játékelmélet szereplői döntéseiket egyedül hozzák meg és nem léteznek kikényszeríthető szerződések, addig a kooperatív játékelmélet éppen azokkal a helyzetekkel foglalkozik, amikor a játékosok csoportjai közösen törekszenek arra, hogy az adott játék során a lehető legnagyobb értéket teremtsék meg. Az elemzés megmutatja, hogy milyen szabályok alkalmazhatóak ennek az értéknek a szétosztásakor.

A való életben azonban nem minden esetben válik el tisztán egymástól a két döntési szituáció. Jó példa erre az üzleti szféra, ahol igen gyakori, hogy egy cég hosszútávú szerződésre lép egy partnerével, vagy el kell döntenie, hogy milyen minőségű vagy mennyiségű terméket dobjon piacra. Láthatjuk, hogy ezekben a szituációkban időben elválik egymástól a két döntés, alapvetően azonban nem lehet különválasztani a második szakasztól az elsőt.

A két szituáció együttes kezelésére kézenfekvő, ha a két játéktípust egyszerre alkalmazzuk. Az ehhez hasonló döntési helyzetekben a szereplőknek először lehetőségük nyílik arra, hogy stratégiai döntést hozzanak. Ezzel a döntéssel képesek megváltoztatni a játék környezetét. A második szakaszban azonban már nincs lehetőségük kilépni a megadott keretek közül, így egy kooperatív szituációba kerülnek.

E szakasz vizsgálatát a kooperatív játékelmélet eszköztárával elemezzük. Az elemzés megmutatja, hogy a lehetséges környezetekben mekkora érték teremtésére képesek a szereplők, és ezt milyen szabályok szerint osztják el. Ezek az információk biztosítják majd az alapot az első szakasz döntésének meghozatalához.

Ennek az összetett problémának a modellezésére tett javaslatot Brandenburger és Stuart (2007) a biform játéktípus bevezetésével. Dolgozatunkban ezt a játéktípust szeretnénk részletesen áttekinteni és továbbgondolni.

1.1. Egy példa a biform játékra

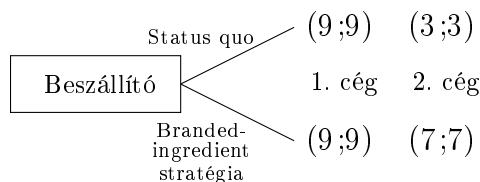
Mielőtt egy példával illusztrálnánk a biform játékot, szükséges, hogy néhány alapvető definícióval tisztában legyünk. E dolgozat kereteibe azonban nem fér bele minden fogalom definiálása és jelölés ismertetése, ezért a következő fogalmakat és a vonatkozó jelöléseket ismertnek tekintjük: *játékosztály; nem-kooperatív játék, normál forma, extenzív forma, vélekedések, tiszta és kevert Nash-egyensúly, nemek harca játék; kooperatív játék, karakterisztikus függvény, átruházható hasznosságú (TU) játék, szétosztás(halmaz), elosztás(halmaz), megoldás, pontmegoldás, mag, kétoldalú piac-játék, lóvásárjáték*.¹ A következő játékban² egy beszállító, két eladó cég és két vásárló szerepel. A vásárlók egy terméket szeretnének megvenni, a cégek egy terméket képesek előállítani, a beszállító viszont csupán egy cégnek képes a gyártáshoz szükséges alapterméket biztosítani, 1\$ költséggel. A piacon végsősoron tehát csupán egyetlen termék cserél gazdát. A két cég terméke iránti rezervációs ár eltérő a piacon. Az első cég termékét 9\$-ra, míg a másik cég termékét csak 3\$-ra értékelik a vásárlók. A beszállítónak azonban lehetősége van arra, hogy megváltoztassa a vásárlók értékelését azzal, hogy kooperál a második céggel, aki a végterméken megjeleníti a beszállító marketingeszközét. Ennek ugyan 1\$ további költsége van, de ezt követően már 7\$-ra értékelik a terméket a fogyasztók. Ez az ún. branded-ingredient stratégia.³ A játékban tehát van egy olyan szereplő, aki a nem-kooperatív szakaszban lépést tesz, és ezzel befolyásolja azt a környezetet, amelyben majd a kooperatív játék zajlik.

¹ Bővebb kifejtésért lásd: [Forgó et al. (2007)], [Solymosi (2007)]

² A játékot lásd: [Brandenburger és Stuart (2007)]

³ A branded-ingredient stratégia egyik legismertebb példája az Intel processzorgyártó vállalat Inside-kampánya, aminek keretében a számítógépeken, amikbe Intel processzorokat szerelnek, megtalálható az Intel logója.

A kérdés az, hogy a cég meglepje-e ezt a kooperációs lépést. Látható, hogy a probléma modellezésére kiválóan alkalmas a biform szemlélet. Az első szakaszban a cég egyedül dönti el, hogy mi neki a legjobb, melyik esetben lesz legnagyobb a kifizetése. Arra a kérdésre a választ, hogy kooperációval vagy anélkül hogyan osztják majd el a megszerzett többletet, már a kooperatív játékelmélet eszköztárával kell megadnunk. Az alábbi ábrán vázoljuk a példát.



1. ábra. A branded-ingredient stratégia

Látható, hogy a biform játék felírható egy extenzív formában megadott nem-kooperatív játékként, ahol a kifizetések helyén a stratégiától függő kooperatív környezetek szerepelnek. Ahhoz tehát, hogy döntést hozhasson a cég, ismernie kell a várható végső kifizetéseket.

A kérdés megválaszolása természetesen nem evidens. Feltételezhetjük azonban, hogy a létrehozott érték végső elosztása minden esetben magbeli lesz. A mag-elosztások ugyanis rendelkeznek azzal az alapvető stabilitási tulajdonsággal, hogy olyan kifizetéseket írnak elő, amelyek minden koalíció számára elfogadhatóak [Solymosi (2007)]. Magbeli elosztást feltételezve viszont egyenlőtlenségekkel jól megadhatók azok az intervallumok, amelyekben a végső kifizetések létrejöhetnek. A gyenge egyenlőtlenségekből eredő intervallumok azonban a legtöbb esetben nem elegendőek ahhoz, hogy a nem-kooperatív első szakaszban döntést hozhassanak róluk a szereplők.

A korábban említett egyszerű példában a kooperatív játékok a következőképpen alakulnak:

	v(1)	v(2)	v(3)	v(12)	v(13)	v(23)	v(N)
status quo	0	0	0	8	2	0	8
branded-ingredient stratégia	0	0	0	7	5	0	7

Amennyiben fenntartja az eredeti helyzetet, a beszállító magbeli kifizetése 2 és 8\$ között lesz, az első cégé 0 és 6\$ között, míg a második cég nem részesül a te-

remtett értékből. Ha azonban a branded-ingredient stratégia mellett dönt, 5 és 7\$ között lesz a kifizetése, az első cégnek 0 és 2\$ között, míg a második cég ismét nem kap semmit.

Láthatjuk tehát, hogy konkrét kifizetések helyett halmazok állnak rendelkezésünkre. Ezt a problémát Brandenburger és Stuart (2007) a következőképpen oldja fel: a játékosok a játék kezdeti megadásakor rendelkeznek egy ún. magabiztossági együtt-
hatóval (confidence index). Ez a szám egy olyan exogén módon megadott eleme a játéknak, amely megmutatja, hogy a játékosok mit feltételeznek a saját tárgyalási képességükről, mit gondolnak arról, hogy a tárgyalás során mekkora értéket képesek megszerezni a lehetséges maximumból.

Dolgozatunk első felében azt kívánjuk megmutatni, hogy ez a magabiztossági együtt-
ható milyen problémákat vet fel a speciálistól eltérő esetekben, illetve, hogy miként lehetne feloldani ezeket a problémákat. Mielőtt azonban ezeket az elemzéseket elvégeznénk, formalizálnunk kell a biform játékot.

Brandenburger és Stuart (2007) definíciója a következő:

1.1. definíció. *Egy n -szereplős biform játék alatt az $(S^1, \dots, S^n; V; \alpha^1, \dots, \alpha^n)$ együtttest értjük, ahol*

(a) S^i véges halmaz, $\forall i = 1, \dots, n$;

(b) $V : S^1 \times \dots \times S^n \rightarrow \mathbb{R}, V(s^1, \dots, s^n)(\emptyset) = 0$; és

(c) $0 \leq \alpha^i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n$.

N a játékosok halmaza. Minden i játékos kiválasztja az s^i stratégiáját a maga S^i stratégiahalmazából. Az így kiválasztott $s^1, \dots, s^n \in S^1 \times \dots \times S^n$ stratégiaprofilok pontosan meghatároznak egy átruházható hasznosságú (TU) kooperatív játékot $V(s^1, \dots, s^n) : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényvel. Ez megadja, hogy rögzített stratégiaprofilok esetén az $A \in N$ koalíciónak mekkora az értéke. ($V(\emptyset) = 0$.) Végül az α^i -vel jelölt magabiztossági együtt-
ható megadja, hogy i játékos mit gondol arról, hogy a számára elérhető legnagyobb és legkisebb magbeli kifizetés különbségének mekkora hányadát képes a tárgyalás során megszerezni.

2. A magabiztossági együtttható (Török)

Ebben a fejezetben egy konkrét példán keresztül részletesebben megvizsgáljuk, hogyan lehet átültetni a biform szemléletet a gyakorlatba. Különös figyelmet fordítunk a magabiztossági együttthatóval kapcsolatos problémákra, majd javaslatot teszünk az együtttható kivezetésére a játékból.

A továbbiakban az innovációjátékkal foglalkozunk részletesebben⁴. Az innováció tipikus példája a biform játékok alkalmazási területének. A játékosoknak itt ugyanis olyan döntést kell meghozniuk, amit a későbbiekben már nem változtathatnak meg, így természetes módon tagolódik két részre a játék.

2.1. Az eredeti játék

Vegyünk egy piacot, ahol 2 eladó és 3 vevő szerepel. Minden eladó 2 terméket képes gyártani, minden vevő egy terméket szeretne megvenni. A két cégnek lehetősége van arra, hogy egy új technológiát vezessen be (innováljon), és ezzel megnövelje a fogyasztók rezervációs árát a saját terméke iránt. Az innováció költsége mindkét cég esetében 5\$.

A rezervációs árakat a termékek iránt a következő táblázat tartalmazza:

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	4 db: (4; 4; 4)	2 db: (4; 4; 4), 2 db: (7; 7; 7)
	innovál	2 db: (7; 7; 7), 2 db: (4; 4; 4)	4 db: (7; 7; 7)

A táblázat értelmezése: A cellák megmutatják, hogy az adott kooperatív körülmények között hány darab régi és hány darab innovált termék érhető el az adott piacon. A darabszám után pedig az egyes fogyasztók rezervációs árai találhatók.

A biform játék logikáját követve, először a kooperatív részben megmutatható, hogy a fogyasztók képesek megszerezni az összes többletet a két átlós játék esetén. A példában mind a négy játék magja egyelemű, tehát nem szükséges a magabiztossági együtttható alkalmazása.

Megmutatható, hogy mind a négy esetben a kooperatív játék – ami egy kétoldalú piacjáték, lásd: [Solymosi (2007)] – magja egyelemű. A szimmetrikus esetekben a

⁴ Az eredeti játékot lásd: [Brandenburger és Stuart (2007)]

vevők szereznek meg minden többletet. Az egyelemű magok: $(0, 0, 4, 4, 4)$, illetve $(0, 0, 7, 7, 7)$. Aszimmetrikus esetekben pedig az egyedül innováló cég is képes többletet elérni. Az egyelemű magok: $(0, 6, 4, 4, 4)$, illetve $(6, 0, 4, 4, 4)$. A mag számítását az A függelékben közöljük.

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	$(0; 0)$	$(0; 1)$
	innovál	$(1; 0)$	$(-5; -5)$

Abban az esetben, mikor egy cég egyedül innovál, magbeli kifizetése 6\$. Azonban a nem-kooperatív szakaszban lévő döntéshozatalnál figyelembe kell vennie a innováció 5\$-os költségét, így a döntés alapjául szolgáló kifizetése pusztán $6 - 5 = 1$ \$. A normál formában megadott játékról megállapíthatjuk, hogy a nem-kooperatív szakaszban egy nemek harca jellegű játékszituációban kell döntést hozniuk a cégeknek. A példa tehát kiválóan megmutatja, hogy a biform szemléletet hogyan lehet alkalmazni egy konkrét szituációra. Mint azonban korábban említettük, jelen példa egy pontmegoldást ad eredményül minden kooperatív játékra a fogyasztói rezervációs árak egységes megválasztása miatt. Ha a fogyasztók rezervációs árai eltérnek egymástól, a mag nem egyelemű lesz, hanem halmazértékű. Ezekben az esetekben a játékosok a magbiztossági együtthatót használják ahhoz, hogy megállapítsák azokat a kifizetéseket, amiket felhasználnak a játék normál formájának felírásakor. Az eredeti játékot tehát úgy módosítjuk, hogy vizsgálhassuk ezt az esetet.

2.2. Módosított játék

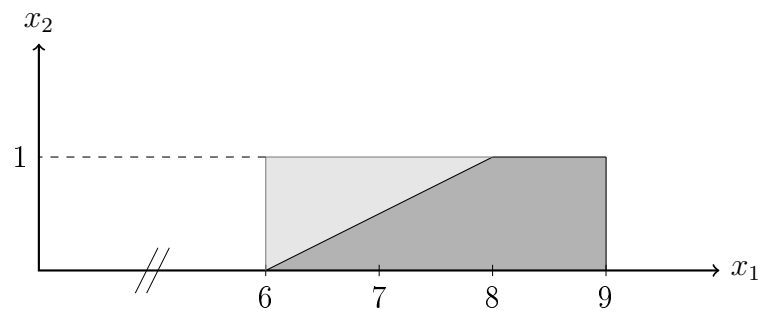
		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	4 db: $(4; 4; 4)$	2 db: $(4; 4; 4)$, 2 db: $(9; 8; 7)$
	innovál	2 db: $(9; 8; 7)$, 2 db: $(4; 4; 4)$	4 db: $(9; 8; 7)$

A táblázat értelmezése megegyezik az eredeti játékéval, most azonban a vevők rezervációs árai láthatóan eltérnek az innováció után. Az első fogyasztó 9, a második 8, a harmadik pedig 7\$-ra értékeli az innovált terméket.

Nézzük meg, hogy a megváltozott helyzetben hogyan alakul a játék! A kooperatív

játékok közül azt az esetet vizsgáljuk részletesebben, amikor csupán az egyik cég innovál, legyen ez az első cég.

(A mag meghatározását részletesen a B függelékben ismertetjük.) A mag ebben az esetben nem egyelemű lesz, hanem halmazértékű. A két eladó magbeli kifizetéseit ábrázolhatjuk egy koordinátarendszerben. Ők azok ugyanis, akiknek döntést kell hozniuk a nem-kooperatív szakaszban, amely döntést a magabiztossági együttthatójuk függvényében hozzák meg.



2. ábra. A módosított játék magjának vetülete

A 2.2 ábrán sötétszürkével jelölt rész lesz a játék magjának vetülete a két döntéssel bíró játékos síkjában. A régi terméket kínáló vállalat lehetséges kifizetése 0 és 1\$ közé esik, míg az innovációt bevezető vállalaté 6 és 9\$ közé.

Ahhoz, hogy az előző példához hasonlóan fel tudjuk írni a játék normál formáját, szükségünk van a magabiztossági együttthatók alkalmazására. A két értéket válasszuk meg a következőképpen:

1. cég: $\alpha_1 = 20\%$, így $x_1 = 0,2 \cdot 9 + 0,8 \cdot 6 = 6,6$

2. cég: $\alpha_2 = 60\%$, így $x_2 = 0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0 = 0,6$

Ennél a két konkrét magabiztossági együttthatónál a játék normál formája:

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	(0; 0)	(0,6; 1,6)
	innovál	(1,6; 0,6)	(−5; −5)

A játék megadásánál azonban fellép egy igen jelentős probléma. Azokban az esetekben, amikor csak az egyik játékos innovál, ezek a konkrét kifizetések nem

magbéli értékek. A játékosok tehát olyan kifizetésekre alapozták a döntésüket a nem-kooperatív szakaszban, amelyek biztosan nem valósulhatnak meg. Az ehhez hasonló magabiztossági együtttható-párok által létrehozott halmazt jelöli az ábrán a világosszürke terület, ami tehát olyan pontok halmaza, amelyek bizonyos magabiztossági együtttható-párok esetén a cégek számára elméletileg elérhetőek, de nem magbéli pontok, ezért megvalósulásuk erősen megkérdőjelezhető, hiszen megsértik a mag által megtestesített stabilitást.

Ez a probléma minden olyan esetben fennáll, amikor nem csak egy játékosnak kell döntést hoznia a nem-kooperatív szakaszban, és a saját kifizetése függ a másik döntést hozó játékostól is. Ezért összességében elmondhatjuk, hogy míg azokban az esetekben, amikor csupán egy játékos képes módosítani nem-kooperatív döntésével a játék környezetét, a magabiztossági együtttható vizsgálatának lehet létjogosultsága, de amint több szereplőnek van döntése a nem-kooperatív szakaszban és a kooperatív játékok magjai halmazértékűek, az ekkor fellépő inkonzisztencia kérdésessé teszi a magabiztossági együtttható alkalmazásának megalapozottságát.

2.3. A biform játék a magabiztossági együtttható nélkül

Ennek a problémának a feloldására javasoljuk, hogy a magabiztossági együttthatót vegyük ki a biform játék modelljéből. Ebben az esetben természetesen a különböző intervallumok összevetése jelenti a problémát. Továbbra is fennáll tehát az igény, hogy egy ponttá tömörítsük a kooperatív játékok megoldását, élesítve ezzel a kooperatív játék előrejelző képességét. Ennek a pontnak – ami a játék egy megoldása – pedig rendelkeznie kell olyan tulajdonságokkal, amelyek alkalmassá teszik arra, hogy a kooperatív szakasz eredményeit kellőképp megragadhassuk vele. Ezek a tulajdonságok a következők:

1. Legyen definiált;
2. Ha nemüres a mag, legyen magbéli;
3. Legyen pontmegoldás.

Ez a három tulajdonság minimálisan szükséges ahhoz, hogy olyan megoldáskonceptiót tudjunk adni, amely mellett racionális játékosokat feltételezve alkalmazható

eredményt kapunk.

E feltételezések alapján adjuk meg a biform játék általunk javasolt definícióját!

2.1. definíció. *Egy n -szereplős biform játék alatt az $(S^1, \dots, S^{2^N-2}; V; \psi)$ együttest értjük, ahol*

(a) S^i véges halmaz, $\forall i = 1, \dots, N$;

(b) $V : S^1 \times \dots \times S^N \rightarrow M : 2^N \rightarrow \mathbb{R}, V(s^1, \dots, s^n)(\emptyset) = 0$; és

(c) $\psi : \mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ egy pontmegoldás az N játékoshalmazzal rendelkező játékok osztályán $(\mathcal{G}^N)$.

Ebben a formában felírt játék esetében már nem áll fenn az az inkonzisztencia, amit a modellbe kívülről adott paraméter okozott a korábbiakban. Mi egy lehetséges logika mentén javaslatot teszünk egy konkrét ψ megoldás alkalmazására. A mi megoldáskonceptiónkban a kooperatív szakaszban feltételezzük a játékosokról, hogy mind „szuper” tárgyaló partnerek. Ezalatt azt értjük, hogy egyik fél sem számít arra, hogy a saját képességei javára, vagy hátrányára torzul az osztozkodás eredménye. Másképp szólva, minden résztvevőről feltesszük, hogy teljesen kompromisszumkész. Egy ilyen osztozkodás eredményét kooperatív játékok esetén a nukleolusz reprezentálja. A továbbiakban szükséges definiálnunk a nukleoluszt és megmutatnunk, miért tartjuk alkalmazható megoldáskonceptiónak.

3. A nukleolusz (Gyetvai)

A nukleoluszt Schmeidler (1969) vezette be az irodalomba. A 2.2 részben ismertett tulajdonságokat teljesíti, emiatt ezt fogjuk használni a biform játék illusztrálásakor, de hangsúlyozzuk, más megoldáskonceptiók is alkalmazhatók, amelyek ki elégítik ezen tulajdonságokat. A nukleolusz szerinti kifizetések azok, amelyek esetén a maximális többletet elérő koalíció többlete lexikografikus értelemben minimális. Így a megszerzett többlet mintegy "szétterül", nem ér el egyetlen koalíció sem az indokoltnál jóval magasabb többletet. Ezt interpretáltuk korábban "szuper" tárgyalóképességként.

Azért, hogy az (alkalmazások szempontjából érdektelen) elfajult játékok miatti ne-

hézskéket kiküszöböljük, vizsgálatunkat eleve a nemüres elosztáshalmazzal rendelkező játékokra szorítjuk. Jelölje $\mathcal{G}_0^N$ ezek N játékoshalmazzal rendelkező halmazát.

3.1. definíció. *Nukleolus*

Egy $v \in \mathcal{G}_0^N$ játék nukleolusa

$$N(v) = \{\mathbf{x} \in I(v) : \theta(\mathbf{x}) \leq_{lex} \theta(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in I(v)\},$$

ahol $I(v)$ a $v \in \mathcal{G}_0^N$ játék elosztáshalmaza, $\theta : \mathbb{R}^{2^n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{2^n-2}$ rendezett többletvektor, amely a $(2^N \setminus \{\emptyset, N\})$ -beli koalíciók egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ kifizetés melletti többleteinek nemnövekvő sorrendbe állított elemeiből áll, és $a \leq_{lex} b$ a és b vektorok lexikografikus rendezése.⁵

Most kimondjuk és bizonyítjuk azokat a tételeket, amelyek miatt a nukleoluszt a biform játékokban is alkalmazható megoldáskoepciónak tartjuk. Elsőként megmutatjuk, hogy a nukleoluszt definiált, azaz $\mathcal{G}_0^N$ -beli játékok esetében minden körülmények között létezik, így a biform játék nem-kooperatív szakaszában biztosan alkalmazhatjuk.

3.2. tétel. *A nukleoluszt definiált.*

Bizonyítás. (Schmeidler (1969)) Első lépésként definiáljuk újra a többletvektor i -edik elemét:

$$\theta_i(\mathbf{x}) = \max\{\min\{e(S, \mathbf{x}) | S \subseteq \underline{A}\} | \underline{A} \subset 2^N, \underline{A}^C = i\}$$

Megjegyezzük, hogy $\theta_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, 2^N$ folytonos. Második lépésként definiáljuk a következő halmazt:

$$I_i(v) = \begin{cases} \{\mathbf{x} \in I(v) : \theta_1(\mathbf{x}) \leq \theta_1(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in I(v)\} & , \text{ ha } i = 1 \\ \{\mathbf{x} \in I_{i-1}(v) : \theta_i(\mathbf{x}) \leq \theta_i(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in I_{i-1}(v)\} & , \text{ ha } i = 2, 3, \dots, 2^N \end{cases}$$

Mivel $I(v)$ kompakt és $\theta_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, 2^N$ folytonos, következik, hogy $I_i(v)$ kompakt és nemüres. Látható, hogy $I_{2^N}(v) = N(v)$, így a tételt bizonyítottuk. ■

Ezek után megmutatjuk, hogy a nukleoluszt egyetlen kifizetést ad eredményül, így egyetlen ponttá sűrítethetjük a kooperatív játékot. Az így kapott pontokat pedig egyértelműen rangsorolhatjuk a nem-kooperatív szakaszban.

⁵ $a \leq_{lex} b \Leftrightarrow a = b$ vagy $a_i < b_i$ az első i elemre, melyben a és b eltér.

3.3. tétel. *A nukleolusz pontértékű megoldás.*

Bizonyítás. (Schmeidler (1969)) A tétel bizonyításához elég belátnunk, hogy $\theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{y})$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ esetén

$$2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) <_{lex} \theta(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{y}).$$

Ehhez vezessük be a következő $\eta : \mathbb{R}^{2^N} \rightarrow \mathbb{R}^{2^N}$, elemeivel definiált rendezőfüggvényt:

$$\eta_i(z) = \max(\min\{z_j : j \in S, S \subseteq N \setminus \{i\}\}), z \in \mathbb{R}^{2^N}.$$

Látható, hogy

$$\eta(\{e(S, \mathbf{x}) : S \subseteq N\}) = \theta(\mathbf{x});$$

$$\eta(\{e(S, \mathbf{y}) : S \subseteq N\}) = \theta(\mathbf{y});$$

$$\eta(\{e(S, \mathbf{x} + e(S, \mathbf{y})) : S \subseteq N\}) = 2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right).$$

Schmeidler (1969) állítása szerint $\eta(x + y) \leq_{lex} \eta(x) + \eta(y)$, így

$\eta(\{e(S, \mathbf{x}) + e(S, \mathbf{y}) : S \subseteq N\}) \leq_{lex} \eta(\{e(S, \mathbf{x}) : S \subseteq N\}) + \eta(\{e(S, \mathbf{y}) : S \subseteq N\})$, azaz

$$2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) \leq_{lex} \theta(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{y}).$$

Ha $2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) <_{lex} \theta(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{y})$, kész vagyunk.

Ha $2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) =_{lex} \theta(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{y})$ ⁶, az csak úgy lehetséges, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ami ellentmond a kezdeti feltételnek. ■

Végül kimondjuk a 3.4 állítást.

3.4. állítás. *Amennyiben nem üres, a mag tartalmazza a nukleoluszt.* (Schmeidler (1969))

Az állításból következik, hogy a játékosok valóban alapozhatnak a nukleoluszbeli kifizetésekre a nem-kooperatív szakaszban, hiszen biztosak lehetnek abban, hogy a végső kifizetésvektor magbeli lesz. Ezzel eleget tettünk Brandenburger és Stuart (2007) ki nem mondott, de sugallt követelményének, hogy a nem-kooperatív szakasz döntését, amennyiben ez lehetséges, magbeli kifizetésre alapozzuk.

A következő részben illusztráljuk az általunk definiált biform játékot egy már korábban ismerttetett példa segítségével.

⁶ Ha két vektor lexikografikusan egyenlő, akkor egyenlőek, vagyis

$$2\theta\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) = \theta(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{y}).$$

4. Az innovációjáték (Gyetvai)

Térjünk vissza az innovációjátéokra és alkalmazzuk a biform játék új megadását. A játék megoldása során a biform játék 2.1-es definícióját vesszük alapul. A kooperatív szakaszban pedig a korábban ismertetett okok miatt a nukleolusszal határozzuk meg a végső kifizetéseket.

Ebben a részben megnézzük a korábban vizsgált innovációjátékot részletesebben, általánosabban. A paraméteres formában felírt játék lehetőséget ad arra, hogy a konkrét számoktól elvonatkoztatva elemezni tudjuk különböző szituációkban a biform játékot. Mielőtt azonban áttérnénk a játék paraméteres formájának vizsgálatára, oldjuk meg a korábban ismertetett innovációjátékot.

4.1. A módosított játék megoldása

A játék megoldási folyamata a mag meghatározásáig megegyezik a 2.2-es részben leírtakkal. A normál forma megadása érdekében azonban az általunk választott megoldáskonceptiót alkalmazzuk. Először kiszámoljuk a négy kooperatív játék nukleoluszt. A kooperatív játékokat jelöljük a következőképpen:

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	a játék	b játék
	innovál	b^* játék	c játék

A b és b^* játékok valójában megegyeznek, hiszen a két cég szerepe felcserélhető. Eltérés csak abban van, hogy melyik cég innovál. A nukleolusz az a és a c játék esetén könnyen megadható. A mag egyelemű, így a 3.4 állítás szerint a nukleolusz megegyezik a maggal:

$$N(a) = (0, 0, 4, 4, 4), \text{ illetve } N(c) = (0, 0, 9, 8, 7)$$

A b illetve a b^* játék nukleoluszáinak kiszámítását a TUGlab MATLAB-kiterjesztéssel számoltuk ki⁷. A számítás eredményeként a nukleolusz a következőképpen alakul:

⁷ A TUGlab Mirás Calvo és Sánchez Rodríguez (2007) munkája, három-, illetve négyszereplős átruházható hasznosságú játékokhoz szánt oktatási segédlet. A nukleolusz számítására vonatkozó részt úgy módosítottuk, hogy ötszereplős játékok kiszámítására is alkalmas legyen.

$$N(b) = \left(7\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 4\frac{5}{6}, 4\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ illetve } N(b^*) = \left(\frac{1}{3}, 7\frac{5}{6}, 4\frac{5}{6}, 4\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

A nukleolusz megfelelő komponenseit felhasználva felírhatjuk a játék normál formáját. A korábbiakhoz hasonlóan természetesen most is csak a két cégre koncentrálnunk a nem-kooperatív szakaszban, mivel az ő döntésük változtatja meg a kooperatív játék környezetét.

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	(0; 0)	$(\frac{1}{3}; 2\frac{5}{6})$
	innovál	$(2\frac{5}{6}; \frac{1}{3})$	(-5; -5)

Erről a nem-kooperatív játékról elmondhatjuk, hogy egy nemek harca játék. Két tiszta Nash-egyensúly létezik, a b és a b^* kooperatív játékokat eredményező (nem innovál, innovál), illetve (innovál, nem innovál) stratégiapárok. Számítsuk ki a játék kevert Nash-egyensúlyát is! Írjuk fel az első cég várható kifizetését.

$$U_1(\xi, \eta) = \xi\eta \cdot 0 + \xi(1-\eta) \cdot \frac{1}{3} + (1-\xi)\eta \cdot \frac{17}{6} - (1-\xi)(1-\eta) \cdot 5$$

Az egyenletet maximalizáljuk ξ szerint, hogy megkapjuk az első játékos kevert stratégiáját. A játék szimmetriája miatt a egyensúlyi megoldásban a játékosok megegyező valószínűséggel választják az egyik illetve a másik stratégiát.

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = (1-\eta) \cdot \frac{1}{3} - \eta \cdot \frac{17}{6} + (1-\eta) \cdot 5 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\eta = \frac{32}{49}$$

Hasonlóképp $\xi = \frac{32}{49}$. Kevert egyensúlyban tehát a játékosok $\frac{32}{49}$ -ed valószínűséggel nem innoválnak, míg $\frac{17}{49}$ -ed valószínűséggel igen.

A fejezet további részében az innovációjáték további lehetséges formáit írjuk fel paraméteres formában.

A módosított TUGlab elérhető a <http://www.uni-corvinus.hu/index.php?id=23608> oldalon.

A továbbiakban tehát paraméteres formában vizsgáljuk meg az innovációjátékot. Ehhez azonban a korábbiakhoz képest módosítunk a játék megadásán. Legyen három szereplő a piacon: két eladó és egy vásárló. A három különböző játéktípusban az eladni, illetve vásárolni kívánt termékek száma tér el, a vevő rezervációs árai minden esetben megegyeznek. Az árunak, hasonlóan a korábbi fejezetben tárgyaltakhoz, két típusa létezik: innovált és nem innovált termék. A nem innovált termék iránt a vásárló rezervációs ára q , míg az innovált termék iránt p . Az innovált terméket szigorúan magasabbra értékeli, tehát $p > q$, valamint kikötjük, hogy $p > q > 0$. Az innovációnak, csakúgy, mint korábban, egyszeri költsége van a vállalatokra nézve, melynek értéke c . Természetesen kikötjük, hogy csak akkor dönthetnek a cégek az innováció mellett, ha c kisebb, mint az a bevétel, amelyre az innovált termék értékesítéséből számítanak a nem-kooperatív szakaszban.

4.2. Egyéni túlkínálat

Egyéni túlkínálatról beszélünk, ha a vásárló igényeit egy eladó is teljes mértékben ki tudja elégíteni. Két eladó esetén tehát túlkínálattal állunk szemben. Jelen játékban minden vevő egy terméket kínál eladásra, a vásárló pedig egy terméket szeretne megvenni. Ebben a formában a kooperatív szakaszban egy lóvásárjátékot játszunk a szereplők. Tekintsük át, hogy az egyes koalíciók mekkora értéket képesek teremteni!

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$	$v(13)$	$v(23)$	$v(N)$
0	0	0	0	p	q	p

A táblázat azt az esetet tartalmazza, amikor az 1. cég vezeti be az innovációt. Az innováló céget 1-gyel, a nem innoválót 2-vel, a vevőt 3-mal jelöljük. A táblázatból látható, hogy a nagykoalíció értéke megegyezik a $v(13)$ koalíció értékével. Ugyan megalakul a nagykoalíció, az innováló cégnek (1) és a vevőnek (3) köszönhető az értékteremtés, a nem innováló cég (2) szerepe indifferens. Leng és Parlar (2010) cikkükben a háromszereplős TU-játékok nukleoluszának analitikus számítási módját közlik; számításainkkor ezt vettük alapul. A nukleolusz a három játékos esetén a következő értékeket adja:

$$N(v) = \left(\frac{p-q}{2}, 0, \frac{p+q}{2} \right)$$

A kiszámolt értékeket felhasználva megadjuk a játék normál formáját:

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	$(0; 0)$	$(0; \frac{p-q}{2} - c)$
	innovál	$(\frac{p-q}{2} - c; 0)$	$(-c; -c)$

A játék megadása után megtehetjük az említett kikötést a c költségre: $c \leq \frac{p-q}{2}$, hiszen maximálisan $\frac{p-q}{2} - c$ lehet a bevétele az innovációt követően. A nem-kooperatív játéknak két tiszta Nash-egyensúlya létezik, mégpedig az a két stratégiapár, ahol az innováció által elért bevétele az innováló cégnek maximális. Ezekre a helyzetekre igaz ugyanis, hogy mindkét játékos stratégiája parciálisan legjobb választ ad a másik játékos stratégiájára. A tiszta Nash-egyensúlyok mellett természetesen ki tudjuk számolni kevert stratégiák esetére is a Nash-egyensúlyt. Írjuk fel az első cég várható kifizetését.

$$U_1(\xi, \eta) = \xi\eta \cdot 0 + \xi(1-\eta) \cdot 0 + (1-\xi)\eta \cdot \left(\frac{p-q}{2} - c\right) - (1-\xi)(1-\eta) \cdot c$$

Hasonlóan a korábbi példához az egyenletet maximalizáljuk ξ szerint.

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = -\eta \left(\frac{p-q}{2} - c\right) + (1-\eta) \cdot c \doteq 0$$

$$\eta = \frac{2c}{p-q},$$

η valóban lehet valószínűség, mivel $p > q > 0$ és $c \leq \frac{p-q}{2}$. A játék szimmetriája miatt $\xi = \frac{2c}{p-q}$.

Ha tehát $\xi = \eta$ a valószínűsége annak, hogy a cégek az eredeti terméket dobják piacra – vagy hasonlóképp $(1-\xi) = (1-\eta)$ valószínűséggel innoválnak –, a játéknak lesz kevert Nash-egyensúlya.

4.3. Kollektív túlkínálat

Kollektív túlkínálat alatt azt a szituációt értjük, amikor az egyes eladók nem tudják egyedül kielégíteni a fogyasztó igényét, de ketten együtt már túlkínálattal lépnek fel a piacon. Jelen szituációban mindkét cég két terméket képes a piacra vinni, a vevő

pedig hármat vásárol meg ezek közül. Lássuk ennek a játéknak az egyes koalíciókra vonatkozó értékeit:

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$	$v(13)$	$v(23)$	$v(N)$
0	0	0	0	$2p$	$2q$	$2p + q$

Láthatjuk, hogy a helyzet megváltozik az előző szituációhoz képest, hiszen most nem lehet kihagyni a koalícióból azt a játékost sem, amelyik nem innovál. A nukleolusz a következőképpen alakul:

$$N(v) = \left(\frac{2p-q}{2}, \frac{q}{2}, p+q \right)$$

Csakúgy, mint korábban, most is írjuk be a megfelelő értékeket a játék normál formájába.

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	$(0; 0)$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{2p-q}{2} - c\right)$
	innovál	$\left(\frac{2p-q}{2} - c; \frac{q}{2}\right)$	$(-c; -c)$

A normál forma felírását követően a következő kikötést tehetjük a c költség-re vonatkozóan: $\frac{2p-q}{2} \geq c$. A játéknak a korábbiakhoz hasonlóan két tiszta Nash-egyensúlya van. Ezek, mint az egyéni túlkínálat esetén, az innovációt végrehajtó játékos lehetséges legnagyobb kifizetését eredményező stratégiapárok. A kevert Nash-egyensúlyt pedig hasonlóan számíthatjuk.

$$U_1(\xi, \eta) = \xi\eta \cdot 0 + \xi(1-\eta) \cdot \frac{q}{2} + (1-\xi)\eta \cdot \left(\frac{2p-q}{2} - c\right) - (1-\xi)(1-\eta) \cdot c;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = (1-\eta) \cdot \frac{q}{2} - \eta \cdot \left(\frac{2p-q}{2} - c\right) + (1-\eta) \cdot c \doteq 0,$$

innen

$$\eta = \frac{q+2c}{2p}$$

Ez valóban lehet valószínűség, mert $p, q, c \geq 0$ és $\frac{2p-q}{2} \geq c$ a nukleolusz megfelelő komponensei miatt. ξ, η értelmezése megegyezik a 4.2-es játéknál leírtakkal. E játék értelmében azokban a szituációkban, amikor a termékek között különbség van a vevő mindkét cégtől vásárol, mind a két cég pozitív kifizetést ér el, mivel a vevő nem tudja megszerezni az összes többletet.

4.4. Egyensúly vagy túlkereslet

Az utolsó vizsgált eset az a szituáció, amikor a vevő ugyanannyi vagy több terméket kíván megvenni, mint amennyit a piacon kínálnak a cégek. Jelen példában egy-egy terméket kínálnak eladásra a cégek, valamint egy terméket vásárol a vevő, de megjegyezzük, hogy a termékek darabszámának n -szerese esetén a kifizetések is n -szeresükre nőnek. Minden esetben a fenti példákkal analóg módon járunk el. A koalíciók értéke a következő lesz:

$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$	$v(13)$	$v(23)$	$v(N)$
0	0	0	0	p	q	$p + q$

Ennek alapján kiszámoljuk a nukleolust:

$$N(v) = \left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p+q}{2} \right)$$

Majd megadjuk a játék normál formáját:

		2. cég	
		nem innovál	innovál
1. cég	nem innovál	$(0; 0)$	$\left(\frac{q}{2}; \frac{p}{2} - c\right)$
	innovál	$\left(\frac{p}{2} - c; \frac{q}{2}\right)$	$(-c; -c)$

Megtesszük a szükséges kikötést a c -re: $\frac{p}{2} \geq c$. A játék tiszta Nash-egyensúlyai megegyeznek az előző két játék esetén bemutatott egyensúlyokkal. A kevert stratégiák esetén kialakuló Nash-egyensúlyt pedig az előző feladatokhoz hasonlóan számoljuk:

$$U_1(\xi, \eta) = \xi\eta \cdot 0 + \xi(1-\eta) \cdot \frac{q}{2} + (1-\xi)\eta \cdot \left(\frac{p}{2} - c\right) - (1-\xi)(1-\eta) \cdot c;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = (1-\eta) \cdot \frac{q}{2} - \eta \cdot \left(\frac{p}{2} - c\right) + (1-\eta) \cdot c \doteq 0,$$

innen

$$\eta = \frac{q + 2c}{p + q}$$

Ez is lehet valószínűség, mert $p, q, c \geq 0$ és $\frac{p}{2} \geq c$ a nukleolusz megfelelő komponensei miatt. Hasonlóan a kollektív túlkínálat esetéhez, azokban az esetekben, amikor a piacon lévő termékek iránt eltér a vásárló rezervációs ára és mindkét céggel kooperál, nem képes megszerezni az összes többletet, így mind a két cég pozitív kifizetést ér el.

5. Reflektálás a modellel kapcsolatos kérdésekre (Török)

Ebben a részben röviden reagálunk a biform játékkal kapcsolatban felmerülő kérdésekre. Brandenburger és Stuart (2007) cikkében vázolt problémák közül tekintjük át azokat, amelyeket érint a magabiztossági együttható modellből történő kivezetése.

5.1. A mag üressége

Az eredeti modellben problémát jelentett a mag ürességének kérdése – ez volt vizsgálatunk egyik kiindulópontja. A biform játék új modelljének megalkotásakor többek között e probléma megszüntetését tűztük ki célul. Az üres mag problémát jelent az eredeti modellben, hiszen a magabiztossági együttható a maghoz kötötten határozza meg a kooperatív játékok kifizetését. Az 1.1-es definíció szerint ugyanis a magabiztossági együttható azt adja meg, hogy az i játékos mit gondol arról, hogy a számára elérhető legnagyobb és legkisebb magbeli kifizetés különbségének mekkora hányadát képes a tárgyalás során megszerezni. Az új modell megadásában azonban olyan pontmegoldást alkalmazunk (illusztrációnkban ez a nukleolusz), amely olyankor is definiált, amikor a mag üres. Így ez nem okozhat problémát az új definíció szerint.

5.2. Kooperatív játékok közötti választás a nem-kooperatív szakaszban

Ezt a problémát a dolgozat első felében részletesen kifejtettük, de érdemes visszatérni a kérdésre pár gondolat erejéig. Azokban az általunk is bemutatott helyzetekben, amikor a mag nem egy pont lesz, mint pl. a 2.1-es játék esetében, hanem halmazértékű, mint a 2.2 játékban, nem lehet a kooperatív játékhoz egyértelmű kifizetéseket megadni. Brandenburger és Stuart (2007) a problémát a magabiztossági együtthatóval oldja fel, ami információt hordoz a játékosok tárgyalóképességére vonatkozóan. A biform játék új megadása során alkalmazott megoldáskonceptióban azonban nincsen lehetőség arra, hogy bármilyen módon szerepeltessük ezeket az esetlegesen eltérő tárgyalási képességeket. Véleményünk szerint azonban a magabiztossági együttható inkonzisztenciája kérdésessé teszi ezeknek a képességeknek illetően módon a modell-

be történő sikeres bevezetését.

Természetesen egy pontmegoldás alkalmazásával szemben is felmerülhetnek kételemek. Illusztrációnkban, ahol ez a pontmegoldás a nukleolusz, nincs arra nézve garancia, hogy a kooperatív játék során történő osztozkodáskor valóban olyan kompromisszumkész, "szuper" tárgyaló partnerek ülnek asztalhoz, mint akiket feltételeztünk. Megtörténhet, hogy a játékosok végül nem azokat a kifizetéseket érik el, amikre alapozták a nem-kooperatív szakaszban a döntésüket. Elmondhatjuk azonban, hogy azok a kifizetések, amik alapján döntöttek, minden esetben elérhetőek lettek volna, így nem hibáztak, amikor a nukleolusz szerinti kifizetéseik közül választottak a nem-kooperatív szakaszban.

5.3. Episztemológiai feltételezések

A biform játék teljes információs játék. A magabiztossági együttthatók köztudott tudásként való szerepeltetésével Brandenburger és Stuart (2007) részletesen foglalkozik. Véleményük szerint bár a szituáció inkonzisztens, ez nem jelent problémát a játék során. Ez ugyanis hasonló ahhoz a helyzethez, amelyben a játékosok vélekedése eltér, ezek azonban közismertek. A biform játék új megadásában ilyesfajta episztemológiai inkonzisztenciáról nem beszélhetünk, hiszen az alkalmazott megoldáskonceptióról kikötöttük, hogy minden esetben létezik, és egyértelműen megadható.

Hivatkozások

- Brandenburger, A. és Stuart, H. W. (2007). Biform games. *Management Science*, 53(4):537–549.
- Leng, M. és Parlar, M. (2010). Analytic solution for the nucleolus of a three-player cooperative game. *Naval Research Logistics (NRL)*, 57(7):667–672.
- Mirás Calvo, M. n. és Sánchez Rodríguez, E. (2007). *TUGlab: A cooperative game theory toolbox*. Universidad de Vigo.
- Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.*, 17:1163–1170.
- Forgó, F., Pintér M., Simonovits A. és Solymosi T. (2007). Játékelmélet. Elektronikus jegyzet.
- Solymosi, T. (2007). Kooperatív játékok. Elektronikus jegyzet.

A. Az eredeti játék magjának számítása (Gyetvai)

1. cég	2. cég	1. vevő	2. vevő	3. vevő	$v_a(S)$	$v_b(S)$	$v_c(S)$
1		3			4	4	7
1			4		4	4	7
1				5	4	4	7
	2	3			7	4	7
	2		4		7	4	7
	2			5	7	4	7
1	2	3			7	4	7
1	2		4		7	4	7
1	2			5	7	4	7
1		3	4		8	8	14
1		3		5	8	8	14
1			4	5	8	8	14
	2	3	4		14	8	14
	2	3		5	14	8	14
	2		4	5	14	8	14
1	2	3	4		14	8	14
1	2	3		5	14	8	14
1	2		4	5	14	8	14
1		3	4	5	8	8	14
	2	3	4	5	14	8	14
1	2	3	4	5	18	12	21

$$C_a = (0, 0, 4, 4, 4)$$

$$C_b = (0, 6, 4, 4, 4)$$

$$C_c = (0, 0, 7, 7, 7)$$

B. A módosított játék magjának számítása (Gyertvai)

Az alábbi táblázat mutatja az 5-szereplős innovációjáték nemnulla-értékű koalícióinak tagjait és értékét. Mellette szerepelnek azok az egyenlőségek és egyenlőtlenségek, melyek a játék magját adják.

1. cég	2. cég	1. vevő	2. vevő	3. vevő	v(S)			
1		3			9	x_4	$\leq$	8
1			4		8	x_3	$\leq$	9
1				5	7			
	2	3			4			
	2		4		4		$\mathbf{x_2 = 4 - x_5}$	
	2			5	4			
1	2	3			9	$x_4 + x_5$	$\leq$	12
1	2		4		8	$x_3 + x_5$	$\leq$	13
1	2			5	7	$x_3 + x_4$	$\leq$	14
1		3	4		17			
1		3		5	16		$\mathbf{x_1 = 17 - x_3 - x_4}$	
1			4	5	15			
	2	3	4		8	x_4	$\geq$	3
	2	3		5	8	x_4	$\geq$	4
	2		4	5	8	x_3	$\geq$	4
1	2	3	4		17	x_5	$\leq$	4
1	2	3		5	16	x_4	$\leq$	5
1	2		4	5	15	x_3	$\leq$	6
1		3	4	5	17			
	2	3	4	5	8			
1	2	3	4	5	21			

Az egyenlőségek és egyenlőtlenségek a következő módon vonhatóak össze:

$$6 \leq x_1 \leq 9;$$

$$0 \leq x_2 \leq 1;$$

$$4 \leq x_3 \leq 6;$$

$$4 \leq x_4 \leq 5;$$

$$3 \leq x_5 \leq 4.$$

Hogy felrajzolhassuk a magot a két eladó viszonylatában, meg kell vizsgálnunk, x_2 hogyan változik x_1 függvényében. Ehhez először rögzítsük x_1 -et a 6-os értéken. Ekkor $x_4 + x_5 \geq 9$ v(145) miatt. Mivel $4 \leq x_4 \leq 5$ és $3 \leq x_5 \leq 4$, ez csak akkor teljesülhet, ha $x_4 = 5$ és $x_5 = 4$. Emiatt azonban $x_2 = 0$.

Most legyen $x_1 = 7$. Ekkor $x_3 + x_4 \geq 10$, $x_3 + x_5 \geq 9$ és $x_4 + x_5 \geq 8$ v(134), v(135) és v(145) miatt. Megoldva az egyenlőtlenségrendszer, úgy találjuk, hogy $x_3 \geq 5\frac{1}{2}$, $x_4 \geq 4\frac{1}{2}$ és $x_5 \geq 3\frac{1}{2}$. Emiatt azonban $x_2 \leq \frac{1}{2}$.

Végül legyen $x_1 = 8$. Ekkor $x_3 + x_4 \geq 9$, $x_3 + x_5 \geq 8$ és $x_4 + x_5 \geq 7$ v(134), v(135) és v(145) miatt. Az egyenlőtlenségrendszer megoldásaként $x_3 \geq 5$, $x_4 \geq 4$ és $x_5 \geq 3$. Ekkor $x_2 \leq 1$, vagyis itt x_2 már felveheti lehetséges legnagyobb értékét.

Összefoglalva: x_1 és x_2 csak egymás rovására nőhet az $x_1 \in [6; 8]$ tartományban. Így alakul ki a 2.2 ábrán látható trapéz alakú magvetület.