

OTDK-DOLGOZAT

Szendrey Orsolya
BSc

2013

Ellátási láncok vizsgálata játékelméleti módszerekkel

Supply Chain Analysis with Cooperative Transferable
Utility Games

Szendrey Orsolya

Kézirat lezárva: 2012. március 26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. TU-játékok	3
3. A kétoldalú hozzárendelési játékok	6
3.1. A kétoldalú hozzárendelési játékok magja nemüres	7
4. Az m-oldalú hozzárendelési játékok	10
4.1. Lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékok	12
5. A nukleolusz élmonotonitása	22
6. Összefoglalás	27
Irodalomjegyzék	28

Ábrák jegyzéke

4.1.	3-oldalú lokálisan additív hozzárendelési játék	14
4.2.	4-oldalú lokálisan additív hozzárendelési játék	16
4.3.	Az ekvivalens folyam feladathoz tartozó gráf	18
5.1.	A nukleolusz élmonotonitása I.	25
5.2.	A nukleolusz élmonotonitása II.	26

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatban az ellátási láncokat, mint lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat tárgyaljuk, ahol az ellátási lánc szereplői jelentik a játékosokat. Ha az ellátási láncokat tekintjük, rögtön felmerül a kérdés, hogy a piaci szereplők miként alakítsák ki a láncokat, hogy azok hatékonyan, a lánc szereplőinek a legnagyobb hasznot biztosítva tudjanak működni. Arra keressük a választ, hogy a piaci szereplők miként osztozzanak a közösen elért hasznon, ha egy olyan elosztást szeretnénk, amelyből senkinek sem érdeke elmozdulni.

A dolgozat új eredménye, hogy szemben a kétoldalú piacokkal, ahol a nukleolusz páronként élmonoton (lásd. Solymosi et al (2012)), megmutatjuk, hogy a legalább háromoldalú piacok esetében a nukleolusz páronkénti élmonotonitása nem teljesül.

A dolgozatot az átruházható hasznossági kooperatív játékok, azaz TU-játékok rövid ismertetésével kezdjük. Bevezetjük a TU-játékok vizsgálatához szükséges legfontosabb alapfogalmakat és tulajdonságokat, amelyekre minden esetben példát is adunk.

Az alapok bevezetése után, immár a szükséges fogalmak ismeretében rátérünk a hozzárendelési játékok vizsgálatára. A dolgozat harmadik fejezetében a Shapley és Shubik (1972)-féle kétoldalú hozzárendelési játékokat tárgyaljuk. Shapley és Shubik (1972)-hoz hasonlóan mi is igazoljuk, hogy a kétoldalú hozzárendelési játékok magja nem üres.

A következő fejezetben a kétoldalú hozzárendelési játékok egy általánosítását tekintjük, a kétoldalú piacokat kiterjesztjük és m -oldalú piacokat vizsgálunk. Quint (1991b) alapján példát hozunk olyan m -oldalú hozzárendelési játékokra, amelynek a magja, a kétoldalú játékokéval szemben, üres.

Ami az ellátási láncokat illeti, megjelenítésükre az m -oldalú hozzárendelési játékok egy speciális esetét, a Stuart (1997) által bevezetett lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat használjuk. Megmutatjuk, Stuart (1997)-hoz hasonlóan, hogy a lokálisan additív játékok magja nemüres, tehát az ellátási lánc szereplői szét tudják úgy osztani a közösen elért hasznukat, hogy abból az elosztásból senkinek sem éri meg (közösen sem) elmozdulni. Ennek az igazolásához a játékot átalakítjuk egy speciális maximális-haszon folyam

problémává. A könnyebb megértés végett az átalakítást és a bizonyítást is lépésenként végezzük el és minden egyes lépést konkrét példával is illusztrálunk.

A dolgozatban vizsgáljuk továbbá a hozzárendelési játékok nukleoluszt. Solymosi et al (2012) igazolták, hogy a kétoldalú hozzárendelési játékokra teljesül a nukleolusz (páronkénti) élmonotonitása. Ezzel szemben mi megmutatjuk, hogy a lokálisan additív m -oldalú ($m \geq 3$) hozzárendelési játékok nukleolusza nem páronként élmonoton.

A utolsó fejezetben a nukleolusz kiszámítását a Sziklai Balázs által készített program segítségével végeztük.

2. fejezet

TU-játékok

A kooperatív játékelmélet olyan szituációkkal foglalkozik, amelyekben a játékosok koalícióba léphetnek egymással és kikényszeríthető megállapodásokat köthetnek. A kooperatív játékelméleten belül megkülönböztetünk átruházható hasznossági és nem átruházható hasznossági játékokat, valamint olyan játékokat, amelyek az előbb felsorolt két típus között, mint átmenet helyezkednek el. A dolgozatban az átruházható hasznossági, azaz TU-játékkal foglalkozunk, azon belül is a hozzárendelési játékokkal. Mielőtt azonban rátérnénk a hozzárendelési játékok részletes vizsgálatára, a dolgozat második fejezetében szeretnénk röviden bemutatni a TU-játékokat, kiemelni a számunkra legfontosabb tulajdonságait és a hozzájuk kapcsolódó alapfogalmakat.

Jelölje N a játékosok véges, nemüres halmazát. A játékosok tetszőleges $T \subseteq N$ részhalmazát koalíciónak nevezzük. $T = N$ esetén a nagykoalícióról, $T = \emptyset$ esetén az üres koalícióról beszélünk.

2.1. definíció. Legyen N a játékosok véges, nemüres halmaza. Legyen $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $v(\emptyset) = 0$. Ekkor v -t átruházható hasznossági, azaz TU-játéknak (transferable utility game) nevezzük. Jelölje továbbá $\mathcal{G}^N$ az N játékosalmazon értelmezett TU-játékok osztályát.

Az általunk vizsgált problémakörben a TU-játékokat úgy reprezentálhatjuk, hogy a koalíciók a vállalatok egy-egy csoportját jelentik, akik összhasznukat maximalizálják, a kifizetések pedig hasznossággal (vagy tetszőlegesen másként mérve, például pénzben) mérhetők, amelyeket a koalícióba lépő vállalatok tetszőleges módon oszthatnak szét egymás között. A 2.1 definícióban szereplő v függvény a vállalatok különböző koalícióihoz rendeli az általuk közösen elérhető kifizetést.

2.2. definíció. A $\psi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ függvényt, amelyre $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A játékososztályon értelmezett megoldásnak nevezzük.

2.3. megjegyzés. A 2.2 definícióban a $\rightrightarrows$ halmazértékű leképezést jelöl.

2.4. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék monoton, ha $S \subseteq T$ esetén teljesül, hogy $v(S) \leq v(T)$ minden $S, T \subseteq N$ koalícióra.

2.5. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$ és a v játék a következő módon adott: $v(\bar{1}) = 0$, $v(\bar{2}) = 0$, $v(\bar{3}) = 0$, $v(\bar{12}) = 0$, $v(\bar{13}) = 5$, $v(\bar{23}) = 3$ és $v(\bar{123}) = 5$. Könnyen beláthatjuk, hogy az ily módon adott játék monoton, ugyanis az egyszemélyes koalíciók értéke nem nagyobb sem a nagykoalíció, sem a kétszemélyes koalíciók értékénél, valamint a kétfős koalíciók kifizetése is legfeljebb akkora, mint a nagykoalíció kifizetése.

2.6. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék szuperadditív, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$ koalícióra, amelyre $S \cap T = \emptyset$, teljesül, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.

2.7. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$ és a v játék a következő módon adott: $v(\bar{1}) = 0$, $v(\bar{2}) = 0$, $v(\bar{3}) = 0$, $v(\bar{12}) = 0$, $v(\bar{13}) = 3$, $v(\bar{23}) = 4$ és $v(\bar{123}) = 4$. Az $S \cap T = \emptyset$ feltételből adódik, hogy elegendő $(\bar{1}) - (\bar{23})$, $(\bar{2}) - (\bar{13})$, $(\bar{3}) - (\bar{12})$, $(\bar{1}) - (\bar{2})$, $(\bar{1}) - (\bar{3})$ és $(\bar{2}) - (\bar{3})$ koalíciópárokat vizsgálni (az üres koalícióra nyilvánvalóan mindig teljesül a feltétel). Az első három esetben a koalíciók uniója a nagykoalíciót adja, amelynek kifizetése minden esetben legalább akkora, mint a megfelelő egy- illetve kétfős koalíciók kifizetéseinek összege. A második három esetben unióként éppen a kétszemélyes koalíciók adódnak, amelyek mindegyikére teljesül, hogy értéke legalább akkora, mint a megfelelő egyszemélyes koalíciók értékének összege.

2.8. definíció. Azt mondjuk, hogy a $v \in \mathcal{G}^N$ játék konvex, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra teljesül, hogy $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

2.9. *példa.* Tekintsük a 2.7 példában adott játékot. Ha az egyfős koalíciókat tekintjük a két-, illetve háromszemélyes koalíciókkal, akkor azokra vagy $S \cap T = \bar{i}$, $i = 1, 2, 3$, vagy az $S \cap T = \emptyset$ miatt $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül. Ha a kétfős koalíciók metszetét vesszük, akkor azok mindig egyelemű koalíciót adnak, amelyekre $v(\bar{i}) = 0$, $i = 1, 2, 3$, így $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül az előző esethez hasonlóan. Végül, ha az egyik kétfős, a másik pedig a nagykoalíció, akkor azok metszete mindig az adott kétfős koalíció, így a 2.8 definícióban szereplő egyenlőtlenség mindig egyenlőség formájában teljesül. Tehát a v játék konvex.

2.10. definíció. (Mag (Gillies, 1959)) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ játék és $S \subseteq N$ egy koalíció. Ekkor a v játék magja a következő:

$$C(v) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in S} u_i \geq v(S), S \subseteq N \text{ és } \sum_{i \in N} u_i = v(N) \right\}. \quad (2.1)$$

2.11. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$ és a v játék a következő módon adott: $v(\bar{1}) = 0$, $v(\bar{2}) = 0$, $v(\bar{3}) = 0$, $v(\bar{12}) = 0$, $v(\bar{13}) = 1$, $v(\bar{23}) = 3$ és $v(\bar{123}) = 3$. Az u vektor a játék magja, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

$$u_1 + u_2 \geq 0$$

$$u_1 + u_3 \geq 1$$

$$u_2 + u_3 \geq 3$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 3$$

Könnyen látható, hogy az $u = (0, 1, 2)$ vektor kielégíti az összes feltételt, így u magbeli. Ugyanakkor u nem az egyetlen magbeli vektor, hiszen például az $u' = (0, 0, 3)$ vektor is eleget tesz minden feltételnek.

3. fejezet

A kétoldalú hozzárendelési játékok

A kétoldalú hozzárendelési játékok első interpretációja a von Böhm-Bawerk (1923)-féle lóvásár modellekre nyúlik vissza. A modern értelemben vett hozzárendelési játékok Shapley és Shubik (1972) nevéhez fűződnek. A Shapley és Shubik (1972)-féle hozzárendelési játékok esetében olyan kétoldalú piacokról beszélhetünk, amelyek egyik oldalán az eladók, a másikon pedig a vevők állnak. Párosítás alatt az eladó-vevő párokat értjük.

A kétoldalú hozzárendelési játékokat a következőképpen definiálhatjuk:

3.1. definíció. Legyenek $B, S \subseteq N$ nemüres, diszjunkt, véges halmazok, $N = B \cup S$, $|B| = n_1$, $|S| = n_2$ és A nemnegatív $n_1 \times n_2$ -es mátrix. Minden $T \subseteq N$ koalíció esetén legyen $\mathcal{P}_A(T) = \{\mathcal{A} \subseteq A \mid \forall a_{ij}, a_{i'j'} \in \mathcal{A} : (i, j), (i', j') \in (B \cap T) \times (S \cap T) \text{ és } ((i, j) = (i', j') \text{ vagy } \{i, j\} \cap \{i', j'\} = \emptyset)\}$, továbbá

$$v_A(T) = \max_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}_A(T)} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{A}} a_{ij} . \quad (3.1)$$

Az így meghatározott v_A játékot az A mátrixszal és a B, S játékosalmazokkal adott kétoldalú hozzárendelési játéknak nevezzük.

Jelöljük továbbá $\mathcal{G}^{B,S}$ -sel a B és S játékosalmazokkal adott kétoldalú hozzárendelési játékok osztályát. A

$$\mu^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}_A(T)} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{A}} a_{ij} \quad (3.2)$$

elemei maximális párosítást határoznak meg a T koalíción. Az így meghatározott kétoldalú hozzárendelési játékban a B játékosalmaz jelöli a vevőket, az S pedig az eladókat. A kétoldalú hozzárendelési játékok, tehát a játékosalmaz két diszjunkt halmazának játékosait, az eladókat és a fogyasztókat rendelik egymáshoz, oly módon, hogy minden eladó csak egy fogyasztóval köthet üzletet és fordítva, így maximalizálják a játékosok az általuk elérhető összhasznot. Az A mátrix a_{ij} eleme azt mutatja, hogy az i -edik vevő a j -edik

eladóval közösen mennyi hasznot tud elérni. Nézzünk egy példát kétoldalú hozzárendelési játékokra.

3.2. *példa.* Vegyünk egy kétoldalú hozzárendelési játékot, amelyben adott két fogyasztó és három eladó. Továbbá a hozzárendelési játékhoz tartozó A mátrix legyen a következő:

$$\begin{array}{ccccc} & i_S = 1 & i_S = 2 & i_S = 3 & \\ i_B = 1 & 3 & 4 & 5 & \\ i_B = 2 & 2 & 4 & 1 & \end{array}$$

Ebben a játékban maximális párosítást határoz meg a $\mu^* = \{(1, 3), (2, 2)\}$ és a nagykoalíció értéke $v(N) = 9$.

3.1. A kétoldalú hozzárendelési játékok magja nemüres

A kétoldalú hozzárendelési játékokat egészértékű lineáris programozási feladatok segítségével vizsgáljuk. Ekkor az LP primális feladata a következőképpen alakul

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i \in B} \sum_{j \in S} a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j \in S} x_{ij} &\leq 1 & i \in B \\ \sum_{i \in B} x_{ij} &\leq 1 & j \in S \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} & i \in B, j \in S \end{aligned} \tag{3.3}$$

ahol a a_{ij} -k a hozzárendelési játékhoz tartozó A mátrix megfelelő elemei. A feladat célfüggvénye azt jelenti, hogy a játékosok maximalizálják az általuk elérhető összhasznot. Az első korlátozó feltétel szerint egy fogyasztó sem köthet egyszerre több eladóval üzletet. A második korlátozó feltétel szerint, a fogyasztókhöz hasonlóan az eladókra is teljesül, hogy egyik eladó sem üzletelhet több fogyasztóval egyszerre.

Tekintsük a (3.3) ILP probléma relaxáltját:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i \in B} \sum_{j \in S} a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i \in B} x_{ij} &\leq 1 & j \in S \\ \sum_{j \in S} x_{ij} &\leq 1 & i \in B \\ x_{ij} &\geq 0 & i \in B, j \in S \end{aligned} \tag{3.4}$$

Megmutatjuk, hogy a (3.4) feladatnak van egészértékű optimális bázismegoldása. Az egészértékűség feltételezésére azért van szükségünk, hogy biztosítani tudjuk azt, hogy a

folytonos feladat optimális célfüggvény értéke ne haladja meg a diszkrét feladat optimális célfüggvény értékét. Mielőtt az egészértékűség bizonyítására rátérnénk, megadjuk a bizonyításhoz szükséges fogalmakat és tételeket.

3.3. definíció. *Egy mátrixot totálisan unimodulárnak nevezünk, ha minden négyzetes almatrixának determinánsa $-1, 0$ vagy 1 .*

3.4. tétel. *A (3.4) lineáris programozási feladat együtthatómátrixa totálisan unimoduláris.*

Bizonyítás. Az (3.4) feladat együtthatómátrixa olyan, hogy minden oszlopának pontosan két eleme 1 , a többi 0 . Szorozzuk meg a mátrix $\sum_{j \in S} x_{ij} \leq 1$ feltételekhez tartozó sorait -1 -gyel. Az almatrixok mérete szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy az így kapott mátrix és ezáltal az eredeti is, totálisan unimoduláris.

Minden 1×1 -es almatrix determinánsa nyilvánvalóan csak $-1, 0$ és 1 lehet. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $r \times r$ -es almatrixra. Vegyünk egy tetszőleges $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrixot. Ekkor három eset lehetséges:

- ha az $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrix olyan, hogy van csupa 0 -ból álló oszlopa, akkor a determinánsa 0 ,
- ha az $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrixnak van olyan oszlopa, amelynek csak egy eleme különbözik 0 -tól, akkor ezen oszlop szerint kifejtve egy $r \times r$ -es almatrix determinánjának ± 1 -szeresét kapjuk, ami az indukciós feltevés szerint csak $-1, 0$ vagy 1 lehet,
- ha az $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrix minden oszlopának pontosan két eleme nemnulla. Ekkor a mátrix minden oszlopában pontos egy elem -1 és pontosan egy elem 1 . Ekkor a mátrix sorainak összege éppen a nullvektort adja, így mivel a nullvektor nem triviális lineáris kombinációként adódott, a mátrix sorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak, tehát determinánsa 0 .

■

3.5. definíció. *Normál feladatnak nevezzük az alábbi módon adott lineáris programozási feladatot:*

$$\max\{z = c^T x \mid Ax \leq b; x \geq 0\}$$

3.6. definíció. *Kanonikus alakú feladatnak nevezzük az alábbi módon adott lineáris programozási feladatot:*

$$\max\{z = c^T x \mid Ax = b; x \geq 0\}$$

3.7. definíció. *Módosított normál feladatnak nevezzük az alábbi módon adott lineáris programozási feladatot:*

$$\max\{z = c^T x \mid A_1 x \leq b_1; A_2 x = b_2; x \geq 0\}$$

3.8. definíció. *Az A mátrix oszlopaiból válasszunk ki egy B bázist. Az $x = [x_B, x_N]$ vektort az $Ax = b$ egyenletrendszer B bázishoz tartozó bázismegoldásának nevezzük, ha $Bx_B = b$ és $x_N = 0$.*

3.9. tétel. *Ha a kanonikus alakú feladatnak van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is.*

A 3.9 tétel közismert, így a bizonyításától a dolgozatban eltekintünk, a bizonyítást lásd. Fiala (2010b). Mostmár rátérhetünk az egészértékűség bizonyítására.

3.10. állítás. *A (3.4) feladatnak van egészértékű optimális bázismegoldása.*

Bizonyítás. A (3.4) normál feladat új, nemnegatív változók hozzávételével ekvivalens módon átalakítható kanonikus alakú lineáris programozási feladattá. Az új, kanonikus alakú feladat együtthatómátrixa totálisan unimoduláris marad, hiszen az új változók bevezetésével az eredeti feladat együtthatómátrixa egységvektorokkal bővül.

Lévén, hogy a $B, S \subseteq N$ nemüres halmazok és a feladat megoldáshalmaza korlátos és zárt, a feladatnak van optimális megoldása. Így tehát a 3.9 tétel alapján a feladatnak van optimális bázismegoldása is. Tegyük fel, hogy a kapott kanonikus LP feladat együtthatómátrixának rangja r . Legyen B $r \times r$ -es invertálható almatríxa a feladat együtthatómátrixának. Mivel a feladat együtthatómátrixának minden eleme egész szám, így B -nek a B^* -gal jelölt adjungált mátrixának is minden eleme egész. Minthogy a feladat együtthatómátrixa totálisan unimoduláris és B invertálható, következik, hogy $\det B = \pm 1$. Tehát abból, hogy a $B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^*$ mátrix és a b vektor minden eleme egész, adódik, hogy $x_B = B^{-1}b$ bázismegoldás is egész. ■

A játékosok kifizetéseit megkapjuk, ha meghatározzuk a (3.4) feladat duálisát és azt megoldjuk. A duális feladat:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i \in B} u_i + \sum_{j \in S} v_j \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in T \cap B} u_i + \sum_{j \in T \cap S} v_j \geq v(T) \\ & u_i, v_j \geq 0 \quad i \in B, j \in S \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ebben az u vektor elemei a fogyasztók, a v vektor elemei pedig az eladók kifizetéseit jelölik. Az erős dualitás tételéből adódik, hogy $z = w = v(N)$ és a (3.5) feladat (u^*, v^*) optimális megoldására teljesül, hogy $(u^*, v^*) \in C(v)$.

4. fejezet

Az m -oldalú hozzárendelési játékok

Az m -oldalú hozzárendelési játékok a kétoldalú hozzárendelési játékok általánosításának tekinthetők. A dolgozat negyedik fejezetében célunk az m -oldalú hozzárendelési játékok rövid bemutatása, majd ezt követően rátérünk az ellátási láncok vizsgálatára.

Az m -oldalú hozzárendelési játékokat a következőképpen adhatjuk meg:

4.1. definíció. Legyenek $N_1, N_2, \dots, N_m \subseteq N$ nemüres, diszjunkt, véges halmazok, amelyekre $N = \bigcup_{j=1}^m N_j$, $|N_j| = n_j$ és legyen A nemnegatív $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$ -es polimátrix. Továbbá minden $T \subseteq N$ -re legyen $\mathcal{P}_A(T) = \{\mathcal{A} \subseteq A \mid \forall a_{i_1 \dots i_m}, a_{i'_1 \dots i'_m} \in \mathcal{A} : (i_1, \dots, i_m), (i'_1, \dots, i'_m) \in (N_1 \cap T) \times \dots \times (N_m \cap T) \text{ és } ((i_1, \dots, i_m) = (i'_1, \dots, i'_m) \text{ vagy } \{i_1, \dots, i_m\} \cap \{i'_1, \dots, i'_m\} = \emptyset)\}$ és

$$v_A(T) = \max_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}_A(T)} \sum_{a_{i_1 \dots i_m} \in \mathcal{A}} a_{i_1 \dots i_m}.$$

Az így meghatározott v_A játékot az A polimátrixszal és az $N_1, N_2, \dots, N_m$ játékoshalmazokkal adott m -oldalú hozzárendelési játéknak nevezzük.

A

$$\mu^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}_A(T)} \sum_{a_{i_1 \dots i_m} \in \mathcal{A}} a_{i_1 \dots i_m}$$

elemei maximális párosítást határoznak meg a játékosok halmazán és a T koalíción.

Az m -oldalú játékok estében a hozzárendelés oly módon történik, hogy csak azon koalíciók kifizetése különbözhet 0-tól, amelyekre teljesül, hogy minden játékos típusból tartalmaznak legalább egyet.

4.2. példa. Vegyünk egy $m = 3$ oldalú hozzárendelési játékot és legyen minden játékos tí-

pusztán $|N_j| = 2$, $j = 1, 2, 3$. Az A polimátrix legyen a következő:

$$\begin{array}{cc} i_2 = 1 & i_2 = 2 \\ i_1 = 1 & \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 & \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & i_3 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} i_2 = 1 & i_2 = 2 \\ i_1 = 1 & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 & \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \\ & i_3 = 2 \end{array}$$

Az így módon adott 3-oldalú hozzárendelési játékban $\mu = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2)\}$ egy lehetséges, $\mu^* = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ pedig maximális párosítás és $v(N) = 10$.

Az m -oldalú hozzárendelési játékok magja a kétoldalú hozzárendelési játékokéval szemben már lehet üres is. A következő egy olyan m -oldalú hozzárendelési játékra példa, amelynek a magja üres.

4.3. *példa.* Mag üressége (Quint (1991b))

$$\begin{array}{cc} i_2 = 1 & i_2 = 2 \\ i_1 = 1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & i_3 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} i_2 = 1 & i_2 = 2 \\ i_1 = 1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & i_3 = 2 \end{array}$$

Ebben a játékban mind a négy lehetséges párosítás maximális. Legyen $\mu^* = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ maximális párosítás. Ekkor az

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{21} + u_{31} &= 0 \\ u_{12} + u_{22} + u_{32} &= 1 \\ u_{11} + u_{22} + u_{32} &\geq 1 \\ u_{12} + u_{21} + u_{32} &\geq 1 \\ u_{12} + u_{22} + u_{31} &\geq 1 \\ u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32} &\geq 0 \end{aligned}$$

feltételekből következik, hogy $u_{11} = u_{21} = u_{31} = 0$. Így adódik, hogy nincsen olyan u vektor, amely eleget tesz az

$$\begin{aligned} u_{12} + u_{22} + u_{32} &= 1 \\ u_{22} + u_{32} &\geq 1 \\ u_{12} + u_{32} &\geq 1 \\ u_{12} + u_{22} &\geq 1 \\ u_{12}, u_{22}, u_{32} &\geq 0 \end{aligned}$$

feltételeknek.

Az m -oldalú hozzárendelési játékok magjának nemürességére vonatkozó szükséges és elégséges feltételeket Quint (1991b) fogalmazta meg.

4.1. Lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékok

A Shapley és Shubik (1972)-féle kétoldalú hozzárendelési játékok egy természetes általánosításaként adódtak az m -oldalú hozzárendelési játékok. Ebben a fejezetben az m -oldalú hozzárendelési játékok egy speciális esetét, a lokálisan additív játékokat vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a lokális additív játékok magja nem üres. A bizonyítás alap gondolata az, hogy a lokálisan additív m - oldalú hozzárendelési játékokat LP feladatok segítségével vizsgáljuk. Először tekintjük az ILP feladatot, majd annak relaxáltját. A relaxált feladatról megmutatjuk, hogy van egészértékű optimális megoldása oly módon, hogy a feladatot Dantzig (1963) alapján átalakítjuk egy speciális maximális-haszon folyam problémává (transshipment problem). Az egészértékűség bizonyítását követően felírjuk az eredeti feladat duálisát és azt megoldva megadunk egy magbeli elosztást. Továbbá a kétoldalú hozzárendelési játékoknál vizsgált kétoldalú piacokat kiterjesztjük m oldalra, amelyeket ellátási láncokként interpretálunk.

A harmadik fejezetben vizsgált kétoldalú hozzárendelési játékok esetében eladókat és fogyasztókat rendeltünk egymáshoz és maximalizáltuk az általuk elérhető összhazsnot. Az ellátási láncok ezzel szemben már többféle piaci szereplő együttműködését feltételezik, általában magukban foglalják a gyártókat, az ellátókat, a beszállítókat, a raktározókat, a kiskereskedőket és magukat a fogyasztókat is. Ennek megfelelően a dolgozatban is az ellátási láncok hazai gyakorlatban legelterjedtebb meghatározását használjuk: „*az ellátási lánc értékteremtő folyamatok vállalatokon átívelő sorozata, mely vevői igények kielégítésére alkalmas termékeket, illetve szolgáltatásokat hoz létre*” (Chikán, 1997).

Az ellátási lánc kifejezésből arra következtethetnénk, hogy ahhoz, hogy a lánc végén a fogyasztó hozzájuthasson az általa kívánt termékhez, minden felsorolt piaci szereplőből szükség van pontosan egyre. Természetesen a gyakorlatra az jellemző, hogy különböző hosszúságú láncok létezhetnek, a dolgozatban azonban megköveteljük, hogy az adott feladatban felsorolt összes szereplő megjelenjen a láncban. Továbbá meg kell jegyeznünk, hogy a legtöbb esetben az ellátási láncok valójában már nem láncként, hanem hálózatok formájában jelennek meg, ami azt jelenti, hogy a piaci szereplők, a mi esetünkben játékosok, között a kapcsolatok nem kizárólagosak, tehát például egy kiskereskedő kapcsolatban állhat egyszerre több szállítóval is (a dolgozatban mi ezzel az esettel nem foglalkozunk, de lásd. Chopra és Meindl (2010)). Az ellátási láncok esetében, a kétoldalú piacokkal szemben, a lánc közbülső szereplői egyszerre töltenek be eladói és vevői szerepet.

A dolgozatban az ellátási láncok játékelméleti megközelítéséhez a Stuart (1997) által

bevezetett lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat használjuk, ahol az m , mint az oldalak száma utal arra, hogy az ellátási lánc hányféle különböző piaci szereplőből (gyártó, szállító, kiskereskedő, stb.) áll össze.

4.4. definíció. *(Lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játék (Stuart (1997)))* Legyen A az m -oldalú hozzárendelési játékhhoz tartozó polimátrix. Tekintsünk egy $[B^k]$ mátrixrendszert, amelyre B^k $n_k \times n_{k+1}$ dimenziós és a B^k mátrix általános elemét jelölje $b_{i_k, i_{k+1}}^k$. Egy m -oldalú hozzárendelési játékot lokálisan additívnek nevezünk, ha

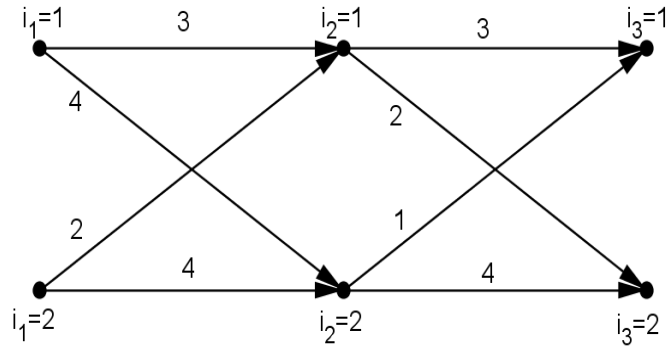
$$a_{i_1 \dots i_m} = \sum_{k=1}^{m-1} b_{i_k, i_{k+1}}^k \quad \forall a_{i_1 \dots i_m} \in A, i_k \in N_k, k = 1, \dots, m.$$

A lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat megadhatjuk olyan (irányított) gráfokkal, amelyek csúcsai jelölik a játékosokat (az ellátási lánc szereplőit), oly módon, hogy azonos és nemszomszédos típusba tartozó játékosok nincsenek éllel összekötve (azaz például szállító szállítóval, illetve az ellátási lánc nemszomszédos szereplői egymással nem köthetnek üzletet).

4.5. definíció. Legyen $N = \uplus_{j=1}^m N_j$ játékoshalmaz. Ekkor a $G = (N, E, W)$ súlyozott gráf, amelyre $w_{ij} \geq 0$, $E = \bigcup_{j=1}^{m-1} E_j$, ahol $E_j \subseteq \{\overline{ij} \mid i \in N_j, k \in N_{j+1}, j \in \{1, \dots, m-1\}\}$ lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékot határoz meg.

Gráffal való megadás esetén a gráf élsúlyai a játékosok által közösen elérhető hasznot mutatják.

4.6. példa. Tekintsünk egy olyan ellátási lánc problémát, amelyben a lánc háromféle szereplőből (gyártó (i_1), kiskereskedő (i_2), fogyasztó (i_3)) áll és legyen mindegyikükből 2, azaz vegyünk egy $m = 3$ -oldalú hozzárendelési játékot és minden játékos típusra legyen $|N_j| = 2$, $j = 1, 2, 3$. Ekkor a 4.5 definíció alapján a játék az alábbi irányított gráffal adható meg:



4.1. ábra. 3-oldalú lokálisan additív hozzárendelési játék

A gráf megfelelő éleiről a súlyokat leolvassva könnyen felírhatjuk a lokális additivitás definíciójában szereplő B_1 és B_2 mátrixokat:

$$\begin{array}{c} i_2 = 1 \quad i_2 = 2 \\ i_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} i_3 = 1 \quad i_3 = 2 \\ i_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \\ i_2 = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Az A polimátrix elemei kétféle módon is megkaphatóak: vagy a B_1 és a B_2 mátrixok megfelelő elemeinek, vagy pedig a gráf megfelelő élsúlyainak összegeként:

$$\begin{array}{c} i_2 = 1 \quad i_2 = 2 \\ i_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix} \\ i_3 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} i_2 = 1 \quad i_2 = 2 \\ i_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix} \\ i_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \\ i_3 = 2 \end{array}$$

A lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat egészértékű lineáris programozási feladatok segítségével vizsgáljuk, amelyekben az x_{ij} -k jelölik a játékosokat összekötő éleket, a w_{ij} -k pedig az élsúlyokat. A ILP feladat ekkor a következő alakban adható meg:

A primális feladat

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i \in N_k} \sum_{j \in N_{k+1}} w_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N_k} x_{ij} \leq 1 & i \in N_{k-1}, k = 2, \dots, m \\
& \sum_{j \in N_k} x_{ji} \leq 1 & i \in N_{k+1}, k = 1, \dots, m-1 \\
& \sum_{j \in N_{k+1}} x_{ij} - \sum_{j \in N_{k-1}} x_{ji} = 0 & i \in N_k, k = 2, \dots, m-1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i \in N_k, j \in N_{k+1}, k = 1, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{4.1}$$

amelynek a relaxáltja a

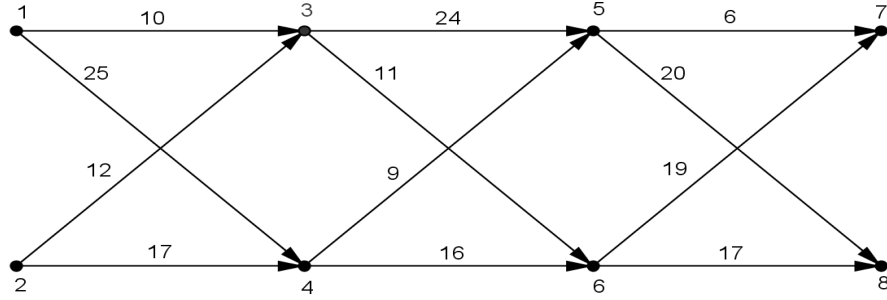
$$\begin{aligned}
z &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i \in N_k} \sum_{j \in N_{k+1}} w_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N_k} x_{ij} \leq 1 & i \in N_{k-1}, k = 2, \dots, m & (u_i) \\
& \sum_{j \in N_k} x_{ji} \leq 1 & i \in N_{k+1}, k = 1, \dots, m-1 & (u'_i) \\
& \sum_{j \in N_{k+1}} x_{ij} - \sum_{j \in N_{k-1}} x_{ji} = 0 & i \in N_k, k = 2, \dots, m-1 & (u''_i) \\
& x_{ij} \geq 0 & i \in N_k, j \in N_{k+1}, k = 1, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

feladat. A relaxált feladat korlátozó feltételei mellett feltüntettük a hozzájuk tartozó duálváltozókat is.

A (4.1) feladat célfüggvénye ekkor azt fejezi ki, hogy a játékosok az összhasznukat maximalizálják. Az első korlátozó feltétel szerint a megfelelő gráf egyik csúcsából sem mehet ki több egy egységnél, ugyanakkor megengedjük az ennél kevesebb kimenő forgalmat, mivel előfordulhat, hogy az adott csúcs nincsen párosítva. A második korlátozó feltétel azt mondja, hogy egyik csúcsba sem érkezhetsen be több egy egységnél, ugyanakkor a kevesebb bemenő forgalmat ismételten megengedjük, abban az esetben, ha az adott csúcs nincsen párosítva. A harmadik feltétel alapján a közbülső csúcsok bejövő forgalma pontosan meg kell, hogy egyezzen a kimenő forgalmukkal, ugyanis ha egy csúcs balról párosítva van, akkor jobbról is és fordítva. A korlátozó feltételeket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az ellátási lánc szereplői olyan módon maximalizálják az összhasznukat, hogy minden lánc úgy épül fel, hogy annak minden tagja, mindkét oldalról kizárólag egy szomszédos szereplővel állhat kapcsolatban (az ellátási láncok végpontjaiban elhelyezkedő szereplőket természetesen csak egyoldali kapcsolatok jellemzik). Továbbá a lánc közbülső szereplőire

az teljesül, hogy ha az egyik oldalról bekerültek a láncba, akkor a másiktól is. A nem párosított szereplő pedig azt jelenti, hogy az adott játékos nincsen benne a láncban.

4.7. *példa.* ($2 \times 2 \times 2 \times 2$ -es eset) Tekintsünk egy 4-féle piaci szereplőből álló ellátási lánc problémát, oly módon, hogy a 4.6 példában adott feladatot kiegészítjük két szállítóval is, azaz vegyünk egy $m = 4$ -oldalú hozzárendelési játékot, amelyben legyen $|N_j| = 2$, $j = 1, 2, 3, 4$ -re. Ekkor a játék a következő irányított gráffal adható meg:



4.2. ábra. 4-oldalú lokálisan additív hozzárendelési játék

A 4.2 ábrán látható gráfon az 1, 2 a gyártókat, a 3, 4 a szállítókat, az 5, 6 a kiskereskedőket és végül a 7, 8 pedig a fogyasztókat jelöli.

Az ebben a példában szereplő játékot a következő lineáris programozási feladattal vizsgáljuk:

$$z = 10x_{13} + 25x_{14} + 12x_{23} + 17x_{24} + \dots + 19x_{67} + 17x_{68} \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.t.} & x_{13} + x_{14} \leq 1 & (u_1) & x_{13} + x_{23} \leq 1 & (u'_3) \\ & x_{23} + x_{24} \leq 1 & (u_2) & x_{14} + x_{24} \leq 1 & (u'_4) \\ & x_{35} + x_{36} \leq 1 & (u_3) & x_{35} + x_{45} \leq 1 & (u'_5) \\ & x_{45} + x_{46} \leq 1 & (u_4) & x_{36} + x_{46} \leq 1 & (u'_6) \\ & x_{57} + x_{58} \leq 1 & (u_5) & x_{57} + x_{67} \leq 1 & (u'_7) \\ & x_{67} + x_{68} \leq 1 & (u_6) & x_{58} + x_{68} \leq 1 & (u'_8) \end{array}$$

$$x_{35} + x_{36} - x_{13} - x_{23} = 0 \quad (u''_3)$$

$$x_{45} + x_{46} - x_{14} - x_{24} = 0 \quad (u''_4)$$

$$x_{57} + x_{58} - x_{35} - x_{45} = 0 \quad (u''_5)$$

$$x_{67} + x_{68} - x_{36} - x_{46} = 0 \quad (u''_6)$$

$$x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, \dots, x_{67}, x_{68} \geq 0$$

Minden egyes korlátozó feltétel mellett feltüntettük zárójelben a hozzá tartozó duál-változót.

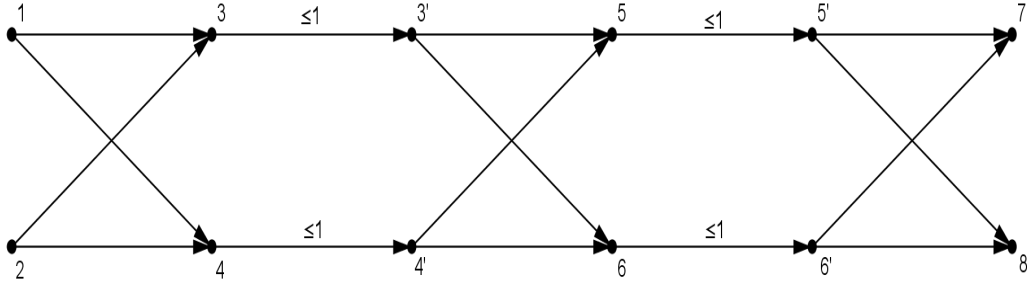
A mag nemürességének a belátásához később szükségünk lesz a feladat duálisára is, de mielőtt a duálist felírnánk, megmutatjuk, hogy a (4.2) feladatnak van egészértékű optimális bázismegoldása. Az egészértékűség feltételezésére a kétoldalú hozzárendelési játékokhoz hasonlóan azért van szükségünk, mert különben, nem egészértékű optimális megoldás esetén a folytonos feladat optimális célfüggvény értéke meghaladhatná a diszkrét feladat optimális célfüggvény értékét. Ahhoz, hogy ezt belássuk a kétoldalú hozzárendelési játékok esetében már alkalmazott eszközökkel, szükségünk van egy ekvivalens átalakításra. Így tehát a feladatot egy vele ekvivalens, speciális maximális-haszon folyam feladat formájában írjuk fel.

Az átalakított feladatban jelöljük az N_1 játékosalmaz elemei a forrásokat és az N_m játékosai pedig a nyelőket. Duplázzuk meg a közbülső szinteken található játékosokat oly módon, hogy az i és j' csúcsokat, amelyekre $i \in N_k$, $j' \in N'_k$ csak akkor kösse össze él, ha $j' = i'$. A j és j' csúcsokat összekötő élek kapacitása legyen 1. Azért van szükség arra, hogy a közbülső csúcsok átmenő forgalma ne lehessen egy egységnél nagyobb, hogy egyik piaci szereplő se szerepelhessen egyszerre több ellátási láncban. Végül legyen minden $w_{i'j} = w_{ij}$ és $w_{ii'} = 0$, ahol $i \in N_k$, $i' \in N'_k$ és $j \in N_{k+1}$, $j' \in N'_{k+1}$. Az átalakított feladatot, az eredetihez hasonlóan, a következő lineáris programozási feladattal vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} w_{ij} x_{ij} + \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{i' \in N'_k} \sum_{j \in N_{k+1}} w_{i'j} x_{i'j} \rightarrow \max \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N_2} x_{ij} \leq 1 \quad i \in N_1 \\
& x_{jj'} - \sum_{i \in N_1} x_{ij} = 0 \quad j \in N_2 \\
& x_{jj'} - \sum_{i' \in N'_{k-1}} x_{i'j} = 0 \quad j \in N_k, k = 3, \dots, m-1 \\
& \sum_{i \in N_{k+1}} x_{j'i} - x_{jj'} = 0 \quad j \in N_k, k = 2, \dots, m-1 \\
& \sum_{j' \in N'_{m-1}} x_{j'i} \leq 1 \quad i \in N_m \\
& x_{ij} \geq 0 \quad i \in N_k, j \in N_{k+1}, k = 1, \dots, m-1 \\
& x_{jj'} \leq 1 \quad j \in N_k, k = 2, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Mielőtt továbblépnénk az egészértékűség bizonyítására, az egyszerűbb megértés kedvéért nézzünk egy példát ekvivalens maximális-haszon folyam problémává való átalakításra.

4.8. *példa.* A 4.7 példa feladatát alakítsuk át ekvivalens folyam problémává. Duplázzuk meg a szállítókat és a kiskereskedőket és adjunk 1-et az azonos típusú, duplázott csúcsokat összekötő élek felső korlátjának. Ekkor az ellátási láncot meghatározó gráf az alábbi módon alakul (az élsúlyokat a gráfon nem tüntettük fel):



4.3. ábra. Az ekvivalens folyam feladathoz tartozó gráf

Ekkor ekvivalens folyam probléma a következő lineáris programozási feladat formájában adható meg:

$$10x_{13} + 25x_{14} + 12x_{23} + 17x_{24} + \dots + 19x_{6'7} + 17x_{6'8} \rightarrow \max$$

s. t.

$$\begin{array}{ll} x_{13} + x_{14} \leq 1 & x_{55'} - x_{3'5} - x_{4'5} = 0 \\ x_{23} + x_{24} \leq 1 & x_{66'} - x_{3'6} - x_{4'6} = 0 \\ x_{33'} - x_{13} - x_{23} = 0 & x_{5'7} + x_{5'8} - x_{55'} = 0 \\ x_{44'} - x_{14} - x_{24} = 0 & x_{6'7} + x_{6'8} - x_{66'} = 0 \\ x_{3'5} + x_{3'6} - x_{33'} = 0 & x_{5'7} + x_{6'7} \leq 1 \\ x_{4'5} + x_{4'6} - x_{44'} = 0 & x_{5'8} + x_{6'8} \leq 1 \\ x_{33'}, x_{44'}, x_{55'}, x_{66'} \leq 1 & x_{13}, x_{14}, \dots, x_{6'7}, x_{6'8} \geq 0 \end{array}$$

4.9. tétel. A (4.3) lineáris programozási feladat együtthatómátrixa totálisan unimoduláris.

Bizonyítás. A szubmátrixok mérete szerinti teljes indukcióval. Tetszőleges 1×1 -es al-mátrixot tekintve, annak determinánsa biztosan $-1, 0$ vagy 1 , mivel az együtthatómátrix minden eleme csak $-1, 0, 1$ értékű lehet. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges $r \times r$ -es al-mátrixra. Tekintsünk egy $(r+1) \times (r+1)$ -es al-mátrixot. Ekkor négy eset lehetséges:

- az $(r+1) \times (r+1)$ -es al-mátrix olyan, hogy annak a zérusvektor oszlopvektora. Ekkor ennek a mátrixnak az oszlopai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak, tehát a determinánsa 0 ,
- az $(r+1) \times (r+1)$ -es al-mátrix olyan, hogy van olyan oszlopa, amelynek csak egyetlen eleme különbözik 0 -tól. Ekkor ezen oszlop szerint kifejtve determinánsát egy $r \times r$ -es al-mátrix determinánsának ± 1 -szereseként kapjuk. Mivel az indukciós feltevés

alapján minden $r \times r$ -es almatrix determinánása $-1, 0$ vagy 1 , így az $(r+1) \times (r+1)$ -es mátrixé is csak $-1, 0$ vagy 1 lehet,

- az $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrix minden oszlopának pontosan két eleme nem 0 és azok ellentétes előjelűek. Ekkor a mátrix sorainak összege éppen a nullvektort adja, így mivel a nullvektor nem triviális lineáris kombinációként adódott, a mátrix sorai lineárisan összefüggő rendszert alkotnak, tehát determinánása 0 ,
- az $(r+1) \times (r+1)$ -es almatrix minden oszlopában van két azonos előjelű elem. Ekkor az almatrixnak van olyan sora, amelyben pontosan egy elem különbözik 0 -tól, így ezen sor szerint kifejtve a determinánása csak $-1, 0$ vagy 1 lehet.

■

4.10. *példa.* Tekintsük a 4.7 példában adott feladat együtthatómatrixát.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az A mátrixról a 4.9 állítás alapján azonnal adódik, hogy totálisan unimoduláris.

4.11. állítás. A (4.3) lineáris programozási feladatnak van egészértékű optimális bázis-megoldása.

Bizonyítás. A (4.3) módosított normál feladat új, nemnegatív változók hozzávételével ekvivalens módon átalakítható kanonikus alakú lineáris programozási feladattá. Az új, kanonikus alakú feladat együtthatómatrixa totálisan unimoduláris marad, hiszen az új változók bevezetésével az eredeti feladat együtthatómatrixa egységvektorokkal bővül. Mivel

a feladat együtthatómátrixa totálisan unimoduláris a 3.10 tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy a feladatnak van egészértékű optimális bázismegoldása. ■

Mivel a relaxált feladatnak van egészértékű optimális bázismegoldása azt kapjuk, hogy az eredeti (4.2) feladatnak is van egészértékű optimális bázismegoldása.

4.12. *példa.* 4.7 példában a primális feladatot megoldva azt kapjuk, hogy az optimális megoldás egészértékű és így $x_{14} = x_{23} = x_{35} = x_{46} = x_{58} = x_{67} = 1$, $x_{13} = x_{24} = x_{36} = x_{45} = x_{57} = x_{68} = 0$, valamint a célfüggvény értéke és ezáltal a nagykoalíció kifizetése $z = v(N) = 116$.

A (4.2) feladat duálisa

$$\begin{aligned}
 w = & \sum_{i \in N_1} u_i + \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{i \in N_k} (u_i + u'_i) + \sum_{i \in N_m} u'_i \rightarrow \min \\
 \text{s.t.} \quad & u_i + u'_j - u''_j \geq w_{ij} & i \in N_1, j \in N_2 \\
 & u_i + u'_j + u''_i - u''_j \geq w_{ij} & i \in N_k, j \in N_{k+1}, k = 2, \dots, m-2 \\
 & u_i + u'_j + u''_i \geq w_{ij} & i \in N_{m-1}, j \in N_m \\
 & u_i, u_j, u_j \geq 0 & i \in N_1 \cup N_m, j \in N_k, k = 2, \dots, m-1
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

A célfüggvényben nem szerepelnek u''_i és u''_j változók, mivel azok egyenlőséghez tartoztak, így célfüggvénybeli együtthatójuk 0.

4.13. állítás. *Legyen*

$$y_i = \begin{cases} u_i^* & i \in N_1, \\ u_i^* + u_i'^* & i \in N_k, k \in \{2 \dots m-1\}, \\ u_i'^* & i \in N_m, \end{cases}$$

ahol u^* a (4.4) duális feladat optimális megoldása. Ekkor y magbéli.

Bizonyítás. Elég "láncra" belátni. Vegyük például az $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ koalíciót, ahol $i_k \in N_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned}
 u_{i_1}^* + u_{i_2}^* + u_{i_2}'^* + \dots + u_{i_m}'^* &= (u_{i_1}^* + u_{i_2}'^*) + (u_{i_2}^* + u_{i_3}'^*) + \dots + (u_{i_{m-1}}^* + u_{i_m}'^*) \\
 &\geq w_{i_1 i_2} + u_{i_2}''^* + w_{i_2 i_3} + u_{i_3}''^* - u_{i_2}''^* + \dots + w_{i_{m-2} i_{m-1}} + u_{i_{m-1}}''^* - u_{i_{m-2}}''^* + \\
 &\quad + w_{i_{m-1} i_m} - u_{i_{m-1}}''^* = w_{i_1 i_2} + w_{i_2 i_3} + \dots + w_{i_{m-2} i_{m-1}} + w_{i_{m-1} i_m}
 \end{aligned}$$

Az állítás hasonló módon teljesül a többi koalícióra is. Az erős dualitás tételéből és abból, hogy a célfüggvényben az u''_i és u''_j változók 0 együtthatóval szerepelnek adódik, hogy $\sum_{i \in N} y_i = v(N)$. ■

4.14. *példa.* Írjuk fel a 4.7 példa feladatának duálisát.

$$w = \sum_{i \in N_1} u_i + \sum_{k=2}^3 \sum_{i \in N_k} (u_i + u'_i) + \sum_{i \in N_4} u'_i \longrightarrow \min$$

s. t.

$$\begin{array}{lll} u_1 + u'_3 - u''_3 \geq 10 & u_3 + u'_5 + u''_3 - u''_5 \geq 24 & u_5 + u'_7 + u''_5 \geq 6 \\ u_1 + u'_4 - u''_4 \geq 25 & u_3 + u'_6 + u''_3 - u''_6 \geq 11 & u_5 + u'_8 + u''_5 \geq 20 \\ u_2 + u'_3 - u''_3 \geq 12 & u_4 + u'_5 + u''_4 - u''_5 \geq 9 & u_6 + u'_7 + u''_6 \geq 19 \\ u_2 + u'_4 - u''_4 \geq 17 & u_4 + u'_6 + u''_4 - u''_6 \geq 16 & u_6 + u'_8 + u''_6 \geq 17 \end{array}$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u'_3, u'_4, u'_5, u'_6, u'_7, u'_8 \geq 0$$

A duális feladatot megoldva az u vektorra egyik optimális megoldásaként azt kapjuk, hogy $u_1^* = 12, 5$, $u_2^* = 6$, $u_3^* = 12$, $u_4^* = 8$, $u_5^* = 10$, $u_6^* = 9, 5$, $u'_3{}^* = 6$, $u'_4{}^* = 12, 5$, $u'_5{}^* = 12$, $u'_6{}^* = 8$, $u'_7{}^* = 9, 5$, $u'_8{}^* = 10$ valamint $u''_3{}^* = u''_4{}^* = u''_5{}^* = u''_6{}^* = 0$.

Legyen

$$y_i = \begin{cases} u_i^* & i \in N_1, \\ u_i^* + u'_i{}^* & i \in N_k, k \in \{2, 3\}, \\ u'_i{}^* & i \in N_4, \end{cases}$$

ahol u^* a duális feladat optimális megoldása. Ekkor y magbéli. Vegyünk két tetszőleges koalíciót. Például az $(\overline{1357})$ és a $(\overline{2468})$ koalíciókat:

$$\begin{aligned} u_1^* + u_3^* + u'_3{}^* + u_5^* + u'_5{}^* + u'_7{}^* &= (u_1^* + u'_3{}^*) + (u_3^* + u'_5{}^*) + (u_5^* + u'_7{}^*)^* \\ &= 12, 5 + 12 + 6 + 12 + 12 + 9, 5 \geq (w_{13} + u''_3{}^*) + (w_{35} - u''_3{}^* + u''_5{}^*) + (w_{57} - u''_5{}^*) \\ &= w_{13} + w_{35} + w_{57} = 10 + 24 + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^* + u_4^* + u'_4{}^* + u_6^* + u'_6{}^* + u'_8{}^* &= (u_2^* + u'_4{}^*) + (u_4^* + u'_6{}^*) + (u_6^* + u'_8{}^*) \\ &= 6 + 12, 5 + 8 + 8 + 9, 5 + 10 \geq (w_{24} + u''_4{}^*) + (w_{46} - u''_4{}^* + u''_6{}^*) + (w_{68} - u''_6{}^*) \\ &= w_{24} + w_{46} + w_{68} = 17 + 16 + 17 \end{aligned}$$

Hasonlóan módon teljesül az állítás a többi koalícióra is.

Az erős dualitás tételéből és abból, hogy $''$ -ös változók súlya a célfüggvényben 0 következik, hogy $z = w = \sum_{i \in N} y_i = v(N) = 116$.

5. fejezet

A nukleolusz élmonotonitása

A TU-játékok esetében, ahogyan azt a dolgozat harmadik fejezetében említettük, a koalícióba lépő játékosok a kifizetéseket tetszőleges módon oszthatják szét egymás között. A játék Schmeidler (1969) által bevezetett nukleolusza egy olyan elosztás koncepció, amely lexikografikusan minimalizálja a játékosok legnagyobb elégedetlenségét. A nukleolusz meghatározásához szükségünk lesz az alábbi fogalmakra:

5.1. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a v játék preimputációinak halmaza

$$I^*(v) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} u_i = v(N) \right\}.$$

5.2. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a v játék imputációinak halmaza

$$I(v) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} u_i = v(N), \text{ és } u_i \geq v(\bar{i}), i \in N \right\}.$$

5.3. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ játék. Ekkor az $e(\cdot, \cdot) : \mathcal{G}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2^N}$ többletfüggvény tetszőleges S koalícióhoz és u elosztáshoz az alábbi módon adható meg:

$$(e(v, u))_S = v(S) - \sum_{i \in S} u_i$$

A S koalícióhoz és az u kifizetésvektorhoz tartozó többlet tehát azt mutatja meg, hogy az S koalíció mennyit nyerhet (vagy negatív többlet esetén mennyit veszíthet), ha elutasítja a nagykoalícióban való részvételt és ezzel az u kifizetést.

5.4. megjegyzés. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a játék magja a következőképpen adható meg:

$$C(v) = \left\{ u \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} u_i = v(N) \text{ és } (e(v, u))_S \leq 0, S \subseteq N \right\}.$$

5.5. definíció. Legyen $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a következő módon adott, tetszőleges $u \in \mathbb{R}^d$ -re és $1 \leq i \leq d$ -re

$$(\rho(u))_i = \max_{T \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, |T|=i} \min_{j \in T} u_j.$$

A ρ rendezés tehát az u vektor koordinátáit nemnövekvő sorrendbe rendezi.

5.6. *példa.* Vegyünk egy tetszőleges u vektort és alkalmazzuk rá a ρ rendezést.

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rho(u) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.7. definíció. (Nukleolusz (Schmeidler, 1969)) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a v játék nukleolusza a következő módon határozható meg:

$$N(v) = \{u \in I(v) \mid \rho \circ e(v, u) \leq_{lex} \rho \circ e(v, z), z \in I(v)\},$$

ahol $\leq_{lex}$ a vektorok közötti gyenge lexicografikus rendezést jelöli, azaz $A \leq_{lex} B$, ha $A = B$ vagy $A_i < B_i$, arra az első i komponensre, amelyben az A és a B vektorok különböznek.

Ezt a definíciót felhasználva a következő optimalizálási-sorozat eredményeként határozhatjuk meg a játék nukleoluszt: kiválasztjuk azt az elosztást, amelynél az elérhető legmagasabb többlet a legkisebb. Mivel a ρ rendezéssel a többletvektor koordinátáit nemnövekvő sorrendbe rendeztük, ezért a kiválasztást először az első koordináták alapján végezzük el. Ha ez nem ad egyértelmű megoldást u -ra, akkor a vektorok második koordinátáját, azaz ahol a második legnagyobb többlet is a lehető legkisebb, vizsgáljuk. Ha még ilyen elosztásból is több van, akkor az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg vagy az u minden koordinátáját meg nem vizsgáltuk, vagy pedig a k -adik koordináta alapján egyértelmű elosztást nem kaptunk.

A nukleolusz a definíciója szerint egy kifizetэшalmaz, ugyanakkor a bevezetésekor Schmeidler (1969) megmutatta, hogy minden elosztással rendelkező játék nukleolusza egyetlen elosztásból áll, tehát a kifizetэшalmaznak egyetlen eleme van.

5.8. *példa.* Legyen a játékosok halmaza $N = \{1, 2\}$ és a koalíciók értéke rendre 2, 4, 5 és $u = [3, 2]$. Így a megfelelő koalíciókhoz tartozó többletek: $(e(v, u))_{\bar{1}} = 2 - 3 = -1$, $(e(v, u))_{\bar{2}} = 4 - 2 = 2$ és $(e(v, u))_{\bar{12}} = 5 - (3 + 2) = 0$. Ekkor

$$\rho \circ e(v, u) = \begin{bmatrix} (e(v, u))_{\bar{2}} \\ (e(v, u))_{\bar{12}} \\ (e(v, u))_{\bar{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5.9. definíció. (Pre-nukleolusz) Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a v játék pre-nukleolusza a következő:

$$PN(v) = \{u \in I^*(v) \mid \rho \circ e(v, u) \leq_{lex} \rho \circ e(v, z), z \in I^*(v)\},$$

ahol $\leq_{lex}$ a vektorok közötti gyenge lexicografikus rendezést jelöli.

5.10. *megjegyzés.* Ha a játék magja nemüres, akkor a nukleolusz és a pre-nukleolusz megegyezik.

Solymosi et al (2012) vizsgálták a nukleolusz monotonitását a hozzárendelési játékok osztályán. A hozzárendelési játékok nukleoluszára az aggregált monotonitás csak $(1+1)$ -szereplős játékok esetében értelmezhető, ekkor viszont a kétoldalú hozzárendelési játékok nukleolusza aggregált monoton. Továbbá vizsgálták a kétoldalú hozzárendelési játékok nukleoluszának egy "természetesebb" monotonitási tulajdonságát is, a páronkénti él- vagy adat-monotonitást. Megmutatták, hogy a kétoldalú hozzárendelési játékokra teljesül a (páronkénti) élmonotonitás. Ezt mondja ki a következő tétel:

5.11. tétel. *Legyen $v_A \in \mathcal{G}^N$ kétoldalú hozzárendelési játék és A a hozzá tartozó mátrix. A v_A játék nukleolusza páronként monoton, azaz tetszőleges $A = [a_{ij}]$ és $A' = [a'_{ij}]$ hozzárendelési mátrixok esetén, ha $a_{ij} < a'_{ij}$ és $a_{kl} = a'_{kl}$ minden $(k, l) \neq (i, j)$ -re, akkor a v_A és a $v_{A'}$ játékokra $N_i(v_A) \leq N_i(v_{A'})$ és $N_j(v_A) \leq N_j(v_{A'})$ teljesül.*

Bizonyítás. A tételt igazolták Solymosi et al (2012). ■

5.12. *példa.* (Kétoldalú hozzárendelési játék nukleolusza) Tekintsünk egy kétoldalú hozzárendelési játékot, amelyben legyen adott 2 fogyasztó és 3 eladó, valamint a játékhoz tartozó A mátrix. Vegyünk egy olyan $v_{A'}$ játékot, amelyikre az teljesül, hogy a hozzá tartozó A' mátrix csak az a'_{22} elemében különbözik A -tól. Legyen e két mátrix:

$$\begin{array}{c} i_S = 1 \quad i_S = 2 \quad i_S = 3 \\ i_B = 1 \quad \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad i_B = 1 \quad \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \\ i_B = 2 \end{array}$$

Ekkor a v_A és a $v_{A'}$ játékok nukleoluszára kapjuk $i_B = 1, i_B = 2, i_S = 1, i_S = 2, i_S = 3$ sorrendben, hogy

$$N(v_A) = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 1,75 \\ 1,25 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad N(v_{A'}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

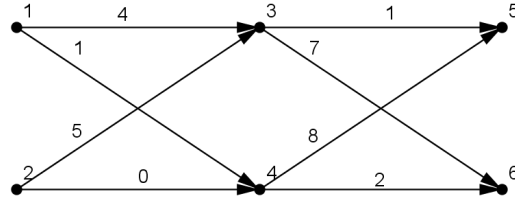
Láthatjuk tehát, hogy mind a 2-es fogyasztónak, mind pedig a 2-es eladónak a kifizetése nőtt.

A lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékok esetében a (páronkénti) élmonotonitást úgy értelmezhetjük, hogy a gráffal megadott játékban egyetlen élsúlyt változtatunk meg, azaz Stuart (1997) jelölésével a $[B^k]$ és $[B^{k'}]$, $k = 1, \dots, m-1$, mátrixrendszerek

valamely $B^k = [b_{ij}^k]$ és $B^{k'} = [b_{ij}^{k'}]$ hozzárendelési mátrixaira $b_{ij}^k < b_{ij}^{k'}$ és $b_{lp}^k = b_{lp}^{k'}$ teljesülne minden $(l, p) \neq (i, j)$ -re. (Az A polimátrixra ez nyilván nem teljesülhet, mivel az A nem csak két oldalt köt össze, így egyetlen élsúly megváltoztatásával több eleme is változna). Az lokálisan additív m -oldalú ($m \geq 3$) hozzárendelési játékokra azonban nem teljesül, hogy $N_i(v_A) \leq N_i(v_{A'})$ és $N_j(v_A) \leq N_j(v_{A'})$.

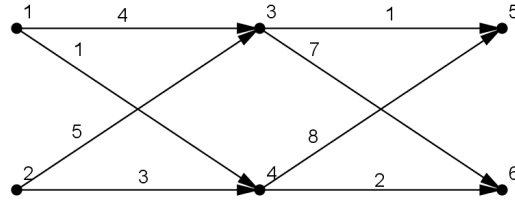
5.13. tétel. *A lokálisan additív m -oldalú ($m \geq 3$) hozzárendelési játékok nukleolusza nem (páronként) élmonoton, azaz létezik olyan m -oldalú ($m \geq 3$) hozzárendelési játék, amelyre a $[B^k]$ és $[B^{k'}]$, $k = 1, \dots, m-1$, mátrixrendszerek valamely $B^k = [b_{ij}^k]$ és $B^{k'} = [b_{ij}^{k'}]$ hozzárendelési mátrixaira $b_{ij}^k < b_{ij}^{k'}$ és $b_{lp}^k = b_{lp}^{k'}$, minden $(l, p) \neq (i, j)$ esetén $N_i(v_A) \leq N_i(v_{A'})$ és $N_j(v_A) \leq N_j(v_{A'})$ nem teljesül.*

Bizonyítás. Ellenpélda: Tekintsünk egy $m = 3$ oldalú hozzárendelési játékot és minden játékos típusra legyen $|N_j| = 2$, $j = 1, 2, 3$ -ra. Ekkor a játékhoz tartozó gráf a következő:



5.1. ábra. A nukleolusz élmonotonitása I.

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a játék nukleolusza, ha a gráf egyetlen, az x_{24} élnek súlyát 0-ról 3-ra változtatjuk. Tekintsük először a játékhoz tartozó gráfot, amely a következőképpen módosul:



5.2. ábra. A nukleolusz élmonotonitása II.

Ekkor a v_A és a $v_{A'}$ játék nukleoluszát a Sziklai Balázs által készített program segítségével kiszámolva kapjuk, hogy:

$$N(v_A) = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1,5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad N(v_{A'}) = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 4,25 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 4,25 \end{bmatrix}$$

Láthatjuk, hogy a $v_{A'}$ módosított játékban a 2-es játékos esetében a nukleolusz által meghatározott kifizetése kisebb, mint az eredeti játékbeli nukleolusz kifizetése. Tehát erre a játékokra nem teljesül a nukleolusz élmonotonitása. A példából következik, hogy a tetszőleges, több, mint 2-oldalú lokálisan additív hozzárendelési játékokra sem teljesül a nukleolusz élmonotonitása. ■

5.14. következmény. *A nukleolusz élmonotonitása az m -oldalú ($m > 2$) hozzárendelési játékokra sem teljesül.*

6. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban ellátási láncokat vizsgáltunk játékelméleti módszerekkel. Megmutattuk, hogy az ellátási láncok kialakításánál a piaci szereplők szét tudják osztani a közösen szerzett hasznot úgy, hogy attól az elosztásból senkinek sem egyedül, sem pedig más játékosokkal közösen nem éri meg eltérni. Azaz igazoltuk, hogy a lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékok magja nemüres. A lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékokat lineáris programozási feladatok segítségével vizsgáltuk. A problémát ILP feladattal írtuk fel, majd annak relaxáltjáról megmutattuk, hogy van egészértékű optimális bázismegoldása. A mag nemürességének belátásához felírtuk a feladat duálisát, amelyet megoldva meg tudtunk adni magbéli elosztást. Ezt követően megvizsgáltuk a lokálisan additív m -oldalú ($m \geq 3$) hozzárendelési játékok nukleoluszát és példán keresztül megmutattuk, hogy az nem (páronként) élmonoton.

A dolgozat megírásakor törekedtünk arra, hogy az olvasó számára világossá és érthetővé váljon a lokálisan additív m -oldalú hozzárendelési játékok gyakorlati alkalmazása az ellátási láncok esetében. A dolgozatban az ellátási láncok azon esetét vizsgáltuk, amelyben a különböző típusú piaci szereplők egymással csak kizárólagos szerződéseket köthetnek és a láncok úgy épülnek fel, hogy az összes különböző típusú szereplőből szükség van pontosan egyre ahhoz, hogy az ellátási lánc működni tudjon.

Irodalomjegyzék

- von Böhm-Bawerk E (1923) The Positive Theory of Capital. G. E. Stechertm New York, original publication 1891, translated by W. Smart
- van den Brink R, Pintér M (2010) Shapley value for assignment games (kézirat)
- Chikán A (1997) Vállalatgazdaságtan. Aula Könyvkiadó kft.
- Chopra S, Meindl P (2010) Supply Chain Management: Strategy, planning and operation. Pearson
- Dantzig GB (1963) Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton
- Fiala T (2010a) Kombinatorikus optimalizálás (elektronikus jegyzet). Operációkutatás 10, URL http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/383/1/kombinatorikus_2010.pdf
- Fiala T (2010b) Lineáris programozás (kézirat)
- Gillies DB (1959) Solutions to general non-zero-sum games, Contributions to the Theory of Games, vol IV. Princeton University Press
- Leng M, Zhu A (2009) Side-payment contracts in two-person nonzero-sum supply chain games: Review, discussion and applications. European Journal of Operational Research 196:600–618
- Quint T (1991a) Characterization of cores of assignment games. International Journal of Game Theory 19(4):413–420
- Quint T (1991b) The core of an m -sided assignment game. Games and Economic Behavior 3:487–503
- Quint T (1991c) Necessary and sufficient conditions for balancedness in partitioning games. Mathematical Social Sciences 22:87–91
- Schmeidler D (1969) The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics 17:1163–1170

- Shapley L, Shubik M (1972) The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory* (1):111–130
- Solymosi T (2007) Kooperatív játékelmélet (elektronikus jegyzet), URL http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/solymosi_jatekelmelet.pdf
- Solymosi T (2011) Hálózati optimalizálás (egyetemi jegyzet)
- Solymosi T, Bruguera J, Raghavan TES (2012) Pairwise monotonicity of the nucleolus in assignment games (kézirat)
- Stuart HW (1997) The supplier-firm-buyer game and its m -sided generalization. *Mathematical Social Science* (34):21–27
- Young HP (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory* 14:65–72