

Nemlokális kezdeti feltétellel rendelkező elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerek megoldásainak stabilitása

Szerző:

Kolumbán József

Babeş- Bolyai Tudományegyetem,

Kolozsvár, Románia

Matematika és Informatika kar,

matematika szak, alapképzés, II. év

Témavezető:

dr. András Szilárd Károly, egyetemi adjunktus

Babeş- Bolyai Tudományegyetem,

Kolozsvár, Románia

Matematika és Informatika kar,

Magyar Matematika és Informatika Intézet

Küldő intézmény: XV. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)

Lezárás Dátuma: 2012. május 31.

Kivonat

A dolgozat célja a nemlokális kezdeti feltétellel rendelkező elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerek Ulam-Hyers stabilitásának vizsgálata. Az újdonság a módszerben rejlik, mely általánosított metrikus térbeli operátorok, vektornormák, valamint ú.n. "nullához konvergáló" mátrixok használatára alapszik. A saját eredmények tartalmazzák a kompakt illetve nemkompakt esetek tárgyalását is.

Kulcsszavak: Ulam-Hyers stabilitás, differenciálegyenlet-rendszer, nemlokális kezdeti feltétel, nullához konvergáló mátrixok, fixpont tétel, vetkornorma.

1 Bevezető

Az eredeti problémát Ulam vetette fel 1940-ben (lásd [17]) a függvényegyenletek stabilitására vonatkozóan: milyen feltételek mellett létezik egy szinte lineáris leképezés közelében egy lineáris leképezés? Erre a kérdésre Hyers ([5]) adott egy részleges megoldást Banach terek feletti leképezések esetén, mellyel megnyitotta az utat ezen témakörbeli kutatások számára. 1978-ban Rassias ([14]) általánosította Hyers eredményét, melynek következtében még jobban megnőtt a matematikusok érdeklődése ilyen típusú problémák iránt. Azóta számtalan publikáció született stabilitási problémák különböző általánosításai kapcsán (többek között lásd [1], [6], [7], [10], [11], [15], [16]). Az Ulam-Hyers stabilitás egy klasszikus megfogalmazása differenciálegyenletek esetén a következő:

Legyen $(X, |\cdot|)$ egy (valós vagy komplex) Banach tér, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \times X \rightarrow X$ folytonos operátor. Az

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [a, b) \quad (1.1)$$

egyenlet Ulam-Hyers stabil, ha létezik $c_f > 0$ valós szám úgy, hogy minden $\epsilon > 0$ és minden $y \in C^1[a, b)$, melyre

$$|y'(t) - f(t, y(t))| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [a, b),$$

létezik $x \in C^1[a, b)$ megoldása (1.1)-nek, melyre

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \epsilon, \quad \forall t \in [a, b).$$

Egy fontos megemlíthető eredmény Alsina és Ger ([16]) dolgozatából származik, mely szerint az $y' = y$ differenciálegyenlet Ulam-Hyers stabil, azaz ha egy $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény esetén minden pozitív ϵ -ra $|y'(t) - y(t)| \leq \epsilon$, $\forall t \in I$, akkor létezik egy $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre $g'(t) = g(t)$, $\forall t \in I$ és $|y(t) - g(t)| \leq 3\epsilon$, $\forall t \in I$.

Ezen dolgozat célja a következő típusú nemlokális kezdeti feltétellel rendelkező elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerek stabilitásának a tanulmányozása:

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), \text{ m. m. J-n} \\ x(0) = \alpha[x] \\ y(0) = \beta[y]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Jelen esetben J részintervalluma $[0, +\infty)$ -nek, mivel a kompakt és nemkompakt esetek egyaránt tárgyalva lesznek, $f_1, f_2 : J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, $\alpha, \beta : X_J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionálok, melyekre $1 - \alpha[1] \neq 0$ és $1 - \beta[1] \neq 0$, ahol X_J az a tér, ahol a x -et illetve y -t keressük. Három esetben fogunk Ulam-Hyers stabilitást megfogalmazni, X_J függvényében, ennek érdekében általánosított metrikus térbeli operátorokat, vektornormákat illetve ú.n. "nullához konvergáló" mátrixokat fogunk használni, a Perov fixpont tételre alapozva a bizonyításokat.

Az ilyen típusú egyenletek illetve rendszerek esetén megfogalmazott kompakt esetbeli létezési tételek megtalálhatóak [4], [8], [9] illetve [13]-ban.

2 Általános értelmezések és használt eredmények

Értelmezés 1. Legyen X egy nemüres halmaz. Egy X -en értelmezett vektornorma alatt egy olyan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvényt értünk, melyre:

- (i) $d(u, v) \geq 0$, $\forall u, v \in X$; ha $d(u, v) = 0$ akkor $u = v$;
- (ii) $d(u, v) = d(v, u)$, $\forall u, v \in X$;
- (iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $\forall u, v, w \in X$.

Ezen esetben $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x \leq y$ alatt $x_i \leq y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ -t értünk. Az (X, d) párost általánosított metrikus térnek nevezik. Ilyen térben a konvergencia illetve teljesség fogalmai hasonlóak a klasszikus metrikus térbeli esethez.

Értelmezés 2. Egy M pozitív elemű négyzetes mátrix nullához konvergáló, ha $M^k \rightarrow 0$, amikor $k \rightarrow +\infty$.

Értelmezés 3. Legyen (X, d) egy általánosított metrikus tér, $T : X \rightarrow X$ kontrakció, ha létezik egy nullához konvergáló M mátrix, melyre

$$d(T(u), T(v)) \leq Md(u, v), \quad \forall u, v \in X.$$

Ebben az esetben M -et T Lipschitz mátrixának nevezik.

Tétel 1. Legyen M egy pozitív elemű négyzetes mátrix. Egyenértékűek:

- (a) M nullához konvergáló;
- (b) $I - M$ nem szinguláris és $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$ (ahol I az M -mel megegyező méretű egységmátrix);
- (c) M sajátértékei az egységsugarú kör belsejében helyezkednek el;
- (d) $I - M$ nem szinguláris és $(I - M)^{-1}$ pozitív elemű.

Bizonyítás: Lásd [12] 151-154, [13]. □

Tétel 2 (Perov). Legyen (X, d) egy teljes általánosított metrikus tér, $T : X \rightarrow X$ egy kontrakció, melynek Lipschitz mátrixa M . Ekkor T -nek létezik egyértelmű u^* fixpontja X -ben, és minden $u_0 \in X$ esetén

$$d(T^k(u_0), u^*) \leq M^k(I - M)^{-1}d(u_0, T(u_0)), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás: Lásd [12]. □

Tétel 3 (Nica, 8). Az (1.2) rendszerben legyen $J=[0,1]$, $X_J = W^{1,1}(0,1)$. Jelöljük

$$A_1 = 1 + \frac{\|\alpha\|}{|1 - \alpha[1]|}, \quad A_2 = 1 + \frac{\|\beta\|}{|1 - \beta[1]|},$$

ahol $\|\alpha\|$ az α normája $W^{1,1}(0,1)$ -en, hasonlóan β esetén.

Ha létezik $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, melyre

$$\begin{cases} |f_1(t, x(t), y(t)) - f_1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq (a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty) \\ |f_2(t, x(t), y(t)) - f_2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq (a_2 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_2 \|y - \bar{y}\|_\infty), \end{cases}$$

$\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in W^{1,1}(0,1)$, m.m. $t \in [0,1]$, ahol

$$\|z\|_\infty = \sup \{|z(t)|, t \in [0,1]\};$$

valamint

$$M = \begin{pmatrix} a_1 A_1 & b_1 A_1 \\ a_2 A_2 & b_2 A_2 \end{pmatrix}$$

mátrix nullához konvergáló, akkor (1.2)-nek létezik egyértelmű megoldása $W^{1,1}(0,1)$ -n.

Bizonyítás: Az (1.2) rendszer $J = [0,1]$, $X_J = W^{1,1}(0,1)$ esetén egyenértékű (lásd [3]) a következő integrálegyenlet-rendszerrel $C[0,1] \times C[0,1]$ -ben:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-\alpha[1]}\alpha[g_1] + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds \\ y(t) = \frac{1}{1-\beta[1]}\beta[g_2] + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds \end{cases}, \quad \forall t \in [0,1],$$

ahol

$$g_1(t) = \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds, \quad g_2(t) = \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ez egy fixpont feladat $C[0, 1] \times C[0, 1]$ -ben a $T : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \times C[0, 1]$, $T = (T_1, T_2)$ operátor esetén, ahol

$$T_1(x, y)(t) = \frac{1}{1 - \alpha[1]} \alpha[g_1] + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds,$$

$$T_2(x, y)(t) = \frac{1}{1 - \beta[1]} \beta[g_2] + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds,$$

$\forall t \in [0, 1], \forall x, y \in C[0, 1]$.

Lássuk el $C[0, 1] \times C[0, 1]$ -t a következő vektornormával

$$\|u\| = (\|x\|_\infty, \|y\|_\infty),$$

minden $u = (x, y) \in C[0, 1] \times C[0, 1]$.

Legyen $u = (x, y), \bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in C[0, 1] \times C[0, 1]$. Ekkor

$$|T_1(x, y)(t) - T_1(\bar{x}, \bar{y})(t)| = \left| \frac{\alpha[g_1 - \bar{g}_1]}{1 - \alpha[1]} + g_1(t) - \bar{g}_1(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\|\alpha\|}{|1 - \alpha[1]|} \|g_1 - \bar{g}_1\|_\infty + |g_1(t) - \bar{g}_1(t)| \leq A_1 \|g_1 - \bar{g}_1\|_\infty,$$

$\forall t \in [0, 1]$, ahonnan $\|T_1(x, y) - T_1(\bar{x}, \bar{y})\|_\infty \leq A_1 \|g_1 - \bar{g}_1\|_\infty$, ahol

$$\bar{g}_1(t) = \int_0^t f_1(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))ds, \quad \forall t \in [0, 1].$$

$$|g_1(t) - \bar{g}_1(t)| \leq \int_0^t |f_1(s, x(s), y(s)) - f_1(s, \bar{x}(s), \bar{y}(s))|ds \leq$$

$$\leq (a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty) \int_0^t (s)ds \leq a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty,$$

$\forall t \in [0, 1]$. Innen

$$\|g_1 - \bar{g}_1\|_\infty \leq a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty,$$

és következésképpen

$$\|T_1(x, y) - T_1(\bar{x}, \bar{y})\|_\infty \leq A_1(a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty).$$

Hasonlóan

$$\|T_2(x, y) - T_2(\bar{x}, \bar{y})\|_\infty \leq A_2(a_2 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_2 \|y - \bar{y}\|_\infty).$$

Tehát

$$\|T(u) - T(\bar{u})\| \leq M \|u - \bar{u}\|.$$

Mivel M nullához konvergáló és $(C[0, 1] \times C[0, 1], \|\cdot\|)$ teljes, a Perov tétel alapján következik a tétel állítása. $\square$

3 Saját eredmények

3.1 Kompakt esetbeli stabilitás

Tétel 4. Az (1.2) rendszerben legyen $J=[0,1]$, $X_J = W^{1,1}(0,1)$. Jelöljük

$$A_1 = 1 + \frac{\|\alpha\|}{|1 - \alpha[1]|}, \quad A_2 = 1 + \frac{\|\beta\|}{|1 - \beta[1]|},$$

ahol $\|\alpha\|$ az α normája $W^{1,1}(0,1)$ -en, hasonlóan β esetén.

Ha létezik $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, melyre

$$\begin{cases} |f_1(t, x(t), y(t)) - f_1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq (a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty) \\ |f_2(t, x(t), y(t)) - f_2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq (a_2 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_2 \|y - \bar{y}\|_\infty), \end{cases}$$

$\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in W^{1,1}(0,1)$, m.m. $t \in [0,1]$, ahol

$$\|z\|_\infty = \sup \{|z(t)|, t \in [0,1]\};$$

valamint

$$M = \begin{pmatrix} a_1 A_1 & b_1 A_1 \\ a_2 A_2 & b_2 A_2 \end{pmatrix}$$

mátrix nullához konvergáló, akkor (1.2) Ulam-Hyers stabil, azaz létezik $C_f \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ úgy, hogy minden $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ és minden $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in W^{1,1}(0,1) \times W^{1,1}(0,1)$, melyre

$$\begin{cases} |\tilde{x}'(t) - f_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))| \leq \epsilon_1 \\ |\tilde{y}'(t) - f_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))| \leq \epsilon_2, \text{ m.m. } t \in [0,1] \\ \tilde{x}(0) = \alpha[\tilde{x}] \\ \tilde{y}(0) = \beta[\tilde{y}], \end{cases} \quad (3.1)$$

létezik egy $u^* = (x^*, y^*) \in W^{1,1}(0,1) \times W^{1,1}(0,1)$ megoldása (1.2)-nek, melyre

$$\begin{pmatrix} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \\ |\tilde{y}(t) - y^*(t)| \end{pmatrix} \leq C_f \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Bizonyítás: A (3.1)-es rendszer egyenértékű (lásd [3]) a következő integrálegyenlet-rendszerrel $C[0,1] \times C[0,1]$ -ben:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1-\alpha[1]}\alpha[\tilde{g}_1] + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_1(s)ds \\ y(t) = \frac{1}{1-\beta[1]}\beta[\tilde{g}_2] + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_2(s)ds \end{cases}, \quad \forall t \in [0,1],$$

ahol

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(t) &= \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_1(s)ds, \\ \tilde{g}_2(t) &= \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_2(s)ds, \quad \forall t \in [0,1], \end{aligned}$$

$h_1, h_2 : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ mérhető függvények, melyekre $|h_i(t)| \leq \epsilon_i w_k(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall i \in \{1, 2\}$ és $\tilde{h}_i(t) = \int_0^t h_i(s)ds$ folytonos $[0, 1]$ -n, $\forall i \in \{1, 2\}$.

Ez egy fixpont feladat $C[0, 1] \times C[0, 1]$ a $\tilde{T} : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \times C[0, 1]$ operátor esetén, $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$, ahol

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1(x, y)(t) &= \frac{1}{1 - \alpha[1]} \alpha[\tilde{g}_1] + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_1(s)ds, \\ \tilde{T}_2(x, y)(t) &= \frac{1}{1 - \beta[1]} \beta[\tilde{g}_2] + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))ds + \int_0^t h_2(s)ds,\end{aligned}$$

$\forall t \in [0, 1]$, $\forall x, y \in C[0, 1]$.

Legyen

$$\begin{aligned}H_1(t) &= \frac{1}{1 - \alpha[1]} \alpha[\tilde{h}_1] + \int_0^t h_1(s)ds, \\ H_2(t) &= \frac{1}{1 - \beta[1]} \beta[\tilde{h}_2] + \int_0^t h_2(s)ds, \\ H(t) &= (H_1(t), H_2(t)), \quad \forall t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy H nem függ x -től illetve y -től, valamint

$$\tilde{T}(x, y)(t) = T(x, y)(t) + H(t), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x, y \in C[0, 1].$$

Következésképpen

$$\left\| \tilde{T}(u) - \tilde{T}(\bar{u}) \right\| = \|T(u) - T(\bar{u})\|,$$

$\forall u = (x, y), \bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in C[0, 1] \times C[0, 1]$.

Tehát $\tilde{T}$ akkor és csak akkor kontrakció $(C[0, 1] \times C[0, 1], \|\cdot\|)$ -ben, ha T is kontrakció ugyanott, ezen esetben a Lipschitz mátrixuk megegyezik. A 2. rész 3. tételben látottak alapján viszont T kontrakció, tehát $\tilde{T}$ is az. $(C[0, 1] \times C[0, 1], \|\cdot\|)$ teljes általánosított metrikus tér, tehát alkalmazható Perov tétele: $\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ létezik egyértelmű $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in C[0, 1] \times C[0, 1]$ fixpontja $\tilde{T}$ -nek, illetve $u^* = (x^*, y^*) \in C[0, 1] \times C[0, 1]$ T -nek. Tehát a (3.1) megoldásának a létezése mindig maga után vonja az (1.2) megoldásának a létezését.

Nyilván

$$\begin{pmatrix} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \\ |\tilde{y}(t) - y^*(t)| \end{pmatrix} \leq \|\tilde{u} - u^*\|, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\|\tilde{u} - u^*\| &= \left\| \tilde{T}(\tilde{u}) - T(u^*) \right\| = \|T(\tilde{u}) + H - T(u^*)\| \leq \|T(\tilde{u}) - T(u^*)\| + \\ &+ \|H\| \leq M \|\tilde{u} - u^*\| + \|H\| \Rightarrow \|\tilde{u} - u^*\| \leq (I - M)^{-1} \|H\|.\end{aligned}$$

$$|H_1(t)| \leq \frac{|\alpha[\tilde{h}_1]|}{|1 - \alpha[1]|} + \left| \int_0^t h_1(s) ds \right| \leq \frac{\|\alpha\|}{|1 - \alpha[1]|} \|\tilde{h}_1\|_\infty + |\tilde{h}_1(t)| \leq A_1 \|\tilde{h}_1\|_\infty, \\ \forall t \in [0, 1].$$

$$|\tilde{h}_1(t)| = \left| \int_0^t h_1(s) ds \right| \leq \epsilon_1 \left| \int_0^t (s) ds \right| \leq \epsilon_1, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Tehát $\|\tilde{h}_1\|_\infty \leq \epsilon_1$, ahonnan $|H_1(t)| \leq A_1 \epsilon_1, \forall t \in [0, 1]$, és következésképpen $\|H_1\|_\infty \leq A_1 \epsilon_1$. Hasonlóan $\|H_2\|_\infty \leq A_2 \epsilon_2$.

Következik, hogy

$$\|\tilde{u} - u^*\| \leq (I - M)^{-1} \|H\| \leq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \epsilon_1 \\ A_2 \epsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Mivel M nullához konvergáló, $(I - M)^{-1}$ pozitív elemű; $A_1, A_2 > 0$, választhatjuk

$$C_f = (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

ekkor (3.2) és (3.3) alapján

$$\begin{pmatrix} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \\ |\tilde{y}(t) - y^*(t)| \end{pmatrix} \leq C_f \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Tehát a bizonyítás teljes. □

3.2 1. Nemkompakt eset: $\tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$ -beli megoldások stabilitása

Az (1.2) rendszerben legyen $J=[0, +\infty)$, $X_J = \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$, ahol

$$\tilde{W}^{1,1}(0, +\infty) = \{z : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid z \in W^{1,1}(0, n), \forall n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Legyen

$$A_1 = 1 + \frac{\|\alpha\|}{|1 - \alpha[1]|}, \quad A_2 = 1 + \frac{\|\beta\|}{|1 - \beta[1]|},$$

ahol $\|\alpha\|$ az α normája $\tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$ -n, hasonlóan β esetén.

Tétel 5. Ha létezik $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$ és $w : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, melyre

$$\begin{cases} |f_1(t, x(t), y(t)) - f_1(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq w(t)(a_1 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_1 \|y - \bar{y}\|_\infty) \\ |f_2(t, x(t), y(t)) - f_2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))| \leq w(t)(a_2 \|x - \bar{x}\|_\infty + b_2 \|y - \bar{y}\|_\infty), \end{cases}$$

$\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$, m.m. $t \in [0, +\infty)$, ahol

$$\|z\|_\infty = \sup \{|z(t)|, t \in [0, +\infty)\},$$

és w mérhető $[0, +\infty)$ -n, $\int_0^{+\infty} w(s)ds \leq 1$; valamint az

$$M = \begin{pmatrix} a_1 A_1 & b_1 A_1 \\ a_2 A_2 & b_2 A_2 \end{pmatrix}$$

mátrix nullához konvergál, akkor fennállnak a következők:

(i) (1.2)-nek létezik egyértelmű $(x^*, y^*) \in \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty) \times \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$ megoldása

(ii) (1.2) Ulam-Hyers stabil, azaz létezik $C_f \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ úgy, hogy minden $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ és minden $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty) \times \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$, melyre

$$\begin{cases} |\tilde{x}'(t) - f_1(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))| \leq \epsilon_1 w(t) \\ |\tilde{y}'(t) - f_2(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))| \leq \epsilon_2 w(t), \text{ m. m. } [0, +\infty) \\ \tilde{x}(0) = \alpha[\tilde{x}] \\ \tilde{y}(0) = \beta[\tilde{y}], \end{cases} \quad (3.4)$$

létezik $u^* = (x^*, y^*) \in \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty) \times \tilde{W}^{1,1}(0, +\infty)$ megoldása (1.2)-nek, melyre

$$\begin{pmatrix} |\tilde{x}(t) - x^*(t)| \\ |\tilde{y}(t) - y^*(t)| \end{pmatrix} \leq C_f \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Bizonyítás: Lásd [2] □

3.3 2. Nemkompakt eset: $W_w^{1,2}(0, +\infty)$ -beli megoldások stabilitása

Az (1.2)-es rendszerben legyen $J=[0, +\infty)$, $X_J = W_w^{1,2}(0, +\infty)$, ahol

$$W_w^{1,2}(0, +\infty) = \{z : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid z, z' \in L_w^2[0, +\infty)\},$$

(itt z' alatt a z általánosított deriváltját értjük)

$$L_w^2[0, +\infty) = \left\{ z : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} w(s)|z(s)|^2 ds < +\infty \right\},$$

$w : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ úgy, hogy

$$\int_0^{+\infty} w(s)ds = 1, \quad \exists m \in \mathbb{R}_+^* : \int_0^{+\infty} w(t) \int_0^t \frac{1}{w(s)} ds dt \leq m^2. \quad (3.5)$$

Megjegyzés 1. Vizsgáljuk ilyen w függvények létezését. Jelöljük $W(t) = \int_0^t \frac{1}{w(s)} ds$, ekkor

$$\int_0^{+\infty} w(t) \int_0^t \frac{1}{w(s)} ds dt = \int_0^{+\infty} \frac{W(t)}{W'(t)} dt.$$

Könnyen belátható, hogy $W(t) = ce^{t^k}$ esetén a fenti integrál konvergens minden $k > 2$ és minden $c \in \mathbb{R}$ esetén. Nyilván

$$w(t) = \frac{1}{ckx^{k-1}e^{x^k}} \Rightarrow \int_0^{+\infty} w(t)dt = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \frac{1}{kx^{k-1}e^{x^k}} dt$$

is konvergens, ha $c = \int_0^{+\infty} \frac{1}{kx^{k-1}e^{x^k}} dt$, akkor

$$\int_0^{+\infty} w(t)dt = 1,$$

$\forall k > 2$.

Legyen

$$A_1 = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\|\alpha\|^2}{|1 - \alpha[1]|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad A_2 = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\|\beta\|^2}{|1 - \beta[1]|^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ahol $\|\alpha\|$ az α normája $W_w^{1,2}(0, +\infty)$ -n, hasonlóan β esetén.

Tétel 6. Ha létezik $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$ és $w : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, mely kielégíti (4.2)-et úgy, hogy

$$\int_0^{+\infty} w(t) |f_i(t, x(t), y(t)) - f_i(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t))|^2 dt \leq (a_i \|x - \bar{x}\|_{w,2} + b_i \|y - \bar{y}\|_{w,2})^2,$$

$\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in W_w^{1,2}(0, +\infty)$, m.m. $t \in [0, +\infty)$, $\forall i \in \{1, 2\}$, ahol

$$\|z\|_{w,2} = \left[\int_0^{+\infty} w(s) |z(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}};$$

valamint az

$$M = \begin{pmatrix} a_1 mA_1 & b_1 mA_1 \\ a_2 mA_2 & b_2 mA_2 \end{pmatrix}$$

mátrix nullához konvergáló, akkor fennállnak a következők:

(i) (1.2)-nek létezik egyértelmű $(x^*, y^*) \in W_w^{1,2}(0, +\infty) \times W_w^{1,2}(0, +\infty)$ megoldása

(ii) (1.2) Ulam-Hyers stabil, azaz létezik $C_f \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ úgy, hogy minden $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ és minden $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in W_w^{1,2}(0, +\infty) \times W_w^{1,2}(0, +\infty)$, melyre

$$\begin{cases} \|\tilde{x}' - f_1(\cdot, \tilde{x}, \tilde{y})\|_{w,2} \leq \epsilon_1 \\ \|\tilde{y}' - f_2(\cdot, \tilde{x}, \tilde{y})\|_{w,2} \leq \epsilon_2, \\ \tilde{x}(0) = \alpha[\tilde{x}] \\ \tilde{y}(0) = \beta[\tilde{y}], \end{cases} \quad (3.6)$$

létezik egy $u^ = (x^*, y^*) \in W_w^{1,2}(0, +\infty) \times W_w^{1,2}(0, +\infty)$ megoldása (1.2)-nek, melyre*

$$\begin{pmatrix} \|\tilde{x} - x^*\|_{w,2} \\ \|\tilde{y} - y^*\|_{w,2} \end{pmatrix} \leq C_f \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

Bizonyítás: Lásd [2]

□

Szakirodalom

- [1] C. Alsina, R. Ger: On some inequalities and stability results related to the exponential function, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2, no. 4, pp. 373380, 1998
- [2] Sz. András, J. J. Kolumbán: On the Ulam-Hyers stability of first order differential systems with nonlocal initial conditions, publikálás folyamatban
- [3] A. Boucherif: First-order differential inclusions with nonlocal initial conditions, Appl. Math. Letters, 15 (2002), 409-414
- [4] A. Boucherif, R. Precup: On the nonlocal initial value problem for first order differential equations, Fixed Point Theory, Volume 4, No. 2, 2003, 205-212
- [5] D. H. Hyers: On the stability of the linear functional equation, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 27, pp. 222224, 1941
- [6] Y.-H. Lee, K.-W. Jun: A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of Jensen's equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 238, no. 1, pp. 305315, 1999
- [7] N. Lungu: Ulam stability of some Volterra integral equations, Fixed Point Theory, 12(2011), No.1, 127-136
- [8] O. Nica: Nonlocal initial value problems for first order differential systems, Fixed Point Theory, publikálás folyamatban
- [9] O. Nica, R. Precup: On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56(2011), No. 3, 113125
- [10] C.-G. Park: On the stability of the linear mapping in Banach modules, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 275, no. 2, pp. 711720, 2002

- [11] Zs. Páles: Hyers-Ulam stability of the Cauchy functional equation on square-symmetric grupoids, Publ. Math. Debrecen, volume 58, 2001
- [12] R. Precup: Methods in Nonlinear Integral Equations, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [13] R. Precup: The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 703-708
- [14] Th. M. Rassias: On the stability of the linear mapping in Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 72, no. 2, pp. 297-300, 1978
- [15] I. A. Rus: Remarks on Ulam stability of the operational equations, Fixed Point Theory, 10(2009), No. 2, 305-320
- [16] I. A. Rus: Ulam stability of ordinary differential equations, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 54(2009), No. 4, 125-133
- [17] S. M. Ulam: A Collection of Mathematical Problems, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York, NY, USA, 1960