

OTDK-DOLGOZAT

Szatzker Enikő
BSc

2013

Nukleolusz repülőtér játékokon

The nucleolus for airport games

Szatzker Enikő

Kézirat lezárva: 2012. március 24.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. TU-játékok	3
2.1. A mag	5
2.2. A repülőtér játékok osztálya	7
3. Nukleolusz	9
3.1. Axiómák	11
3.2. A nukleolusz karakterizációja repülőtér játékokon	16
3.3. Nukleolusz számítása repülőtér játékokon	19
4. Összefoglalás	25
Irodalomjegyzék	26

Ábrák jegyzéke

2.1. Egy általános repülőtér játék	8
2.2. Számszerű példa a repülőtér játék ábrázolására	8
3.1. Az 1-es játékkal redukált repülőtér játék	21
3.2. A 3.34. példa illusztrálása	22
4.1. Példa öntözési játékra	26

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatban költségelosztási játékok egyik legjelentősebb megoldását tanulmányozzuk repülőtér játékokon. Ez a megoldás a Schmeidler (1969) által bevezetett nukleolusz. Megvizsgáljuk Sobolev (1975) nukleolusz axiomatizációját átruházható hasznosságú játékokon, és bebizonyítjuk, hogy ez az axiomatizálás érvényes marad a repülőtér játékok osztályán is. Ezután bemutatjuk Sönmez (1994) algoritmusát, és a karakterizációt felhasználva, Sönmez (1994) bizonyításának finomításával belátjuk, hogy az algoritmus a nukleoluszt eredményezi repülőtér játékokon.

A költségelosztási problémák gyakorlati szempontból is relevánsak, hiszen gazdasági szituációk során gyakran merül fel a kérdés, miként osszuk fel egy létesítmény költségeit a haszonélvezői között. Ezen problémák számos további alkalmazásáról olvashatunk Thomson (2007) cikkében.

Az első fejezetet az átruházható hasznosságú kooperatív játékok rövid bemutatásával kezdjük, ahol definiáljuk a dolgozat alapját képző fő fogalmakat. Bemutatunk egy jelentős megoldást, a magot, ami további vizsgálataink kiindulópontját fogja képezni. Majd bevezetjük a dolgozat központi részében vizsgált modellt, a repülőtér játékok osztályát.

A második fejezetben definiáljuk a nukleoluszt (Schmeidler, 1969) és a prenukleoluszt (Sobolev, 1975), valamint megmutatjuk, hogy a vizsgált játékosztályon a két megoldás egybeesik. Ezután axiómákban rögzítjük azokat a tulajdonságokat, amelyek az átruházható hasznosságú játékok osztályán (Snijders (1995) és Sobolev (1975) karakterizációja alapján) a nukleoluszt és a prenukleoluszt jellemzik. Bebizonyítjuk, hogy a repülőtér játékok osztályán a két karakterizáció megegyezik. Azonban, mivel Sobolev (1975) és Snijders (1995) axiomatizációja az átruházható hasznosságú játékok osztályára érvényes, meg kell vizsgálnunk bizonyításaik részleteit, hogy beláthassuk: a két tétel érvényes marad a repülőtér játékok osztályán is. A nukleoluszt a repülőtér játékok osztályán korábban már Potters és Sudhölter (1999), valamint Hwang és Yeh (2012) is karakterizálták az eredeti axiómák különféle gyengítésével, azonban mi tőlük függetlenül adunk a karakterizáció-

ra egy alternatív bizonyítást. Az utolsó részben definiáljuk Sönmez (1994) algoritmusát, amely kiszámolja egy n -személyes repülőtér játék nukleoluszt. Sönmez (1994) bizonyításának finomításával, valamint a nukleolusz karakterizációját felhasználva igazoljuk, hogy az algoritmus valóban a nukleoluszt eredményezi.

2. fejezet

TU-játékok

A kooperatív játékelmélet olyan helyzeteket vizsgál, ahol a játékosok célja részben, hogy együttműködjenek, részben pedig, hogy versengjenek egymással. Olyan szituációkat modellez, ahol az együttműködés közös hasznot eredményez, amit a játékosoknak el kell osztaniuk egymás között. Mindegyik játékos törekszik arra, hogy saját hasznát maximalizálja, e célból koalícióba lépnek egymással.

Ha a kooperatív játékelméleten belül átruházható hasznosságú – röviden TU- – játékokról beszélünk, akkor a játékosok olyan haszon elosztásáról tárgyalnak, mely mindenki által egyenlően értékelt, és át is ruházható.

A TU-játékokat Márkus (2011) dolgozata, valamint Peleg és Sudhölter (2003) könyve alapján mutatjuk be.

2.1. definíció. Legyen $N \neq \emptyset, |N| < \infty$ a játékosok véges halmaza, és jelölje $\mathcal{P}(N)$ az N halmaz összes részhalmazának az osztályát. Legyen továbbá $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $v(\emptyset) = 0$. Ekkor v -t átruházható hasznosságú kooperatív játéknak nevezzük, és az N játékoshalmazzal rendelkező átruházható hasznosságú játékok osztályát $\mathcal{G}^N$ -el jelöljük.

A játékosok halmaza legtöbbször emberek csoportját jelenti (például faluközösséget, szakszervezetet), de gazdasági problémák esetén a játékosok halmazán gyakran nem személyeket, hanem a szituációtól függően valamilyen gazdasági változót (például termelési tényezőt) értünk. Az N részhalmazait koalícióknak nevezzük, speciálisan az N -t nagykoalíciónak, az $\emptyset$ -t üreskoalíciónak hívjuk. A v függvény minden koalícióhoz hozzárendeli azt az értéket, amelyet az adott koalíció elér a többi játékos cselekedetétől függetlenül. Ez az érték valamilyen kifizetést vagy költséget takar, melynek egy egysége mindegyik játékos számára ugyan annyit ér. A $v(S)$ számot az S koalíció értékének nevezzük.

2.2. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék monoton, ha minden $S, T \subseteq N$ koalíció esetén teljesül, hogy ha $S \subseteq T$, akkor $v(S) \leq v(T)$.

2.3. *példa.* Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza, és legyen a v játék olyan, melyre $v(\bar{1}) = 2, v(\bar{2}) = 2, v(\bar{3}) = 3, v(\bar{12}) = 4, v(\bar{13}) = 5, v(\bar{23}) = 3$, és $v(\bar{123}) = 5$. Látható, hogy a nagykoalíció értékénél (5) mindegyik egy fős koalíció értéke (2, 2, 3) kisebb, és a nagykoalíció értékénél a kétfős koalíciók értéke (4, 5, 3) sem nagyobb. Így már csak a kétfős koalíciók értékét kell összehasonlítani az egy fős koalíciók értékével. Egyik egy fős koalíció értéke (2, 2, 3) sem nagyobb, mint a kétfős koalíciók értéke (4, 5, 3), így a v játék monoton.

2.4. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék szubadditív, ha minden olyan $S, T \subseteq N$ koalícióra, melyre $S \cap T = \emptyset$, teljesül, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$.

2.5. *példa.* Tekintsük a 2.3. példában szereplő játékot. Hat esetben kell megvizsgálnunk $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$ feltétel teljesülését, mivel a definíció szerint S és T koalíciók metszetének üresnek kell lennie. Ez a következő részhalmazpárookra teljesül: $\bar{1} - \bar{2}, \bar{1} - \bar{3}, \bar{2} - \bar{3}, \bar{1} - \bar{23}, \bar{2} - \bar{13}$, és $\bar{3} - \bar{12}$. Az első három esetben $v(S \cup T)$ értéke rendre 4, 5, 3 és $v(S) + v(T)$ értéke rendre 4, 5, 5. Tehát ezekben az esetekben teljesül, hogy $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$. Az utolsó három eset mindegyikében a koalíciók uniója a nagykoalíció, melynek értéke 5, és a koalíciók értékének összege rendre 5, 7, 7. Így látható, hogy a gyenge egyenlőtlenség ezekben az esetekben is teljesül, a v játék szubadditív.

2.6. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék konkáv, ha minden $S, T \subseteq N$ -re $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

2.7. *megjegyzés.* Minden konkáv játék szubadditív.

2.8. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék nemnegatív, ha $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ahol $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát jelöli.

Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játékot költségjátéknak nevezünk, ha nemnegatív, monoton és szubadditív. Az N játékoshalmazzal rendelkező költségjátékok osztályát $\mathcal{G}_c^N$ -el fogjuk jelölni.

Költségjátékok esetén az N játékoshalmaz fogyasztók egy csoportját jelöli, akik egy bizonyos szolgáltatást szeretnének igénybe venni. v a költségfüggvény, mely N halmaz minden koalíciójához megadja azt az értéket, amennyiért a koalíció tagjai együttesen a szóban forgó szolgáltatást igénybe vehetik.

2.9. definíció. A $\psi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ (halmazértékű) függvényt, ahol $A \subseteq \mathcal{G}^N$, az A halmazon értelmezett megoldásnak nevezzük.

Egy játék megoldáshalmaza minden játékoshoz hozzárendeli azokat az értékeket, amennyivel az adott játékosnak a közös költség finanszírozásához hozzá kell járulnia.

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e olyan költséghelosztási módszer, amellyel minden elvárásnak megfelelő, minden szempontot kielégítő módon tudjuk felosztani a költséget a

szereplők között. Természetesen ilyen megoldás nem létezik, mindegyik megoldás egy sajátos szempontrendszernek megfelelően eredményezi elosztások egy halmazát. Ilyen szempont lehet például, hogy az összes költség kerüljön felosztásra, vagy hogy egyik koalíciónak se álljon érdekében eltérni a kapott megoldástól. A következő részben ezeket a feltételeket kielégítő megoldásról lesz szó.

2.1. A mag

Költségelosztási játékok egyik legismertebb megoldása a mag^1 , mely a dolgozat további részében is meghatározó szerepet fog játszani. Segítségével megkaphatjuk azokat az elosztásokat, amelyeket minden koalíció elfogad megoldásként. A mag definiálása előtt tekintsük az alábbi fogalmakat.

2.10. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor a v játék preimputációinak a halmazát a következőképpen definiáljuk:

$$I^*(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

2.11. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék imputációinak a halmazát a következőképpen definiáljuk:

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } v(\{i\}) - x_i \geq 0, i \in N \right\}.$$

A 2.10. definíció alapján egy játék preimputációinak a halmazát olyan vektorok alkotják, melyek a nagykoalíció értékét, az összes költséget osztják fel. A 2.11. definícióban bevezetett imputációk halmaza olyan preimputációkból áll, melyeknél az elosztás egyénileg racionális, azaz semelyik játékosnak nem áll érdekében egyénileg eltérni az adott elosztástól.

A következő lépésben egy olyan függvényt definiálunk, mely megadja, hogy egy koalíció mennyivel jár jobban egy adott elosztás elfogadásával ahelyett, hogy saját költségének megfelelő értékben járuljon hozzá az összköltség finanszírozásához.

2.12. definíció. Az $e(\cdot, \cdot) : \mathcal{G}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2^N}$ függvényt többletfüggvénynek nevezzük, ahol tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ -re, $x \in \mathbb{R}^N$ -re és $S \subseteq N$ -re

$$(e(v, x))_S = v(S) - \sum_{i \in S} x_i,$$

az S koalíció x imputáció mellett elért v játékbeli többlete.

¹Gillies (1959)

Költségjátékok esetén a többletfüggvény értéke valódi többletet jelent, tehát minél nagyobb az $(e(v, x))_S$ érték, az S koalíció annál jobban jár.

2.13. definíció. (Gillies, 1959) Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$. Ekkor a v játék magját a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{C}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } (e(v, x))_S \geq 0, S \subseteq N \right\}.$$

2.14. *példa.* Tekintsük újra a 2.3. példában szereplő játékot, tehát legyen $N = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza, és legyen a v játék olyan, melyre $v(\bar{1}) = 2, v(\bar{2}) = 2, v(\bar{3}) = 3, v(\bar{12}) = 4, v(\bar{13}) = 5, v(\bar{23}) = 3$, és $v(\bar{123}) = 5$. Ekkor minden magbeli elosztásnak teljesítenie kell a következő feltételeket:

$$\begin{array}{lll} (1) \ 2 - x_1 \geq 0 & (4) \ 4 - x_1 - x_2 \geq 0 & (7) \ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ (2) \ 2 - x_2 \geq 0 & (5) \ 5 - x_1 - x_3 \geq 0 & \\ (3) \ 3 - x_3 \geq 0 & (6) \ 3 - x_2 - x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Átrendezéssel a következőkhöz jutunk:

$$\begin{array}{lll} (1) \ x_1 \leq 2 & (4) \ x_1 + x_2 \leq 4 & (7) \ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ (2) \ x_2 \leq 2 & (5) \ x_1 + x_3 \leq 5 & \\ (3) \ x_3 \leq 3 & (6) \ x_2 + x_3 \leq 3 & \end{array}$$

(7)-es (6)-os feltételeket összevetve kapjuk, hogy $x_1 \geq 2$. Azonban (1) szerint $x_1 \leq 2$, így azonnal adódik, hogy (8) $x_1 = 2$. Emiatt (7)-ből következik, hogy (9) $x_2 + x_3 = 3$. (8)-at felhasználva, az (5)-ös, illetve (6)-os egyenlőtlenségekből épp (2)-es és (3)-as egyenlőtlenségekkel megegyező feltételeket kapunk, így x_2 és x_3 meghatározásához már csak az alábbi feltételek állnak rendelkezésünkre:

$$(2) \ x_2 \leq 2 \quad (3) \ x_3 \leq 3 \quad (9) \ x_2 + x_3 = 3$$

Minden olyan x_2 és x_3 -ra, melyekre (2), (3) és (9) teljesül, igaz, hogy $x_2, x_3 \geq 0, x_2 = 3 - x_3$. Tehát a játék magját azok az $x = (x_1, x_2, x_3)$ elosztások alkotják, melyekre fennáll, hogy $x_1 = 2$ és $x_2 = 3 - x_3$, ahol $x_2 \leq 2$ és $x_2, x_3 \geq 0$.

A példában szereplő játék magja vektorok egy halmazából áll, azonban ez nem igaz minden játékra. Léteznek olyan költségelosztási problémák is, melyek magja egyetlen elosztásból áll, sőt olyanok is, melyek magja üres.

2.15. *megjegyzés.* Shapley (1971) tétele szerint konkáv játékok magja sohasem üres, és a Shapley-értéket mindig tartalmazza.

2.2. A repülőtér játékok osztálya

Ebben a részben költségelosztási játékok egy speciális részosztályát mutatjuk be, melyhez főként Thomson (2007) cikkét használjuk fel.

A repülőtér problémát ² a következő példával szokás reprezentálni. Több repülőgép közösen használ egy kifutópályát, de különböző méretű repülőgépek különböző hosszúságú kifutópályára tartanak igényt. Egy adott repülőgép befogadására alkalmas le- és felszállópálya felár nélkül képes befogadni az adott repülőgépnél kisebb gépeket is. Továbbá a kifutópálya elég nagy ahhoz, hogy használatba vehesse a legnagyobb repülőgép. Hogyan kell a költségeket felosztani a repülőgépek között? Repülőtér probléma elnevezéssel hivatkozunk erre a helyzetre, és úgy használjuk ezt a kifejezést, hogy kijelölje az összes ilyen struktúrával rendelkező problémát.

Általánosan elmondható, hogy a felhasználók (repülőgépek) szükségleteik szerint lineárisan növekvő sorrendbe rendezettek. Így ha egy létesítmény (kifutópálya) alkalmas egy felhasználó befogadására, akkor minden további költség nélkül alkalmas az adott felhasználót megelőző felhasználók befogadására is.

A modell tehát a következő: adott felhasználóknak egy $N = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaza, akik közös használatra egy létesítményt építenek. A felhasználóknak különböző szükségleteik vannak, így a létesítményt úgy kell megépíteni, hogy befogadhassa az összes felhasználót. Minden $i \in N$ felhasználó jellemezhető egy c_i nemnegatív költségparaméterrel, amely megmutatja, hogy mennyivel drágább az i felhasználónak az őt közvetlenül megelőző felhasználóhoz képest a létesítmény használata. Így valójában egy olyan létesítmény költsége, mely éppen az i felhasználó igényeinek kielégítésére alkalmas, pontosan $v(\bar{i}) = \sum_{j=1}^i c_j$. A $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektort a játék költségvektorának nevezzük.

Mivel a felhasználókat a növekvő költségeik szerint rendezzük lineáris sorrendbe, a továbbiakban úgy is hivatkozunk rájuk, mint az első, a második, $\dots$, és utolsó játékos.

2.16. definíció. Egy $v \in \mathcal{G}_c^N$ költségjátékot repülőtérjátéknak nevezünk, ha minden $S \subseteq N$ koalícióra teljesül, hogy

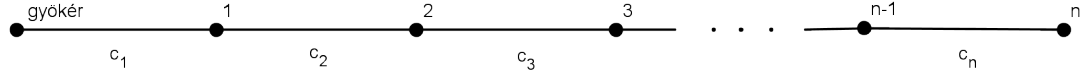
$$v(S) = \max_{i \in S} v(\bar{i}).$$

Az N játékosalmazzal rendelkező repülőtér játékok osztályát $\mathcal{G}_a^N$ -el jelöljük.

A repülőtér játékokat szokás egy (G, c) láncsal modellezni. A lánc egy gyökérrel indul, majd ezt követi az első, a második, $\dots$, az utolsó játékos, akiket a csúcsok reprezentálnak. Az élek súlyai a $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ költségvektor komponensei, melyek megadják, hogy mennyibe kerül a kifutópálya használata a gyökértől az első, az elsőől a második, $\dots$, az $n - 1$ -edikről az utolsó játékosig. Egy általános $v \in \mathcal{G}_a^N$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ játék láncsal

²Littlechild és Owen (1973)

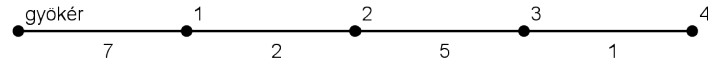
történő ábrázolását mutatja a 2.1. ábra. Ez alapján például az 1-es játékos költsége $v(\bar{1}) = c_1$, a 4-es játékos költsége $v(\bar{4}) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, a 2-es és 3-as játékosok által alkotott koalíció értéke $v(\bar{23}) = c_1 + c_2 + c_3$, és a nagykoalíció értéke $v(N) = \sum_{i \in N} c_i$.



2.1. ábra. Egy általános repülőtér játék

2.17. *példa.* Tekintsünk az előbbiekre egy számszerű példát is! Az 2.2. ábrán látható láncal megadott játékban a játékoshalmaz négyelemű, a költségvektor $c = (7, 2, 5, 1)$, így a koalíciók értékei:

$$\begin{aligned} v(\bar{1}) &= 7, \\ v(\bar{2}) &= v(\bar{12}) = 9, \\ v(\bar{3}) &= v(\bar{13}) = v(\bar{23}) = v(\bar{123}) = 14, \\ v(\bar{4}) &= v(\bar{14}) = v(\bar{24}) = v(\bar{34}) = v(\bar{124}) = v(\bar{134}) = v(\bar{234}) = v(\bar{1234}) = 15. \end{aligned}$$



2.2. ábra. Számszerű példa a repülőtér játék ábrázolására

A következő két tétel meghatározó jelentőségű lesz dolgozatunk további részében. Radványi (2010), illetve Márkus (2011) diplomamunkájában ezek a tételek bizonyítással együtt megtalálhatóak, ezért mi eltekintünk az igazolásuktól.

2.18. tétel. *A repülőtér játékok konkávak.*

2.19. tétel. *Az N játékoshalmazzal rendelkező repülőtér játékok osztálya kúp.*

Egy repülőtér probléma esetén tehát a kérdés, hogy miként osszuk fel az összköltséget a felhasználók (játékosok) között. Olyan elosztásokat keresünk, melyek minden költséget felosztanak úgy, hogy csak a nulla játékos³ költsége lehet nulla, és egyik játékos sem fizet többet annál, mint amennyibe a létesítmény kerülne számára, ha egyedül használná. A következő fejezetben a probléma egy lehetséges megoldásával foglalkozunk.

³Egy $i \in N$ játékos nulla játékosnak nevezünk, ha bármely $S \subseteq N, i \notin S$ koalícióra teljesül, hogy $v(S \cup i) = v(S)$.

3. fejezet

Nukleolusz

Egy ψ megoldás mag-kompatibilis, ha $\psi(v) \subseteq \mathcal{C}(v)$, $v \in \mathcal{G}^N$, amennyiben $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$. Milyen módszer minősül ésszerűnek és következetesnek ahhoz, hogy kiválasszuk egy játék (nemüres) magjának egy egyedülálló pontját? A hagyományos válasz erre a kérdésre az, hogy válasszuk ki azt az imputációt, ami a legrosszabbul járó koalíciót is a lehető legjobb helyzetbe hozza. Ehhez meg kell egyeznünk abban, hogy mi alapján döntsük el adott imputáció mellett két koalíció közül, hogy melyik jár jobban. Egy módszer erre a következő:

Tetszőleges $v \in \mathcal{G}_c^N$ költségjáték, $x \in \mathbb{R}^N$ imputáció, és $S, T \subseteq N$ koalíciók esetén azt mondjuk, hogy az S koalíció az x imputáció mellett jobban jár, mint a T koalíció, ha

$$(e(v, x))_S > (e(v, x))_T.$$

Azt a megoldást, amelyik egy v játék összes imputációja közül kiválasztja azt, amelyik mellett a legrosszabbul járó koalíció is a lehető legjobban jár, ezen belül pedig a második legrosszabbul járó koalíció is a lehető legjobban jár, és így tovább, nukleolusznak¹ nevezzük. Így a nukleolusz mindig egy magbeli megoldást eredményez, amennyiben a mag nem üres. Ha pedig a mag üres, akkor a nukleolusz a mag által képviselt stabilitást "lexikografikusan legjobban" megközelítő megoldás.

Egy még enyhébb feltételeket magába foglaló megoldás a prenukleolusz², aminek a különbsége a nukleolusztól abban rejlik, hogy a preimputációk halmazán végzi el a szóban forgó optimalizálási eljárást. A nukleolusz és a prenukleolusz pontos definiálásához tekintsük az alábbi rendezést.

3.1. definíció. Legyen $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ olyan rendezés, mely minden $x \in \mathbb{R}^d$ vektorra és $1 \leq i \leq d$ komponensre a következőképpen definiált:

$$\rho(x)_i = \min_{T \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, |T|=i} \max_{j \in T} x_j.$$

¹Schmeidler (1969)

²Sobolev (1975)

3.2. *példa.* Adott $x = (5, 1, 7, 4)$. Ekkor keressük $\rho(x)$ -et. $(\rho(x))_1$ -et megkapjuk ha vesszük az x vektor komponenseinek összes egyelemű részalmazát, és kiválasztjuk ezek közül a legkisebbet. Így $(\rho(x))_1 = 1$. Ezután $(\rho(x))_2$ -höz az x vektor komponenseinek minden két elemű részalmazából kiválasztjuk a legnagyobbat (így olyan halmazokat kapunk, melyek egyetlen eleme 4, 5 vagy 7), és ezek közül kiválasztjuk a legkisebbet. Ebből kapjuk, hogy $(\rho(x))_2 = 4$. És így tovább, $(\rho(x))_3$ egyenlő x vektor azon komponensével, mely a komponensek által alkotott háromelemű halmazok legnagyobb elemei közül a legkisebb. Tehát $(\rho(x))_3 = 5$. Így a legvégén kapjuk, hogy $(\rho(x))_4 = 7$. Valójában ρ egy olyan függvény, mely egy vektor elemeit nemcsökkenő sorrendbe rendezi.

3.3. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$ költségjáték. Ekkor a v játék prenukleolusa a következőképpen adható meg:

$$\mathcal{PN}(v) = \{x \in I^*(v) : \rho \circ e(v, x) \geq_{lex} \rho \circ e(v, y), y \in I^*(v)\}.$$

3.4. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$ költségjáték. Ekkor a v játék nukleolusa a következőképpen adható meg:

$$\mathcal{N}(v) = \{x \in I(v) : \rho \circ e(v, x) \geq_{lex} \rho \circ e(v, y), y \in I(v)\}.$$

3.5. *megjegyzés.* A 3.3. és a 3.4. definíciók során $\geq_{lex}$ vektorok közötti gyenge lexikografikus rendezést jelent, miszerint pontosan akkor $A \geq_{lex} B$, ha $A = B$ vagy $A_i > B_i$ az első olyan i komponensre, melyben A és B vektorok különböznek.

A nukleolusz az imputációk olyan halmaza, mely az imputációk között lexikografikusan maximalizálja a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektorát. A nukleolusz tehát minden imputációhoz kiszámolja a koalíciók többletei által alkotott vektort, és megkeresi, hogy melyik az az imputáció, ahol a legkisebb többlet a legnagyobb. Ha ebből több is van, akkor ezek közül megkeresi azt az imputációt, melynél a második legkisebb többlet is a lehető legnagyobb. Ha még ebből is több van, akkor tovább megy: kiválasztja azt az imputációt, ahol a harmadik legkisebb többlet is maximális a többi imputációhoz képest, és így tovább, amíg nem talál egyetlen egy lexikografikusan maximális elosztást.

A megoldás pontos megértéséhez egy példával szemléltetjük a $\rho \circ e(v, x)$ összetett függvény működését, majd pedig egy általános kétszemélyes költségjáték nukleoluszára adunk zárt képletet.

3.6. *példa.* Legyen $N = \{1, 2\}$ a játékosalmaz, és legyenek a koalíciók értékei $v = (1, 2, 3)$. Tekintsük ekkor az $x = (2, 1)$ elosztást. A koalíciókhoz tartozó többletek a következők lesznek:

$$(e(v, x))_{\bar{1}} = 1 - 2 = -1; (e(v, x))_{\bar{2}} = 2 - 1 = 1; (e(v, x))_{\bar{12}} = 3 - 3 = 0.$$

A többletfüggvény ρ függvénybe történő beágyazása után a következő vektort kapjuk:

$$\rho \circ e(v, x) = \begin{bmatrix} (e(v, x))_{\bar{1}} \\ (e(v, x))_{\bar{12}} \\ (e(v, x))_{\bar{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.7. *példa.* (Solymosi et al, 2007) Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$, $N = \{1, 2\}$ olyan költségjáték, melyre igaz, hogy $v(\bar{1}) + v(\bar{2}) > v(\bar{12})$. Ekkor az imputációk halmaza

$$I(v) = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = v(\bar{12}), v(\bar{1}) - x_1 \geq 0, v(\bar{2}) - x_2 \geq 0\}.$$

Ezen feltételek mellett keressük azt az (x_1, x_2) vektort, mely maximalizálja a legkisebb többletet. Mivel csak az egyszemélyes koalíciók többletei változhatnak, keressük azt az (x_1, x_2) vektort, melyre $\min\{v(\bar{1}) - x_1, v(\bar{2}) - x_2\}$ maximális. Könnyen látható, hogy a két többlet minimuma akkor lesz maximális, ha egyenlők. Tehát $x_1 + x_2 = v(\bar{12})$ és $v(\bar{1}) - x_1 = v(\bar{2}) - x_2$ egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{v(\bar{12}) + v(\bar{1}) - v(\bar{2})}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{v(\bar{12}) + v(\bar{2}) - v(\bar{1})}{2}.$$

Vegyük észre, hogy ez alapján a vizsgált kétszemélyes költségjátékok esetén a nukleolusz és a Shapley-érték megegyezik.

3.8. tétel. Ha $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$, akkor $\mathcal{PN}(v) = \mathcal{N}(v)$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$, akkor létezik $x \in \mathbb{R}^N$ (pre)imputáció, melyre $e(v, x) \geq 0$. Ebből adódik, hogy $\mathcal{PN}(v)$ és $\mathcal{N}(v)$ is magbéli lesz, hiszen lexikografikusan a legnagyobb preimputáció illetve imputáció így már nem lehet nem pozitív. Emiatt

$$\mathcal{PN}(v) = \mathcal{N}(v) = \{x \in \mathcal{C}(v) : \rho \circ e(v, x) \geq_{lex} \rho \circ e(v, y), y \in \mathcal{C}(v)\}.$$

■

A 2.18. tétel kimondja, hogy egy repülőtér játék mindig konkáv, és a 2.15. megjegyzés szerint konkáv játék magja sohasem üres, így a 3.8. tételből a következőt állapíthatjuk meg:

3.9. következmény. Repülőtér játékok esetén a nukleolusz és a prenukleolusz egyenlő.

3.1. Axiómák

Költségelosztási problémák megoldása során rendszerint igazságos elosztásokat keresünk. Számos igazságosnak tekinthető megoldáskonceptió létezik, azonban ezek nem ugyanaz az elv szerint igazságosak, mindegyik más-más elvárásnak felel meg.

Ebben, és a következő részben arra a kérdésre adjuk meg a választ, hogy mik azok a tulajdonságok, amelyekkel a nukleolusz és a prenukleolusz egyértelműen jellemezhető, tehát milyen elvek alapján ad ez a két megoldás egy-egy igazságos elosztást. Első lépésben a karakterizációhoz szükséges tulajdonságokat mutatjuk be.

Egy tetszőlegesen rögzített $v \in \mathcal{G}^N$ játék esetén az $i, j \in N$ játékosokat ekvivalensnek nevezzük a v játékban (jelölés: $i \sim^v j$), ha minden $S \subseteq N$ koalícióra, melyre $i, j \notin S$ fennáll, teljesül, hogy $v(S \cup \bar{i}) = v(S \cup \bar{j})$. Vegyük észre, hogy bármely $v \in \mathcal{G}_a^N$ repülőtér játék esetén az $i, j \in N$ játékosok ekvivalenciája csak annyit takar, hogy $v(\bar{i}) = v(\bar{j})$.

Jelöljön a továbbiakban egy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játék és $\beta \in \mathbb{R}^N$ vektor mellett $v \oplus \beta \in \mathcal{G}^N$ olyan játékot, melyre minden $S \subseteq N$ koalícióra $v \oplus \beta(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$, ahol β_i a β vektor i -komponense.

Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ játék, egy $x \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges elosztással. Ekkor a v játék bármely $S \subseteq N$ koalíciójára $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

3.10. axióma. Az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett ψ megoldás Pareto-optimális (PO), ha minden $v \in A$ játékra teljesül, hogy $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$.

3.11. axióma. Az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett ψ megoldás egyértékű (SIVA), ha minden $v \in A$ játékra $|\psi(v)| = 1$.

3.12. axióma. Az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett ψ megoldás egyenlően kezelő (ETP), ha minden $v \in A$ játékra és $i, j \in N$ játékosokra teljesül, hogy, ha $i \sim^v j$, akkor $\psi_i(v) = \psi_j(v)$.

3.13. axióma. Az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon értelmezett ψ megoldás kovariáns (COV), ha minden $v \in A$ játékra, $\alpha > 0$ számra és $\beta \in \mathbb{R}^N$ vektorra fennáll, hogy ha $\alpha v \oplus \beta \in A$, akkor $\psi(\alpha v \oplus \beta) = \alpha \psi(v) + \beta$.

Ezek alapján a definiált ψ megoldás

- PO, ha minden játékban az egyes játékosokhoz rendelt kifizetések összege kiadja a nagykoalíció értékét.
- SIVA, ha minden játék esetén teljesül, hogy a megoldáshalmaz egyelemű.
- ETP, ha bármely játékot tekintve, az ekvivalens játékosokhoz azonos értékű kifizetés párosul.
- COV, ha az értékelési módszer invariáns az összeadásra és a pozitív skalárral való szorzásra. Tehát ha adott két játék: $v \in \mathcal{G}^N$ és $v' \in \mathcal{G}^N$, melyekre található olyan $\alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}^N$, hogy $v' = \alpha v \oplus \beta$, akkor a két játékhoz tartozó $\psi(v)$ és $\psi(v')$ megoldásokra ugyanez a transzformáció áll fenn. Tehát $\psi(v') = \alpha \psi(v) + \beta$.

3.14. állítás. Legyen $v \in \mathcal{G}_a^N$ egy repülőtér játék, amelyre $|N| = n$. Ekkor tetszőleges $\alpha > 0$ számra és $\beta \in \mathbb{R}^N$ vektorra $\alpha v \oplus \beta$ pontosan akkor eleme a $\mathcal{G}_a^N$ játékosztálynak, ha $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-1} = 0$ és $\beta_n \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a transzformációval kapott játék is repülőtér játék legyen, minden $i \in N$ -re és $T \subseteq \{1, 2, \dots, i-1\}$ koalícióra teljesülnie kell, hogy $v(\bar{i})' = v(\bar{i} \cup T)'$, ahol $v' = v \oplus \beta$. (A 2.19. tétel miatt α -ra semmilyen megkötést nem kell tennünk a feltétel teljesüléséhez, ezért vizsgáljuk csak β -t.)

Legyen most $T = \{1, 2, \dots, i-1\}$. Ekkor

$$v(\bar{i})' = c_1 + \dots + c_i + \beta_i = c_1 + \dots + c_{i-1} + c_i + \beta_1 + \dots + \beta_{i-1} + \beta_i = v(\bar{i} \cup T).$$

Ez csak akkor igaz minden $i \in N$ -re, ha $\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$ és $\beta_n \in \mathbb{R}$. ■

3.15. példa. Az eddig definiált axiómák jelentésének illusztrálására tekintsük a következő szituációt: adott egy kifutópálya, melyet több légitársaság együttesen használ repülőgépeik fel- és leszállásához. A kifutópálya éves fenntartási költségeit a légitársaságok közösen finanszírozzák. A kérdés, hogy milyen elvek alapján osszák fel a kifutópálya fenntartási költségeit a repülőgépek, és ezáltal a légitársaságok között.

- PO tulajdonság: A légitársaságok által fizetett összeg nem lehet kevesebb, mint a kifutópálya költségei, különben nem fedezné a fenntartás díját. A befizetett összeg természetesen több sem lehet a szóban forgó költségnél, mivel a felhasználók kizárólag a fenntartási költségen osztozkodnak.
- SIVA tulajdonság: Ha adott a kifutópálya használata szempontjából két teljesen egyforma év, melyekben így az összköltség egyenlő, és a repülőgépek száma és mérete változatlan, akkor alapvető elvárás, hogy a két évben a repülőgépek tulajdonosait ugyanannyi költség terhelje.
- ETP tulajdonság: A kifutópálya használata szempontjából egy adott évben két repülőgép ekvivalensnek tekinthető, ha egyenlő méretűek, tehát ugyanolyan mértékben használják ki a kifutópálya adottságait. Ennek megfelelően, ha adott két ekvivalens repülőgép, akkor elvárjuk, hogy a kifutópálya használatáért mindkét repülőgépnek ugyanannyi költséget számoljanak fel.
- COV tulajdonság: tegyük fel, hogy a kifutópályát üzemeltető cég egyik évről a másikra α -szor nagyobb összegért vállalja a kifutópálya üzemeltetését, miközben a repülőgépek változatlanul használják a kifutópályát. Ekkor jogosan várható el, hogy az egyes repülőgépek költsége ebben az évben éppen α -szor legyen nagyobb, mint az előzőben.

Másrészt a COV tulajdonság további elvárása a következő: tegyük fel, hogy egyik évről a másikra minden más változatlanlansága mellett az eddigi legnagyobb repülőgépet lecserélik egy még nagyobbra, mely ezáltal a kifutópálya nagyobb részét veszi igénybe. Ekkor a kifutópálya újonnan használatba vett részének költségei kizárólag ezt a repülőgépet terhelik.

3.16. definíció. (Davis és Maschler, 1965) Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$ játék, $\emptyset \neq S \subseteq N$ koalíció és $x \in \mathbb{R}^N$ egy tetszőleges elosztás. Ekkor minden $T \subseteq S$ koalícióra, az S -re és x -re vonatkozó $v_{(S,x)} \in \mathcal{G}^S$ redukált játékot a következőképpen definiáljuk:

$$v_{(S,x)}(T) = \begin{cases} 0, & \text{ha } T = \emptyset \\ v(N) - x(N \setminus S), & \text{ha } T = S \\ \min_{Q \subseteq N \setminus S} (v(T \cup Q) - x(Q)) & \text{különben} \end{cases}.$$

A redukált játék a következő szituációt írja le. Adott egy $v \in \mathcal{G}_c^N$ játék, melyet az $N \setminus S$ koalíció tagjai elhagynak. Tegyük fel, hogy az N játékosalmaz tagjai megegyeznek abban, hogy az $N \setminus S$ kilépő koalíció $x(N \setminus S)$ -el járul hozzá az összköltséghez. Így a játékban maradó S koalíció költsége $v(N) - x(N \setminus S)$ lesz. Tegyük fel továbbá, hogy a játékban maradó S koalíció tagjai szövetkeznek a kilépő $N \setminus S$ koalíció tagjaival. Ennek eredményeképpen minden nemüres $T \subset S$ koalíció költsége az új játékban a szövetkezéssel elérhető legkisebb összeg lesz.

3.17. *példa.* Tekintsük a 2.17. példában bemutatott játékot! Legyen $x = (3, 3, 4, 5)$, és tegyük fel, hogy az 1-es játékos kilép. Ekkor a $v_{(\overline{234},x)}$ redukált játék a definíció alapján az alábbiakban látható.

Az egyelemű koalíciók:

$$\begin{aligned} v_{(\overline{234},x)}(\overline{2}) &= \min \{ 9, 9 - 3 \} = 6, \\ v_{(\overline{234},x)}(\overline{3}) &= \min \{ 14, 14 - 3 \} = 11, \\ v_{(\overline{234},x)}(\overline{4}) &= \min \{ 15, 15 - 3 \} = 12. \end{aligned}$$

A két elemű koalíciók:

$$\begin{aligned} v_{(\overline{234},x)}(\overline{23}) &= \min \{ 14, 14 - 3 \} = 11, \\ v_{(\overline{234},x)}(\overline{24}) &= \min \{ 15, 15 - 3 \} = 12, \\ v_{(\overline{234},x)}(\overline{34}) &= \min \{ 15, 15 - 3 \} = 12. \end{aligned}$$

A nagykoalíció:

$$v_{(\overline{234},x)}(\overline{234}) = 15 - 3 = 12.$$

3.18. axióma. A ψ megoldást az $A \subseteq \cup_N \mathcal{G}_c^N$ játékosztályon redukált játék tulajdonságúnak (RGP) nevezzük, ha tetszőleges $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ koalícióra és $x \in \psi(v)$ kifizetésre, hogy $v_{(S,x)} \in A$, fennáll, hogy $x_S \in \psi(v_{(S,x)})$, ahol x_S az x kifizetésvektor azon komponenseit tartalmazza, melyek az S koalícióhoz tartoznak.

Egy redukált játék imputációinak halmaza akár üres is lehet (Snijders, 1995). A következő fogalom annyiban tér el a 3.16. definíciótól, hogy ezt az esetet kizárja.

3.19. definíció. (Snijders, 1995) Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$ játék, $\emptyset \neq S \subseteq N$ koalíció és $x \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges elosztás. Ekkor az S -re és x -re vonatkozó $v^{(S,x)} \in \mathcal{G}^S$ imputációt megőrző redukált játékot a következőképpen definiáljuk, minden $T \subseteq S$ koalícióra:

$$v^{(S,x)}(T) = \begin{cases} v_{(S,x)}, & \text{ha } |T| \neq 1 \\ \max_{j \in T} \{x_j, v_{(S,x)}(\bar{j})\} & \text{különben} \end{cases}.$$

3.20. példa. Tekintsük újra a 2.17. példában szereplő játékot! Legyen a 3.17. példával megegyezően $x = (3, 3, 4, 5)$. Ha az 1-es játékos elhagyja a játékot, akkor a $v^{(234,x)}$ imputációt megőrző redukált játék a 3.17. példa eredményeit felhasználva a következő lesz.

Az egyelemű koalíciók:

$$\begin{aligned} v^{(234,x)}(\bar{2}) &= \max \{ 3, 6 \} = 6, \\ v^{(234,x)}(\bar{3}) &= \max \{ 4, 11 \} = 11, \\ v^{(234,x)}(\bar{4}) &= \max \{ 5, 12 \} = 12. \end{aligned}$$

A kételemű koalíciók:

$$\begin{aligned} v^{(234,x)}(\bar{23}) &= v_{(234,x)}(\bar{23}) = 11, \\ v^{(234,x)}(\bar{24}) &= v_{(234,x)}(\bar{24}) = 12, \\ v^{(234,x)}(\bar{34}) &= v_{(234,x)}(\bar{34}) = 12. \end{aligned}$$

A nagykoalíció:

$$v^{(234,x)}(\bar{234}) = 12.$$

3.21. axióma. A ψ megoldást az $A \subseteq \cup_N \mathcal{G}^N$ játékosztályon imputációt megőrző redukált játék tulajdonságúnak (ISRGP) nevezzük, ha tetszőleges $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ koalícióra és $x \in \psi(v)$ kifizetésre, hogy $v^{(S,x)} \in A$, fennáll, hogy $x_S \in \psi(v^{(S,x)})$, ahol x_S az x kifizetésvektor azon elemeit tartalmazza, melyek az S koalícióhoz tartoznak.

A 3.17. és a 3.20. példákat összehasonlítva látható, hogy ha a vizsgált játékot az 1-es játékos elhagyja, akkor az adott játék esetén a redukált játék és az imputációt megőrző redukált játék teljesen megegyezik. Ez azonban nem véletlen, erre mutat rá a következő segédétel.

3.22. segédétel. Legyen $v \in \mathcal{G}_c^N$ költségjáték és $x \in \mathcal{C}(v)$. Ekkor bármely $S \subseteq N$ koalícióra $v_{(S,x)} = v^{(S,x)}$.

Bizonyítás. Az imputációt megőrző redukált játék definíciójából adódik, hogy a segédétel belátásához csak az egyelemű koalíciók értékeit kell vizsgálnunk.

Az imputációt megőrző redukált játék egy fős koalíciók esetén $v^{(S,x)}(\bar{j}) = \max\{x_j, v_{(S,x)}(\bar{j})\}$ bármely $j \in S$ játékosra. Így a segédétel belátásához a redukált játék definíciója alapján minden $Q \subseteq N \setminus S$ koalícióra a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$x_j \leq v(\bar{j} \cup Q) - x(Q).$$

A fenti összefüggés teljesülése a mag definíciójából átrendezéssel azonnal adódik. ■

3.23. következmény. *A 3.22. segédételben megfogalmazott állítás repülőtér játék esetén nemcsak a magbeli elosztásokra, hanem a nukleolusra is teljesül, mivel a mag nem üres, és ez esetben a nukleoluszt mindig a magba képez.*

3.2. A nukleoluszt karakterizációja repülőtér játékokon

A prenukleoluszt – ami a nukleolusszal nagyon szorosan összefüggő megoldás – Sobolev (1975) axiomatizálta először a kooperatív játékok halmazán. Snijders (1995) módosítva a redukált játék fogalmát, bemutatta, hogy az új imputációt megőrző redukált játék tulajdonsággal már a nukleoluszt axiomatizálása is lehetővé válik (hasonlóan a prenukleoluszt axiomatizálásához). Ez a két tétel látható az alábbiakban.

3.24. tétel. *(Sobolev, 1975) Legyen ψ megoldás az $\cup_N \mathcal{G}^N$ játékosztályon. ψ pontosan akkor SIVA, ETP, COV és RGP, ha ez a megoldás a prenukleoluszt.*

3.25. tétel. *(Snijders, 1995) Legyen ψ megoldás az $A = \{v \in \cup_N \mathcal{G}^N : I(v) \neq \emptyset\}$ játékosztályon. ψ pontosan akkor SIVA, ETP, COV és ISRGP, ha ez a megoldás a nukleoluszt.*

3.26. megjegyzés. A fenti tételek nem igazak abban az esetben, ha például csak a legalább három játékoskal rendelkező játékosztályokat tekintjük, tehát, ha a ψ megoldás az $A = \{v \in \cup_{|N| \geq 3} \mathcal{G}^N : I(v) \neq \emptyset\}$ játékosztályokon értelmezett.

Nem tudjuk, hogy az axiomatizálás érvényes marad-e az $A = \{v \in \cup_N \mathcal{G}^N : I^*(v) \neq \emptyset\}$ játékosztály részosztályain is. Ezért mélyen bele kell néznünk Sobolev bizonyításának a részleteibe.

A következőkben megmutatjuk, hogy Sobolev (1975) karakterizációja a repülőtér játékok osztályán igaz marad. A 3.9. következmény szerint ezen játékosztályon a nukleoluszt és a prenukleoluszt egyenlő. Emiatt, valamint a 3.23. következmény miatt elég a nukleoluszt és a prenukleoluszt közül csak az egyiket vizsgálnunk.

3.27. tétel. *Legyen ψ megoldás $\cup_N \mathcal{G}_a^N$ játékosztályon. ψ pontosan akkor SIVA, ETP, COV és RGP, ha ez a megoldás a nukleoluszt.*

A 3.27. tétel bizonyítása előtt tekintsük a következő segédételt.

3.28. segédtétel. (Peleg és Sudhölter, 2003) A mag RGP az $A = \{v \in \cup_N \mathcal{G}_c^N : C(v) \neq \emptyset\}$ játékosztályokon.

Bizonyítás. Legyen $v \in A$ játék, $x \in \mathcal{C}(v)$, $\emptyset \neq S \subseteq N$, valamint $\emptyset \neq T \subseteq S$.

Ha $T = S$, akkor $v_{(S,x)}(T) - x(T) = x(S) - x(S) = 0$, mivel a mag definíciója alapján $x(N) = v(N)$.

Ha $T \neq S$, akkor a mag és a redukált játék definíciója alapján fennáll a következő összefüggés:

$$\begin{aligned} v_{(S,x)}(T) - x(T) &= \min_{Q \subseteq N \setminus S} (v(T \cup Q) - x(Q)) - x(T) \\ &= \min_{Q \subseteq N \setminus S} (v(T \cup Q) - x(T \cup Q)) \geq 0 \end{aligned}$$

Ezért $x_S \in \mathcal{C}(v_{(S,x)})$. ■

A 3.27. tétel bizonyítása. Szükséges: A nukleolusz SIVA, COV, ETP, RGP az $\cup_N \mathcal{G}_a^N$ játékosztályon.

(1) SIVA tulajdonság könnyen látható, hiszen ez azt jelenti, hogy egy $v \in \mathcal{G}_a^N$ játék esetén egyetlen olyan preimputáció létezik melyre a koalíciók többletei között a legkisebb a lehető legnagyobb. Tegyük fel, hogy x' és x'' imputáció is maximalizálja a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektorát. Ekkor azonban $e(v, \frac{x' + x''}{2})$ biztos, hogy lexikografikusan szigorúan nagyobb, mint $e(v, x')$ illetve $e(v, x'')$, hacsak nem $x' = x''$.

(2) ETP igazolásához legyen újra $v \in \mathcal{G}_a^N$ repülőtér játék, és legyenek $i, j \in N, i < j$ játékosok ekvivalensek, azaz $v(S \cup \bar{i}) = v(S \cup \bar{j})$ minden olyan $S \subseteq N$ koalícióra, melyre $i, j \notin S$. Ekkor be kell látnunk, hogy a játék nukleolusza egyenlő kifizetést rendel mindkét játékoshoz. Ha létezik $k \in N$, melyre $i < k < j$, akkor k -ra is teljesül, hogy $v(S \cup \bar{k}) = v(S \cup \bar{i}) = v(S \cup \bar{j})$. Emiatt elég csak két szomszédos játékos esetét vizsgálnunk. Jelöljük őket i -vel és $i + 1$ -gyel.

Tegyük fel, hogy a játék nukleolusza egy olyan $x \in \mathbb{R}^N$ vektor, melynek i és $i + 1$ komponense nem egyenlő, feltehetjük, hogy $x_i < x_{i+1}$. E szerint x vektor az az imputáció, mely lexikografikusan maximalizálja a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektorát. Tekintsük most azt az $x' \in \mathbb{R}^N$ imputációt, melynek komponenseire igaz, hogy $x'_l = x_l$ minden $l \in N$ -re, melyre $l \neq i, i + 1$, továbbá legyen $x'_i = x'_{i+1}$. Ekkor minden $S \subseteq N, i, j \notin S$ koalícióra fennáll az alábbi két összefüggés:

$$\begin{aligned} (e(v, x))_S &= (e(v, x'))_S \\ (e(v, x))_{S \cup \bar{i}} &< (e(v, x'))_{S \cup \bar{i}}. \end{aligned}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert nem igaz, hogy x az az imputáció, mely lexikografikusan maximalizálja a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektorát. A következmény, hogy $\mathcal{N}_i(v) = \mathcal{N}_j(v)$, amennyiben $i \sim^v j$.

(3) COV tulajdonság teljesülését két lépésben látjuk be. Ehhez legyen $v \in \mathcal{G}_a^N$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ repülőtér játék, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nukleolusszal. Először igazoljuk, hogy egy $\alpha > 0$ pozitív skalár mellett αv játék nukleolusza éppen $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Második lépésben pedig belátjuk, hogy bármely olyan $\beta \in \mathbb{R}^N$ mellett, mely $\beta = (0, 0, \dots, \beta_n)$ alakú, fennáll, hogy a $v \oplus \beta$ játék nukleolusza $x + \beta = (x_1, x_2, \dots, x_n + \beta)$.

Az első lépés teljesülését könnyen meggondolhatjuk. Hiszen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy olyan vektor, mely az imputációk között lexikografikusan maximalizálja a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektorát. Ha ekkor a nemcsökkenő sorrendbe rendezett $e(v, x)$ vektort az α skalárral megszorozzuk, akkor az így kapott $\alpha e(v, x)$ vektor továbbra is lexikografikusan maximális lesz. Ugyanakkor ez az $\alpha e(v, x)$ vektor nem más, mint az αv játék többletvektora αx imputáció mellett. Ezért SIVA tulajdonság miatt az αv játék nukleolusza valóban αx .

A második lépés igazolásához jelölje $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ a $v \oplus \beta$ játék nukleoluszt. A v játékhoz képest ebben az új játékban 3.14. állítás miatt csak azoknak az $S \subseteq N$ koalícióknak az értéke változott meg (nőtt β_n -el), melyekre $n \in S$. A többi koalíció értéke változatlan maradt. Ezért $x' = x + \beta$ imputációval $e(v \oplus \beta, x + \beta) = e(v, x)$. Azonban ha x' olyan, melyre $x'_i > x_i$ valamely $i \in N, i \neq n$ játékosra, akkor $e(v \oplus \beta, x') <_{lex} e(v, x)$. Valamint ha x' olyan, hogy $x'_i < x_i$ valamely $i \in N, i \neq n$ játékosra, akkor megint csak $e(v \oplus \beta, x') <_{lex} e(v, x)$. Ezért a nemcsökkenő sorrendbe rendezett többletek vektora akkor lesz maximális, ha $x' = x + \beta$.

(4) RGP tulajdonság teljesülése a 3.28. segédteletből azonnal következik, ugyanis itt kimondjuk, hogy ha a mag nem üres, akkor minden magbeli elosztás RGP. Esetünkben a 2.15. tétel ismeretében a vizsgált játékosztályon a mag nem üres, a nukleolusz pedig ilyenkor kivétel nélkül magbeli elosztás, így szükségszerűen RGP.

Elégséges: Ha ψ SIVA, ETP, COV és RPG, akkor $\psi = \mathcal{N}$. Ez valójában azt jelenti, hogy egyetlen olyan megoldás van $\cup_N \mathcal{G}_a^N$ -en, ami SIVA, ETP, COV és RGP. Az állítást indukcióval látjuk be.

(1) Tekintsük az egy játékkal rendelkező repülőtér játékok osztályát. Ekkor a $0 \in \mathcal{G}_a^T, |T| = 1$. Legyen ψ egy megoldás a 0 értékű játékon. Ekkor azt kell belátnunk, hogy minden egy játékkal rendelkező $v \in \mathcal{G}_a^T$ -ra $\psi(v) = \mathcal{N}(v)$, ami egy játékkal rendelkező játékoknál csak annyit jelent, hogy ψ PO.

COV-ból adódik, hogy bármely $\alpha > 0$ számra $\psi(0) = \psi(\alpha 0) = \alpha \psi(0)$. Ez csak úgy lehet igaz, ha $\psi(0) = 0$. Újra COV tulajdonságot felhasználva látható, hogy minden $v \in \mathcal{G}^T$ játékra fennáll, hogy $v = 0 \oplus v(T)$, és mivel $\psi(0) = 0$:

$$v = 0 \oplus v(T) = \psi(0) \oplus v(T) = \psi(0 \oplus v(T)) = \psi(v).$$

Tehát teljesül a PO tulajdonság, $\psi(v) = \mathcal{N}(v)$ az egy játékkal rendelkező repülőtér játékok osztályán.

(2) Tekintsük most a két játékkal rendelkező repülőtér játékok osztályát, ahol a játékosalmaz $T = \{1, 2\}$. Mivel a feltevés szerint ψ RGP, ezért ha kiszáll az 1-es játékos, akkor a redukált játék definíciója alapján $\psi_2(v) = v_{(\bar{2}, \psi)} = v(T) - \psi_1(v)$. Átrendezéssel adódik, hogy $\psi_1(v) + \psi_2(v) = v(T)$. Ezt, és az előző esetet figyelembe véve látható, hogy a PO tulajdonság most is teljesül.

Ezek után legyen $\beta = (0, v(\bar{1}) - v(\bar{2}))$. A repülőtér játékok természetéből adódóan $v(\bar{1}) \leq v(\bar{2})$. Így ilyen β mellett és COV-ot feltételezve teljesül, hogy $v \oplus \beta \in \mathcal{G}_a^N$, továbbá β miatt $1 \sim^{v \oplus \beta} 2$.

ETP feltétel szerint fennáll, így $\psi_1(v \oplus \beta) = \psi_2(v \oplus \beta)$. PO miatt $\psi(v \oplus \beta) = \mathcal{N}(v \oplus \beta)$, amiből COV miatt következik, hogy $\psi(v) = \mathcal{N}(v)$.

(3) Tegyük fel, hogy az állítás igaz $|N| = n$ -re, tehát minden $|N| = n$ játékosalmazzal rendelkező v repülőtér játékokra igaz, hogy ha ψ SIVA, ETP, COV és RGP, akkor $\psi(v) = \mathcal{N}(v)$.

Ekkor már csak azt kell belátnunk, hogy ez az állítás $|N| = n + 1$ -re is teljesül. Ehhez vegyük észre, hogy $v_{(N \setminus \bar{1}, \psi)}$ egy n játékkal rendelkező játék, ebből kifolyólag az indukciós feltevés alapján

$$\psi(v_{(N \setminus \bar{1}, \psi)}) = \mathcal{N}(v_{(N \setminus \bar{1}, \mathcal{N})}).$$

Felhasználva, hogy a redukált játékban a nagykoalíció értéke

$$v_{(N \setminus \bar{1}, \psi)} = v(N) - \psi_1(v) = \psi_2(v) + \psi_3(v) + \dots + \psi_n(v),$$

kapjuk, hogy $v(N) = \psi_1(v) + \psi_2(v) + \dots + \psi_n(v)$. RGP miatt az indukciós feltevésből következik, hogy $\psi_2(v) = \mathcal{N}_2(v), \psi_3(v) = \mathcal{N}_3(v), \dots, \psi_n(v) = \mathcal{N}_n(v)$, így szükségszerűen kapjuk, hogy $\psi_1(v) = \mathcal{N}_1(v)$. ■

3.29. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítás alapján repülőtér játékokon a nukleolusz karakterizációjához elég lenne egy gyenge RGP tulajdonságot használnunk, mely alatt a következő fogalmat értjük.

A ψ megoldás az $A \subseteq \cup_N \mathcal{G}_a^N$ játékosztályon gyenge redukált játék tulajdonságú, ha az 1-es játékosra és $x \in \psi(v)$ kifizetésre fennáll, hogy $x_{N \setminus \bar{1}} \in \psi(v_{(N \setminus \bar{1}, x)})$, ahol $x_{N \setminus \bar{1}}$ az x kifizetésvektor azon komponenseit tartalmazza, melyek az $N \setminus \bar{1}$ koalícióhoz tartoznak.

3.3. Nukleolusz számítása repülőtér játékokon

Ha ki szeretnénk számolni egy általános játék nukleoluszát, akkor lineáris programozási feladatok sorozatával szembesülnénk. Ezek megoldása azonban általában nem könnyű

feladat. Egyszerűbb a dolgunk repülőtér játékok esetén, ugyanis Sönmez (1994) bevezetett egy algoritmust, mellyel egyszerűen megkapjuk egy $v \in \mathcal{G}_a^N, |N| = n$ játék nukleoluszát. Ezt az algoritmust mutatjuk be ebben a részben, továbbá Sönmez (1994) bizonyításának finomításával igazoljuk is, hogy az algoritmus kimenete a nukleolusz.

3.30. definíció. *Megoldási algoritmus láncra (Sönmez, 1994).*

Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ repülőtér játék, és legyen minden $i \in N$ -re c_i adott. Ekkor x elosztásvektor komponenseit rendre a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 &= \min \left\{ \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+c_2}{3}, \frac{c_1+\dots+c_3}{4}, \dots, \frac{c_1+\dots+c_{n-1}}{n} \right\} \\ x_2 &= \min \left\{ \frac{c_1+c_2-x_1}{2}, \frac{c_1+\dots+c_3-x_1}{3}, \dots, \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1}{n-1} \right\} \\ x_3 &= \min \left\{ \frac{c_1+\dots+c_3-x_1-x_2}{2}, \dots, \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1-x_2}{n-2} \right\} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \min \left\{ \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1-\dots-x_{n-2}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Az utolsó játékos a fennmaradó költséget fizeti.

3.31. *példa.* Számoljuk ki a 2.17. példában bemutatott játékhoz tartozó, Sönmez (1994) algoritmusában definiált x elosztásvektort! Egyszerűen behelyettesítéssel a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned} x_1 &= \min \left\{ \frac{7}{2}, \frac{9}{3}, \frac{14}{4} \right\} = 3, \\ x_2 &= \min \left\{ \frac{9-3}{2}, \frac{14-3}{3} \right\} = 3, \\ x_3 &= \min \left\{ \frac{14-3-3}{2} \right\} = 4. \end{aligned}$$

Az utolsó játékost a megmaradt költség terheli, így $x_4 = 15 - 3 - 3 - 4 = 5$.

Mielőtt belátjuk, hogy a 3.30. definícióban rögzített algoritmus valóban a nukleoluszhoz vezet, vegyük szemügyre az alábbi segédtelet.

3.32. segédtelet. Minden $v \in \mathcal{G}_a^N$ játékra, és $x \in \mathcal{C}(v)$ kifizetésre $v_{(N \setminus \bar{1}, x)} \in \mathcal{G}_a^{N \setminus \bar{1}}$.

Bizonyítás. Legyen a v repülőtér játék költségvektora $c = (c_1, \dots, c_n)$. Tegyük fel, hogy az 1-es játékos kilép. Mivel a mag definíciója alapján $0 \leq x_1 \leq c_1$, ezért a $v_{(N \setminus \bar{1}, x)}$ redukált játék a következő lesz.

Egyelemű koalíciók:

$$v(\bar{k}) = \min \{c_1 + c_2 + \dots + c_k, c_1 + c_2 + \dots + c_k - x_1\} = c_1 + c_2 + \dots + c_k - x_1, \text{ ahol } k \in N \setminus \bar{1}.$$

Kételemű koalíciók:

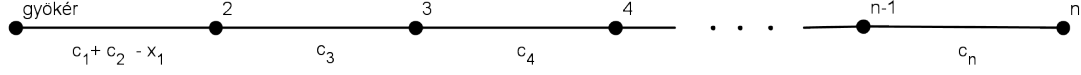
$$v^{(N \setminus \bar{1}, x)}(\bar{j}\bar{k}) = \min \{c_1 + c_2 + \dots + c_k, c_1 + c_2 + \dots + c_k - x_1\} = c_1 + c_2 + \dots + c_k - x_1 = v(\bar{k}) \text{ ahol } j < k \text{ és } j, k \in N \setminus \bar{1}.$$

$\vdots$

A nagykoalíció:

$$v^{(N \setminus \{1\}, x)}(\bar{N} \setminus \bar{1}) = v(\bar{N}) - x_1 = c_1 + \dots + c_n - x_1.$$

A fentiekből kiderül, hogy az 1-es játékos kilépésével az eredeti v játékhoz képest minden koalíció értéke pontosan x_1 -el lesz kevesebb. Ennek tudatában a játék valóban repülőtér játék, melynek költségvektora $c = (c_1 + c_2 - x_1, c_3, \dots, c_n)$. Ezt szemlélteti a 3.1. ábra.



3.1. ábra. Az 1-es játékosal redukált repülőtér játék

■

3.33. *megjegyzés.* A 3.32. segédtétel valójában bármely játékos kilépése esetén igaz marad. Például, ha kiszáll a 2-es játékos, akkor a redukált játékban a koalíciók új értéke a következőképpen alakul.

$$\begin{aligned}
 v(\bar{1}) &= \min\{c_1, c_1 + c_2 - x_2\} \\
 v(\bar{3}) &= v(\bar{13}) = \min\{c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2 + c_3 - x_2\} = c_1 + c_2 + c_3 - x_2 \\
 v(\bar{4}) &= v(\bar{14}) = v(\bar{134}) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - x_2 \\
 &\vdots \\
 v(\bar{n}) &= \dots = v(N \setminus \bar{2}) = c_1 + \dots + c_n - x_2.
 \end{aligned}$$

Tehát $v_{(N \setminus \bar{2}, x)}$ redukált játékban $v(\bar{1})$ koalíción kívül minden koalíció értéke egyértelmű. Így két esetet kell megvizsgálnunk. Ha $v(\bar{1}) = c_1$, akkor $v_{(N \setminus \bar{2}, x)}$ egy olyan repülőtér játék, melynek költségvektora $c = (c_1, c_2 + c_3 - x_2, c_4, \dots, c_n), c \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ha pedig $v(\bar{1}) = c_1 + c_2 - x_2$, akkor $v_{(N \setminus \bar{2}, x)}$ olyan repülőtér játék, melynek költségvektora $c = (c_1 + c_2 - x_2, c_3, c_4, \dots, c_n), c \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Vizsgáljuk még meg, hogy mi történik, ha v játékot a 3-as játékos hagyja el. Ez esetben a redukált játék koalícióinak értéke a következő:

$$\begin{aligned}
 v(\bar{1}) &= \min\{c_1, c_1 + c_2 + c_3 - x_3\} \\
 v(\bar{2}) &= v(\bar{12}) = \min\{c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3 - x_3\} \\
 v(\bar{4}) &= v(\bar{14}) = v(\bar{124}) = \min\{c_1 + c_2 + c_3 + c_4, c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - x_3\} = \\
 &c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - x_3 \\
 &\vdots \\
 v(\bar{n}) &= \dots = v(N \setminus \bar{3}) = c_1 + \dots + c_n - x_3.
 \end{aligned}$$

Látható, hogy itt már két különböző értékű koalíció van, melyek értéke nem egyértelmű. Probléma azonban csak akkor merül fel, ha $v(\bar{1}) = c_1 + c_2 + c_3 - x_3$, és $v(\bar{2}) = v(\bar{12}) = c_1 + c_2$. Ez csak úgy jöhet létre, ha $x_3 > c_2 + c_3$ ($c_1 > c_1 + c_2 + c_3 - x_3$ egyenlőtlenségből),

és $x_3 < c_3$ ($c_1 + c_2 < c_1 + c_2 + c_3 - x_3$ egyenlőtlenségből), ami ellentmondás. Azaz $v_{(N \setminus \bar{3}, x)}$ redukált játék is repülőtér játék, még hozzá olyan, melynek költségfüggvénye a koalíciók értékétől függően három különböző alakot ölthet: $c = (c_1, c_1 + c_2, c_3 + c_4 - x_3, c_5, \dots, c_n)$, vagy $c' = (c_1, c_1 + c_2 + c_3 - x_3, c_4, \dots, c_n)$, vagy $c'' = (c_1 + c_2 + c_3 - x_3, 0, c_4, \dots, c_n)$.

Ily módon, bármely játékos lép ki belátható, hogy a kapott redukált játék is repülőtér játék lesz.

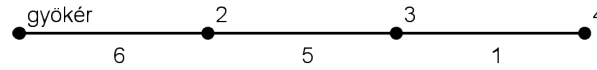
3.34. *példa.* Tekintsük a 3.32. segédétel illusztrálására a 2.17. példát. Az 3.17. példában kiszámoltuk, hogy ha az 1-es játékos kilép, akkor a kapott redukált játék a következő lesz:

$$v_{(\bar{234}, x)}(\bar{2}) = 6,$$

$$v_{(\bar{234}, x)}(\bar{3}) = v_{(\bar{234}, x)}(\bar{23}) = 11,$$

$$v_{(\bar{234}, x)}(\bar{4}) = v_{(\bar{234}, x)}(\bar{24}) = v_{(\bar{234}, x)}(\bar{34}) = v_{(\bar{234}, x)}(\bar{234}) = 12.$$

A koalíciók értékeiből következik, hogy a játék az 1-es játékos kilépésével repülőtér játék marad. Ezt támasztja alá az alábbi ábra is.



3.2. ábra. A 3.34. példa illusztrálása

3.35. tétel. *Sönmez (1994) 3.30. algoritmusának megoldása a nukleolusz.*

Bizonyítás. A 3.27. tétel bizonyításakor igazoltuk, hogy ha repülőtér játékok esetén egy megoldás rendelkezik SIVA, ETP, COV és RGP tulajdonságokkal, akkor ez a megoldás a nukleolusz. Így most már csak azt kell belátnunk, hogy ha minden $v \in \mathcal{G}_a^N$ repülőtér játékra $\psi(v) = \mathcal{N}(v)$ – ahol ψ Sönmez algoritmusával kapott megoldás – akkor ψ SIVA, ETP, COV, valamint RGP tulajdonságokkal bír.

(1) SIVA teljesül, hiszen az algoritmus minden játékoshoz egy kifizetést rendel.

(2) ETP bekövetkezésének igazolásához legyen $v(\bar{i}) = v(\bar{j})$, $i < j$, $i, j \in N$. Ekkor ha létezik $k \in N$, melyre $i < k < j$, akkor k -ra is teljesül, hogy $v(\bar{k}) = v(\bar{i}) = v(\bar{j})$. Emiatt elég csak két szomszédos játékos esetét vizsgálnunk. Ekkor az algoritmus alapján:

$$x_i = \min \left\{ \frac{v(\bar{i}) - x_1 - \dots - x_{i-1}}{2}, \frac{v(\bar{i}) - x_1 - \dots - x_{i-1}}{3}, \dots, \frac{v(\overline{n-1}) - x_1 - \dots - x_{i-1}}{n-i+1} \right\} \quad (3.1)$$

$$x_{i+1} = \min \left\{ \frac{v(\bar{i}) - x_1 - \dots - x_i}{2}, \frac{v(\bar{i}) + c_{i+1} - x_1 - \dots - x_i}{3}, \dots, \frac{v(\overline{n-1}) - x_1 - \dots - x_i}{n-i+2} \right\} \quad (3.2)$$

Könnyen látható (3.1) egyenlőségben, hogy nem lehet $x_1 = \frac{v(\bar{i}) - x_1 - \dots - x_{i-1}}{2}$, mert ennél a második tag mindenképp kisebb. Feltűnik továbbá az is, hogy x_i lehetséges értékeinek a számlálói megtalálhatóak x_{i+1} lehetséges értékeinek számlálóiiban is, méghozzá a következő módon: $x_i = \min \left\{ \frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4} \dots \right\}$, ekkor $x_{i+1} = \min \left\{ \frac{b-\frac{b}{3}}{2}, \frac{c-\frac{c}{4}}{3}, \dots \right\} = \min \left\{ \frac{b}{3}, \frac{c}{4}, \dots \right\}$. Ez azt jelenti, hogy x_i minden lehetséges értéke megegyezik x_{i+1} minden lehetséges értékével, azaz $x_i = x_{i+1}$, amennyiben $v(\bar{i}) = v(\overline{i+1})$.

(3) COV tulajdonság teljesüléséhez fenn kell állnia, hogy $\psi(\alpha v \oplus \beta) = \alpha \psi(v) + \beta$. Azonban a 3.14. állítás alapján β csak olyan vektor lehet, melynek az utolsó koordinátája egy valós szám, a többi pedig 0. Így az utolsó játékos kifizetésén kívül, csak az α szorzó játszik szerepet.

Jelölje a $\alpha v \oplus \beta$ játék algoritmus szerinti megoldását x' . Ekkor az egyes játékosok kifizetései:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \min \left\{ \frac{\alpha c_1}{2}, \frac{\alpha(c_1+c_2)}{3}, \dots, \frac{\alpha(c_1+c_2+\dots+c_{n-1})}{n} \right\} \\ &= \alpha \min \left\{ \frac{c_1}{2}, \dots, \frac{c_1+c_2+\dots+c_{n-1}}{n} \right\} = \alpha x_1 \\ x'_2 &= \min \left\{ \frac{\alpha(c_1+c_2)-\alpha x_1}{2}, \frac{\alpha(c_1+c_2+c_3)-\alpha x_1}{3}, \dots, \frac{\alpha(c_1+c_2+\dots+c_{n-1})-\alpha x_1}{n-1} \right\} = \alpha x_2 \\ x'_i &= \min \left\{ \frac{\alpha(c_1+\dots+c_i)-\alpha(x_1+\dots+x_{i-1})}{2}, \frac{\alpha(c_1+\dots+c_{i+1})-\alpha(x_1+\dots+x_{i-1})}{3}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha(c_1+\dots+c_{n-1})-\alpha(x_1+\dots+x_{i-1})}{n-i+1} \right\} = \alpha x_i. \end{aligned}$$

Az n -edik játékos fizeti a fennmaradó költséget, így most $x'_n = \alpha x_n + \beta_n$.

Könnyen látható, hogy α -t mindenhol kiemelhetjük, ezért a COV tulajdonság azonnal következik.

(4) RGP teljesülését a 3.32. segédétel eredményét felhasználva látjuk be. Itt megkaptuk az egyes koalíciók új értékét, majd az algoritmust felhasználva, és a kapott redukált játék megoldását z -vel jelölve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} z_2 &= \min \left\{ \frac{c_1+c_2-x_1}{2}, \frac{c_1+\dots+c_3-x_1}{3}, \dots, \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1}{n-1} \right\} \\ z_3 &= \min \left\{ \frac{c_1+\dots+c_3-x_1-x_2}{2}, \dots, \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1-x_2}{n-2} \right\} \\ \dots &= \min \left\{ \dots, \dots, \dots \right\} \\ z_{n-1} &= \min \left\{ \frac{c_1+\dots+c_{n-1}-x_1-\dots-x_{n-2}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Az utolsó játékos fizeti a fennmaradó költséget.

Ekkor a kapott z elosztásvektort összehasonlítva a 3.30. definícióban rögzített x elosztásvektorral, adódik, hogy $x_{N \setminus \{1\}} = z$. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus valóban RGP. ■

4. fejezet

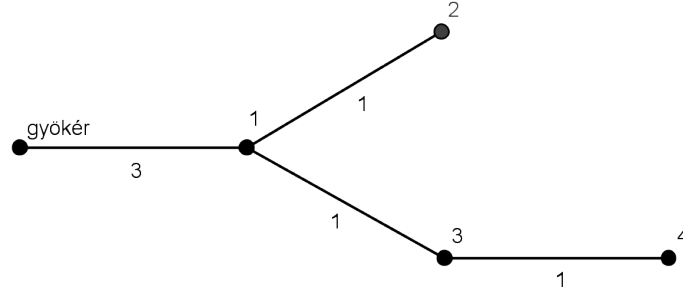
Összefoglalás

A dolgozat első részével valójában a második fejezet vizsgálatait alapoztuk meg. Egy rövid áttekintéssel kezdtünk a TU-játékokról, és definiáltuk a téma alapját képező kulcsfogalmakat, mint költségjáték, megoldás és mag. Főként Thomson (2007) cikke segítségével bemutattuk a repülőtér problémát, és az általa indukált repülőtér játékot. Egy-egy definíciót példa követett, ezzel téve szemléletesebbé az alapmodellt.

A második részben rátértünk a dolgozat középpontjában álló nukleolusra, és pre-nukleolusra. Beláttuk, hogy mivel repülőtér játékok esetén a mag nem üres, így ezen a játékosztályon a nukleolusz és a prenukleolusz egyenlő. Ezután definiáltuk a nukleolusz és a prenukleolusz karakterizációjához elengedhetetlen axiómákat, és megmutattuk, hogy költségjátékok esetén a redukált játék és az imputációt megőrző redukált játék megegyezik. A következő részben megmutattuk, hogy Sobolev (1975) és Snijders (1995) karakterizációja érvényes marad a repülőtér játékok osztályán. Ez egy fontos eredmény, hiszen a TU-játékok osztályán teljesülő tulajdonságok nem feltétlenül teljesülnek a részosztályokon is.

Végül az utolsó részben bemutattuk Sönmez (1994) algoritmusát, és az eddigi eredményeket felhasználva bebizonyítottuk, hogy az algoritmus kimenetele valóban a nukleolusz. Ezzel Sönmez (1994) bizonyításának egy finomítását közöltük. Ahogy már az első fejezetben is, itt is igyekeztünk a legtöbb fogalmat, illetve állítást példákkal illusztrálni, azzal a céllal, hogy dolgozatunk kifejezőbb, és érthetőbb legyen.

Számos további, érdekes kutatási terület merülhet még fel a nukleolusszal kapcsolatban. Annak ellenére, hogy Maschler et al (2010) már bevezettek egy algoritmust, mely kiszámolja egy öntözési játék nukleoluszt, érdekes kérdés lehet, hogy miként tudnánk kiterjeszteni Sönmez (1994) algoritmusát az öntözési játékok osztályára. Azonban ezen a játékosztályon egy algoritmus már nem bizonyítható oly módon, ahogy jelen dolgozatunkban igazoltuk, ugyanis egy öntözési játék redukált játéka már nem feltétlenül lesz öntözési játék. Erre mutatunk egy példát az alábbi, 4.1. ábrával illusztrált játékkal.



4.1. ábra. Példa öntözési játékra

Tegyük fel például, hogy az 1-es játékos kilép, valamint tegyük fel, hogy $x = (1, 2, 1, 2)$. Ekkor a $v_{(234,x)}^{(234)}$ redukált játék a következő lesz:

$$\begin{aligned}
 v_{(234,x)}(\bar{2}) &= \min \{4, 4 - 1\} = 3, \\
 v_{(234,x)}(\bar{3}) &= \min \{4, 4 - 1\} = 3, \\
 v_{(234,x)}(\bar{4}) &= \min \{5, 5 - 1\} = 4, \\
 v_{(234,x)}(\bar{23}) &= \min \{5, 5 - 1\} = 4, \\
 v_{(234,x)}(\bar{24}) &= \min \{6, 6 - 1\} = 5, \\
 v_{(234,x)}(\bar{34}) &= \min \{5, 5 - 1\} = 4, \\
 v_{(234,x)}(\bar{234}) &= \min \{6, 6 - 1\} = 5.
 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az így kapott redukált játék valóban nem modellezhető egy gyökérrel rendelkező fával, ahol a csúcsok a játékosoknak feleltethetők meg. Hiszen például egyedül a 2-es, illetve egyedül a 3-as játékos által alkotott koalíció értéke $v_{(234,x)}(\bar{2}) = v_{(234,x)}(\bar{3}) = 3$. Ez alapján a 2-es és a 3-as játékos egymáshoz viszonyított helyzetét tekintve két eset merülhet fel. Egyik esetben mindkét játékos egy-egy, a gyökérből kiinduló különböző ágon helyezkedik el. Ekkor $v_{(234,x)}(\bar{23}) = 6$. A másik esetben a két játékos egy ágon tartózkodik, méghozzá úgy, hogy a 3-as játékoshoz tartozó szegmens költsége 0. Ekkor $v_{(234,x)}(\bar{23}) = 3$. A fentebb felsorolt koalícióértékek alapján látható, hogy mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Irodalomjegyzék

- Davis M, Maschler M (1965) The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12:223–259
- Gillies DB (1959) Solutions to general non-zero-sum games. In: *Contributions to the Theory of Games IV.*, Princeton University Press
- Hwang Y, Yeh C (2012) A characterization of the nucleolus without homogeneity in airport problems. *Social Choice and Welfare* 38:355–364
- Littlechild SC, Owen G (1973) A simple expression for the shapley value in a special case. *Management Science* 20(3):370–372
- Márkus J (2011) A Shapley-megoldás airport játékokon. Diplomamunka, Budapesti Corvinus Egyetem
- Maschler M, Potters J, Reijnierse H (2010) The nucleolus of a standard tree game revisited: a study of its monotonicity and computational properties. *International Journal of Game Theory* 39:89–104
- Peleg B, Sudhölter P (2003) *Introduction to the theory of cooperative games*. Kluwer
- Pintér M (2009) A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott matematikai lapok* 26:289–315
- Potters J, Sudhölter P (1999) Airport problems and consistent allocation rules. *Mathematical Social Sciences* 38:83–102
- Radványi A (2010) Költségelosztási modellek. Diplomamunka, Eötvös Loránd Tudományegyetem
- Schmeidler D (1969) The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17(6):1163–1170,
- Shapley LS (1971) Cores of convex games. *International Journal of Game Theory* 1(1):11–26

- Snijders C (1995) Axiomatization of the nucleolus. *Mathematics of Operations Research* 20(1):189–196
- Sobolev AI (1975) A characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations. In: *Mathematical Methods in the Social Sciences*, vol 6, pp 94–151
- Solymosi T, Forgó F, Pintér M, Simonovits A (2007) Kooperatív játékelmélet (elektronikus jegyzet). URL http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/solymosi_jatekelmelet.pdf
- Sönmez T (1994) Population-monotonicity of the nucleolus on a class of public good problems. Kézirat
- Thomson W (2007) Cost allocation and airport problems. Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 538
- Young HP (1985) Cost allocation: Methods, principles, applications. International Institute for Applied Systems Analysis