

OTDK-DOLGOZAT

Pleibeisz Ambrus
Ba

2013

Bertrand-oligopol piacok elemzése TU-játékokkal

**Analysis of Bertrand-oligopoly markets with
TU-games**

Pleibeisz Ambrus

Kézirat lezárva: 2012. március 26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. A TU-játékok	3
3. Bertrand-oligopóliumok Shubik-kereslet mellett	5
4. Bertrand-oligopol TU-játékok pesszimista várakozások mellett	8
4.1. Példák Bertrand-oligopóliumokra pesszimista várakozások mellett . .	13
5. A γ-karakterisztikájú függvény és a Nash-egyensúly melletti megoldás	16
5.1. A β -és γ -függvények mellett létrejövő Bertrand-oligopol TU-játékok összehasonlítása	19
6. Partíciós játékok	21
6.1. Bertrand-oligopóliumok partíciós TU-játékok mellett	24
6.2. Azonos határkölségek	25
6.3. Különbözö határkölségek	27
7. Konklúzió	30
Irodalomjegyzék	31

1. fejezet

Bevezető

A dolgozatunkban az árversenyen alapuló Bertrand-oligopol piacokon létrejövő kartelleket kívánjuk elemezni. A hagyományos nem kooperatív megközelítés során azt tapasztaljuk, hogy a kartell tagjai bár magasabb profitot tudnak elérni, mégis érdemesebb számukra nyilvánosságra hozni az illegális tevékenység létét, abban a reményben, hogy a kartell elárulásával a hatóságok nem szankcionálják az adott vállalatot. Ezen probléma okán bemutatjuk Lardon (2011a) kutatásait és eredményeit a Bertrand-oligopol játékok kooperatív TU-játékokra való kiterjesztéséről, majd a kapott modellekkel, példákon keresztül kísérletezünk különböző tulajdonságú piacokon. A TU-játékok tulajdonságai és eszközei, mint a konvexitás vagy a mag lehetőséget adnak arra, hogy megvizsgáljuk mikor érdemes a vállalatoknak belépni a kartellbe és az mikor marad fenntartható. A modellekben Shubik-keresleti függvényt (Shubik (1980)) használunk, amely alkalmas termékdifferenciált piacok elemzésére.

A második fejezetben a TU-játékokat, azok néhány tulajdonságát és különböző kifizetéseket mutatunk be, amelyek szükségesek a kapott eredmények elemzéséhez.

A harmadik fejezetben a Shubik-kereslettel ismerkedünk meg és megmutatjuk ezen keresleti függvény mellett létrejövő Nash-egyensúlyt a Bertrand-oligopóliumokon.

A negyedik fejezetben bemutatjuk Lardon (2011a) és Lardon (2011b) pesszimista várakozásokon alapuló modelljét, amely az Aumann (1959) által bevezetett α - és β -karakterisztikájú függvények segítségével adja meg a TU-játékban a kartell profitját. A játékról belátható, hogy a mag nemüres, így a piacon működő vállalatoknak érdemes létrehozni az összes vállalatokból létrejövő nagykoalíciót.

Az ötödik fejezetben Denecker és Davidson (1985) normál formájú modelljét és annak Lardon (2011a), Lardon (2010), a parciális megállapodási egyensúly (Chander és Tulkens (1994)) segítségével történő TU-játékokra való kiterjesztését mutatjuk be és az így kapott γ -karakterisztikájú függvényt hasonlítjuk össze a pesszimista várakozások modelljével példákon keresztül.

Mivel az említett modellek nem veszik figyelembe a koalíciókon kívüli vállalatok különböző struktúráiból származó externáliákat, így a hatodik fejezetben kísérletet teszünk a parciális megállapodási egyensúly melletti modell partíciós TU-játékokra való kiterjesztésére. Huang és Sjöström (2006) és Kóczy Á. László (2007) alapján bemutatjuk a partíciós TU-játékok néhány tulajdonságát és a rekurzív mag fogalmát. Megmutatjuk, hogy a partíciós függvények segítségével pontosabb képet kaphatunk a kartellek fenntarthatóságáról, viszont a módszer megnehezíti a játék tetszőleges piacokra való általános megadását. Eredményül kapjuk, hogy az elemzett négyszereplős piacokon a koalíciókra pozitív externáliaként hat a külső vállalatok durvább struktúrája.

2. fejezet

A TU-játékok

Az $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jelölje az átruházható hasznosságú kooperatív játékokat, amelyre $v(\emptyset) = 0$ és bármely $S \subseteq N$ esetén $v(S)$ a koalíció értéke és N a játékosok halmaza. A $\mathcal{G}^N$ az N játékosalmazzal rendelkező játékok osztálya.

2.1. definíció. A $\psi : A \Rightarrow \mathbb{R}_N$ függvényt az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékoszályon értelmezett megoldásnak nevezzük, ahol $\Rightarrow$ halmzéértékű leképezést jelent.

2.2. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ játék

- *superadditív*, ha minden $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ koalícióra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$,
- *konvex*, ha:
 - minden $S, T \subseteq N$ esetén, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ vagy ezzel ekvivalens módon
 - minden $i \in N$, $j \in N$, minden $S \in 2^{N \setminus \{i, j\}}$, $v(S \cup i) - v(S) \leq v(S \cup \{i, j\}) - v(S \cup \{j\})$.

2.3. definíció. $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékoszályon értelmezett ψ pontértékű megoldás

- *hatékony (PO)*, ha minden $v \in A$ esetén $v(N) = \sum_{i \in N} \psi_i(v)$,
- *NP (nullplayer property)* tulajdonságú, ha minden $i \in N$ és minden $S \subseteq N$ esetén, ha $v(S \cup i) - v(S) = 0$, akkor $\psi_i(v) = 0$,
- *DP (Dummy player)* tulajdonságú ha $\psi_i(v) = v(\{i\})$,
- *ETP* tulajdonságú, ha minden $v \in A$ játékra és minden $i, j \in N$ játékosra igaz, hogy, ha $i \sim^v j$, akkor $\psi_i(v) = \psi_j(v)$,
- *additív*, ha minden $v, \omega \subseteq A$, hogy $v + \omega \in A$, $\psi(v + \omega) = \psi(v) + \psi(\omega)$,

- *M (marginális), ha minden $S \in N$ koalícióra, $v, \omega \in A$, $v(S \cup i) - v(S) = \omega(S \cup i) - \omega(S)$, akkor $\psi_i(v) = \psi_i(\omega)$,*
- *méltányos, ha minden $v, w \in A$ játékban, $i, j \in N$ szimmetrikus játékosok, akkor $\psi_i(v + w) - \psi_i(v) = \psi_j(v + w) - \psi_j(v)$,*
- *szimmetrikus, ha létezik olyan Π permutáció, hogy minden $S \in N$ koalícióra $\omega(S) = v(\Pi(S))$, akkor minden $i \in N$ esetén $\psi_i(\omega) = \psi_{\Pi(i)}(v)$.*

2.4. definíció (Kiegyensúlyozottság). Az $v \in \mathcal{G}^N$ játék kiegyensúlyozott, ha

$$\max_{\sum_{A \in \mathcal{P}(N)} \lambda_A \mathcal{X}_A = 1} \sum_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}(N)}} \lambda_A v(A) \leq v(N).$$

2.5. definíció (A mag, Gillies (1959)). A $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja:

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \ S \subseteq N \text{ és } \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

A $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja, azokat a kifizetéseket tartalmazza, amelyek pontosan a nagykoalíció értékét osztják szét a játékosok között, és minden koalíció kifizetése legalább akkora, mint amit bármely koalícióban szerezhethetne, vagyis magbeli kifizetés esetén a játékosoknak nem érdemes kilépnie a nagykoalícióból.

2.6. tétel (Bondareva-Shapley, Shapley (1967)). A $v \in \mathcal{G}^N$ játék kiegyensúlyozott pontosan akkor, ha $v \in \mathcal{G}^N$ játék magja nem üres.

2.7. definíció (Egyenlő szétosztás). Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék egyenlő szétosztása minden $i \in N$ esetén:

$$ED_i = \frac{v(N)}{N}.$$

2.8. definíció (Shapley-érték, Shapley (1953)). Egy $v \in \mathcal{G}^N$ TU-játék Shapley-megoldása minden $i \in N$ esetén:

$$\begin{aligned} \phi_i(v) &= \sum_{S \subseteq N} p_{Sh}^i(S) v_i(S), \\ \text{ahol } p_{Sh}^i(S) &= \begin{cases} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1!)}{|N|!}, & \text{ha } i \notin S \\ 0 & \text{különben} \end{cases}. \end{aligned}$$

A Shapley-érték az adott játékosnak a nagykoalícióhoz való határhozzájárulásának várhatóértékét méri.

2.9. tétel (Ichiishi (1981)). Ha egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék konvex, akkor $\psi(v) \in C(v)$.

3. fejezet

Bertrand-oligopóliumok Shubik-kereslet mellett

A versenypolitikai elemzésekben két piactípust különíthetünk el, aszerint, hogy a vállalatok a termékmennyiség vagy az árak szerint versengenek egymással. Ha a vállalatok szimultán módon határoznak meg árakat a szituációt Bertrand-versenynek, kevesebb vállalat esetén Bertrand-oligopóliumnak nevezzük. Jelen tanulmányunkban ezeket a piacokat szeretnénk elemezni aszerint, hogy mikor érdemes a vállalatoknak kartellt létrehozni. A hagyományosan használt $q_i = a - bp_i$ keresleti függvények mellett (ahol q_i az i vállalat által eladott mennyiség, p_i az i vállalat által meghatározott ár és a a nulla ár melletti maximálisan eladható mennyiség) azonban ismert tény, hogy a vállalatok azonos határkölsége lesz az egyensúlybeli ár, míg különböző költségek esetén a kevésbé hatékony vállalatok kiszorulnak a piacról. Ennek a problémának az elkerülése miatt érdemesebb használni úgynevezett Shubik-keresletet (Shubik (1980)).

Legyen $(N, (D_i)_{i \in N}, (c_i)_{i \in N})$ egy Bertrand-oligopólium, ahol

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a vállalatok halmaza,
- $D_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ az i vállalat terméke iránti kereslet,
- $c_i \geq 0$ az i vállalat határkölsége.

Ekkor a vállalatok Shubik-keresleti függvénye, minden $i \in N$ vállalat esetén a következő alakú:

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = V - p_i - r \cdot \left(p_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k \in N} p_k \right),$$

ahol p_i a vállalat által meghatározott ár, r a helyettesíthetőségi paraméter (ha r tart a nullához, akkor monopol piac, ha r tart a végtelenhez, akkor tökéletes verseny jön

létre) és V a maximális termékmennyiség, amelyet egy vállalat eladhat nulla ár és helyettesíthetőség, azaz monopolhelyzet mellett. Vagyis adott vállalat kereslete nem csak a saját árából függ, hanem a többiekétől is, oly módon, hogy a keresletét csökkenti a saját termékének az ára, illetve a termékek átlagos árából való eltérése, így egy termékdifferenciált piac jön létre. Az r paraméter növekedésével adott vállalat terméke iránti keresletet egyre inkább a vállalat által megszabott árak az átlag-ártól vett eltérése határozza meg. Ez azt jelenti, hogy ha minden vállalat közösen megnövelné az árakat, akkor mindannyian több terméket adhatnának el ezen magasabb ár mellett, mint ha csak néhányan emelnének árat. Ez a jelenség szolgáltatja az indokot, hogy Shubik-keresletet használjunk a kartellek létrejöttének elemzésében, ugyanis egy ilyen keresleti függvény mellett a vállalatoknak érdekében állhat kooperatív módon összefogva megnövelni az árakat.

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a vállalatok még csak szimultán módon, kooperáció nélkül határozzák meg az áraikat. Ekkor megadhatunk egy Bertrand-oligopol szituációt a következő képen:

- tetszőleges $i \in N$ esetén az i játékos stratégia halmaza $X_i = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, ahol $p_i \in X_i$ a vállalat által meghatározott ár,
- a stratégia-profilok halmaza $X_N = \prod_{i \in N} X_i$,
ahol minden $i \in N$ vállalatra, $\pi_i : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ az i vállalat profitfüggvénye:

$$\pi_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_i - c_i) \cdot D_i(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

azaz minden $i \in N$ esetén

$$\pi_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_i - c_i) \cdot \left(V - p_i - r \cdot \left(p_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k \in N} p_k \right) \right).$$

A vállalatok úgy maximalizálják a profitjukat, hogy a legjobb választ adják a többiek stratégiájára. A (p_i^*, p_{-i}) stratégia profil akkor lehet Nash-egyensúly, ha

$$\pi_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq \pi_i(p_i, p_{-i}^*), \quad i \in N, \quad p_i \in X_i, \quad p_{-i} \in X_{N \setminus \{i\}}.$$

A maximum feladat elsőrendű feltétele:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}(p) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

vagyis

$$2(n + (n - 1)r)p_i - r \sum_{j=1}^{n-1} p_j = nV + (n + (n - 1)r)c_i, \quad i \in N,$$

ami a következő egyenletrendszert adja:

$$b(p_i, p_{-i}) = \begin{bmatrix} 2\delta & -r & \dots & -r \\ -r & 2\delta & \dots & -r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -r & -r & \dots & 2\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nV + \delta c_1 \\ nV + \delta c_2 \\ \vdots \\ nV + \delta c_n \end{pmatrix},$$

ahol $\delta = n + (n - 1)r$. Az egyenletrendszer Wang és Zhao (2007) nyomán a történő megoldásával a vállalatok által meghatározott árra a következő eredményeket kapjuk:

$$p_i^* = \frac{n(V - \bar{c})}{2n + (n - 1)r} + \frac{n(1 + r)\bar{c} + (n + (n - 1)r)c_i}{2n + (2n - 1)r}, \quad (3.1)$$

$$\text{ahol } \bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j,$$

$$q_i^* = \frac{n + (n - 1)r}{n} (p_i^* - c_i), \quad (3.2)$$

$$Q^* = \sum q_i^* = \frac{n(n + (n - 1)r)}{2n + (n - 1)r} (V - \bar{c}), \quad (3.3)$$

$$\pi_i^* = \frac{n}{n + (n - 1)r} (q_i^*)^2, \quad (3.4)$$

ahol q_i^* az egyensúlyban az i vállalat által eladott termékmennyiség és Q^* a vállalatok által eladott összes termék. Vegyük észre, hogy

- ha $c_i \geq c_j$, akkor $p_i^* \geq p_j^*$ és $\pi_i^* \leq \pi_j^*$, azaz magasabb határköltséggel magasabb árat határoznak meg a vállalatok. A Shubik-kereslet differenciált termékei miatt nem mindig szorulnak ki a kevésbé hatékony vállalatok a piacról, mint a hagyományos keresleti függvények mellett.
- ha $r \geq \bar{r}$, akkor $Q_r^* \geq Q_{\bar{r}}^*$, vagyis a piacon eladható összes termékmennyiség nem korlátos az r helyettesíthetőség tekintetében, mivel annak növekedésével a piacon eladható teljes mennyiség is növekszik. Más szavakkal, nincs olyan aggregált kereslet, amelyet a vállalatoknak szét kell osztania, ahogyan azt egy $p = a - bq$ alakú inverz keresleti függvéynél megszokhattunk. Ekkor ugyanis a vállalatok $(a - b \cdot \sum_{i \in N} q_i)q_i$ alakú profitfüggvény mellett optimalizálnának. Ennek nagy jelentősége lesz a későbbiekben.

A következő fejezetekben megengedjük a vállalatoknak, hogy kartellt alakítsanak, amelyek fenntarthatóságát elemezzük kooperatív TU-játékokkal.

4. fejezet

Bertrand-oligopol TU-játékok pesszimista várakozások mellett

A kooperatív játékelmélet keretein belül, gyakran használják az Aumann (1959) által bevezetett α -és β -karakterisztikájú függvényeket a koalíciók értékének meghatározásakor. A két függvénytípus mindegyike azt jelenti, hogy a koalíció tagjai maximalizálják a koalíciónak azt a minimális értékét, amelyet a koalíción kívüli játékosok meghagynak. Bertrand-oligopol szituációban ezt úgy értelmezhetjük, hogy a koalíción kívüli vállalatok minimalizálni akarják a koalíció profitját, úgy hogy maguk is egy koalícióban tömörülnek. Az eredeti koalíción kívüli, úgynevezett deviáns vállalatok hajlamosak ezt akár a saját kárukra megtenni, csak hogy büntessék a koalíció megalakulását. Erre az elsőre meglepő eredményre később adunk racionális magyarázatot.

A modellt Lardon (2011a) szerint a következő képen írhatjuk fel. Legyen $\Gamma_{bo} = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N}) \in \mathcal{G}_{bo}$ egy Bertrand-oligopol játék Shubik-kereslet mellett és $v_\alpha \in \mathcal{G}^N$, $v_\beta \in \mathcal{G}^N$ a hozzá társított TU-játékok, ahol

- minden $S \subseteq N$ koalíció stratégia-profilja $X_S = \prod_{i \in S} X_i$,
- minden $S \subseteq N$ koalíció profitfüggvénye $\pi_S : X_S \times X_{N \setminus S} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ahol a koalíció profitja a koalíció tagjainak profitjának összegével egyenlő:

$$\begin{aligned} \pi_S(p_S, p_{N \setminus S}) &= \sum_{j \in S} \pi_j(p_S, p_{N \setminus S}) \\ &= \sum_{j \in S} (p_j - c_j) \cdot \left(V - (1 + r)p_j - \frac{r}{n} \cdot \sum_{k \in N} p_k \right). \end{aligned}$$

A Bertrand-oligopol TU-játékokra, pesszimista várakozások esetén definiálhatjuk az α -és β -típusú függvényeket minden $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ mellett:

$$v_\alpha(S) = \max_{p_S \in X_S} \min_{p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \pi_S(p_S, p_{N \setminus S}), \quad (4.1)$$

$$v_\beta(S) = \min_{p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \max_{p_S \in X_S} \pi_S(p_S, p_{N \setminus S}). \quad (4.2)$$

Az α -és β -típusú függvények a vállalatok pesszimista várakozását mutatja be, mivel nem feltételezi, hogy a koalíció kívüli vállalatok a nekik legjobb választ adják a koalíció lépésére. Ilyen módon a β -függvény azt jelenti, hogy a koalíció tagjai maximalizálják a profitjukat a saját áruk meghatározásával, a koalíció kívüliek árának függvényében, amelyet a koalíció kívüliek minimalizálnak. Látható, hogy a kooperatív játékbeli elemzés miatt az n -szereplős problémát visszavezethetjük két játékos esetre.

A maximum és minimum feladatokat (Lardon (2011a) 124-126. oldal) és (Lardon (2011b) 4-7. oldal) szerint megoldva a következő két esetet kapjuk:

4.1. tétel. *Ha $nV \leq (n + r(n - s))\bar{c}_S$, ahol $\bar{c}_S = \sum_{j \in S} \frac{c_j}{s}$, akkor minden $i \in S$ -re*

$$\begin{aligned} \bar{p}_i^S &= \frac{\bar{c}_S + c_i}{2}, \quad \sum_{j \in N \setminus S} \bar{p}_j = \frac{n}{r} \left(\bar{c}_S \left(1 + r \frac{(n - s)}{n} \right) - V \right), \\ v_\beta(S) &= \frac{1 + r}{4} \cdot \left(\sum_{j \in S} (c_j)^2 - s \cdot (\bar{c}_S)^2 \right) = \frac{1 + r}{4} \cdot \sum_{j \in S} (c_j - \bar{c}_S)^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ha $nV > (n + r(n - s))\bar{c}_S$, akkor minden $i \in S$ -re

$$\begin{aligned} \bar{p}_i^S &= \frac{1}{2} \left(\frac{nV}{n + r(n - s)} + c_i \right) \geq \frac{\bar{c}_S + c_i}{2}, \quad \sum_{j \in N \setminus S} \bar{p}_j = 0, \\ v_\beta(S) &= \frac{s(nV - (n + r(n - s))\bar{c}_S)^2}{4n(n + r(n - s))} + \frac{1 + r}{4} \cdot \sum_{j \in S} (c_j - \bar{c}_S)^2 \\ &= -\frac{V}{2} \sum_{i \in S} c_i - \frac{r}{4n} \left(\sum_{i \in S} c_i \right)^2 + \frac{1 + r}{4} \sum_{i \in S} c_i^2 + \frac{s(nV)^2}{4n(n + r(n - s))}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Bizonyítás. Legyen $N \subseteq S$ és legyen $b_S : X_{N \setminus S} \rightarrow X_S$ az S koalíció legjobbválasz-leképezése:

$$\pi_s(b_S(p_{N \setminus S}), p_{N \setminus S}) \geq \pi_S(p_S, p_{N \setminus S}), \quad p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}, \quad p_S \in X_S,$$

amiből következik, hogy

$$v_\beta(S) = \min_{p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \pi_S(b_S(p_{N \setminus S}), p_{N \setminus S}).$$

Az S koalíció profit maximum feladata minden $p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$ mellett:

$$\max_{p_S \in X_S} \pi(p_S, p_{N \setminus S}),$$

azaz a maximalizáció elsőrendű feltétele

$$\frac{\partial \pi_S}{\partial p_i}(p_S, p_{N \setminus S}) = 0, \quad p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}, \quad i \in S.$$

Ekkor az egyedi $b_S(p_{N \setminus S})$ legjobbválasz-leképezések

$$b_S(p_{N \setminus S}) = \frac{nV + r \sum_{j \in N \setminus S} p_j}{2(n + r(n - s))} + \frac{c}{2}, \quad p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}, \quad i \in S. \quad (4.5)$$

A $b_S(p_{N \setminus S}) \in X_S$ legjobbválasz-leképezést felhasználva a $N \setminus S$ komplementer koalíció minimum feladata:

$$\min_{p_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}} \pi_S(b_S(p_{N \setminus S}), p_{N \setminus S}).$$

A minimum feladat elsőrendű feltétele, hogy

$$\frac{\partial \pi_S}{\partial p_j}(b_S(p_{N \setminus S}), p_{N \setminus S}) = 0, \quad j \in N \setminus S,$$

amely feltételből a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\sum_{j \in N \setminus S} p_j = \frac{n}{r} \left(\bar{c}_S \left(1 + r \frac{(n - s)}{n} \right) - V \right).$$

Mivel minden $i \in N$, $X_i \in \mathbb{R}_+$, így minden $\bar{p}_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$ igaz, hogy

$$\sum_{j \in N \setminus S} \bar{p}_j = \max \left\{ 0, \frac{n}{r} \left(\bar{c}_S \left(1 + r \frac{(n - s)}{n} \right) - V \right) \right\}.$$

A kapott eredményt behelyettesítve az előzőekbe, látható, hogy:

$$\bar{p}_i = b_i(\bar{p}_{N \setminus S}) = \max \left\{ \frac{\bar{c}_S + c_i}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{nV}{n + r(n - s)} + c_i \right) \right\}, \quad i \in S.$$

■

A (4.3) játékot variancia játéknak is szokás nevezni, mivel a koalíció értéke egyenlő a koalíción belüli vállalatok határkölségének varianciájának konstansszorosával. Ekkor látható, hogy a koalíció értéke, vagyis a vállalatok összprofitja akkor a legmagasabb, ha a legkevésbé hatékony és a leghatékonyabb vállalatok társulnak. Ennek magyarázatát az 5.1. példában adjuk.

A két függvénytípus feltételei a piacok a határkölségekhez viszonyított méretét mutatják. A nagykoalíció esetében például $nV \leq \bar{c}_S$ alakra egyszerűsödik a feltétel. Látható, hogy a (4.4) esetben a koalíció tagjai magasabb árat határozhatnak meg,

mint azt a (4.3) játékban tehetnék, ha teljesül a $nV \geq (n+r(n-s))\bar{c}_S$ feltétel, viszont ez nem jelenti azt, hogy a variancia játékban mindig kisebb a koalíció tagjainak az ára és profitja. Ezt mutatja az 5.1. példa is.

A (4.4) függvény szétbontható négy különböző játékra, amelyet később felhasználunk a Shapley-érték megadására.

A Bertrand-oligopol TU-játékok előnye β -típusú függvények mellett, hogy a vállalatok az ár meghatározásánál nem szükséges, hogy ismerjék a koalíció kívüli cégek határköltségét. Emiatt mondjuk ezt a megközelítés pesszimista várakozásoknak, mert a koalíció tagjai azt a legkedvezőtlenebb esetet tekintik, hogy a többiek nagyon hatékonyak, vagyis nulla határköltség mellett termelnek. Ezzel szemben mégsem a triviális megoldást kaptuk, hogy a külső vállalatok mindig nulla árat határoznak meg, ahogyan az látható a (4.3) esetben.

A $\Gamma_{bo} = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N}) \in \mathcal{G}_{bo}$ játékokra Lardon (2011a) belátta a következő tételket:

4.2. tétel. *Legyen $\Gamma_{bo} = (N, (X_i, \pi_i)_{i \in N}) \in \mathcal{G}_{bo}$ egy Bertrand-oligopol szituáció és legyenek $v_\alpha \in \mathcal{G}_{Bo}^\alpha$ és $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ a hozzá társított Bertrand-oligopol TU-játékok. Ekkor a minimax és maximin játékokban minden $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ koalícióra igaz, hogy:*

$$v_\alpha(S) = v_\beta(S).$$

4.3. tétel. *Legyen $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ olyan Bertrand-oligopol TU-játék, amely minden $S \subseteq N$ koalíció esetén (4.3) szerint adott, ahol $N \geq 2$. Ekkor v_β akkor és csak akkor konvex, ha a vállalatok azonos határköltséggel rendelkeznek.*

4.4. tétel. *Egy $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ Bertrand-oligopol TU-játék, amely minden $S \subseteq N$ koalíció esetén (4.3) vagy (4.4) alakban adott, teljesen kiegyensúlyozott.*

4.5. tétel. *Egy $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ Bertrand-oligopol TU-játék, amely minden $S \subseteq N$ koalíció esetén (4.4) alakban adott, konvex.*

A (4.3) tétel szerint, a variancia játékok csak akkor konvexek, ha a vállalatok határköltsége azonos, ami az ilyen játékok esetében azt jelenti, hogy minden $S \subseteq N$ koalíció profitja nulla. A 4.4 és a 2.6 tételek szerint minden $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ pesszimista várakozások mellett adott Bertrand-oligopol TU-játék magja nemüres, vagyis mindig találhatunk olyan kifizetést, amely mellett a vállalatoknak érdemes létrehozni a nagykoalíciót.

Mivel a minden $S \subseteq N$ esetén (4.4) alakban adott $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ Bertrand-oligopol TU-játék konvex, így a Shapley-értéke mindig magbeli, így igaz a következő tétel:

4.6. tétel. Legyen egy $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ Bertrand-oligopol játék, amely minden $S \subseteq N$ koalícióra (4.4) szerint adott. Ekkor minden $i \in N$ esetén igaz, hogy:

$$\phi_i(v_\beta) = \frac{(V - c_i)^2}{4} + \frac{r}{4}c_i(c_i - \bar{c}_N). \quad (4.6)$$

Bizonyítás. (Lardon (2011a) 138. oldal). Egy $v_\beta \in \mathcal{G}_{Bo}^\beta$ minden $S \subseteq N$ esetén (4.4) alakban adott Bertrand-oligopol TU-játék felosztható négy különálló játékra az alábbi módon:

$$\begin{aligned} v_\beta(S) &= -\frac{V}{2} \sum_{i \in S} c_i - \frac{r}{4n} \left(\sum_{i \in S} c_i \right)^2 + \frac{1+r}{4} \sum_{i \in S} c_i^2 + \frac{s(nV)^2}{4n(n+r(n-s))} \\ &= -\frac{V}{2}v_1(S) - \frac{r}{4n}v_2(S) + \frac{1+r}{4}v_3(S) + \frac{V^2}{4(1+r)}v_4(S). \end{aligned}$$

Mivel az additív TU-játékok Shapley-értéke megegyezik a szingleton koalíciók értékével, így

$$\phi_i(v_1) = c_i, \quad \phi_i(v_3) = c_i^2, \quad i \in N.$$

Másrészt a szimmetria és hatékonyság tulajdonság miatt, a szimmetrikus TU-játékok Shapley-értéke azonos az egyenlő elosztás megoldással, így

$$\phi_i(v_4) = \frac{v_4(N)}{n} = 1 + r, \quad i \in N.$$

Már csak a $v_2 \in \mathcal{G}^N$ TU-játék Shapley-értékét kell meghatározni. Legyen minden $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ koalíció mérete $s \leq n-1$ és legyen

$$p_n(s) = \frac{1}{n \binom{n-1}{s}}.$$

Ekkor tetszőleges $i \in N$ esetén

$$\begin{aligned} \phi_i(v) &= \sum_{S \in 2^N \setminus \{i\}} p_n(s) \left(c_i^2 + 2c_i \sum_{j \in S} c_j \right) \\ &= c_i^2 + 2c_i \sum_{S \in 2^N \setminus \{i\}} p_n(s) \sum_{j \in S} c_j \\ &= c_i^2 + 2c_i \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j \sum_{S \in 2^N \setminus \{i\}: j \in S} p_n(s) \\ &= c_i^2 + c_i \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j \\ &= c_i n \bar{c}_N. \end{aligned}$$

A Shapley-érték linearitása miatt minden $i \in N$ esetén

$$\begin{aligned} \phi_i(v_\beta) &= -\frac{V}{2}c_i - \frac{r}{4n}nc_i\bar{c}_N + \frac{1+r}{4}c_i^2 + \frac{V^2}{4} \\ &= \frac{(V - c_i)^2}{4} + \frac{r}{4}c_i(c_i - \bar{c}_N). \end{aligned}$$

■

A tétel szerint tehát az említett játékok Shapley-értékére adható zárt forma, amely jelentősen gyorsítja a kifizetések kiszámítását, különösen, ha sok vállalat működik a piacon.

4.1. Példák Bertrand-oligopóliumokra pesszimista várakozások mellett

4.7. *példa.* A piacon $V = 30$ interceptor és $r = 3$ helyettesíthetőségi paraméter mellett működjen három vállalat $c_1 = 5, c_2 = 6$ és $c_3 = 7$ határköltségekkel. Ekkor a koalíciók értéke a következő lesz:

$$\begin{aligned} v_\beta(\bar{1}) &= 18,75 \quad * \\ v_\beta(\bar{2}) &= 12 \quad * \\ v_\beta(\bar{3}) &= 6,75 \quad * \\ v_\beta(\bar{12}) &= 90,75 \quad * \\ v_\beta(\bar{13}) &= 83 \quad * \\ v_\beta(\bar{23}) &= 72,75 \quad * \\ v_\beta(\bar{123}) &= 434 \quad * \end{aligned}$$

A Shapley-megoldás értéke pedig: $\phi_1 = 152,5$, $\phi_2 = 144$, $\phi_3 = 137,5$, amelyet számolhattunk a (4.6) képlettel. A *-gal jelölt koalíciók esetében a (4.4), különben (4.3) függvényt használjuk. A (4.5) tétel szerint ez a játék konvex és így a Shapley-érték magbéli, vagyis a kartell létrejön a piacon és ezen megoldás szerint fenn is marad.

4.8. *példa.* Az árversenyes Bertrand-oligopol piacon működjen négy vállalat, amelyeknek legyen a határköltsége rendre 9, 10, 11 és 16. A nulla ár és helyettesíthetőség mellett legnagyobb eladható mennyiséget mérő interceptor $V = 30$ és a helyettesíthetőségi paraméter $r = 3$. Ekkor a következő koalíció értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} v(\bar{1}) &= 0,04 \quad * \\ v(\bar{2}) &= 0 \\ v(\bar{3}) &= 0 \\ v(\bar{4}) &= 0 \\ v(\bar{12}) &= 8,31 \quad * \\ v(\bar{13}) &= 7 \quad * \\ v(\bar{14}) &= 50 \\ v(\bar{23}) &= 3,31 \quad * \\ v(\bar{24}) &= 40,5 \\ v(\bar{34}) &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\overline{123}) &= 68,96 & * \\
v(\overline{124}) &= 86,96 & * \\
v(\overline{134}) &= 78,53 & * \\
v(\overline{234}) &= 67,71 & * \\
v(\overline{1234}) &= 377,81 & *
\end{aligned}$$

A *-gal jelölt koalíciók esetén (4.4), míg a többinél (4.3) függvényt használtuk. Ennek a játéknak a Shapley-megoldása a négy játékosra $\phi_1(v_\beta) = 96,2$, $\phi_2(v_\beta) = 90,38$, $\phi_3(v_\beta) = 85,93$ és $\phi_4(v_\beta) = 105,3$. Látható, hogy ez a játék nem konvex, mivel $v(14) - v(4) = 50 \geq v(134) - v(34) = 78,53 - 32 = 46,53$ vagyis az első játékos nagyobb koalícióhoz csatlakozva kisebb mértékben növeli a koalíció kifizetését, mint egy kisebb koalícióhoz, azaz a negyedik játékoshoz való csatlakozás esetén. Érdekes jelenség, hogy ebben a játékban a nagykoalíció értéke kellően magas ahhoz, hogy a Shapley-megoldás értéke magbéli legyen, még a játék nemkonvex volta mellett is. Az eredményből arra következtethetnénk, hogy a pesszimista várakozások mellett ez mindig teljesül, ha játék a (4.3) és (4.4) függvények kombinációival adható meg. Ennek az állításnak a valótlanágát a következő példa illusztrálja.

4.9. *példa.* Az előző példában szereplő vállalatok most rendelkezzenek a $c_1 = 25$, $c_2 = 35$, $c_3 = 28$, és $c_4 = 23$. Ehhez a játékhoz a következő koalíció értékek tartoznak:

$$\begin{aligned}
v(\overline{1}) &= 0 \\
v(\overline{2}) &= 0 \\
v(\overline{3}) &= 0 \\
v(\overline{4}) &= 0 \\
v(\overline{12}) &= 50 \\
v(\overline{13}) &= 4,5 \\
v(\overline{14}) &= 2 \\
v(\overline{23}) &= 24,5 \\
v(\overline{24}) &= 72 \\
v(\overline{34}) &= 12,5 \\
v(\overline{123}) &= 52,67 \\
v(\overline{124}) &= 82,67 \\
v(\overline{134}) &= 12,67 \\
v(\overline{234}) &= 72,67 \\
v(\overline{1234}) &= 87,81 & *
\end{aligned}$$

Ez a játék szintén nem konvex, bár a nagykoalíció értékét nem a variancia játék függvényével számoltuk. A Shapley-megoldás értéke $\phi_1 = 11,74$, $\phi_2 = 46,74$, $\phi_3 = 5,91$ és $\phi_4 = 23,41$, amely itt már nem lesz magbéli, mert például $v(24) = 72 \geq$

$\phi_2 + \phi_4 = 70,16$. Ezek szerint nem mondható el, hogy a pesszimista várakozások mellett mindig olyan magas a nagykoalíció értéke, hogy a kartell fennmarad, ha a vállalatok a Shapley-megoldás szerint osztozkodnak.

5. fejezet

A γ -karakterisztikájú függvény és a Nash-egyensúly melletti megoldás

Az előző modellnél látható, hogy a koalíción kívüli vállalatok azáltal, hogy minimalizálni akarják a koalíción belüli vállalatok profitját, saját maguknak okoznak károkat, mint például a (4.3) variancia játék esetében a nulla áraknál. Emiatt Chan-der és Tulkens (1994) szerint nem racionális feltételezni, hogy a külső játékosok ilyen módon cselekszenek. Az általuk bevezetett γ -karakterisztikájú függvénnyel adott játékban a koalíción kívüli játékosok szingleton koalíciókat alkotva a számukra egyé-
nileg legjobb stratégiát választják és az így kialakuló egyensúlyt hívjuk parciális megállapodási egyensúlynak.

Legyen egy Bertrand-oligopol játék normál formája $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N}) \in \mathcal{G}_{Bo}$ és egy $S \subseteq N$ koalíció, ahol a $(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \in X_S \times X_{N \setminus S}$ stratégia profil megadja a parciális megállapodási egyensúlyt S koalícióon, amennyiben

$$\pi_S(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \geq \pi_S(p_S, \bar{p}_{N \setminus S}), \quad p_S \in X_S,$$

és

$$\pi_j(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \geq \pi_j(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus (S \cup \{j\})}, p_j), \quad j \in N \setminus S, \quad p_j \in X_j.$$

A parciális megállapodási egyensúly ezek szerint, az oligopol piacon olyan árvektort jelent, ami mellett a kartell és a külső vállalatok egyéni profitja nem lehet kisebb, mint ettől egyénileg eltérve bármely más ár mellett, azaz a koalíció tagjai a legjobb választ adják a koalíción kívüli vállalatok stratégiáira, míg a koalíción kívüli vállalatok szintúgy a legjobb választ adják a koalíció stratégiájára.

A modellt felírhatjuk Denecker és Davidson (1985) tanulmánya alapján. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a vállalatok halmaza és $\mathcal{P}_N = \{S_1, \dots, S_k\}, k \in \mathbb{N}$ partíció a koalíciók struktúrája, ami a modellben a vállalatok halmazának egy legalább egy elemű kartellre és a szingleton koalíciókra való szétosztását jelenti. A partíciók halma-

za N játékos esetén legyen $\Pi(N)$. Egy $\mathcal{P}'_N \in \Pi(N)$ felosztás finomabb, mint egy $\mathcal{P}_N \in \Pi(N)$, azaz $\mathcal{P}_N \leq^F \mathcal{P}'_N$, ha minden S koalícióhoz $\mathcal{P}'_N$ -ben létezik T koalíció $\mathcal{P}_N$ -ben, hogy $S \subseteq T$, vagyis ha $\mathcal{P}'_N$ néhány koalícióját összevonva $\mathcal{P}_N$ -t kapjuk.

A $(\mathcal{P}_N, (X_i, \pi_i)_{i \in \mathcal{P}_N}) \in \mathcal{G}_{Bo}$ Bertrand-opigopol szituációhoz társított $v_\gamma \in \mathcal{G}^N$ Bertrad-oligopol játékot megadhatjuk minden $S \in N$ koalícióhoz oly módon, hogy:

- $v_\gamma(S) = \pi_S(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S})$, ahol $(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \in X_S \times X_{N \setminus S}$ parciális megállapodási egyensúly.
- $\mathcal{P}_N = \{S_1, \dots, S_k\}$ a koalíciók halmaza,
- minden $S \in \mathcal{P}_N$ koalícióra a stratégia halmaz $X_S = \prod_{i \in S} X_i$,
- minden $S \in \mathcal{P}_N$ koalícióra a koalíció profitfüggvénye $\pi_S : \prod_{S \in \mathcal{P}_N} X_S \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\pi_S(p_S, p_{N \setminus S}) = \sum_{i \in S} \pi_i(p_S, p_{N \setminus S})$.
- minden $i \in N$ vállalatnak legyen $c_i = c$ azonos határköltsége.

A Bertrand-oligopol szituáció parciális megállapodási egyensúlyáról Denecker és Davidson (1985) eredményei alapján a következő mondható el.

5.1. tétel (Denecker és Davidson (1985)). *Legyen adott egy $(\mathcal{P}_N, (X_S, \pi_S)_{S \in \mathcal{P}_N}) \in \mathcal{G}_{Bo}$ Bertrand-oligopol játék. Ekkor*

- *létezik $p^* \in \varphi^N(\mathcal{P}_N, (X_S, \pi_S)_{S \in \mathcal{P}_N})$ egyetlen Nash-egyensúly, hogy*

$$\text{minden } S \in \mathcal{P}_N, \text{ létezik } p^{*S} \in \mathbb{R}_+ : \forall i \in S, p_i^* = p^{*S},$$

azaz minden koalícióra létezik egyensúlyi ár, amely a koalíció minden vállalatára ugyan az.

- *minden $S \in \mathcal{P}_N, T \in \mathcal{P}_N : s \leq t, p^{*S} \leq p^{*T}$ és ha $s < t, p^{*S} < p^{*T}$, vagyis nagyobb koalíció magasabb árat határoz meg.*
- *Ha $\mathcal{P}_N \leq^F \mathcal{P}'_N$ és p^* a $\mathcal{P}'_N$, valamint p^{**} a $\mathcal{P}_N$ partíció mellett létrejövő Nash-egyensúly, akkor minden $i \in N$ mellett $p_i^* \leq p_i^{**}$, azaz ha az adott Bertrand-oligopol piac koncentráltabb, akkor magasabb árat határoznak meg a vállalatok.*

Megoldva a maximum feladatot, a parciális megállapodási egyensúly $S \in \mathcal{P}_N$ koalíció és $(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \in X_S \times X_{N \setminus S}$ esetén a következő:

$$p_i^* = \frac{(V - c)(2n(1 + r) - r)n}{2(2n + r(n + s - 1))(n + r(n - s)) - r^2s((n - s))} + c, \quad i \in S, \quad (5.1)$$

$$\bar{p}_j = \frac{(V - c)(2n(1 + r) - rs)n}{2(2n + r(n + s - 1))(n + r(n - s)) - r^2s((n - s))} + c, \quad j \in N \setminus S, \quad (5.2)$$

$$v_\gamma(S) = f_\gamma(s) = s(p^{*S} - c) \left(V - p^{*S} + r \frac{(n - s)}{n} (\bar{p}^{N \setminus S} - p^{*S}) \right). \quad (5.3)$$

A kapott eredményekből látható, hogy:

- Mivel a vállalatok azonos határkölsége mellett a koalíció tagjai ugyanazt a p^{*S} , a külső szingleton koalíciók pedig ugyanazt a $\bar{p}^{N \setminus S}$ árat határozzák meg, így a koalíció értéke csak annak méretétől függ, az összetételétől azonban nem.
- Minden $S \in N$ koalícióra igaz, hogy $p^{*S} \geq \bar{p}^S$, vagyis a koalíció tagjai magasabb árakat határoznak meg.
- Minden $S \in N$ koalícióra és minden $T \in N$ koalícióra igaz, hogy ha $S \subseteq T$, akkor $\bar{p}^S \leq \bar{p}^T$, azaz ha a vállalatok nagyobb koalíciót hoznak létre, akkor a külső vállalatok magasabb árat határoznak meg. A jelenséget bővebben és a külső vállalatok profitjára való hatását a 6. fejezetben mutatjuk be.

A $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N}) \in \mathcal{G}_{Bo}$ Bertrand-oligopol játékhoz társított $v_\gamma \in \mathcal{G}^N$ TU-játékra Lardon (2011a) és Lardon (2010) bebizonyította a következő tételket.

5.2. tétel. *Legyen $v_\gamma \in \mathcal{G}^N$ és $v_\beta \in \mathcal{G}^N$ Bertrand-oligopol TU-játék. Ekkor*

$$C(v_\gamma) \subseteq C(v_\beta).$$

5.3. tétel. *Minden $v_\gamma \in \mathcal{G}_{Bo}^N$ Bertrand-oligopol TU-játékra igaz, hogy*

$$ED(v_\gamma) \in C(v_\gamma).$$

Ezek szerint minden $v_\gamma \in \mathcal{G}_{Bo}^N$ Bertrand-oligopol TU-játékra található magbeli kifizetés, így mindig érdemes lesz a vállalatoknak létrehozni a nagykoalíciót, vagyis kartell alakul a piacon. Mivel a v_β Bertrand-oligopol TU-játék magja tartalmazza a v_γ TU-játékokét, így pesszimista várakozások mellett a vállalatok nagyobb teret nyerhetnek, hogy magbeli kifizetést találjanak, ami növeli annak az esélyét, hogy olyan kifizetésben egyezzenek meg, amely mellett a nagykoalíciót érdemes létrehozniuk. Ez akkor válna igazán jelentőssé, ha a megállapodás megkötésének és a nyereség szétosztásának lennének tranzakciós költségei.

5.1. A β -és γ -függvények mellett létrejövő Bertrand-oligopol TU-játékok összehasonlítása

A következő példában látható, hogy a pesszimista várakozások mellett a koalíciók értéke mindig kisebb, mint racionális várakozások esetén, a nagykoalíció értéke viszont ugyan annyi, hiszen nem marad a kartellen kívül vállalat, amely bármi módon csökkentené a bennlévők profitját.

5.4. *példa.* Tekintsünk egy olyan piacot, ahol $V = 30$ és négy vállalat működik azonos 10 határköltség mellett. A helyettesíthetőségi paraméter legyen 1, 3, 6, 10, és 100. Mivel a vállalatok azonosak, így csak a négy különböző taglétszámú koalíció közül mindig egyet tüntetünk fel, hiszen az értéke csak a létszámtól függ és nem attól, hogy kik alkotják.

		$r = 1$	$r = 3$	$r = 6$	$r = 10$	$r = 100$
$s = 1$	$v_\beta(S) =$	22, 32*	0	0	0	0
	$v_\gamma(S) =$	92, 56	71, 97	52, 07	37, 67	5, 12
$s = 2$	$v_\beta(S) =$	75*	5*	0	0	0
	$v_\gamma(S) =$	186, 98	149, 7	111, 38	82, 21	11, 69
$s = 3$	$v_\beta(S) =$	183, 75*	66, 96*	7, 5*	0	0
	$v_\gamma(S) =$	287, 7	248, 81	201, 34	158, 9	26, 89
$s = 4$	$v_\beta(S) =$	400*	400*	400*	400*	400*
	$v_\gamma(S) =$	400	400	400	400	400

A példában az előbb említettek mellet az is látható, hogy a helyettesíthetőségi paraméter növekedésével mind pesszimista, mind racionális várakozások mellet csökken a vállalatok profitja, kivéve a nagykoalíciót. Ahogyan korábban is a *-gal jelölt koalíciók esetében nem a (4.3) képletet használtuk. Másrészt pesszimista várakozások esetén a (4.3) és (4.4) függvények használatát befolyásolja az r helyettesíthetőségi paraméter, mivel nV és $(n + r(n - s))\bar{c}_S$ viszonya határozza meg a választást. Az utóbbi értéke növekvő r -ben, így kellően magas helyettesíthetőség esetén a nagykoalíció kívül, mindig a (4.3) szerinti varianciajáték jön létre, ahol a koalíciók értéke nulla azonos határköltség mellett. A nagykoalíció esetén $s = 0$, vagyis a fenti összefüggés $nV \geq n\bar{c}_S$ vagy $nV = n\bar{c}_S$ vagy $nV = n\bar{c}_S$ alakra egyszerűsödik, ami független r -től. Ha a β karakterisztikájú függvény esetén a vállalatok különböző határköltség mellett dolgoznak, akkor meglepő eredményt kapunk.

5.5. *példa.* Az előző piacon a vállalatok határköltsége legyen $c_1 = 9$, $c_2 = 10$, $c_3 = 11$, $c_4 = 16$, ahogyan a 4.8. példában is szerepelt, és nézzük meg a profit alakulását a helyettesíthetőségi paraméter függvényében. Ahogy a már láttuk r paraméter nö-

	$r = 1$	$r = 3$	$r = 6$	$r = 10$	$r = 100$	$r = 1000$
$v_\beta(\overline{1}) =$	29,01*	0,04*	0	0	0	0
$v_\beta(\overline{2}) =$	22,32*	0	0	0	0	0
$v_\beta(\overline{3}) =$	16,51*	0	0	0	0	0
$v_\beta(\overline{4}) =$	0,57*	0	0	0	0	0
$v_\beta(\overline{12}) =$	82,94*	8,31*	0,88	1,38	12,63	125,13
$v_\beta(\overline{13}) =$	76*	7*	3,5	5,5	50,5	500,5
$v_\beta(\overline{14}) =$	54,44*	24,5	42,88	67,38	618,63	6131,13
$v_\beta(\overline{23}) =$	67,94*	3,31*	0,88	1,38	12,63	125,13
$v_\beta(\overline{24}) =$	45,75*	18	31,5	49,5	454,5	4504,5
$v_\beta(\overline{34}) =$	37,94*	12,5	21,88	34,38	315,63	3128,13
$v_\beta(\overline{123}) =$	184,75*	68,96*	11*	5,5	50,5	500,5
$v_\beta(\overline{124}) =$	156,94*	68,03*	50,38*	78,83	723,83	7173,83
$v_\beta(\overline{134}) =$	148*	60,71*	45,5*	71,5	656,5	6506,5
$v_\beta(\overline{234}) =$	137,94*	51,03*	36,17	56,83	521,83	5171,83
$v_\beta(\overline{1234}) =$	356,75*	371,25*	393	422	1074,4	7599,50

vekedésével egyre több koalíció esetén kell a (4.3) variancia játékot használnuk. Amíg a (4.4) függvényt használjuk, természetesen csökken a koalíciók profitja a nagykoalíción kívül, a helyettesíthetőség növekedésével. Ez várható eredmény, hiszen, ha a termékeket egyre jobban lehet helyettesíteni a kartellen kívüli vállalatok kisebb árai révén elcsábítják a vevőket. A nagykoalíció és a (4.3) variancia játék által adott koalíciók esetében azonban már profitnövekedés tapasztalható, ugyanazon folyamat mellett. Ezek szerint az előző esettel ellentétben itt növelhető a koalíciók értéke magasabb helyettesíthetőség mellett, ami elsőre talán szokatlannak tűnhet mivel csak a vállalatok határkölsége volt különböző azonos modell mellett. A magyarázat ebben az esetben a következő: A termékek alacsony helyettesíthetősége mellett működik egy magas határkölségű és egy alacsonyabb határkölségű vállalat. Ha kartellt alakítanak, még mindig nem érvényesíthetik annak előnyeit, mivel csak kis mértékben befolyásolhatják egymás piacát. Ha a termékek jól helyettesíthetők, akkor olyan árat alakíthatnak ki, hogy a hatékonyabb vállalat nagyobb mértékben vonja el a másik vállalat piacát, ezáltal nagyobb profitot szerezve. A kevésbé hatékony vállalatnak így csökken a profitja, viszont a hatékony vállalat profitnövekménye kompenzálja ezt, vagyis összesen magasabb nyereségre tehetnek szert.

6. fejezet

Partíciós játékok

A β -és γ -karakterisztikájú függvények mellett láthattuk, hogy egy adott koalíció mekkora profitra tehet szert. A kooperatív elemzés azt mutatta meg, hogy egy adott koalíció értéke hogyan változik, ha néhány játékos kilép belőle, vagy ha csatlakozik hozzá. Míg a pesszimista várakozások mellett azt feltételeztük, hogy a koalíción kívüli vállalatok is létrehoznak egy koalíciót, így közösen lépnek fel a kartell ellen, addig a parciális megállapodási egyensúly esetében a külső vállalatok singleton koalíciókat hoztak létre. A pesszimista várakozások intuíciója indokolja ezt a feltételezést, azonban parciális megállapodási egyensúly mellett elképzelhető lenne, hogy a koalíción kívüli vállalatok különböző struktúrákat hoznak létre, vagyis lehet, hogy egy részük szintén koalíciót alakít. Az adott koalícióra nézve tehát egy externáliaként hat, hogy a maradék vállalat milyen struktúrákat vagy partíciókat hoz létre. Szintén várható lenne, hogy az ilyen esetekben, különböző költségek mellett valamely vállalatoknak nem érné meg belépni a koalícióba. Ezekre a kérdésekre keressük a válaszokat ebben a fejezetben, a partíciós TU-játékokat bevezetve.

A partíciós TU-játékokat Kóczy Á. László (2007), valamint Huang és Sjöström (2006) alapján mutathatjuk be. A partíciós TU-játékoknál legyen N a játékosok halmaza és legyenek a koalíciók az N részhalmazai. Ekkor $\Pi(S)$ az S koalíció partícióinak halmaza, amelynek egy elemét jelölje $\mathcal{P}_S$. A $\mathcal{P}_S$ partíció szétbontja S -t a játékosok diszjunkt halmazaira. A partíciós függvény melletti TU-játékot jelölje (N, P) , ahol $P : \Pi \times 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ partíciós függvény, amely megadja a koalíció értékét a maradék játékos adott partíciója esetén. Jelölje $\mathcal{P}_N$ az összes játékos egy tetszőleges partícióját. Ekkor $P(S|\mathcal{P}_N)$ az S koalíció értéke, ha a játékosok $\mathcal{P}_N$ szerint partícionálják magukat. Látható, hogy ilyenkor az S koalíció értéke függ attól, hogy a maradék $N \setminus S$ játékos milyen koalíciót vagy partíciókat hoz létre. Mivel a maradék $N \setminus S$ játékos egy partíciója $\mathcal{P}_{N \setminus S}$, így az előzőt jelölhetjük a $P(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$ alakban. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy hatékony kifizetésvektor, ha minden $S \subseteq N$

koalícióra $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, vagyis a koalíció tagjai csak a koalíció értékét oszthatják szét. Az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés elfogadható a $\mathcal{P}_N$ partícióban, ha minden $S \in \mathcal{P}_N$ koalícióra $x(S) = P(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$. Az $(x, \mathcal{P}_N)$ imputáció-partíció párt a játék kimenetének nevezzük.

Most definiálhatjuk a parciális TU-játékok rekurzív magját Huang és Sjöström (2006) szerint.

6.1. definíció. Legyen $S \subseteq N$ egy koalíció és a maradék játékosoknak $\mathcal{P}_{N \setminus S}$ partíciója. Ekkor a rekurzív mag az S koalícióra, $RC(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$ a következő. Az egy elemű koalíciókra $RC(\{i|(\{i\}, \mathcal{P}_{N \setminus \{i\}}))$ legyen az elfogadható kifizetések halmaza a $(\{i\}, \mathcal{P}_{N \setminus \{i\}})$ partíción. Tegyük fel, hogy a rekurzív mag definiált minden $s-1$ elemű koalícióra és a maradék játékosok minden partíciójára. Az S , s elemű koalíció és $\mathcal{P}_{N \setminus S}$ esetén minden $T \subseteq S$ részkoalícióra legyen

$$V(T|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S})) = \begin{cases} P(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S})), & \text{ha } T = S \\ \min\{x(T) : x \in RC(S \setminus T|(S \setminus T, T, \mathcal{P}_{N \setminus S}))\}, & \text{ha } T \neq S \end{cases}$$

Ekkor az $x \in RC(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$, azaz egy x kifizetés rekurzív magbeli az S koalícióra nézve, ha S koalíciónak létezik olyan $\mathcal{P}_S$ partíciója, hogy x elfogadható kifizetés a $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_{N \setminus S})$ partíción és $x(T) \geq V(T|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$ minden $T \subseteq S$ koalícióra, ami teljesíti a definíciót.

A rekurzív mag, vagyis az r-mag intuitívan úgy mutatható be, hogy egy adott S koalícióra az x kifizetés akkor r-magbeli, ha az S koalíció tagjai partícionálhatják magukat úgy, hogy az x kifizetés elfogadható minden létrejövő koalíció részéről és minden lehetséges koalíció legalább annyit kap, mint az adott koalíció minimális értéke amit szerezhetne, a többi játékostól függően, ha szétválnak, úgy, hogy a deviáns játékosoknak még mindig van r-magbeli kifizetés a saját koalíciójukon. Meg kell jegyezni, hogy ellentétben a hagyományos TU-játékok magjával, itt nem csak a nagykoalíció esetén értelmezhetünk magbeli kifizetést, hanem egy koalícióra és maradék játékosok partícióira. Másrészt az r-mag nem olyan kifizetéseket tartalmaz, amelyek mellett nem esik szét a koalíció, hanem olyanokat, amelyek mellett a koalíció tagjai úgy partícionálják magukat, hogy a kifizetés elfogadható legyen.

Látható, hogy ez a tulajdonság különösen kedvezővé teszi a partíciós függvényeket a kartellek leírásához, mivel nem csak a nagykoalíció stabilitását elemezhetjük, hanem találhatunk egyensúlyi partíciókat is, valamint azokon értelmezett kifizetéseket, vagyis egyensúlyi kimeneteket. Ez a sokrétűség okozza azonban a modell nehezebb kezelhetőségét is, ahogyan azt majd a példákban is láthatjuk. A vállalatok számának növekedésével ugyanis egyre többféle partíció alakulhat ki, amelyekben a

koalíciók által meghatározott árra és így a vállalatok profitjára egyre nehezebb zárt formát adni.

Tekintsünk egy hat szereplős piacot, ahol az $\{12\}$ koalíció az eddigi $(\{12\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ partícióon kívül létrejöhet például a $(\{12\}, \{34\}, \{5\}, \{6\})$, $(\{12\}, \{34\}, \{56\})$, $(\{12\}, \{345\}, \{6\})$ partíció mellett is, ahol a Nash-egyensúly szerint meghatározott árak kiszámítása különböző, attól függően, hogy az $\{12\}$ koalícióon kívül a többi vállalat milyen struktúrájú partíciót alkot. Másik probléma, hogy a partíciós függvények melletti játékokra még csak kevés és nehezen kezelhető kifizetésfajta létezik, így inkább csak egy adott koalíció értékének szétosztásáról dönthetjük el, hogy a létrejött kimenet r-magbéli-e és ezáltal fentartható-e.

Ahogy azt említettük a rekurzív mag értelmezhető a nagykoalíció esetén is. Ekkor jelöljük minden $T \subseteq N$ részkoalíció értékét $V(T)$ -vel $V(T|N)$ helyett és az r-magot $RC(N)$ -nel $RC(N|N)$ helyett. Az x kifizetés r-magbéli a nagykoalícióra nézve, vagyis $x \in RC(N)$, ha van N -nek olyan $\mathcal{P}_N$ partíciója, hogy x elfogadható a $\mathcal{P}_N$ partícióon és $x(T) \geq V(T)$ minden $T \subseteq N$ részkoalíció esetén.

6.2. példa. Legyen $N = \{1, 2\}$. és $P(\{i\} | (\{1\}, \{2\})) = 3$, valamint $P(N|N) = 2$. Ekkor az egyetlen r-magbéli kifizetés a nagykoalícióra nézve a $x = (3, 3)$, ami az $(\{1\}, \{2\})$ partíciót hozza létre. A nagykoalíciót szétosztó bármely kifizetés nem lesz r-magbéli. Legyen $x = (1, 1)$ kifizetés, amely csak a nagykoalícióra lenne elfogadható. Ekkor viszont $x(\{i\}) < V(\{i\} | (\{1\}, \{2\}))$, mert $x(\{i\}) = 1$ és $V(\{i\} | (\{1\}, \{2\})) = 3$, vagyis ez a kifizetés nem r-magbéli.

A következő állításokhoz jelölje $\mathcal{P}(S | (S, \mathcal{P}_{N \setminus S}))$ az r-magbéli partíciók halmazát S koalícióra nézve, a koalícióon kívüliek $\mathcal{P}_{N \setminus S}$ partíciója mellett.

6.3. definíció (Szuperadditivitás). *Egy (N, P) játék szigorúan szuperadditív, ha minden $S, T \subseteq N$ diszjunkt koalícióra és a maradék játékosok minden $\mathcal{P}_{N \setminus (S \cup T)}$ partíciójára*

$$P(S | (S, T, \mathcal{P}_{N \setminus (S \cup T)})) + P(T | (S, T, \mathcal{P}_{N \setminus (S \cup T)})) < P(S \cup T | (S \cup T, \mathcal{P}_{N \setminus (S \cup T)})).$$

6.4. definíció (r-kiegyensúlyozottság). *Egy (N, P) játék teljesen r-kiegyensúlyozott akkor és csak akkor, ha minden S koalícióra és a maradék játékos $\mathcal{P}_{N \setminus S}$ partíciójára $\mathcal{P}(S | (S, \mathcal{P}_{N \setminus S})) = (S)$.*

Az r-kiegyensúlyozottság azt jelent, hogy adott koalíció tagjai egy r-magbéli kifizetés esetén mindig együtt maradnak, azaz ilyenkor a partíciókat tekintve egyedi megoldást találunk.

6.5. tétel. *Ha egy (N, P) játék szigorúan szuperadditív és az r-mag nemüres, akkor az (N, P) játék teljesen r-kiegyensúlyozott.*

6.1. Bertrand-oligopóliumok partíciós TU-játékok mellett

Mivel a partíciós függvények használatával a célunk, hogy azt is figyelembe vehessük a Bertrand-oligopol szituációban, hogy a koalíció kívüli vállalatok milyen profitot szerezhetnek és milyen partíciókba strukturálódhatnak, így használjuk a koalíciók értékének megadásához a Chander és Tulkens (1994) által bevezetett parciális megállapodási egyensúlyt, azzal a különbséggel, hogy megengedjük a kiválasztott koalíció kívüli vállalatoknak, hogy maguk is létrehozzanak koalíciókat. Ez azt jelenti, hogy adott koalíció tagjai az egyénileg legjobb választ adják a külső vállalatok döntésére, azok minden partíciója mellett.

A Bertrand-oligopol szituációhoz társított (N, P) partíciós Bertrand-oligopol TU-játékot Shubik-kereslet mellett megadhatjuk minden $S \in N$ koalícióhoz oly módon, hogy:

- $\mathcal{P}_N = \{S_1, \dots, S_k\}$ a koalíciók halmaza,
- minden $S \in \mathcal{P}_N$ koalícióra a stratégia halmaz $X_S = \prod_{i \in S} X_i$,
- minden $S \in \mathcal{P}_N$ koalícióra a koalíció profitfüggvénye $\pi_S : \prod_{S \in \mathcal{P}_N} X_S \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\pi_S(p_S, p_{N \setminus S}) = \sum_{i \in S} \pi_i(p_S, p_{N \setminus S})$,
- $(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \in X_S \times X_{N \setminus S}$ stratégia profilra igaz, hogy

$$\pi_S(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \geq \pi_S(p_S, \bar{p}_{N \setminus S}), \quad S \in \mathcal{P}_N, \quad p_S \in X_S, \quad \bar{p}_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S},$$

és

$$\pi_T(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S}) \geq \pi_T(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus (S \cup T)}, p_T), \quad T \in \mathcal{P}_N \setminus S, \quad p_T \in X_T,$$

amelyet egyensúlynak nevezünk,

- $P(S | (S, \mathcal{P}_{N \setminus S})) = \pi_S(p_S^*, \bar{p}_{N \setminus S})$.

Nagyon fontos megemlíteni, hogy a vállalatok úgy maximalizálják a profitjukat, hogy pontosan tudják, hogy a piacon milyen $\mathcal{P}_N$ partíció jön létre. Ezt azért fontos hangsúlyozni, mert ekkor nem kell törődni azokkal az esetekkel, hogy a vállalatok a maximum programjukban figyelembe veszik, hogy az általuk meghatározott ár miatt a többi vállalat milyen partíciót hoz létre szimultán módon. Ekkor ugyanis egy nemkooperatív játékot kapnánk.

6.2. Azonos határkölségek

6.6. *példa.* A Bertrand-oligopol piacon működjön négy vállalat, mivel kevesebb vállalatnál még kevésbé lenne érzékelhető a koalíción kívüli vállalatok partíciói esetén keletkező externália, több vállalat esetén viszont túl sokféle partíció alakulhatna ki, ami nehezítené a feladat átláthatóságát. Legyen V interceptor 30 és a termékek helyettesíthetőségét jellemző r paraméter 3, ahogyan az eddigi példákban is. A vállalatok működjenek azonos 9 határkölség mellett. Ekkor a szimmetrikus vállalatok miatt elegendő a $\mathcal{P}_N$ partíciókból, minden különböző struktúrájú esetből egyet meghatározni, mivel nincs jelentősége, hogy melyik vállalatok alkotják a koalíciót.

$$\begin{aligned} P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 79,35 & P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{34\}) &= 86,23 \\ P(\{1\}|\{1\}, \{234\}) &= 106,82 \\ P(\{12\}|\{12\}, \{3\}, \{4\}) &= 165,04 & P(\{12\}|\{12\}, \{34\}) &= 180 \\ P(\{123\}|\{123\}, \{4\}) &= 274,31 \\ P(\{1234\}|\{1234\}) &= 441 \end{aligned}$$

Ahogy említettük a többi koalíciónak ugyan akkora lenne az értéke, mint a fentieknek, a maradék vállalat megfelelő partíciója mellett. Mivel ez a játék a γ -karakterisztikájú függvénnyel kapott játék kiterjesztése partíciós függvények mellett, a $P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})$, $P(\{12\}|\{12\}, \{3\}, \{4\})$, $P(\{123\}|\{123\}, \{4\})$ és $P(\{1234\}|\{1234\})$ értékeit megkaphatjuk annak segítségével, a maradék esetében pedig az elsőrendű feltételekben figyelembe kell vennünk a külső vállalatok koalícióit. A korábbi példákkal ellentétben most látható, hogy mekkora egy singleton koalíció értéke attól függően, hogy a többi vállalat milyen koalíciót hoz létre, valamint a kételemű koalíciók értéke aszerint, hogy a maradék két játékos külön-külön vagy pedig közösen lép fel ellene. A kapott értékekből a következő fontos észrevételt tehetjük:

- $P(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S})) > P(S|(S, \mathcal{P}'_{N \setminus S}))$, ha $\mathcal{P}_{N \setminus S} <^F \mathcal{P}'_{N \setminus S}$, vagyis a koalíciók értéke növekszik, ha a maradék játékosok partíciója durvább, azaz, ha a maradék vállalatok is valamilyen koalíciót hoznak létre.
- Az adott négy szereplős Bertrand-oligopol játék szimmetrikus vállalatok esetén szigorúan szuperadditív.
- A rekurzív-mag nemüres, így az előző megállapításból és a 6.5. tételből következik, hogy a játék r -kiegyensúlyozott, vagyis a vállalatoknak érdemes létrehozni a nagykoalíciót.

Ezen megállapítások esetében nagyon fontos kihangsúlyozni, hogy sejtésünk szerint minden négyszereplős Bertrand-oligopol szituációban, szimmetrikus vállalatok mellett igazak. Az első megállapítás igaz volta (5.2)-t behelyettesítve (5.3)-ba belátható, ha a piacon csak egy kartell létezik. Azonban nehéz az állítást belátni, ha a külső vállalatok is kartellt alakítanak, különösen, ha sok vállalat működik a piacon, mert ahogyan már említettük gyorsan növekszik a különböző struktúrájú partíciók száma, amelyeket külön kellene elemezni. Sejtésünkben megerősíthet a következő példa:

6.7. *példa.* Legyen $V = 30$, $r = 10$, $c_i = 9$, $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 41, 53 & P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{34\}) &= 48, 8 \\ P(\{1\}|\{1\}, \{234\}) &= 78, 42 \\ P(\{12\}|\{12\}, \{3\}, \{4\}) &= 90, 64 & P(\{12\}|\{12\}, \{34\}) &= 108 \\ P(\{123\}|\{123\}, \{4\}) &= 175, 2 \\ P(\{1234\}|\{1234\}) &= 441 \end{aligned}$$

A szimmetrikus vállalatok miatt itt is elegendő a jelzett koalíciók értékét megadni. Az első megállapításunk talán a legérdekesebb, azt várnánk, hogy, ha néhány vállalat kartellt alakít, akkor a kívül maradók profitja csökkenni fog, itt viszont nem ez történik. A megoldás itt is a Shubik-kereslet tulajdonságaiban rejlik. Azáltal, hogy a kartell tagjai közösen megemelik áraikat a piacon az átlagár is megemelkedik, ami mérsékli az áremelkedésből következő kereslet csökkenést, így növelve a profitot. Az átlagár megemelkedését azonban a külső vállalatok is kihasználhatják, hogy árat emelhessenek, hiszen ezt láthattuk a γ -karakterisztikájú függvények esetén. Ekkor azonban az ő profitjuk is megnő, mert az áremelésből származó keresletcsökkenést kompenzálja, hogy az átlagárnál alacsonyabb árat határoznak meg.

A játék szuperadditivitását Sjöström(2006) is említette, amit a példán könnyen ellenőrizhetünk is. Vegyük észre, hogy a szuperadditivitás miatt, ha létrejön egy kételemű koalíció, akkor a maradék két játékosnak szintén érdekében áll egy saját koalíciót létrehozni, ami az előzőek szerint kedvező az eredeti koalíciónak. A 6.5. tétel szerint, ha a játék magja nemüres, akkor az teljesen r -kiegyensúlyozott, vagyis az r -mag csak olyan kifizetéseket tartalmazhat, amelyek esetén az adott koalíció tagjai együtt maradnak, ami igaz a nagykoalícióra is. Ha ez a kifizetés mondjuk a nagykoalíció egyenlő szétosztása, akkor a 6.6. példában $x_i = (110, 25)$ minden $i = (1, 2, 3, 4)$ esetén. Természetesen ez a kifizetés a játékosoknak akkor elfogadható, ha együtt maradnak, vagyis, ha $\mathcal{P}_N = (N)$ és ellenőrizhető, hogy ilyenkor minden $T \subseteq N$ koalícióra igaz, hogy $x(T) \geq V(T)$. Tekintsük például a $T = \{234\}$ koalíciót, amikor $V(\{234\}) = \min\{x(234) : x \in RC(\{1\}|\{1\}, \{234\})\} = P(\{234\}|\{234\}, \{1\}) = 274, 31$, amíg $x(\{234\}) = 330, 75$. Hasonlóan belátható minden egyéb $T \subseteq N$ koa-

lícióra, vagyis találtunk egy $x \in RC(N)$ r -magbéli kifizetést a nagykoalícióra, azaz $RC(N) \neq \emptyset$, így a 6.5. tétel miatt a nagykoalíció nem bomlik szét.

6.3. Különböző határkölségek

6.8. *példa.* A 6.6. példa piacán, vagyis $V = 30$ és $r = 3$ paraméterek mellett legyen a négy vállalat határkölsége $c_1 = 9$, $c_2 = 10$, $c_3 = 11$ és $c_4 = 12$. Ekkor a következő partíció TU-játékot kapjuk:

$$\begin{aligned}
P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 95, 33 & P(\{1\}|\{1\}, \{23\}, \{4\}) &= 102, 31 \\
P(\{1\}|\{1\}, \{2\}, \{34\}) &= 101, 45 & P(\{1\}|\{1\}, \{24\}, \{3\}) &= 101, 88 \\
P(\{1\}|\{1\}, \{234\}) &= 121, 20 \\
P(\{2\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 76, 89 & P(\{2\}|\{13\}, \{2\}, \{4\}) &= 83, 56 \\
P(\{2\}|\{1\}, \{2\}, \{34\}) &= 82, 41 & P(\{1\}|\{14\}, \{2\}, \{3\}) &= 83, 17 \\
P(\{2\}|\{2\}, \{134\}) &= 101, 36 \\
P(\{3\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 60, 44 & P(\{3\}|\{3\}, \{12\}, \{4\}) &= 66, 71 \\
P(\{3\}|\{14\}, \{2\}, \{3\}) &= 66, 02 & P(\{3\}|\{1\}, \{24\}, \{3\}) &= 65, 68 \\
P(\{3\}|\{3\}, \{214\}) &= 83, 29 \\
P(\{4\}|\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}) &= 45, 96 & P(\{4\}|\{12\}, \{3\}, \{4\}) &= 51, 45 \\
P(\{4\}|\{13\}, \{2\}, \{4\}) &= 51, 15 & P(\{4\}|\{1\}, \{4\}, \{23\}) &= 50, 85 \\
P(\{4\}|\{213\}, \{4\}) &= 66, 99 \\
\\
P(\{12\}|\{12\}, \{3\}, \{4\}) &= 179, 09 & P(\{12\}|\{12\}, \{34\}) &= 191, 88 \\
P(\{13\}|\{13\}, \{2\}, \{4\}) &= 161, 93 & P(\{13\}|\{13\}, \{24\}) &= 174, 82 \\
P(\{14\}|\{14\}, \{2\}, \{3\}) &= 146, 81 & P(\{14\}|\{14\}, \{23\}) &= 159, 70 \\
P(\{23\}|\{23\}, \{1\}, \{4\}) &= 142, 81 & P(\{23\}|\{23\}, \{14\}) &= 155, 70 \\
P(\{24\}|\{24\}, \{1\}, \{3\}) &= 127, 71 & P(\{24\}|\{24\}, \{13\}) &= 140, 53 \\
P(\{34\}|\{34\}, \{1\}, \{2\}) &= 110, 64 & P(\{34\}|\{34\}, \{12\}) &= 123, 31 \\
P(\{123\}|\{123\}, \{4\}) &= 267, 83 \\
P(\{124\}|\{124\}, \{3\}) &= 250, 77 \\
P(\{134\}|\{134\}, \{2\}) &= 231, 81 \\
P(\{234\}|\{234\}, \{1\}) &= 210, 94 \\
P(\{1234\}) &= 385, 25
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az előző két példa esetében megfogalmazott állításaink itt is igaznak látszanak, azaz: $P(S|(S, \mathcal{P}_{N \setminus S})) > P(S|(S, \mathcal{P}'_{N \setminus S}))$, ha $\mathcal{P}_{N \setminus S} <^F \mathcal{P}'_{N \setminus S}$, vagyis a koalíciók értéke növekszik, ha a maradék játékosok partíciója durvább, azaz, ha a maradék vállalatok is valamilyen koalíciót hoznak létre. A négyszereplős játék szigorúan szuperadditív és a rekurzív-mag nemüres, amiből következik, hogy a játék teljesen r -kiegyensúlyozott.

A játék szuperadditivitását itt is könnyen ellenőrizhetjük. Nézzük meg az r -magot a nagykoalíció esetén. Ha az r -mag nemüres, akkor a 6.5. tételből következik, hogy r -magbeli kifizetés esetén a nagykoalíció nem esik szét. A nagykoalícióra vett r -mag nemürességének bizonyításához válasszunk olyan kifizetést, amely szétosztja a nagykoalíció értékét, így az csak akkor elfogadható, ha a tagok együtt maradnak. Legyen ez a kifizetés az $x_1 = 125$, $x_2 = 105$, $x_3 = 85$, és $x_4 = 80, 25$. Most már csak azt kell belátni, hogy minden $T \subseteq N$ részkoalícióra $x(T) \geq V(T)$. Ha $T = \{123\}$, akkor $x(T) = 315$ és $V(T) = P(\{123\} | (\{123\}, \{4\})) = 267, 83$. Ha $T = \{12\}$, akkor $x(T) = 230$ és a maradék két játékos $(\{3\}, \{4\})$ vagy $(\{34\})$ partíciót hozza létre. A rekurzív eljárást a singleton koalíciókig folytatva megkapjuk, hogy bármely $x \in RC(\{34\} | (\{34\}, \{12\}))$ kifizetés csak akkor r -magbeli a $\{34\}$ koalícióra nézve, ha a két vállalat együtt marad, azaz a $(\{12\}, \{34\})$ partíció jön létre. Ekkor $V(T) = P(\{12\} | (\{12\}, \{34\})) = 191, 88$, így $x(T) \geq V(T)$. Ha $T = \{1\}$, akkor $x(T) = 125$ és a rekurzív eljárásból látható, hogy bármely $x \in RC(\{234\} | (\{234\}, \{1\}))$ kifizetés esetén a maradék három vállalat együtt marad. Ekkor a $(\{1\}, \{234\})$ partíció jön létre, így $V(T) = P(\{1\} | (\{1\}, \{234\})) = 121, 20$, vagyis $x(T) \geq V(T)$. Hasonlóan ellenőrizhető minden más lehetséges $T \subseteq N$ részkoalícióra. Ezek szerint található $x \in RC(N)$ kifizetés, vagyis $RC(N) \neq \emptyset$, így a 6.5. tétel szerint r -magbeli kifizetés esetén $\mathcal{P}_N = (N)$, azaz a nagykoalíció nem esik szét.

Nagyon fontos megemlíteni, hogy precíz levezetésnél nem a nagykoalíciótól, hanem a singleton koalícióktól kellene indítani és ellenőrizni, hogy adott koalícióra a rekurzív mag nemüres.

6.9. *példa.* Vegyük az előző esetet, úgy, hogy az r helyettesíthetőségi paramétert megemeljük 9-re.

$$\begin{array}{ll}
P(\{1\} | (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})) = & 71, 43 \quad P(\{1\} | (\{1\}, \{23\}, \{4\})) = & 80, 16 \\
P(\{1\} | (\{1\}, \{2\}, \{34\})) = & 77, 71 \quad P(\{1\} | (\{1\}, \{24\}, \{3\})) = & 78, 93 \\
P(\{1\} | (\{1\}, \{234\})) = & 107, 79 \\
P(\{2\} | (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})) = & 46, 33 \quad P(\{2\} | (\{13\}, \{2\}, \{4\})) = & 54, 43 \\
P(\{2\} | (\{1\}, \{2\}, \{34\})) = & 51, 42 \quad P(\{2\} | (\{14\}, \{2\}, \{3\})) = & 53, 42 \\
P(\{2\} | (\{2\}, \{134\})) = & 101, 36 \\
P(\{3\} | (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})) = & 26, 65 \quad P(\{3\} | (\{3\}, \{12\}, \{4\})) = & 33, 66 \\
P(\{3\} | (\{14\}, \{2\}, \{3\})) = & 32, 08 \quad P(\{3\} | (\{1\}, \{24\}, \{3\})) = & 31, 31 \\
P(\{3\} | (\{3\}, \{124\})) = & 56, 30 \\
P(\{4\} | (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})) = & 12, 37 \quad P(\{4\} | (\{12\}, \{3\}, \{4\})) = & 17, 28 \\
P(\{4\} | (\{13\}, \{2\}, \{4\})) = & 16, 72 \quad P(\{4\} | (\{1\}, \{4\}, \{23\})) = & 16, 16 \\
P(\{4\} | (\{123\}, \{4\})) = & 36, 77
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
P(\{12\} | (\{12\}, \{3\}, \{4\})) &= 128,39 & P(\{12\} | (\{12\}, \{34\})) &= 142,78 \\
P(\{13\} | (\{13\}, \{2\}, \{4\})) &= 106,61 & P(\{13\} | (\{13\}, \{24\})) &= 124,94 \\
P(\{14\} | (\{14\}, \{2\}, \{3\})) &= 90,53 & P(\{14\} | (\{14\}, \{23\})) &= 107,09 \\
P(\{23\} | (\{23\}, \{1\}, \{4\})) &= 79,53 & P(\{23\} | (\{23\}, \{14\})) &= 81,93 \\
P(\{24\} | (\{24\}, \{1\}, \{3\})) &= 63,65 & P(\{24\} | (\{24\}, \{13\})) &= 71,84 \\
P(\{34\} | (\{34\}, \{1\}, \{2\})) &= 42,47 & P(\{34\} | (\{34\}, \{12\})) &= 56,26 \\
P(\{123\} | (\{123\}, \{4\})) &= 200,93 \\
P(\{124\} | (\{124\}, \{3\})) &= 178,05 \\
P(\{134\} | (\{134\}, \{2\})) &= 117,90 \\
P(\{234\} | (\{234\}, \{1\})) &= 210,94 \\
P(\{1234\} | ()) &= 394,00
\end{aligned}$$

Az előző példa megállapításai itt is beláthatóak, ami megerősíti azt a sejtésünket, hogy minden négyszereplős piacon igazak. A példa kapcsán felhívjuk a figyelmet, hogy a nagykoalíció értéke növekedett a helyettesíthetőség emelkedésével. Erre az 5.1. példánál adtunk magyarázatot.

Elmondható tehát, hogy előzetes várakozásainkkal szemben mind a négy példában azt tapasztaltuk, hogy található olyan kifizetés, amely mellett a játék r-kiegyensúlyozott és így a nagykoalícióból nem érdemes kilépnie egyik vállalatnak vagy koalíciónak sem, valamint a koalíciókat nem rettentí el a kartell létrehozástól az, ha a külső vállalatok is koalíciókat hoznak létre ellenük. Természetesen ezt az állításunkat nem jelenthetjük ki biztosan minden Bertrand-oligopol szituációra.

7. fejezet

Konklúzió

A dolgozatban a Bertrand-oligopóliumok TU-játékokra való kiterjesztésének lehetőségeit vizsgáltuk különböző modellekkel. Megállapítottuk, hogy az Lardon (2011a) által létrehozott pesszimista várakozások melletti modell valamint a parciális megállapodási egyensúly mellett kapott játék magja sosem üres és az előbbi mindig tartalmazza az utóbbi magját, vagyis a vállalatok mindig érdekeltek a nagykoalíció létrehozásában. Ha várakozások pesszimisták, akkor a vállalatok érdekeltőbbek a nagykoalíció létrehozásában, mert könnyebben találhatnak magbeli kifizetést. Ha a várakozások pesszimisták, akkor a piac méretétől és a keresleti függvény paramétereitől függően a nagykoalíció értéke néhány esetben lehet kellően nagy ahhoz, hogy a Shapley-megoldás kifizetése magbeli legyen, ha a játék nemkonvex.

A partíciós TU-játékokkal elemzett példák azt sugallják, hogy a koalíciók profitjára pozitív externáliaként hat, ha a külső vállalatok durvább struktúrákat hoznak létre, vagyis egy kartell létrehozásától a vállalatok nem rettenthetőek el azáltal, hogy a maradék vállalat arra válaszcsepásként szintén kartellt hoz létre. Az elemzett példák partíciós TU-játékainak szigorú superadditivitása és a rekurzív magjuk nemüressége miatt a vállalatoknak érdemes létrehozni a nagykoalíciót, ha a profitjukat maximalizálják.

Az eredmények részben köszönhetőek a Shubik-keresleti függvénynek, mivel a kartellek áremelése miatt a piacon megemelkedik az átlagár, így az áremelés okozta keresletcsökkenés kevésbé érzékelhető. Az átlagár megemelkedését a külső vállalatok is kihasználhatják áremelésre. Bár a kapott eredményekhez nélkülözhetetlennek tűnik egy ehhez hasonló keresleti függvény használata, mégis így a valósághoz közelebbi képet kaphatunk, mivel a piacokon a differenciált termékek a jellemzőbbek.

Irodalomjegyzék

- Aumann R (1959) Acceptable points in general cooperative n -person games, Contribution to the Theory of Games IV., vol 40. Princeton University Press
- Bondareva N O (1963) Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games (in Russian), Problemy Kybernetiki, 10:119-139
- Chander P, Tulkens H (1994) The core of an economy with multilateral environment externalities. Social Science Working Paper 886
- Denecker R és Davidson C (1985) Incentives to form coalition with bertrand competition, The RAND Journal of economics, 16(4):473–486
- Gillies D B (1959) Solutions to general non-zero-sum games, Contribution to the Theory of Games IV., Princeton University Press
- Huang CY, Sjöström T (2006) Implementation of the recursive core for partition function form games. Journal of Mathematical Economics, 42:771–793
- Ichiishi T (1981) Super-Modularity: Applications to Convex Games and the Greedy Algorithm for LP, Journal of Economic Theory, 25:283-286
- Kóczy Á L (2007) A recursive core for partition function form games. Theory and Decision, 63:41–51
- Lardon A (2010) Convexity of Bertrand oligopoly TU-games with differentiated products, Halshs-00544056, version 1
- Lardon A (2011a) Five essays on cooperative oligopoly games, PhD disszertáció, Université Jean Monnet de Saint-Étienne, Saint-Étienne
- Lardon A (2011b) Convexity and the Shapley value in Bertrand oligopoly TU-games with Shubik's demand function, Halshs-00610838, version 1
- Shapley L S (1953) A value for n -person games, 307-317

- Shapley L S (1967) On Balanced Sets and Core, *Naval Research Logistics Quarterly*, 14:11-26
- Shubik M (1980) *Market Structure and Behavior*, Harvard University Press
- Wang XH, Zhao J (2007) Welfare reductions from small cost reductions in differentiated oligopoly. *International Journal of Industrial Organization*, 25:173–185