

OTDK-DOLGOZAT

Stankovits Klaudia
BSc

2013

Árdiszkrimináció duopol piacokon aszimmetrikus költségek és
aszimmetrikus információk mellett

*Price discrimination on duopol markets with asymmetric costs and asymmetric
informations*

Stankovits Klaudia

Kézirat lezárása: 2012. június 4.

Tartalomjegyzék

1. Cournot modell aszimmetrikus költségekkel	6
1.1. Árdiszkrimináció nélkül	7
1.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával	8
1.3. Árdiszkrimináció K darab árkategóriával	10
2. Cournot aszimmetrikus információs modell	15
2.1. Árdiszkrimináció nélkül	15
2.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával	17
2.3. Árdiszkrimináció K db árkategóriával	19
3. Stackelberg modell aszimmetrikus költségekkel	22
3.1. Árdiszkrimináció nélkül	22
3.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával	23
4. Stackelberg aszimmetrikus információs modell	25
4.1. Árdiszkrimináció nélkül	25
4.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával	26
5. Összefoglalás	28

Bevezetés

Témaválasztás

A piacszerkezetek a közgazdaságtan azon területe, amely különböző vállalati viselkedésekkel, és piaci struktúrákkal foglalkozik. Olyan eseteket vizsgál, amikor a tökéletes verseny feltevései nem, vagy csak részben teljesülnek. Azáltal, hogy a piacszerkezetekben használt modellek figyelembe veszik, a tökéletes versenyt torzító tényezőket, mint például az aszimmetrikus információk, belépési korlátok, tranzakciós költségek, pontosabb képet adnak a vállaltok való életbeli működéséről. A piacszerkezetek vizsgálati témakörei közül dolgozatomban az árdiszkriminációt fogom részletesen bemutatni különböző piaci struktúrák mellett.

Egy vállalat akkor alkalmaz árdiszkriminációt, ha a fogyasztók egyes csoportjainak megszabott árak aránya különbözik, az adott termékek határkölségeinek arányától. Az árdiszkrimináció alkalmazhatóságának három alapvető feltétele van (i) az árdiszkriminációt alkalmazó vállalatnak rövid távú piaci erővel kell rendelkeznie, (ii) a fogyasztóknak direkt vagy indirekt módon szegmentálhatóaknak kell lenniük (iii) nem jöhet létre arbitrázs a különbözőképpen árazott termékek között. Ha ezek a feltételek fennállnak, akkor egy vállalat ösztönözve van arra, hogy árdiszkriminációt alkalmazzon, a többi vállalat viselkedését változatlanul tekintve (Stole[2000]). Ezekből a kritériumokból is következik, hogy tökéletes versenypiac esetén nem létezhet árdiszkrimináció, hiszen a vállalatoknak nincs piaci erejük. Monopóliumok és az oligopóliumok piaci struktúrája azonban elegendő ennek a feltételnek. A szakirodalom mégis többnyire inkább csak a monopolista magatartás elemeként tárgyalja az árdiszkriminációt. Az utóbbi néhány évben azonban több igen releváns publikáció is megjelent, amelyek kifejezetten az oligopol piacokra koncentrálnak az árdiszkrimináció elemzésekor.

Holmes [1989] összehasonlította a monopolista és a duopolista kibocsátásokat, abban az esetben, amikor a piac két független részre osztható, azaz az úgynevezett harmadfokú árdiszkrimináció áll fenn. Hazeldine [2006] kiterjesztette a Cournot-Nash oligopol modellt, arra az esetre, amikor a vállaltok a fogyasztók különböző csoportjai számára különböző árakat határoznak meg rezervációs áraik alapján. Bebizonyította, hogy a kibocsátással súlyozott átlagos ár nem függ az árdiszkrimináció mértékétől, vagyis az átlagos kibocsátás megegyezik k és $k+1$ különböző ár esetében is. Továbbá megmutatta azt is, hogy az egyes árszinteken eladott mennyiségek mértani sorozat szerint növekednek, az egy bizonyos áron eladott mennyiség N -szerese a megelőző alacsonyabb áron eladott mennyiségnek, ahol N a piacon szereplő vállalatok száma.

Hazeldine [2010] egy másik cikkében a Cournot–Nash oligopol modellt, a monopóliumok elsőfokú árdiszkriminációjával analóg módon kiterjesztette, arra az esetre, amikor a vállalatok minden különböző egységet különböző áron kínálnak. Belátta, hogy amikor az árkategóriák száma a végtelenhez tart, akkor az összes, a határköltségnél nagyobb rezervációs árral rendelkező fogyasztó ki lesz szolgálva, a vállalatok számától függetlenül. Továbbá igazolta, amennyiben az árak száma a végtelenhez tart, a vállalatok száma n , a határköltségük nulla, akkor a legmagasabb egyensúlyi ár $1/n$ -hez konvergál.

Kutlu [2009] Hazeldine-hoz hasonló keretrendszerben vizsgálta a Stackelberg versenyt, megmutatta, hogy a Stackelberg vezető csak a legmagasabb rezervációsárral rendelkező fogyasztókat szolgálja ki, ezért valójában nem is alkalmaz árdiszkriminációt, csak a követő árdiszkriminál ténylegesen. Ezenfelül, kimutatta, hogy mind a vezető mind a követő profitja magasabb, ahhoz képest, amelyet egy egyszerű Stackelberg verseny során el tudnának érni, továbbá a társadalmi jólét is magasabb. Azonban a fogyasztói többlet alacsonyabb a standard modellhez viszonyítva. Kutlu és Kumar [2010] egy olyan modellt vizsgáltak, ahol első lépésben a vállalatok a kapacitásról döntenek, majd a meghatározott kapacitás korlát mellett árdiszkriminációt alkalmaznak az oligopol piacon. Mind Hazeldine, mind Kutlu szimmetrikus költségeket feltételezve dolgozott.

Mukherjee [2010] megvizsgálta ezeket a modelleket aszimmetrikus költségek mellett is, és megmutatta, hogy Cournot duopólium esetén az a költséghatékonyabb vállalat átlagos bevétele alacsonyabb, (míg másik vállalaté magasabb), árdiszkriminációval, mint nélküle. Igazolta azt is, hogy az átlagos iparági ár nem függ attól, hogy van-e árdiszkrimináció, továbbá árdiszkrimináció esetén az független két vállalat közötti költségkülönbségektől. Stackelberg duopólium esetén arra jutott, hogy aszimmetrikus költségek esetén már mindkét vállalat alkalmaz árdiszkriminációt, és mindkét vállalat többlet termel a magasabb rezervációs árral rendelkező csoport számára. Mukherjee számos egyszerűsítést alkalmazott a modelljeiben, csak két árkategória esetére vizsgálta meg az egyes eseteket, és az egyik vállalat határköltségét nullának tekintette.

Árdiszkrimináció a gyakorlatban

A vállalatok számos technikát alkalmaznak, hogy az általuk kínált terméket különbözőképp értékelő fogyasztókat, megkülönböztessék, és az egyes csoportoknak a megfelelő, és egyben profitmaximalizáló, ajánlatokat tudják kínálni. A leggyakoribban használt módszerek a mennyiségi árendedmények, a különböző árukapcsolások, (mint például különböző szoftvercsomagok, vagy a mobiltelefonokhoz tartozó tarifacsomagok), valamint a kétrészes árazás, úgy mint egy nyomtató és a hozzá tartozó patron ára,

vagy például egy belépőjegy egy vidámparkba és az ott kínált játékok ára. Ezekben az esetekben, azonban a vállalatok csak közvetetett módon tudnak különböző árakat alkalmazni, a különböző rezervációs árakkal rendelkező fogyasztók számára.

Arra is láthatunk eseteket, amikor a vállalatok közvetlenül alkalmazzák az árdiskriminációt, vagyis ugyanazt a terméket különböző árakon kínálják. Gondoljuk csak például, a különböző diák és a nyugdíjas kedvezményekre, a hétköznapokra és a hétvégére szóló belépőkre, az akciós napokra a mozikban vagy éppen a last minute utakra. Ezek az árazási technikák mind a különböző fizetési hajlandóságokon alapulnak, de többségük csak a fogyasztói többlet egy igen kis részét tudja kiaknázni.

A vállalatok szempontjából az a legnagyobb probléma, hogy nehezen tudnak kijelölni olyan szempontokat, ami alapján árdiskriminálhatnak. Hiszen, a fogyasztók a különböző árakat gyakran igazságtalannak, sértőnek értékelik, és ezért az árdiskriminációnak akár, eredeti céljával szemben, profit csökkenető hatása is lehet. Különösen visszatetszőek lehetnek az olyan esetek, amikor a diskrimináció alapját a fogyasztó valamilyen tulajdonsága szolgáltatja. Sokkal inkább elfogadottabbak az olyan módszerek, amikor az árat valamilyen külső tényezőhöz, kötik, mint például helyszín, idő, forgalom stb.

A valóéletbeli példák közül a légitársaságok által alkalmazott árképzés szemléletei a legjobban az árdiskriminációt. Ez az az iparág, ahol a fogyasztók leginkább hajlandóak elfogadni még az igen erős árdiskriminációs gyakorlatot is. Itt a vállalatok nem csak két vagy három, hanem gyakran tíz-tizenöt árat alkalmaznak. Ebben az iparágban a termék egy ülőhely egy adott járatra, egy adott időpontra. Az árdiskrimináció alapját, az szolgáltatja, hogy az utazásig hátralévő idő negatívan korrelál az adott útra szóló repülőjegyre vonatkozó fogyasztói értékeléssel. Hiszen, a viszonylag alacsonyabb rezervációs árral rendelkező turisták már jóval az utazási időpont előtt tudják, hogy utazni szeretnének, és ezért hamar le is foglalják a repülőjegyet. Ezzel szemben az üzletemberek csak egy-két nappal, vagy egy-két órával az indulás előtt döntenek el, hogy utazni fognak, de ők már jóval magasabb árat is hajlandóak fizetni, azért hogy időben a kívánt helyszínre érkezzenek (Hazeldine [2006]).

Dolgozatom felépítése

Dolgozatom célja, az árdiskrimináció modellezése Cournot- és Stackelberg verseny mellett a szimmetrikus költségek és a szimmetrikus információk feltevésének feloldása esetén. Mukherjee [2010] modelljéhez képest, ahol lehet általánosítani a vizsgálatot K db árkategóriára esetre, valamint visszatérnek a különböző határköltségek paraméteres

vizsgálatához. Továbbá, a különböző modelleket összehasonlítom a kibocsátott outputok, az egyensúlyi árak és a vállalati profitok szempontjából.

Az első fejezetben a szakirodalmi modellekhez hasonló kertrendszerben vizsgálom a Cournot duopóliumot aszimmetrikus költségek mellett. Elsőként árdiszkrimináció nélküli esetet ismertetem, majd árdiszkrimináció hatásait kettő-, majd általánosan K darab árkategóriára is bemutatom.

A második fejezetben Cournot modell vizsgálatát folytatom, abban az esetben, amikor nem csak a költségek, hanem már a vállalatok erre vonatkozó információi is aszimmetrikusak. Röviden áttekintem az árdiszkrimináció nélküli esetet, majd itt is megnézem az árdiszkrimináció hatásait kettő- és K darab árkategóriára esetében. Ezenfelül, összehasonlítom a szimmetrikus és az aszimmetrikus információk mellett kapott eredményeket.

A harmadik fejezetben áttérek a Stackelberg verseny vizsgálatára, először röviden az árdiszkrimináció nélküli esetet vázolom, majd Mukherjee modelljéből kiindulva vizsgálom az aszimmetrikus költségek hatását.

A negyedik fejezetben a Stackelberg duopóliumot fogom vizsgálni hasonló keretrendszerben, aszimmetrikus információk mellett. Először itt is az árdiszkrimináció nélküli esetet tekintem át, majd bemutatom az árdiszkriminációt hatásait, végül összehasonlítom a különböző információk melletti eredményeket.

1. Cournot modell aszimmetrikus költségekkel

Ebben a fejezetben először ismertetjük modelljeink alapfeltevéseit, majd megvizsgáljuk a árdiszkriminációt Cournot modell esetén a szimmetrikus költségek feltevésének feloldásával. A különböző árak, kibocsátások és profitok összevethetőségének érdekében röviden felvázoljuk az árdiszkrimináció nélküli esetet, majd megnézzük az árdiszkriminációt kettő-, és N darab árkategória esetére is.

Az árdiszkrimináció duopolisztikus vizsgálatánál, úgy tekintjük, hogy a vállaltok a fogyasztókat csoportokra osztják a termékre vonatkozó értékelésük alapján, és a csoportok számára különböző árakat határoznak meg. A továbbiakban a különböző árak által meghatározott csoportokat árkategóriáknak fogjuk nevezni, azonban érdemes szem előtt tartani, hogy ez a nem azonos, a szó hétköznapi értelemben vett jelentésével. Az árkategóriák számát a továbbiakban exogénnek fogjuk tekinteni, feltesszük, hogy a vállaltok K darab árat alkalmaznak a piacon, és ezáltal természetesen K darab árkategóriát is meghatároznak. Lesznek olyan modellek, hol a szemléletesség kedvéért a $K = 2$ speciális esetet fogjuk vizsgálni.

Feltesszük, hogy a vállaltok által kínált termék homogén, és legfeljebb egységnyi mennyiségekben vásárolható, és fogyasztók a termékre vonatkozó értékelését a rezervációs árakkal mérhetjük, így azok a fogyasztók vásárolnak, akinek a rezervációs ára meghaladja a termék árát, vagy épp megegyezik vele. Továbbá feltesszük azt is, hogy az eladók ismerik a keresleti függvényének formáját, és meg tudják állapítani a fogyasztók helyét ezen a függvényen. Így a vállalatok meg tudják előzni azt, hogy bárki, aki alacsonyabb áron jut a termékhez, továbbadhassa egy magasabb rezervációs árral rendelkező másik fogyasztónak az általuk megszabott ár alatt, ez az arbitrázsmentességet biztosítja. Úgy tekintjük, hogy a piacon két vállalat van, az 1-es és a 2-es, amelyek a termékeket konstans határköltséggel állítják elő, az első vállalat határköltsége c^1 , a másodiké c^2 valamint $c^1, c^2 > 0$.

Jogosan merül fel a kérdés, hogy ha a vállalatok ismerik a fogyasztók rezervációs árait, akkor miért nem minden fogyasztónak a saját rezervációs árán kínálják a terméket, amellyel az összes fogyasztói többletet megszerezhetnék, és amely teljes árdiszkriminációt jelentene. A gyakorlati példákban tudjuk, hogy az árdiszkrimináció sosem teljes a tranzakciós költségek miatt. Így megközelíthetjük úgy a helyzetet, hogy a valósághoz közelebb álló modell érdekében végesnek tekintjük az alkalmazott árkategóriák számát. Vagy pontosíthatjuk az eredeti feltevésünket, úgy hogy a vállalatok nem a fogyasztók konkrét rezervációs árát ismerik, hanem csak egy intervallumot, amelyben a rezervációs ár található, és ezen intervallumok alapján tudják a fogyasztókat szegmentálni. Azonban a feltevés a modell egy jelentős korlátjának tekinthető.

1.1. Árdiszkrimináció nélkül

Az árdiszkrimináció hatásainak bemutatásához először röviden vázoljuk a Cournot versenyt árdiszkrimináció nélkül, aszimmetrikus költségekkel. Feltételezzük, hogy a termék ára az alábbi lineáris formában adott a piacon:

$$P = 1 - q^1 - q^2 \quad (1)$$

ahol q^i az i -edik vállalat által kibocsátott mennyiség $i = 1, 2$, és P az árat jelöli. Az egyes vállalatok profitfeltételei így a következőképpen adódnak:

$$\pi_1 = (1 - q^1 - q^2)q^1 - c^1 q^1 \quad \pi_2 = (1 - q^1 - q^2)q^2 - c^2 q^2 \quad (2)$$

Melyekből egyszerű differenciálás és átrendezés után adódik, a két vállalat által egyensúlyban kibocsátott mennyiség és az egyensúlyi ár:

$$q^1 = \frac{1 - 2c^1 + c^2}{3} \quad \text{és} \quad q^2 = \frac{1 - 2c^2 + c^1}{3} \quad (3)$$

$$\sum q = \frac{2 - c^1 - c^2}{3} \quad (4)$$

$$P = \frac{1 + c^1 + c^2}{3} \quad (5)$$

Ebben az esetben az első vállalat akkor fog pozitív outputot előállítani, ha határköltségére az alábbi egyenlőtlenség teljesül : $c^1 < \frac{1+c^2}{2}$ Hasonlóan a második vállalat pozitív kibocsátásának feltétele: $c^2 < \frac{1+c^1}{2}$. Ez a két feltétel implikálja a $c^1, c^2 < 1$ egyenlőtlenséget, de ez csak szükséges, nem elégséges feltétele mindkét vállalat pozitív kibocsátásának. Ez alapján számoljuk ki a vállalatok profitjait, hogy össze tudjuk majd hasonlítani, az árdiszkrimináció melletti értékeikkel.

$$\pi^1 = \left(\frac{1 - 2c^1 + c^2}{3}\right)^2 = \frac{1 + 4(c^1)^2 + (c^2)^2 - 4c^1 + 2c^2 - 4c^1 c^2}{9} \quad (6)$$

$$\pi^2 = \left(\frac{1 - 2c^2 + c^1}{3}\right)^2 = \frac{1 + 4(c^2)^2 + (c^1)^2 - 4c^2 + 2c^1 - 4c^1 c^2}{9} \quad (7)$$

$$\sum \pi = \frac{2 + 5(c^1)^2 + 5(c^2)^2 - 2c^1 - 2c^2 - 8c^1 c^2}{9} \quad (8)$$

Ahol $(c^i)^2$ az i -edik vállalat költségének négyzetét jelöli.

1.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával

Most pedig vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a vállalatok árdiszkriminációt alkalmaznak. Ezt az esetet először úgy fogjuk vizsgálni, hogy feltesszük, a vállalatok csak két árat alkalmaznak, majd megnézzük az általánosan K darab árkategóriára.

Az árak az alábbi formában adóttak:

$$P_1 = 1 - q_1^1 - q_1^2 \quad (9)$$

$$P_2 = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 \quad (10)$$

Ahol a P_i az ár az i -edik kategóriában és q_i^j a j -edik vállalat kibocsátása az i -edik árkategóriában, ahol $i, j = 1, 2$ és $i \neq j$. A vállalatok szimultán döntenek az egyes kategóriákban kibocsátott mennyiségekről. Profitfüggvényeik, melyeket maximalizálnak:

$$\pi^1 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^1)q_1^1 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^1)q_2^1 \quad (11)$$

$$\pi^2 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^2)q_1^2 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^2)q_2^2 \quad (12)$$

Az 1-es vállalat optimum feltételei:

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial q_1^1} = 1 - 2q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - c^1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial q_2^1} = 1 - q_1^1 - q_1^2 - 2q_2^1 - q_2^2 - c^1 \quad (14)$$

A fenti két egyenletet egymásból kivonva azt kapjuk, hogy:

$$q_1^1 = q_2^1 + q_2^2 \quad (15)$$

Teljesen analóg módon, ezt a másik vállalatra is megkapjuk, amiből az következik, hogy a két vállalat által az első, magasabb árkategóriában kibocsátott mennyiségek megegyeznek, így egyszerűbb jelölésmódot alkalmazhatunk:

$$q_1^1 = q_2^1 + q_2^2 = q_1^2 \doteq q_1 \quad (16)$$

Eszerint az egyensúlyi feltételek a következő formára redukálhatóak:

$$1 - 3q_1 - q_2^1 - c^1 = 0 \quad (17)$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2^1 - q_2^2 - c^1 = 0 \quad (18)$$

$$1 - 3q_1 - q_2^2 - c^2 = 0 \quad (19)$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2^2 - q_2^1 - c^2 = 0 \quad (20)$$

Melyekből az első árkategóriára vonatkozó feltételeket egyenlővé téve, akkor azt kapjuk:

$$q_2^1 = q_2^2 + c^2 - c^1 \quad (21)$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve q_1 -et az alábbi formában kapjuk:

$$q_1 = \frac{1 - 3q_2^2 + c^1 - 2c^2}{2} \quad (22)$$

Végül ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe az alábbi eredményeket kapjuk:

$$q_1 = \frac{2 - c^1 - c^2}{7} \quad (23)$$

$$q_2^1 = \frac{1 + 3c^2 - 4c^1}{7} \quad \text{és} \quad q_2^2 = \frac{1 + 3c^1 - 4c^2}{7} \quad (24)$$

$$\sum q = \frac{6 - 3c^1 - 3c^2}{7} \quad (25)$$

Látható, hogy a vállalatonként kibocsátott mennyiség meghaladja az egységes ár melletti kibocsátásokat. Az árakat felírva látható, hogy az előző esetben felírt egységes ár, a mostani két ár közé esik. Továbbá a kibocsátással súlyozott átlagár, éppen megegyezik ezzel az egységes árral.

$$P_1 = \frac{3 + 2c^1 + 2c^2}{7}, \quad P_2 = \frac{1 + 3c^1 + 3c^2}{7} \quad (26)$$

$$P_{\text{átlag}} = \frac{P_1(q_1^1 + q_1^2) + P_2(q_2^1 + q_2^2)}{q_1^1 + q_1^2 + q_2^1 + q_2^2} = \frac{1 + c^1 + c^2}{3} \quad (27)$$

Ezután a profitokat felírva

$$\pi^1 = \frac{1 - 3c^1 + c^2 + 3(c^1)^2 + (c^2)^2 - 2c^1c^2}{7} \quad (28)$$

$$\pi^2 = \frac{1 - 3c^2 + c^1 + 3(c^2)^2 + (c^1)^2 - 2c^1c^2}{7} \quad (29)$$

$$\sum \pi = \frac{2 - 2c^1 - 2c^2 + 2(c^1)^2 + 2(c^2)^2 - 4c^1c^2}{7} \quad (30)$$

Ezt összehasonlítva az árdiszkrimináció nélküli esetet profitjával (6-8) egyszerű átrendezés után és a $c^i \geq (c^i)^2$ összefüggés kihasználásával látszik, hogy a vállalatok profitja magasabb lett az árdiszkriminációval.

1.3. Árdiszkrimináció K darab árkategóriával

Hasonlóan az előző esethez feltesszük, hogy a piaci árak a következő formában adóttak:

$$P_k = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_k^1 - q_k^2 \quad (31)$$

Ahol a P_k az ár az k -edik kategóriában és q_i^j a j -edik vállalat kibocsátása az i -edik árkategóriában, ahol $j = 1, 2$ és $i = 1 \dots K$. Feltesszük, hogy a vállalatok összesen K db árat határoznak meg, ezáltal K csoportra osztják a fogyasztókat. Az adott feltételek mellett, az alábbi formában adott profitjukat maximalizálva határozzák meg az egyensúlyi kibocsátásukat:

$$\begin{aligned} \pi^1 &= (P_1 - c^1)q_1^1 + (P_2 - c^1)q_2^1 + \dots + (P_K - c^1)q_K^1 = \\ &= (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^1)q_1^1 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^1)q_2^1 + \dots \\ &\quad \dots + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_K^1 - q_K^2 - c^1)q_K^1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \pi^2 &= (P_1 - c^2)q_1^2 + (P_2 - c^2)q_2^2 + \dots + (P_K - c^2)q_K^2 = \\ &= (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^2)q_1^2 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^2)q_2^2 + \dots \\ &\quad \dots + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_K^1 - q_K^2 - c^2)q_K^2 \end{aligned} \quad (33)$$

A döntési változók ($q_i^1, q_i^2, i = 1 \dots K$) szerint differenciálva, kétszer K darab elsőrendű feltételt kapunk a profit-maximalizációhoz:

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial q_1^1} = 1 - 2q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial q_2^1} = 1 - q_1^1 - q_1^2 - 2q_2^1 - q_2^2 - q_3^1 - \dots - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (35)$$

$$\vdots \quad (36)$$

$$\frac{\partial \pi^1}{\partial q_K^1} = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_{K-1}^1 - q_{K-1}^2 - 2q_K^1 - q_K^2 - c^1 = 0 \quad (37)$$

Hasonlóan a második vállalat esetében:

$$\frac{\partial \pi^2}{\partial q_1^2} = 1 - q_1^1 - 2q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - \dots - q_K^2 - c^2 = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \pi^2}{\partial q_2^2} = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - 2q_2^2 - q_3^2 - \dots - q_K^2 - c^2 = 0 \quad (39)$$

$$\vdots \quad (40)$$

$$\frac{\partial \pi^2}{\partial q_K^2} = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_{K-1}^1 - q_{K-1}^2 - q_K^1 - 2q_K^2 - c^2 = 0 \quad (41)$$

Ha mindkét vállalat esetén külön-külön egyenlővé tesszük az első és második, egyenletet (34-35, 37-38) akkor az előző esethez hasonlóan alábbi eredményt kapjuk:

$$q_1^1 = q_2^1 + q_2^2 = q_1^2 \doteq q_1 \quad (42)$$

Ez az egyenlőség fenn áll minden árkategóriára, a K-adikat kivételével, tehát általánosságban az alábbi egyszerűsítéseket alkalmazhatjuk:

$$q_i^1 = q_{i+1}^1 + q_{i+1}^2 = q_i^2 \doteq q_i \quad i = 1, 2 \dots K-1 \quad (43)$$

Így az elsőrendű feltételek az alábbi formára redukálódnak

$$1 - 3q_1 - q_2 - q_3 - \dots - q_K^1 - c^1 = 1 - 2q_1 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (44)$$

$$1 - 2q_1 - 3q_2 - q_3 - \dots - q_K^1 - c^1 = 1 - q_1 - 2q_2 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (45)$$

$$\vdots$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2 - 2q_3 - \dots - 2q_K^1 - q_K^2 - c^1 = 1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - 2q_K^1 - q_K^2 - c^1 = 0 \quad (46)$$

Ez az egyszerűsítés teljesen azonos módon a második vállalat esetében is elvégezhető.

$$1 - 3q_1 - q_2 - q_3 - \dots - q_K^2 - c^2 = 1 - 2q_1 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^2 - c^2 = 0 \quad (47)$$

$$1 - 2q_1 - 3q_2 - q_3 - \dots - q_K^2 - c^2 = 1 - q_1 - 2q_2 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^2 - c^2 = 0 \quad (48)$$

$$\vdots$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2 - 2q_3 - \dots - 2q_K^2 - q_K^1 - c^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - 2q_K^2 - q_K^1 - c^2 = 0 \quad (49)$$

A (43)-as kifejezés következtében az alábbi összefüggések is fennállnak:

$$q_1 = 2q_2, \quad q_2 = 2q_3, \quad \dots \quad q_{K-2} = 2q_{K-1} \quad (50)$$

Amelyből általános alakban: $q_i = 2^{K-i} q_K$ következik $i, k = 1 \dots K-1$ -re. Ennek alapján

$$\sum_{i=1}^{K-1} q_i = (2^{K-2} + 2^{K-3} + \dots + 2 + 1) q_{K-1} = q_{K-1} (2^{K-1} - 1) \quad (51)$$

Ez alapján a második vállalat utolsó optimum-feltételéből (49) q_K^2 -t kifejezve majd visszahelyettesítve az első vállalat azonos egyenletébe (46) $q_K^1 - ra$ az alábbi kifejezést kapjuk:

$$q_K^1 = \frac{1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - 2c^1 + c^2}{3} \quad (52)$$

Melyet az első vállalat első egyenletébe (44) továbbhelyettesítve, majd $\sum_{i=1}^{K-1} q_i$ -t és q_1 -et is q_{K-1} függvényében felírva q_{K-1} -et az alábbi alakban kapjuk meg:

$$q_{K-1} = \frac{2 - c^1 - c^2}{2^{K+1} - 1} \quad (53)$$

Melyből, már egyszerű visszahelyettesítéssel következik a többi eredmény:

$$q_i = 2^{K-i-1} \frac{2 - c^1 - c^2}{2^{K+1} - 1} \quad i = 1 \dots K - 1 \quad (54)$$

$$q_K^1 = \frac{1 - 2^K c^1 + c^2(2^K - 1)}{2^{K+1} - 1} \quad \text{és} \quad q_K^2 = \frac{1 - 2^K c^2 + c^1(2^K - 1)}{2^{K+1} - 1} \quad (55)$$

1. Propozíció:

a) Különböző termelési költségek mellett a két vállalat egyforma mennyiséget termel az $1, 2 \dots K - 1$ árkategóriákban, az aszimmetrikus költségekből adódó különbség csak a legutolsó, legalacsonyabb árszinten jelenik meg.

b) Az egyes árkategóriában a két vállalat által összesen termelt mennyiség megegyezik a következő magasabb árszinten egy vállalat által termelt mennyiséggel.

Az a) állítás egyértelmű a b) -t pedig abból következik, hogy $q_i = 2^{K-i} q_K$, továbbá $q_K^1 + q_K^2 = q_{K-1}$.

Ez összhangban áll Hazeldine szimmetrikus költségekre bemutatott állításával, mely szerint az egyes árszinteken eladott mennyiségek mértani sorozat képeznek, melyben a kvóciens a vállalatok száma. Ettől az általunk bemutatott aszimmetrikus eset annyiban tér el, hogy az egyedi vállalatok szintjén ez csak az $1, 2 \dots K - 1$ kategóriákra igaz, míg iparági szinten minden csoportra.

Írjuk fel az iparági kibocsátást is:

$$\sum q = (2^K - 1) \frac{2 - c^1 - c^2}{2^{K+1} - 1} \quad (56)$$

Az árkategóriák számát a modellekben végig exogén változónak tekintettük, de mivel a fenti képletből könnyen adódik, hogyan változik az iparági kibocsátás az alkalmazott árak számának növelésével ezért, egy megállapítás erejéig vizsgáljuk meg a $K+1$ kategória esetét is.

2.Propozíció: Az iparági kibocsátás az árkategóriák számának növekedésével növekszik, a K árszint esetén kibocsátott mennyiségénél, $\frac{2^K}{(2^{K+1}-1)(2^{K+2}-1)}$ -el több

outputot bocsátanak ki összességében a vállalatok $K + 1$ árszint esetén. Az egyes árkategóriák árai a következő alakban írhatóak fel:

$$P_i = \frac{2^{K-i+1} - 1 + (2^K - 2^{K-i})c^1 + (2^K - 2^{K-i})c^2}{2^{K+1} - 1} \quad i = 1 \dots K \quad (57)$$

Most pedig vizsgáljuk meg, hogy a $K=2$ esetben tapasztalat eredmény, miszerint a kibocsátással súlyozott átlagos ár megegyezik a hagyományos modell egységes árával, valóban általánosságban igaz-e aszimmetrikus költségek mellett is.

$$P_{\text{átlag}} = \frac{P_1(q_1^1 + q_1^2) + P_2(q_2^1 + q_2^2) + \dots + P_K(q_K^1 + q_K^2)}{\sum q_i^1 + q_i^2} \quad (58)$$

A nevező az (56)-os formulából adódik, a számlálót pedig az előző megállapítások alapján a következő formára hozhatjuk:

$$\sum P_i(q_i^1 + q_i^2) = (q_K^1 + q_K^2)(P_K + 2P_{K-1} + \dots + 2^i P_{K-i} + \dots + 2^{K-1} P_1) \quad (59)$$

A P -re kiszámolt formulát behelyettesítve, és a 2 hatványokkal beszorozva kapjuk:

$$\begin{aligned} &= (q_K^1 + q_K^2)(2^1 - 1 + (2^K - 2^0)(c^1 + c^2) + \\ &\quad + 2^3 - 2^1 + (2^{K+1} - 2^2)(c^1 + c^2) + \\ &\quad + 2^5 - 2^2 + (2^{K+2} - 2^4)(c^1 + c^2) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 2^{2K-1} - 2^{K-1} + (2^{2K-1} - 2^{2K-2})(c^1 + c^2) \end{aligned}$$

Ebből a felírásból látszik, hogy négy, egyenként n tagból álló, mértani sort kell összegeznünk, az elsőnek és a harmadiknak 4, a másodiknak és a negyediknek pedig 2 a kvóciense. Először behelyettesítjük az összegképleteket, majd rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} &= (q_K^1 + q_K^2) \left[\frac{2^{\frac{4K-1}{3}} - (2^K - 1) + \left(2^K(2^K - 1) - \frac{4^K-1}{3} \right) (c^1 + c^2)}{2^{K+1} - 1} \right] = \\ &= (q_K^1 + q_K^2) \left[\frac{(2^{K+1} - 1)(2^K - 1)}{3(2^{K+1} - 1)} (1 + c^1 + c^2) \right] = \end{aligned}$$

Mivel $q_K^1 + q_K^2 = q_{K-1}$ ezért felhasználhatjuk az (54)-es egyenletet, és $2^{K+1} - 1$ -gyel tudunk egyszerűsíteni:

$$= \frac{2 - c^1 - c^2}{2^{K+1} - 1} \left[\frac{(2^K - 1)}{3} (1 + c^1 + c^2) \right]$$

Ezután visszahelyettesítünk az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned}
P_{\text{átlag}} &= \frac{\frac{2-c^1-c^2}{2^{K+1}-1} \left[\frac{(2^K-1)}{3} (1+c^1+c^2) \right]}{\sum q} = \\
&= \frac{\frac{2-c^1-c^2}{2^{K+1}-1} \frac{(2^K-1)}{3} (1+c^1+c^2)}{(2^K-1) \frac{2-c^1-c^2}{2^{K+1}-1}} =
\end{aligned}$$

Egyszerűsítve $(2^K - 1) \frac{2-c^1-c^2}{2^{K+1}-1}$ -vel, igen egyszerű alakban kapjuk meg a kibocsátással súlyozott átlagos árat, melyből látszik, hogy sejtésünk beigazolódott.

$$P_{\text{átlag}} = \frac{1+c^1+c^2}{3} \quad (60)$$

3. Propozíció: A kibocsátással súlyozott átlagár aszimmetrikus költségek mellett sem függ az árdiszkrimináció mértékétől, sőt megegyezik az árdiszkrimináció nélküli esetben alkalmazott egységes árral.

Ez is összhangban áll Hazeldine [2006] szimmetrikus esetre bizonyított állításával.

Fontos, hogy tisztán lássuk, ezek az eredmények csak adott K árkategória mellett egyensúlyiak, viszont, ha a vállaltok szabadon választhatnák meg az általuk alkalmazott árkategóriák számát, és a belőlük kínált mennyiségeket is, akkor ez már nem jelentene Nash egyensúlyt. Hiszen, bármelyik vállalat többletprofitra tudna szert tenni azzal, ha bevezet egy új $K+1$ -edik (az új legalacsonyabb) árat, és ezzel azokat a vevőket is kiszolgálja, akiknek a rezervációs ára a K -adik és a $K+1$ -edik ár között van. Vagy kivárja, amíg a versenytársai eladják az összes készletüket a legmagasabb áron, és utána előáll egy még ennél is magasabb árral, amelyen néhány, a termék hiányától kétségbeesett, vevő még vásárolni fog. Egy új ár beékelése is extraprofithoz juttathat egy-egy vállaltot (Hazeldine [2006]). Ez a meglátás a modell egyik kritikájaként is értelmezhető, további kutatási terület lehet olyan kiinduló feltevések, és döntési feltételek meghatározása, ahol a vállalatoknak nem érné meg ettől eltérni.

2. Cournot aszimmetrikus információs modell

Ebben a fejezetben a Cournot modellt vizsgáljuk meg, abban az esetben, amikor nem csak a költségek, hanem már a vállalatok erre vonatkozó információi is aszimmetrikusak. Az előző fejezet struktúráját követjük, abban az értelemben, hogy először itt is a feltevéseket ismertetjük, majd vázoljuk a árdiskrimináció nélküli esetet, majd modellezzük az árdiskriminációt kettő, és K darab árkategóriára is.

Az előző fejezetben bemutattuk, hogyan tudják a vállalatok maximalizálni profitjukat árdiskrimináció esetén Cournot versenyben, ha pontosan ismerik versenytársuk termelési költségeit. Azonban ez a feltétel a való életben csak igen ritkán teljesül, ezért érdemes megvizsgálni azt az esetet is, amikor aszimmetrikusak az információk, azaz a vállalatoknak versenytársuk költségéről csak valamilyen sejtésük van. Ezt a sejtést egy valószínűségi változóval tudjuk leírni, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a valószínűségi változó csak két értéket vehet fel, azaz egyik vállalat azt tudja a másikról, hogy α valószínűséggel alacsony költséggel c^A termel, $1 - \alpha$ valószínűséggel pedig magas a költsége c^M . Ezenfelül feltesszük, hogy ez egyben köztudott tudás is. A vállalatok által ismert saját költségeiket továbbra is c^1, c^2 -vel fogjuk jelölni, természetesen ezek is vagy magasak vagy alacsonyak. Azonban a modell felírásakor nem játszik szerepet, hogy a konkrét esetben c^1, c^2 magas vagy alacsony, csak az fontos, hogy a vállalatok saját magukról tudják, hogy milyen a költségük.

2.1. Árdiskrimináció nélkül

Feltételezzük, hogy a termék ára az alábbi, jól ismert lineáris formában adott a piacon:

$$P = 1 - q^1 - q^2 \quad (61)$$

Így a két vállalat profitfüggvénye változatlanul:

$$\pi_1 = (1 - q^1 - q^2)q^1 - c^1q^1 \quad (62)$$

$$\pi_2 = (1 - q^1 - q^2)q^2 - c^2q^2 \quad (63)$$

Ezeket differenciálva megkapjuk az elsőrendű feltételeket,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q^1} = 1 - 2q^1 - q^2 - c^1 \quad (64)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q^2} = 1 - 2q^2 - q^1 - c^2 \quad (65)$$

Kiemelten fontos, hogy most az optimum-feltételek megoldásánál nem egyszerű

behelyettesítéseket alkalmazunk, hanem minden lépésnél figyelembe vesszük, hogy az egyes szereplőknek milyen információik vannak.

Elsőként kifejezzük q^1 -et:

$$q^1 = \frac{1 - q^2 - c^1}{2} \quad (66)$$

Majd ezt behelyettesítjük a 2-es vállalat optimum feltételébe, de figyelembe kell vennünk, hogy ő c^1 pontos értékét nem ismeri ezért a várható értékével számol:

$$0 = 1 - 2q^2 - \frac{1 - q^2 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M}{2} - c^2 \quad (67)$$

Ebből q^2 -t kifejezve:

$$q^2 = \frac{1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{3} \quad (68)$$

Mivel az 1-es vállalat is tudja, hogy a másik vállalatnak ez a legjobb válasza, de c^2 -t nem ismerve ő is a várható értékeket helyettesíti így:

$$0 = 1 - 2q^1 - \frac{1 - \frac{1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{3} - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M}{2} - c^1 \quad (69)$$

Melyből az 1-es vállalat által egyensúlyban kibocsátott mennyiség:

$$q^1 = \frac{2 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^1}{6} \quad (70)$$

Hasonlóan

$$q^2 = \frac{2 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^2}{6} \quad (71)$$

$$\sum q = \frac{4 + 2\alpha c^A + 2(1 - \alpha)c^M - 3c^1 - 3c^2}{6}$$

Itt ahhoz, hogy mindkét vállalat pozitív mennyiséget termeljen a $\frac{2 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M}{3} > c^i$ feltételnek kell teljesülnie $i = 1, 2$ -re.

Az (3) -as és a (70-71)-es egyenletek összehasonlításából megállapíthatjuk, hogy a szimmetrikus információs esethez képest, itt a vállalatok kibocsátásuk meghatározásakor nagyobb súllyal veszik számításba a saját költségeiket. Ez egyrészt abból adódik, hogy ez biztos információ, másrészt, ahogy a számításokból is látszik, az is magyarázza, hogy a vállalatok figyelembe veszik, hogy a versenytársuk is számol az ő költségeivel, de nem ismeri azt. Az említett egyenletek összehasonlításból leolvasható az is, hogy a vállalatok többet fognak termelni a szimmetrikus információs outputhoz képest, amennyiben termelési költségük kisebb a versenytársuk termelési költségének várható értékénél, és a kevesebbet termelnek majd, amennyiben termelési költségük meghaladja ezt várható értéket. Tehát az aszimmetrikus információknak van egyfajta multiplikátor hatásuk, mivel

ebben a modellben a termelési költségbeli különbségek halmozottan jelennek meg.

A piaci ár az alábbi formában írható fel:

$$P = \frac{2 - 2\alpha c^A - 2(1 - \alpha)c^M + 3c^1 + 3c^2}{6} \quad (72)$$

Itt az ár akkor lesz magasabb a szimmetrikus információs modellhez képest, ha

$$c^1 + c^2 > 2\alpha c^A + 2(1 - \alpha)c^M$$

Ha ezt az árat szimmetrikus információs modell árával kívánjuk összehasonlítani, akkor fontos, hogy szem előtt tartsuk a két modellben c^1, c^2 nem feltétlenül ugyanazokat a költségeket jelöli, ebben a modellben feltettük, hogy c^1, c^2 magasak vagy alacsonyak lehetnek, de a korábbi modellben nem éltünk ilyen kikötéssel. Így tehát, ha össze szeretnénk hasonlítani a két modellt, akkor a szimmetrikus információs modell egy olyan esetét kell viszonyításnak választanunk, ahol a költségek szintén magasak vagy alacsonyak.

Így az ár akkor lesz magasabb a szimmetrikus információs modellhez képest, ha:

$$c^1 + c^2 > 2\alpha c^A + 2(1 - \alpha)c^M \quad (73)$$

Például az $\alpha = 0,5$ esetben ez éppen azt jelenti, hogy ha az egyik vállalat költsége magas, a másiké alacsony, akkor az ár meg fog egyezni a szimmetrikus információs modell árával, ha mind kettő magas akkor az ár is magasabb lesz, ha mind kettő alacsony, akkor pedig az ár is alacsonyabb lesz a szimmetrikus információs modellben tapasztaltaknál. Amennyiben $\alpha \neq 0,5$, akkor már nem vonhatunk le ilyen egyértelmű következtetéseket, mivel ekkor az eredmény már függ az alacsony és a magas költség különbségétől, ez a probléma további modellezési lehetőséget vet fel.

2.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával

Most pedig vizsgáljuk meg, azt az esetet, amikor a Cournot versenyben aszimmetrikus információk mellett alkalmaznak árdiszkriminációt a vállalatok. Az árak a korábbi formában adóttak, ezért a profitok is a megszokott módon írhatóak fel:

$$\pi^1 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^1)q_1^1 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^1)q_2^1 \quad (74)$$

$$\pi^2 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^2)q_1^2 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^2)q_2^2 \quad (75)$$

A differenciálást elvégezve a megfelelő átrendezésekkel, a szimmetrikus információs esethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$q_1^1 = q_2^1 + q_2^2 = q_1^2 \doteq q_1 \quad (76)$$

Így az egyszerűsített egyensúlyi feltételek:

$$1 - 3q_1 - q_2^1 - c^1 = 0 \quad (77)$$

$$1 - 3q_1 - q_2^2 - c^2 = 0 \quad (78)$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2^1 - q_2^2 - c^1 = 0 \quad (79)$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2^2 - q_2^1 - c^2 = 0 \quad (80)$$

Mivel az első árkategóriában termelt mennyiségek azonosak a két vállalatnál, ezért első lépésként ennek függvényében fejezem ki a második kategória mennyiségeit:

$$q_2^1 = \frac{1 - 2q_1 - q_2^2 - c^1}{2} \quad (81)$$

Mivel a második vállalat ismeri az első legjobb választ, ezért ezt is beépíti a profit-maximalizációjába:

$$1 - 2q_1 - 2q_2^2 - \frac{1 - 2q_1 - q_2^2 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M}{2} - c^2 = 0 \quad (82)$$

Hasonlóan ezt az első is tudja, ezért ő is ezzel számol:

$$q_2^2 = \frac{1 - 2q_1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{3} \quad (83)$$

$$1 - 2q_1 - 2q_2^1 - \frac{1 - 2q_1 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M}{3} - c^1 = 0 \quad (84)$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$q_2^1 = \frac{2 - 4q_1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^1}{6} \quad \text{hasonlóan} \quad q_2^2 = \frac{2 - 4q_1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^2}{6} \quad (85)$$

Melybe $q_1 = \frac{1 - q_2^1 - c^1}{3} = \frac{1 - q_2^2 - c^2}{3}$ megfelelő alakjait helyettesítve kapjuk, hogy:

$$q_2^1 = \frac{2 + 3\alpha c^A + 3(1 - \alpha)c^M - 5c^1}{14} \quad \text{hasonlóan} \quad q_2^2 = \frac{2 + 3\alpha c^A + 3(1 - \alpha)c^M - 5c^2}{14} \quad (86)$$

A korábbi $q_1^1 = q_2^1 + q_2^2 = q_1^2 = q_1$ egyenletből tudjuk, hogy az első kategóriában a vállalatoként termelt mennyiség megegyezik a második kategóriában termelt összmennyiséggel, amely:

$$\sum q_2 = \frac{4 + 6\alpha c^A + 6(1 - \alpha)c^M - 5c^1 - 5c^2}{14} = q_1 \quad (87)$$

Viszont mivel a vállaltok nem ismerik egymás határkölteit, és ezt egymásról is

tudják, valamint azt is tudják, hogy akkor maximalizálják a profitjaikat, ha ugyanannyit termelnek az első kategóriában, ezért c^1, c^2 helyett kölcsönösen a várható értékükkel $\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M$ -val számolnak.

Így

$$q_1^1 = q_1^2 = q_1 = \frac{2 - 2\alpha c^A - 2(1 - \alpha)c^M}{7} \quad (88)$$

Ez alapján az árakat kiszámolva:

$$P_1 = \frac{3 + 4\alpha c^A + 4(1 - \alpha)c^M}{7} \quad (89)$$

$$P_2 = \frac{4 - 2\alpha c^A - 2(1 - \alpha)c^M + 5c^1 + 5c^2}{14} \quad (90)$$

Ahhoz, hogy össze tudjuk vetni az eredményeket a szimmetrikus információs modellel, most is feltételeznünk kell, hogy a szimmetrikus modell egy olyan esetéhez hasonlítunk, ahol c^1, c^2 szintén magasak vagy alacsonyak. Így a (26)-os és a (89)-es egyenletet tekintve megállapíthatjuk, hogy ár akkor lesz magasabb a szimmetrikus információs modellhez képest az első árkategóriában, ha:

$$c^1 + c^2 > 2\alpha c^A + 2(1 - \alpha)c^M$$

Amely megegyezik az árdiszkrimináció nélküli esetben vizsgált helyzettel, így ugyanazok a következtetések érvényesek rá. A második ár tekintetében a (26), (90)-es egyenleteket összevetve, az ár akkor lesz magasabb a szimmetrikus információs modell áránál, ha

$$c^1 + c^2 < 2 - 2\alpha c^A - 2(1 - \alpha)c^M$$

Ezen feltétel teljesülése, a legtöbb esetben α, c^A, c^M konkrét értékeitől függ. Azonban az $\alpha = 0,5$ speciális esetben, amikor az egyik vállalt költsége magas a másiké alacsony akkor a feltétel $c^A + c^M < 2$ formára egyszerűsíthető, amely mindig teljesül, hiszen $c^A, c^M < 1$, mert egyébként nem érné meg a vállalatoknak termelni. Így, ez éppen azt jelenti, hogy az ilyen esetekben a aszimmetrikus információk hatására mindig magasabb lesz az ár a második árkategóriában.

2.3. Árdiszkrimináció K db árkategóriával

A szimmetrikus információs esettel teljesen azonos módon írhatóak fel az árak és a profitok, melyeket maximalizálva és egyszerűbb formára hozva hasonlóan kapjuk az alábbi egyenletrendszert az első vállalatra:

$$1 - 3q_1 - q_2 - q_3 - \dots - q_K^1 - c^1 = 1 - 2q_1 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (91)$$

$$1 - 2q_1 - 3q_2 - q_3 - \dots - q_K^1 - c^1 = 1 - q_1 - 2q_2 - \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^1 - c^1 = 0 \quad (92)$$

$\vdots$

$$1 - 2q_1 - 2q_2 - 2q_3 - \dots - 2q_K^1 - q_K^2 - c^1 = 1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - 2q_K^1 - q_K^2 - c^1 = 0 \quad (93)$$

Ezután az utolsó egyenletből kifejezzük a $q_K^1 - t$

$$q_K^1 = \frac{1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^2 - c^1}{2} \quad (94)$$

Majd ezt visszahelyettesítjük a második vállalat azonos profitfeltételébe, melyből $q_K^2 - ra$ is kapunk egy összefüggést, de itt is figyelünk rá, hogy a 2-es vállalat csak ac^1 várható értékét ismeri:

$$q_K^2 = \frac{1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{3} \quad (95)$$

Mivel az első vállalat is figyelembe veszi a másik legjobb választ, ezért ez alapján számolja a saját ténylegesen kibocsátott mennyiségét:

$$q_K^1 = \frac{2 - 4 \sum_{i=1}^{K-1} q_i + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^1}{6} \quad (96)$$

Ezután az első vállalat első profitfeltételét kifejezzük q_{K-1} - függvényében a korábban felírt $\sum_{i=1}^{K-1} q_i = q_{K-1}(2^{K-1} - 1)$ összefüggést is felhasználva.

$$q_{K-1} = \frac{1 - q_K^1 - c^1}{2^{K-1} - 1} \quad (97)$$

Majd ezt visszahelyettesítve az előző összefüggésbe, megkapjuk q_K^1 -ra a végleges összefüggést. Ezután az utolsó feltételből kifejezzük a $q_K^1 - t$

$$q_K^1 = \frac{1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i - q_K^2 - c^1}{2} \quad (98)$$

Ezt visszahelyettesítjük a második vállalat azonos profitfeltételébe, melyből $q_K^2 - ra$ is kapunk egy összefüggést

$$q_K^2 = \frac{1 - 2 \sum_{i=1}^{K-1} q_i + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{3} \quad (99)$$

Mivel az első vállalat is figyelembe veszi a másik legjobb választ, ezért ez alapján számolja

a saját ténylegesen kibocsátott mennyiségét.

$$q_K^1 = \frac{2 - 4 \sum_{i=1}^{K-1} q_i + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 3c^1}{6} \quad (100)$$

Ezután az első vállalat első profitfeltételét kifejezzük q_{K-1} - függvényében akorábban felírt $\sum_{i=1}^{K-1} q_i = q_{K-1}(2^{K-1} - 1)$ összefüggést is felhasználva.

$$q_{K-1} = \frac{1 - q_K^1 - c^1}{2^K - 1} \quad (101)$$

Majd ezt visszahelyettesítve az előző összefüggésbe, megkapjuk q_K^1 -ra a végleges összefüggést

$$q_K^1 = \frac{2 - c^1(2^K + 1) + (\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)(2^K - 1)}{2^{K+2} - 2} \quad (102)$$

Ezt hasonlóan kiszámolhatjuk q_K^2 -ra

$$q_K^2 = \frac{2 - c^2(2^K + 1) + (\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)(2^K - 1)}{2^{K+2} - 2} \quad (103)$$

Továbbá tudjuk, hogy a K -adik árkategóriában megtermelt összmennyiség megegyezik, a $K - 1$ -dik árszinten egy vállalat által eladott mennyiséggel, ezért

$$\sum q_K = \frac{4 - (2^K + 1)(c^1 + c^2) + (\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)(2^{K+1} - 2)}{2^{K+2} - 2} = q_{K-1} \quad (104)$$

Viszont mivel az egyes vállaltok nem ismerik egymás határkölségeit, de tudják, hogy az az optimális számukra, ha egyforma mennyiséget termelnek, ezért kölcsönösen a várható értékkel számolnak. Látszik, hogy itt is kihasználtuk a köztudott tudás feltételét. Így:

$$q_{K-1} = \frac{4 - 4(\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)}{2^{K+2} - 2} = \frac{2 - 2(\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)}{2^{K+1} - 1} \quad (105)$$

Ez alapján pedig már egyszerűen következik, hogy:

$$q_i = 2^{K-i-1} \frac{2 - 2(\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)}{2^{K+1} - 1} \quad i = 1 \dots K - 1 \quad (106)$$

$$P_i = \frac{2^{K+1} - 2^{K-i+1} - 1 + 2^{K-i}(\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M)}{2^{K+1} - 1} \quad i = 1 \dots K - 1 \quad (107)$$

3. Stackelberg modell aszimmetrikus költségekkel

Ettől a fejezettől kezdve a duopolista modellek egy másik nagy fő fajtáját a Stackelberg versenyt vizsgáljuk. Az eddigi felépítést követve először áttekintjük az árdiszkrimináció nélküli esetet, majd modellezzük az árdiszkriminációt aszimmetrikus költségek mellett, és összevetjük az eredményeket.

Innentől kezdve végig feltételezzük, hogy az 1-es vállalat Stackelberg vezetőként, míg a 2-es Stackelberg követőként viselkedik. A vállalatok költségei továbbra is $c^1, c^2 > 0$. A piacon nincs belépési költség. Hasonlóan a Cournot modellhez a vállalatok ismerik a fogyasztók a termékre vonatkozó értékelését, és így meg tudják előzni a termékek újra eladását. A fogyasztókat egyes csoportjaira alkalmazott árak most is:

$$P_k = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - \dots - q_k^1 - q_k^2 \quad (108)$$

Ahol a P_k az ár az k -edik kategóriában és q_i^j a j -edik vállalat kibocsátása az i -edik árkategóriában, ahol $j = 1, 2$ és $i = 1 \dots K$.

3.1. Árdiszkrimináció nélkül

Először röviden tekintsük át az árdiszkrimináció nélküli esetet. Egyszerű számítások után a két vállalat egyensúlyi outputja:

$$q^1 = \frac{1 + c^2 - 2c^1}{2} \quad q^2 = \frac{1 + 2c^1 - 3c^2}{4} \quad (109)$$

A vezető akkor termel pozitív mennyiséget, ha $c^1 < \frac{1+c^2}{2}$, míg a követő a $c^2 < \frac{1+2c^1}{2}$ feltétel teljesülése esetén bocsát ki outputot. Az iparági kibocsátás

$$\sum q = \frac{3 - 2c^1 - c^2}{4} \quad (110)$$

Az ár és a profitok pedig

$$P = \frac{1+2c^1+c^2}{4} \quad (111)$$

$$\pi^1 = \frac{(1-2c^1+c^2)^2}{8} \quad (112)$$

$$\pi^2 = \frac{(1+2c^1-3c^2)^2}{16} \quad (113)$$

Ezeket az eredményeket a Cournot modell árdiszkrimináció nélküli esetével összevetve (3-7) az szimmetrikus költségek mellett megszokott eredményekhez hasonló összefüggéseket fedezhetünk fel. Például a Stackelberg vezető kibocsátásnak $\frac{2}{3}$ – át bocsátja ki a Cournot duopólium 1-es vállalata, vagy a Stackelberg vezető profitjának

$\frac{8}{9} - ed$ része a Cournot duopólium 1-es vállalatának profitja. A Stackelberg követő esetében, a különböző költségek miatt már nem fogalmazhatunk meg ilyen pontos állításokat, de az arányok ott is szemléletesek.

3.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával

Most vizsgáljuk meg az árdiszkriminációs esetet, első lépésként feltesszük, hogy a vállalatok két csoportra osztják a fogyasztókat rezervációs áraik alapján, vagyis két különböző árat alkalmaznak. A keresleti függvények megegyeznek a Cournot esetben felírtakkal:

$$P_1 = 1 - q_1^1 - q_1^2 \quad (114)$$

$$P_2 = 1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 \quad (115)$$

Először a második vállalat határozza meg legjobb válasz leképezését az adott feltételek mellett, profitfüggvényét maximalizálva:

$$\pi^2 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^2)q_1^2 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^2)q_2^2 \quad (116)$$

Melyből a legjobb válasz leképezések:

$$q_1^2 = \frac{1 - q_1^1 + q_2^1 - c^2}{3} \quad (117)$$

$$q_2^2 = \frac{1 - q_1^1 - 2q_2^1 - c^2}{3} \quad (118)$$

Melyeket visszahelyettesítve a vezető profitfeltételébe, majd azt maximalizálva, az alábbi egyensúlyi kibocsátásokat kapjuk:

$$q_1^1 = \frac{2 - 3c^1}{4} \quad q_2^1 = \frac{c^2}{2} \quad (119)$$

$$q_1^2 = \frac{2 + 3c^1 - 2c^2}{12} \quad q_2^2 = \frac{2 + 3c^1 - 8c^2}{12} \quad (120)$$

Figyelemre méltó, hogy a vezető a második árszinten saját költségétől függetlenül mindig kibocsát, az elsőn pedig csak akkor, ha $c^1 < \frac{2}{3}$. A második vállalat pozitív mennyiséget termel mindkét kategóriában, ha $\frac{2+3c^1}{8} > c^2$, és csak az első áron bocsát ki, ha határköltsége a következő korlátok közé esik $\frac{2+3c^1}{8} < c^2 < \frac{2+3c^1}{2}$.

Mukherjee megállapítása a $c^1 = 0$ esetben, miszerint mindkét vállalat többet termel az első árkategóriában, ebben a helyzetben már nem feltétlenül igaz. A követő valóban több outputot állít elő a magasabb áron történő eladásra, azonban a vezető esetében ez csak a határköltségektől függ.

Az árakat kiszámolva:

$$P_1 = \frac{2 + 3c^1 + c^2}{6} \quad (121)$$

$$P_2 = \frac{2 + 3c^1 + 4c^2}{12} \quad (122)$$

Az eredményekből az is tisztán látszik, hogy Kutlu megállapítás mely szerint, szimmetrikus költségek mellett a Stackelberg vezető nem alkalmaz árdiszkriminációt, csak a követő, aszimmetrikus költségek mellett már nem teljesül.

A Stackelberg duplóium vizsgálatánál, már a $K=2$ esetben látszik, hogy nem tudunk a Cournothhoz hasonló egyszerűsítéseket alkalmazni, ezáltal míg a $K=2$ eset a hagyományos helyettesítés módszereivel könnyen megoldható, a K árkategória mellett, már komoly analitikus nehézségek lépnek fel, így ezt az esetet most nem vizsgáljuk. Azonban további kutatási lehetőségként javasoljuk.

4. Stackelberg aszimmetrikus információs modell

Az alábbi fejezetben a Stackelberg duopóliumot vizsgáljuk meg aszimmetrikus információk mellett. Először áttekintjük az árdiszkrimináció nélküli esetet, majd elemezzük az árdiszkrimináció hatását. Végül eredményeinket összehasonlítjuk a szimmetrikus információs modellben tapasztaltakkal.

Hasonlóan a Cournot modellhez itt is tételezzük fel, hogy a vállalatok nem ismerik egymás termelési költségeit csak annyit tudnak, hogy a versenytársuknak α valószínűséggel alacsony c^A költséggel termel, $1 - \alpha$ valószínűséggel pedig magas, c^M a költsége. Az egyes vállalatok tényleges költségei pedig c^1, c^2 , melyek természetesen szintén magasak vagy alacsonyak, de az, hogy melyik magas vagy alacsony, az nem számít, csak az fontos, hogy a vállalatok tudják a saját költségük értékét. Továbbá feltesszük, hogy ez egyben köztudott tudás is.

4.1. Árdiszkrimináció nélkül

Az árdiszkrimináció hatásainak vizsgálatához, itt is célszerű először röviden áttekinteni a hagyományos, árdiszkrimináció nélküli esetet. Ehhez írjuk fel először a követő vállalat profitját:

$$\pi^2 = (1 - q^1 - q^2 - c^2)q^2 \quad (123)$$

Ezt differenciálva, és átrendezve:

$$q^2 = \frac{1 - q^1 - c^2}{2} \quad (124)$$

Melyet amikor a vezető behelyettesít profítfeltételébe, akkor már c^2 helyett a várható értékével számol, így

$$q^1 = \frac{1 + \alpha c^A + (1 - \alpha)c^M - 2c^1}{2} \quad (125)$$

Melyből a követő az előző egyenletbe visszahelyettesítve határozza meg saját kibocsátását.

$$q^2 = \frac{1 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M - 2c^2}{4} \quad (126)$$

Ez alapján az ár:

$$P = \frac{1 + 2c^1 + 2c^2 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M}{4} \quad (127)$$

Ezt összevetve a szimmetrikus információs modell eredményével az árak tekintetében azt láthatjuk a (111),(127)-es egyenletből, hogy ha $3\alpha c^A + 3(1 - \alpha)c^M < 2c^1 + c^2$, akkor az aszimmetrikus információk mellett lesz magasabb az ár. Ezt összevetve a Cournot

esetben megfogalmazott kritériummal (73) , azt láthatjuk, hogy a Stackelberg esetben a vezető költségének nagyobb súlya van. A kibocsátását vizsgálva a vezető akkor fog többet kibocsátani, mint szimmetrikus információk mellett (109), ha $\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M < c^2$, a követő pedig akkor, ha $\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M + c^2 > c^1$.

4.2. Árdiszkrimináció két árkategóriával

Mivel a Stackelberg vezető figyelembe veszi a követő vállalat legjobb válasz leképezését, ezért határozzuk meg először ezt, az adott feltételek mellett, profitfüggvényét maximalizálva:

$$\pi^2 = (1 - q_1^1 - q_1^2 - c^2)q_1^2 + (1 - q_1^1 - q_1^2 - q_2^1 - q_2^2 - c^2)q_2^2 \quad (128)$$

Melyből a legjobb válasz leképezések:

$$q_1^2 = \frac{1 - q_1^1 + q_2^1 - c^2}{3} \quad (129)$$

$$q_2^2 = \frac{1 - q_1^1 - 2q_2^1 - c^2}{3} \quad (130)$$

Ezeket behelyettesítjük a vezető profitfeltételébe, természetesen úgy hogy c^2 helyett a várható értéke szerepel, majd ezt optimalizálva és rendezve megkapjuk a vezető egyensúlyi kibocsátását:

$$q_1^1 = \frac{2 - 3c^1}{4} \quad q_2^1 = \frac{\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M}{2} \quad (131)$$

Ezt visszahelyettesítve a fenti legjobb válaszokba, az információs különbségeket szem előtt tartva, a követő egyensúlyi outputját is megkapjuk:

$$q_1^2 = \frac{2 + 5\alpha c^A + 5(1 - \alpha)c^M - 4c^2}{12} \quad q_2^2 = \frac{2 - \alpha c^A - (1 - \alpha)c^M - 4c^2}{12}$$

Az árdiszkrimináció nélküli esethez viszonyítva látszik, hogy mind a követőnek, mind a vezetőnek növekedett az összkibocsátása az árdiszkrimináció hatására, ezt az aszimmetrikus információk sem befolyásolják.

A szimmetrikus információs esettel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a vezető vállalat által az első árszinten kibocsátott mennyiség változatlan, ez nem meglepő, hiszen ez már abban az esetben sem függött c^2 -től. A vezető által az alacsonyabb áron kínált mennyiség csak annyiban változott, hogy $c^2/2$ helyett, c^2 várható értékének a fele a kibocsátás. A követő által kibocsátott mennyiségeknél, viszont már összetettebben épülnek be a várható értékek, de továbbra is igaz, hogy a követő több outputot bocsát ki a magasabb árkategóriában.

Ezután határozzuk meg az árakat:

$$P_1 = \frac{6 + 9c^1 + 4c^2 - 5\alpha c^A - 5(1 - \alpha)c^M}{12} \quad (132)$$

$$P_2 = \frac{4 + 9c^1 + 8c^2 - 10\alpha c^A - 10(1 - \alpha)c^M}{12} \quad (133)$$

Végezetül megállapíthatjuk, hogy az aszimmetrikus információs modellek vizsgálatánál nem feltétlenül szükséges, hogy a vállaltok versenytársuk költségének várhatóértékét éppen $\alpha c^A + (1 - \alpha)c^M$ formában ismerjék. Ez a felírásmód modelljeinkben főként a szemléletességet szolgálta, de alapvetően bármilyen eloszlással megadhatóak a vállalatok információ , mivel ebben a modellstruktúrában csak az a lényeges, hogy a piacon szereplő másik vállalat költségének várható értékét ismerjék. További elemzés alapját szolgáltathatja egy olyan modell, amely nem csak a költségek várhatóértékét, hanem annak szórását is figyelembe veszi, mint egyfajta kockázati tényezőt.

5. Összefoglalás

Dogozatomban az árdiszkriminációt vizsgáltam Stackelberg- és a Cournot verseny esetén. Röviden bemutattam az elméleti irodalmi háttérét, majd Hazeldine [2006], Kutlu [2009], és Mukherjee [2010] modelljeihez hasonló keretrendszerben modelleztem azokat az eseteket, amikor nem szimmetrikus a vállaltok költségei, és amikor nem teljesülnek a teljes információs feltevések. Ezenfelül összehasonlítottam a különböző modelleket kibocsátott outputok, az egyensúlyi árak és a vállalati profitok szempontjából.

A főbb megállapításaim, hogy Cournot versenyben a K darab árkategória mellett az egyes árkategóriában a két vállalat által összesen termelt mennyiség megegyezik a következő magasabb árszinten egy vállalat által termelt mennyiséggel. Különböző termelési költségek mellett a két vállalat egyforma mennyiséget termel az első $K-1$ árkategóriákban, az aszimmetrikus költségekből adódó különbség csak a legutolsó, legalacsonyabb árszinten jelenik meg. Ezenfelül, a kibocsátással súlyozott átlagár aszimmetrikus költségek mellett sem függ az árdiszkrimináció mértékétől, sőt megegyezik az árdiszkrimináció nélküli esetben alkalmazott egységes árral.

Stackelberg duopólium esetében aszimmetrikus költségek mellett a már mindkettő vállalat alkalmaz árdiszkriminációt, ellentétben Kutlu szimmetrikus költségek melletti modelljével, ahol a vezető csak a legmagasabb rezervációs árral rendelkező fogyasztókat szolgálja ki. Aszimmetrikus költségek mellett figyelemre méltó, az is, hogy a vezető a második árszinten saját költségétől függetlenül mindig kibocsát, az első árkategóriában pedig csak akkor, ha költsége, $c^1 < \frac{2}{3}$.

Aszimmetrikus információk mellett is igaz marad, mind a Cournot, mind a Stackelberg versenyben hogy a árdiszkrimináció hatására többet termelnek az egyes vállalatok. Ezekben a modellekben általában megfigyelhetjük, hogy a szimmetrikus információs esethez képest, a vállalatok kibocsátásuk meghatározásakor nagyobb súllyal veszik számításba a saját költségeiket, ez alól egyedül a Stackelberg vezető a kivétel, akinek kibocsátását érdemben nem befolyásolják az aszimmetrikus információk.

A következő táblázat a Cournot- és a Stackelberg modell eredményeit mutatja be rendszerezve, aszimmetrikus költségek mellett.

	Cournot modell		Stackelberg modell	
	Árdiszkrimináció nélkül	Árdiszkriminációval	Árdiszkrimináció nélkül	Árdiszkriminációval
q_1^1	$q^1 = \frac{1-2c^1+c^2}{3}$	$q_1 = \frac{2-c^1-c^2}{7}$	$q^1 = \frac{1-2c^1+c^2}{2}$	$q_1^1 = \frac{2-3c^1}{4}$
q_2^1		$q_2^1 = \frac{1+3c^2-4c^1}{7}$		$q_2^1 = \frac{c^2}{2}$
q_1^2	$q^2 = \frac{1-2c^2+c^1}{3}$	$q_1 = \frac{2-c^1-c^2}{7}$	$q^2 = \frac{1+2c^1-3c^2}{4}$	$q_1^2 = \frac{2+3c^1-2c^2}{12}$
q_2^2		$q_2^2 = \frac{1+3c^1-4c^2}{7}$		$q_2^2 = \frac{2+3c^1-8c^2}{12}$
P_1	$\frac{1+c^1+c^2}{3}$	$P_1 = \frac{3+2c^1+2c^2}{7}$	$P = \frac{1+2c^1+c^2}{4}$	$P_1 = \frac{2+3c^1+c^2}{6}$
P_2		$P_2 = \frac{1+3c^1+3c^2}{7}$		$P_2 = \frac{2+3c^1+4c^2}{12}$
π^1	$\left(\frac{1-2c^1+c^2}{3}\right)^2$	$\frac{1-3c^1+c^2+3(c^1)^2+(c^2)^2-2c^1c^2}{7}$	$\frac{(1-2c^1+c^2)^2}{8}$	$\frac{4-12c^1+4c^2-24(-9(c^1)^2-4(c^2)^2-12c^1c^2)}{24}$
π^2	$\left(\frac{1-2c^2+c^1}{3}\right)^2$	$\frac{1-3c^2+c^1+3(c^2)^2+(c^1)^2-2c^1c^2}{7}$	$\frac{(1+2c^1-3c^2)^2}{16}$	$\frac{4+12c^1-20c^2+48(+9(c^1)^2+28(c^2)^2-30c^1c^2)}{48}$

A témához kapcsolódóan érdekes lehet egy olyan elemzés, amely a vizsgált modelleket fogyasztói többlet és társadalmi jólét szempontjából hasonlítja össze. További kutatási lehetőségként javaslom a Stackelberg duopólum árdiszkriminációjának általános kiterjesztését K-darab árkategória esetére.

Hivatkozások

- [1] Holmes, T.J., 1989. The effects of third-degree price discrimination in oligopoly. American Economic 79, 244-250
- [2] Hazeldine, T. 2006. Price discrimination in Cournot-Nash oligopoly. Economic Letters 93, 413-420
- [3] Hazeldine, T. 2010. Oligopoly price discrimination with many prices. Economic Letters 109, 150-153
- [4] Kutlu, L. 2009. Price discrimination in Stackelberg competition. Journal of Industrial Economics 57, 364
- [5] Kutlu, L. and Kumar, S. 2010. Capacity constraint, price discrimination, and oligopoly. Letöltés: http://bus.lsu.edu/McMillin/Working_Papers/pap11_04.pdf, letöltve 2012.03.18.
- [6] Mukherjee, A. 2010 Price discrimination in oligopoly with asymmetric firms. Letöltés: <http://www.nottingham.ac.uk/economics/documents/discussion-papers/10-04.pdf> ,