

XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia
(OTDK)
Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció
Budapest, 2013. április 18-20.

Általánosított fixponttételek és alkalmazásaik stabilitási problémákra

Szerző:

Nagy Tímea

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar, Matematika-informatika Szak,
alapképzés, III. év

Témavezető:

dr. András Szilárd, egyetemi adjunktus

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar,
Magyar Matematika és Informatika Intézet

Küldő intézmény:

XV. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)

Lezárás dátuma:

2012. június 1.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Fixponttételek	4
1 Használt jelölések és fogalmak	4
2 Fixponttételek	7
2.1 Schauder típusú fixponttételek	7
2.2 A Leray-Schauder típusú tételek	12
2.3 Krasnoselski'i típusú tételek	15
2.4 Az általánosított metrikus tér és a Perov tétel	17
2.5 Az Ulam-Hyers stabilitás	20
Alkalmazások nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerekre	22
3 Alapfogalmak	22
4 Bilokális feltétel	24
4.1 A probléma megfogalmazása és tulajdonságainak vizsgálata	24
4.2 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása	30
4.3 A megoldás létezése a Schauder tétel alkalmazásával	32
4.4 Bilokális feltétel, amikor a jobboldal x' és y' is függ	34
4.5 A bilokális peremfeltételek általánosítása	39
5 Polilokális feltétel	42
5.1 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása	45
5.2 A megoldás létezése a Schauder tétel segítségével	46
6 A peremfeltételek általánosítása	47

Bevezetés

Első pár egyetemi évünk során mind több ízben is találkoztunk a Banach-féle fixponttétellel, így -habár a szükséges fogalmak csak az 1. fejezet elején kerülnek bemutatásra-, bevezetésként tekintsünk egy kicsit vissza erre a jól ismert tételre.

Ha az (X, d) teljes metrikus téren értelmezett $F : X \rightarrow X$ függvény kontrakció, azaz létezik $\delta \in (0, 1)$ úgy, hogy $d(F(x), F(y)) \leq \delta d(x, y)$ bármely $x, y \in X$, akkor F -nek van pontosan egy fixpontja. (És teljesülnek az a-priori és az a-poszteriori becslések)

Figyeljük meg, hogy könnyedén szerkeszthetünk olyan egyszerű példát, aminek egyértelműen van fixpontja, viszont nem teljesül a kontraktív megkötés rá, így nem alkalmazható a Banach-féle fixponttétel. Ilyen példa az egydimenziós egységsgömböt önmagára leképező identikus függvény

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : f(x) = x,$$

melynek természetesen van fixpontja (nem pontosan egy, de létezik fixpontja). Ahhoz, hogy ez a függvény kontrakció legyen, arra lenne szükség, hogy

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq \delta d(x, y)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \delta,$$

ami ellentmondáshoz vezet.

Tehát egyértelműen szükség van más fixponttételekre. A dolgozat megírásához elsősorban különböző fixponttételeket tanulmányoztam, a közöttük levő összefüggéseket (ok-okozati viszonyokat) próbáltam felkutatni és megérteni.

Másrészt ezek a fixponttételek megfelelő talajt biztosítanak különböző egyenletek, differenciálegyenletek illetve differenciálegyenlet rendszerek megoldásai létezésének, esetleg egyértelműségének vizsgálatához.

Ezért a dolgozat két fejezetre tagolódik.

Az 1. **fejezetben** több ismert fixponttétel kerül bemutatásra, a Brouwer-féle fixponttételtől kiindulva végigkövetjük a fixponttételek fejlődésének egy kis szakaszát. A 2.2-es és a 2.3-es Schauder tételek például a 2.1-es Brouwer tételre épülnek, viszont alkalmazkodnak az aktuális matematikai eszköztárhoz, ilyen szempontból általánosítják a Brouwer-féle fixponttételt, általánosabb, végtelen dimenziós tere bizonyítják a fixpont létezését. A 2.2-es tétel a kompakt halmazokon értelmezett operátorokra míg a 2.3-as tétel a zárt és korlátos halmazon értelmezett operátorokra tett kijelentés.

Az 1. fejezetben bemutatott tételek közül számunkra legfontosabb a 2.9-es Perov tétel, mely általánosított teljes metrikus tereken értelmezett kontraktív leképezések fixpontjáról állítja a létezését és az egyértelműséget. Az általánosított metrikus tér bevezetése után a fixponttételek

ilyen jellegű általánosítása nagy lépést jelentett, hiszen nagyon sok olyan probléma van, amit egy operátor fixpontproblémájára visszavezetve egyszerűen kezelhetünk a vektor-értékű norma vagy metrika segítségével (lásd a 2. fejezetet).

Végül a fixpontfeladatok egy fontos és hasznos tulajdonságával, az Ulam-Hyers stabilitással (2.5-ös definíció) foglalkozunk, melynek gyakorlati hasznát az jelenti, hogy ha belátjuk egy fixpontfeladatról hogy Ulam-Hyers stabil, akkor azt tudjuk meg róla, hogy ha találunk egy „majdnem” fixpontot, vagyis egy olyan pontot, mely nagyon közel van az operátorban felvett értékéhez, akkor az a pont nagyon közel van a valódi fixponthoz.

Itt megjegyezhetjük, hogy a fixpontelmélet fejlődésében kulcsfontosságú szerepe volt és van a romániai matematikai iskoláknak. A dolgozat másik fő tétele, a 2.10-es tétel, ami Ioan A. Rus nevéhez kötődik (lásd [5]).

Az [12], [6], [7] cikkek a fent említett módszerrel, vagyis nemlineáris operátorra alkalmazott fixponttétel segítségével vizsgálják nemlineáris elsőrendű differenciálegyenletek megoldásának létezését és egyértelműségét.

A dolgozat 2. **fejezete** -ezektől a cikkektől eltérően,- másodfokú nemlineáris differenciálegyenlet rendszereket vizsgál.

Előbb a (4.1)-es

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x(0) + b_{11}x'(0) = 0 & (1) \\ a_{12}x(1) + b_{12}x'(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y(0) + b_{21}y'(0) = 0 & (3) \\ a_{22}y(1) + b_{22}y'(1) = 0 & (4). \end{cases}$$

differenciálegyenlet rendszert vizsgáljuk, ami azt jelenti hogy egy operátor fixpontfeladatává alakítjuk (lásd a (4.10)-es operátort), megkeressük a megfelelő Green függvényeket és azok tulajdonságainak tárgyalása után az f és g függvények regularitása alapján a következő esetekben fogalmazzuk meg a létezési illetve egyértelműségi tételeket, valamint ezek alapján az Ulam-Hyers stabilitást:

(i) (Lipschitz tulajdonság, (4.11))

Léteznek $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$ pozitív valós számok úgy, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} |f(s, x, y) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_1|x - \tilde{x}| + b_1|y - \tilde{y}|, \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \\ |g(s, x, y) - g(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_2|x - \tilde{x}| + b_2|y - \tilde{y}|, \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

bármely $s \in \mathbb{R}$ -re.

(ii) (Legfennebb lineáris növekedés, (4.12))

Léteznek $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$ pozitív valós számok úgy, hogy $\forall x, y, s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} |f(s, x, y)| \leq a_1|x| + b_1|y| + c_1 \\ |g(s, x, y)| \leq a_2|x| + b_2|y| + c_2. \end{cases}$$

Az alkalmazások terén általában olyan rendszerekkel találkozunk, melyek jobboldala függ az x' -től és az y' -től is. Ezért a 2.4-es alfejezetben a 4.4-es és a 4.6-es tételek a következő alakú

egyenletrendszereket vizsgálják:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) \\ a_{11}x(0) + b_{11}x'(0) = 0 & (1) \\ a_{12}x(1) + b_{12}x'(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y(0) + b_{21}y'(0) = 0 & (3) \\ a_{22}y(1) + b_{22}y'(1) = 0 & (4). \end{cases}$$

Ilyen típusú rendszerekkel találkozunk általában a nemlineáris folyadékmechanika problémáit tanulmányozva. Viszont ennél általánosabban is megfogalmazhatjuk a peremfeltételeket. A 2.5-ös alfejezetben ezeket a következő módon általánosíthatjuk:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ x'(0) = \alpha_0[x] & (1) \\ x(1) = \alpha_1[x'] & (2) \\ y'(0) = \beta_0[y] & (3) \\ y(1) = \beta_1[y'] & (4). \end{cases}$$

Hasonlóan a bilokális feltételhez, a következő rendszert is vizsgáljuk:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x'(0) + b_{11}x'(1) = 0 & (1) \\ a_{12}x(0) + b_{12}x(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y'(0) + b_{21}y'(1) = 0 & (3) \\ a_{22}y(0) + b_{22}y(1) = 0 & (4). \end{cases}$$

A végső, általánosított forma a következő:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha_0[x] & (1) \\ x'(0) = \alpha_1[x] & (2) \\ y(0) = \beta_0[y] & (3) \\ y'(0) = \beta_1[y] & (4). \end{cases}$$

Fixponttételek

1 Használt jelölések és fogalmak

A következő alapértelmezések illetve definíciók általában megtalálhatóak a hasonló témájú szakirodalomban, mint például a hivatkozott [10] illetve az [2] könyvekben. Más értelmezések az egyetemi analízis illetve funkcionál analízis kurzusokon váltak számomra ismertté, ezért nem szerepelnek hivatkozások általában az értelmezések mellett.

1.1 Definíció. (Relációk és összeadás vektorokkal)

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, és $y = (y_1, \dots, y_n)$. Ekkor

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

és hasonlóan az ' $=$ ', ' $<$ ', ' $\geq$ ' valamint ' $>$ ' esetén.

Továbbá ha $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$x \leq c \Leftrightarrow x_i \leq c, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Az $x + y$ pedig komponensenkénti összeadást jelent, vagyis

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

1.1 Tétel. (A kompaktságról)

- (a) Ha egy halmaz kompakt, akkor zárt és korlátos is.
- (b) Általában nem igaz, hogy ha zárt és korlátos akkor kompakt is a halmaz.
- (c) Véges dimenzió esetén egy halmaz kompaktsága ekvivalens azzal, hogy a halmaz zárt és korlátos.

1.2 Definíció. (Operátorok tulajdonságai)[10, 25. oldal]

Legyenek X, Y Banach terek és $T : D \subset X \rightarrow Y$. A továbbiakban használjuk a következő fogalmakat:

- (a) T korlátos, ha D minden korlátos részhalmaza T általi képe korlátos Y -ban.
- (d) T kompakt, ha D minden korlátos részhalmazát Y -ban relatív kompakt részhalmazba viszi.
- (c) T teljesen folytonos, ha folytonos és kompakt.
- (d) T véges rangú operátor, ha $T(D) \subset Y'$, ahol Y' az Y tér egy véges dimenziós altere.

1.3 Definíció. (ε - háló)[10, 14. oldal]

Legyenek (X, d) metrikus tér, $Y \subset X$ és $\varepsilon > 0$.

Ekkor egy $R \subset X$ halmazról azt mondjuk, hogy az Y ε - hálójá, ha bármely $y \in Y$ elemre teljesül, hogy

$$\exists r \in R: d(y, r) < \varepsilon$$

1.4 Definíció. (A metrika és a metrikus tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *metrika* alatt a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést értjük melyre teljesülnek:

- i) $d(u, v) \geq 0, \forall u, v \in X; d(u, v) = 0$ akkor és csak akkor, ha $u = v$;
- ii) $d(u, v) = d(v, u), \forall u, v \in X$;
- iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \forall u, v, w \in X$.

A fenti metrikával ellátott (X, d) teret metrikus térnek nevezzük.

1.5 Definíció. (A norma és a normált tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *norma* alatt a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést értjük, melyre teljesülnek:

- i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$;
- ii) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|, \forall x \in X, a \in \mathbb{R}$ skálár;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

A fenti normával ellátott $(X, \|\cdot\|)$ teret normált térnek nevezzük.

Megjegyzés. Minden normált tér származtat egy metrikus teret, melynek metrikája a

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} : d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

1.6 Definíció. (Maximum-norma és a vektornorma)

Legyen $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Ekkor a $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés a *maximum-norma*, ha bármely $f \in \mathcal{C}(K)$ esetén:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in K\}. \quad (1.1)$$

Legyen $|\cdot| : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ egy norma. Ekkor a $\|\cdot\| : (\mathcal{C}(K))^n \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés a $|\cdot|$ normából származtatott *vektornorma*, ha bármely $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{C}(K))^n$ esetén:

$$\|x\| = \left(\begin{array}{c} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{array} \right). \quad (1.2)$$

1.7 Definíció. (Norma szerinti konvergencia)

Egy $(x_n) \subset X$ sorozat konvergens és $x \in X$ a sorozat határértéke, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

1.8 Definíció. (Cauchy-sorozat)

Egy (x_n) sorozat Cauchy-sorozat ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N_\varepsilon$ úgy, hogy $\|x_m - x_n\| < \varepsilon \forall n, m \geq N_\varepsilon$.

1.9 Definíció. (Teljes normált tér)

Ha egy térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor a tér teljes. Ekkor a teret Banach-térnek nevezzük.

1.10 Definíció. [11]

Legyen X Banach-tér, $|\cdot|$ X -en értelmezett norma és $P_{1,2} : X^2 \rightarrow X$. Az 1. fejezet példáiban a következő szemilineáris operátorrendszert vesszünk alapul:

$$\begin{cases} P_1(p_1, p_2) = p_1 \\ P_2(p_1, p_2) = p_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Megjegyzés. A fenti rendszer ekvivalens a

$$P(p) = p$$

fixpontfeladattal, ahol $P : X^2 \rightarrow X^2$ és $P = (P_1, P_2)$, $p = (p_1, p_2)$.

Ezesetben az (1.2)-es vektornormát fogjuk használni.

1.11 Definíció. (Nullához konvergáló mátrix)

Az $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ mátrixról akkor mondjuk hogy nullához konvergáló, ha

$$M^k \rightarrow 0_n, \quad k \rightarrow \infty,$$

ahol 0_n az n -dimenziós nullmátrix, és a tartás komponensenként értendő.

2 Fixponttételek

2.1 Schauder típusú fixponttételek

Először nézzük meg a Schauder-féle fixponttétel véges dimenziós előzményét, a Brouwer-féle fixponttételt, amit 1912-ben Luitzen Egbertus Jan Brouwer bizonyított.

2.1 Tétel. (Brouwer)[10, 28. oldal]

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy **nemüres, konvex és kompakt** halmaz, valamint a $T : D \rightarrow D$ **folytonos** operátor.

Ekkor létezik legalább egy $u \in D$ úgy, hogy

$$T(u) = u.$$

Megjegyzés. A brouwer-féle fixponttétel a Sperner lemma egyik alkalmazásának, a Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tétel (lásd [3, 145. oldal]) segítségével belátható.

A Schauder fixponttétel Juliusz Pawel Schauder, lengyel matematikus nevéhez kötődik, aki 1930-ban általánosította Brouwer tételét Banach-terekre. Vagyis igazolta a tételt úgy, hogy nem az $\mathbb{R}^n$ részhalmazát vette, hanem egy (nem feltétlenül véges dimenziós) Banach térnek a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező részhalmazát. Ezt a következő tételben jelenthetjük ki:

2.2 Tétel. (Schauder) [10, 33. oldal]

Legyen X egy Banach-tér, a $K \subset X$ **nemüres, konvex és kompakt** halmaz és a $T : K \rightarrow K$ **folytonos** operátor.

Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja, vagyis létezik $u \in K : T(u) = u$.

A bizonyítás a Brouwer-féle fixponttételen alapszik, a [10]-as alapján a következő lemma segítségével vezetjük vissza egy véges dimenziós problémára:

2.1 Lemma. [10, 26. oldal]

Legyen $H \subset X$ **korlátos és zárt** halmaz és $T : H \rightarrow Y$ teljesen folytonos operátor. Ekkor létezik egy véges rangú folytonos operátorsorozat $T_k : H \rightarrow Y$, mely H -n egyenletesen tart T -hez, vagyis

$$T(h) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(h), \quad \forall h \in H.$$

Ráadásul $T_k(H) \subset \text{conv}(T(H))$, bármely $k \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. (A 2.1-as lemma bizonyítása)

Mivel T teljesen folytonos H -n és H korlátos, $T(H)$ relatív kompakt, így a következő megfigyelést tehetjük:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_j \in T(H), \quad j \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\} : \overline{T(H)} \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(t_j).$$

Legyen (φ_j) úgy, hogy

(i) $\varphi_j \in \mathcal{C}(\overline{T(H)}, [0, 1])$,

(ii) $\text{supp} \varphi_j \subset \overline{B}_\varepsilon(t_j)$,

$$(iii) \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \varphi_j(t) = 1, \forall t \in \overline{T(D)}.$$

Továbbá legyen $T_\varepsilon : H \rightarrow Y$ úgy, hogy $T_\varepsilon(h) = \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \varphi_j(T(h))t_j, \forall h \in H$.

Az így szerkesztett T_ε operátor véges rangú és folytonos, valamint

$$T_\varepsilon(H) \subset \text{conv}(T(H)).$$

Továbbá a $T(h) \in B_\varepsilon(t_j)$ és a $\varphi_j(T(h)) > 0$ alapján felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} |T(h) - T_\varepsilon(h)|_Y &= \left| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \varphi_j(T(h))(t_j - T(h)) \right|_Y \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \varphi_j(T(h)) |t_j - T(h)|_Y \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \varphi_j(T(h)) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Vagyis $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(h) = T(h), \forall h \in H$. ■

Bizonyítás. (A 2.2-es tétel bizonyítása)

K kompakt és T folytonos, tehát T teljesen folytonos. K kompakt, tehát zárt és korlátos is, így használhatjuk a fenti lemmát, ami alapján léteznek a $T_j : K \rightarrow K$ véges rangú folytonos operátorok, melyek egyenletesen tartanak T -hez a K -n, vagyis

$$T(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j(u), \forall u \in K.$$

Mivel T_j véges rangú, tekinthetjük az $X_{n_j} \subset K$ alteret, mely a $T_j(K)$ által generált véges (n_j) dimenziós altér. Ekkor $T_j : K \cap X_{n_j} \rightarrow K \cap X_{n_j}$.

Most a T_j operátorokra a Brouwer fixponttételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\exists u_j^* \in K \cap X_{n_j} : T_j(u_j^*) = u_j^*, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mivel K kompakt, minden sorozatának van konvergens részsorozata K -ban. Legyen $u^* \in K$ az $(u_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens részsorozatának a határértéke. Ekkor

$$\begin{aligned} |T(u^*) - u^*| &\leq |T(u^*) - T(u_j^*)| + |T(u_j^*) - T_j(u_j^*)| + |T(u_j^*) - u^*| \\ &= |T(u^*) - T(u_j^*)| + |T(u_j^*) - T_j(u_j^*)| + |u_j^* - u^*| \\ &\rightarrow 0, \text{ amikor } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tehát $T(u^*) = u^*$, vagyis az így megszerkesztett $u^* \in K$ fixpontja az T operátornak. ■

Megjegyzés. Mivel a kompaktság fogalma csak véges dimenziós térben ekvivalens azzal, hogy a halmaz zárt és korlátos (lásd 1.1-es tétel), pontosabban megfogalmazva ez azt jelenti, hogy általában nem minden zárt és korlátos halmaz kompakt. Így a Schauder tétel zárt és korlátos halmazokra való megfogalmazása általánosabb az előbbi megfogalmazásnál és a gyakorlatban hasznosabb is.

Állítás. Végtelen dimenziós tereken a zárt gömb általában nem kompakt.

Bizonyítás. (A fenti állítás bizonyítása)

Legyen $l^2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R} / \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ és $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$. Jelölje

$$\bar{B}(0, 1) = \{(x_n)_{n \geq 0} \subset l^2(\mathbb{R}) / \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq 1\}.$$

Tegyük fel, hogy $\bar{B}(0, 1)$ kompakt. Ekkor a 2.2-es tétel alapján

$$\forall f : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1), f \text{ folytonos} \Rightarrow \exists x^* \in \bar{B}(0, 1) : f(x^*) = x^*$$

Tekintsük a következő leképezést:

$$f(x_1, x_2, \dots) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) \in \bar{B}(0, 1).$$

A függvény jól értelmezett és mivel $(x_1, x_2, \dots) \in \bar{B}(0, 1)$, $1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ is a $[0, 1]$ intervallumban van, tehát a $\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) \in \bar{B}(0, 1)$ is teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \left\| \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) - \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2, y_1, y_2, \dots\right) \right\|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 + \|x - y\|^2 \\ &\leq 2 \cdot \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Tehát f Lipschitz, vagyis folytonos operátor. Vizsgáljuk meg a fixpontot:

$$f(x^*) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}, x_1^*, x_2^*, \dots\right) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) \Rightarrow x_1^* = x_2^* = x_3^* = \dots$$

Viszont világos, hogy a fenti tulajdonsággal rendelkező $l^2(\mathbb{R})$ -beli elem csakis az $x^* \equiv 0$ lehet, mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty$ egyenlőtlenség igaz kell legyen. Viszont ez ellentmond annak, hogy

$$f(x^*) = (1, 0, 0, \dots).$$

Tehát a 2.2-es tétel alapján az egységgömb nem kompakt az $l^2(\mathbb{R})$ téren. ■

A 2.1-es megjegyzés alapján indokolt és szükséges a következő tétel kijelentése, hiszen azt is láthattunk az 1.-es állításban, hogy egy nagy egyszerű topológiájú tér, ami zárt is és korlátos is, nem föltétlenül kompakt. Vagyis a kompaktság megkövetelése elég szigorú feltételnek tűnik.

2.3 Tétel. (Schauder)[10, 33. oldal]

Legyen X Banach-tér, $D \subset X$ **nemüres, zárt, korlátos és konvex** halmaz és a $T : D \rightarrow D$ **teljesen folytonos** operátor.

Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja D -ben.

A bizonyításhoz a Mazur lemmát használjuk.

2.2 Lemma. (Mazur lemma)[10, 33. oldal]

Banach-tér relatív kompakt részhalmazának a konvex burka relatív kompakt.

Bizonyítás. (A Mazur lemma igazolása) Legyen X a Banach-tér, Y pedig egy relatív kompakt részhalmaza X -nek. Ekkor egy rögzített $\varepsilon > 0$ számra létezik véges sok eleme X -nek úgy, hogy

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon}(x_i),$$

ahol $x_1, \dots, x_m \in X$. Legyen

$$K = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Lássuk be, hogy K relatív kompakt ε -hálójá Y konvex burkának.

Legyen $y \in Y$. Ekkor $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $y_i \in Y$.

Ekkor létezik minden y_i -hez egy $j_i \in \{1, 2, \dots, m\}$ úgy, hogy $y_i \in B_{\varepsilon}(x_{j_i})$. Ekkor $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_{j_i} \in$

K -ra teljessül, hogy

$$\begin{aligned} |x - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{j_i}| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i - u_{j_i}) \right| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ami azt igazolja, hogy K ε -hálójá $\text{conv}Y$ -nak. Ezúton beláthattuk, hogy $\text{conv}Y$ relatív kompakt.

■

Bizonyítás. (A 2.3-as tétel bizonyítása)

Mivel T teljesen folytonos és D korlátos, a definíció alapján következik, hogy $T(D)$ relatív kompakt. Ekkor a Mazur lemma alapján a $T(D)$ konvex burka is relatív kompakt, vagyis a $K = \overline{\text{conv}(T(D))}$ kompakt. Továbbá K konvex (konvex burkoló lezártja konvex) és $K \subset D$, mivel $T(D) \subset D$ és D konvex és zárt. Most alkalmazva a 2.2-es tételt a $T : K \rightarrow K$ operátorra, azonnal következik a fenti tétel. ■

Végül vegyünk egy példát:

Példa. [11]

Tekintsük az 1.10-es definíciót. Legyenek $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy

$$|P_i(p_1, p_2)| \leq a_i |p_1| + b_i |p_2| + c_i, \quad \forall p_1, p_2 \in X,$$

ahol X Banach-tér, $i \in \{1, 2\}$.

$$\text{Legyen } M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Ha az M mátrix nullához konvergáló (lásd az 1.11-es definíciót), akkor P -nek van legalább egy fixpontja, $p = (p_1, p_2)$, melyre teljesül:

$$\begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} \leq (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Bizonyítás. (A fenti példa bizonyítása)

$$\begin{aligned} |P_i(p_1, p_2)| &\leq a_i |p_1| + b_i |p_2| + c_i, \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |P_1(p)| \\ |P_2(p)| \end{pmatrix} &\leq M \begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A Schauder tétel (2.3-es tétel) alkalmazásához vegyünk egy

$$B = \{p = (p_1, p_2) \in X^2 / |p_1| \leq R_1, |p_2| \leq R_2\}$$

zárt, korlátos, konvex és nemüres részhalmazát az X^2 -nek és határozzuk meg az R_1 illetve R_2 konstansokat úgy, hogy $P(B) \subset B$.

Ez biztosan teljesül, ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} |P_1(p)| \\ |P_2(p)| \end{pmatrix} &\leq M \begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |R_1| \\ |R_2| \end{pmatrix} &= (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ahonnan következik az (2.1)-es egyenlőtlenség. ■

2.2 A Leray-Schauder típusú tételek

2.4 Tétel. (Leray-Schauder alternatíva)

Legyen X egy Banach-tér, $Z \subset X$ **zárt** és **konvex** részhalmaz és $U \subset Z$ **nyílt** részhalmaz, $u_0 \in U$ egy rögzített elem, valamint $T : \overline{U} \rightarrow Z$ teljesen folytonos operátor. Ekkor a következő két lehetőség közül az egyik fennáll:

- (i) T -nek van legalább egy fixpontja
- (ii) $\exists u \in \partial U$ és $\lambda \in (0, 1)$: $u = \lambda T(u) + (1 - \lambda)u_0$

A fenti tétel a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

2.5 Tétel. (Leray-Schauder tétel)[10]

Legyen X Banach-tér, Z és U a fenti tulajdonságokkal rendelkező halmazok, valamint $T : \overline{U} \rightarrow Z$ teljesen folytonos és

$$u \neq (1 - \lambda)u_0 + \lambda T(u) \quad \forall u \in \partial U, \lambda \in (0, 1) \quad (2.2)$$

akkor T -nek van legalább egy fixpontja.

Bizonyítás. Legyen

$$S = \{u \in \overline{U} : u = (1 - \lambda)u_0 + \lambda T(u), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Ekkor a következőket figyelhetjük meg:

- (i) $u_0 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$
- (ii) S zárt, mivel T folytonos és $[0, 1]$ zárt
- (iii) az 2.2 feltételben tekinthetjük úgy, hogy $\lambda \in [0, 1]$, mivel
 - $\lambda = 0$ esetén $u \in \partial U \neq u_0 \in U$
 - $\lambda = 1$ esetén a $T(u) = u$ egyenletet kapjuk, ami ha igaz, a bizonyítás további részei nélkül is igaz a tétel.

Az Urysohn lemma alapján

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}(\overline{U}; [0, 1]) : \varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \in \partial U \\ 1, & \text{ha } u \in S \end{cases}$$

Továbbá tekintsük a következő leképezést: $\tilde{T}(u) = \begin{cases} (1 - \varphi(u))u_0 + \varphi(u)T(u) & \text{ha } u \in U \\ u_0 & \text{ha } u \in Z - U \end{cases}$

Látható, hogy $\tilde{T}$ folytonos és

$$\tilde{T}(Z) \subset \text{conv}(\{u_0\} \cup T(\overline{U})). \quad (2.3)$$

Mivel $\overline{U}$ zárt és T teljesen folytonos, vagyis kompakt is, a kompaktság értelmezéséből következik,

hogy $T(\overline{U})$ relatív kompakt.

A Mazur lemma (2.2) alapján $D := \overline{\text{conv}}(\{u_0\} \cup T(\overline{U}))$ relatív kompakt részhalmaza Z -nek, vagyis $D \subset Z$ kompakt és konvex részhalmaz. Így a 2.3 alapján $\tilde{T}(D) \subset D$.

A 2.2 tételt alkalmazva az X Banach-tér nemüres, konvex és kompakt D részhalmazára és a $\tilde{T} : D \rightarrow D$ operátorra azt kapjuk, hogy $\exists u^* \in D : \tilde{T}(u^*) = u^*$. Két esetet különböztethetünk meg:

- $u^* = u_0 \Rightarrow \varphi(u^*) = 1$ (mert $u_0 \in S$) $\Rightarrow \tilde{T}(u^*) = T(u^*)$ (mivel $u_0 \in S$) $\Rightarrow T(u^*) = u^*$
- $u^* \neq u_0 \Rightarrow \tilde{T}(u^*) = (1 - \varphi(u^*))u_0 + \varphi(u^*)T(u^*) = u^* \Rightarrow u^* \in S \Rightarrow \varphi(u^*) = 1 \Rightarrow T(u^*) = u^*$

Tehát mindkét esetben megszerkeztettük a T -hez tartozó fixpontot. ■

Megjegyzés. Legyen Ω nyílt és korlátos részhalmaza az X Banach-térnek úgy, hogy $0 \in \Omega$.

Ha $T : \overline{\Omega} \rightarrow Z$ teljesen folytonos és

$$Tx \neq \lambda x \quad \forall \|x\| = R, \lambda > 1 \quad (2.4)$$

akkor T -nek van legalább egy fixpontja, $x^* \in X : Tx^* = x^*$.

Bizonyítás. Legyen $\tilde{T} : B(0, R) \rightarrow B(0, R)$ úgy, hogy

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} T(x) & , \text{ ha } \|T(x)\| \leq R \\ T(x) \cdot \frac{R}{\|T(x)\|} & , \text{ ha } \|T(x)\| > R \end{cases}$$

Ez az operátor teljesen folytonos, és $B(0, R)$ nem üres, zárt és korlátos. Így a 2.3 tétel alapján

$$\exists x^* \in X : \tilde{T}(x^*) = x^*.$$

Ekkor két esetet tárgyalhatunk:

$$(i) \|x^*\| < R \Rightarrow \|\tilde{T}(x^*)\| = \|x^*\| < R \Rightarrow \tilde{T}(x^*) = T(x^*)$$

Az utolsó implikáció igaz, mert ha $\tilde{T}(x^*) = T(x) \cdot \frac{R}{\|T(x)\|}$ lenne, akkor

$$\|\tilde{T}(x^*)\| = \|T(x) \cdot \frac{R}{\|T(x)\|}\| = R \text{ lenne.}$$

$$(ii) \|x^*\| = R \text{ és } \tilde{T}(x^*) = T(x^*) \cdot \frac{R}{\|T(x^*)\|} = x^* \Rightarrow T(x^*) = x^* \cdot \frac{\|T(x^*)\|}{R}$$

Ez viszont ellentmond a 2.4 feltételnek, mivel ebben az esetben $\lambda = \frac{\|T(x^*)\|}{R} > 1$. ■

Példa. [11]

Vegyük az 1.10-es definícióbeli operátorokat. Legyenek $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy

$$|P_i(p_1, p_2)| \leq a_i|p_1| + b_i|p_2| + c_i,$$

$\forall p_1, p_2 \in X$ Banach-tér, $i \in \{1, 2\}$ és jelölje $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Ha P_i teljesen folytonos és két részre osztható úgy, hogy:

$$(i) P_i = P_i^1 + P_i^2$$

$$(ii) |P_i^1(p)| \leq a_i|u_1| + b_i|u_2| + c_i$$

$$(iii) \langle P_i^2(p), p_i \rangle \leq 0,$$

bármely $p = (p_1, p_2)$.

Ha az M mátrix nullához konvergál, akkor a P fixpontfeladatának van legalább egy megoldása, melyekre teljesül a (2.1)-es egyenlet, vagyis

$$\begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} \leq (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Bizonyítás. A Leray-Schrauder tétel alapján elégséges azt igazolni, hogy bármely $\lambda \in [0, 1]$ -re az

$$\begin{cases} \lambda P_1(p_1, p_2) = p_1 \\ \lambda P_2(p_1, p_2) = p_2 \end{cases}$$

egyenletrendszernek az X^2 -en vett megoldásainak halmaza korlátos. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} |p_i|^2 &= \lambda \langle P_i(p), p_i \rangle \leq \lambda \langle P_i^1(p), p_i \rangle \leq |P_i^1(p)| |p_i| \leq (a_i|u_1| + b_i|u_2| + c_i) |p_i| \\ &\Rightarrow |p_i| \leq a_i|u_1| + b_i|u_2| + c_i \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} \leq M \begin{pmatrix} |p_1| \\ |p_2| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

ahonnan azonnali a tétel második állítása is (a 2.5-ös egyenlet). ■

2.3 Krasnoselski'i típusú tételek

Megjegyzés. Krasnoselski'i nevéhez több típusú fixponttétel is fűződik. A 2.6-as tétel olyan jellegű operátorokra alkalmazható, melyek előállnak egy teljesen folytonos és egy kontraktív operátor összegeként. Ilyenek például a Fredholm-Volterra típusú operátorok (lásd [2]).

2.6 Tétel. Legyen X egy Banach-tér, Z **zárt** és **konvex** részhalmaz és $U \subset Z$ **nyílt** részhalmaz, $u_0 \in U$ egy rögzített elem, valamint $T : \overline{U} \rightarrow Z$ a következő tulajdonságokkal rendelkező operátor:

- (i) $\exists T_1 : \overline{U} \rightarrow Z$ teljesen folytonos és $\exists T_2 : \overline{U} \rightarrow Z$ φ -kontrakció úgy, hogy $T = T_1 + T_2$
- (ii) $T(\overline{U})$ korlátos a Z -ben

Ekkor a következő két lehetőség közül az egyik fennáll:

- (1) T -nek van legalább egy fixpontja a $\overline{U}$ -ban, vagy
- (2) $\exists u \in \partial U$ és $\lambda \in (0, 1)$: $u = \lambda T(u) + (1 - \lambda)u_0$

2.1 Definíció. Legyen X egy lineáris tér a $\|\cdot\|$ normával felruházva és $K \subset X$.

- (1) K egy cikkelye X -nek, ha $\lambda K \subset K$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ és $K \neq \{0\}$
- (2) K -t kúpnak nevezzük, ha olyan cikkeley X -nek, melyre $\{-K\} \cap K = \{0\}$ teljesül
- (3) K_{rR} a kúp-beli körcikket jelöli, vagyis ha $0 < r < R$ valós számok, akkor
 $K_{rR} = \{x \in K : r \leq \|x\| \leq R\}$

2.7 Tétel. Krasnoselski'i tétel

Legyenek $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $r := \min\{\alpha, \beta\}$ és $R := \max\{\alpha, \beta\}$. Legyen $T : K_{rR} \rightarrow K$ kompakt leképezés, melyre $\exists h \in K$

0 úgy, hogy Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja a K -ban.

2.8 Tétel. Krasnoselski'i tétel

Legyenek $r, R > 0$, $0 < r < R$ valós számok. Legyen $T : K_{rR} \rightarrow K$ kompakt leképezés, melyre $\exists h \in K$

0 úgy, hogy

$$i) Tu \neq \lambda, \forall \|u\| = \alpha s \lambda > 1 \quad (2.6)$$

$$ii) Tu + \mu h \neq u, \forall \|u\| = \beta s \mu > 0 \quad (2.7)$$

Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja a K_{rR} -ben.

Bizonyítás. Legyen

$$\tilde{T}(u) = \begin{cases} h & \text{ha } u = 0 \\ \frac{\|u\|}{r} \cdot T\left(\frac{r}{\|u\|} \cdot u\right) + \left(1 - \frac{\|u\|}{r}\right) \cdot h & \text{ha } 0 < \|u\| < r \\ T(u) & \text{ha } \|u\| \in [r, R] \\ T\left(\frac{R}{\|u\|} \cdot u\right) & \text{ha } \|u\| > R \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{T} : K \rightarrow K$ folytonos leképezés. Legyen $D := \overline{\tilde{T}(K)} = \overline{\text{conv}\{h \cup T(K_{rR})\}} \subset K$. Mivel T kompakt és K_{rR} zárt, az értelmezés alapján (1.1) $h \cup T(K_{rR})$ relatív kompakt. A Mazur lemma alapján (2.2) D is relatív kompakt halmaz és $\tilde{T}(D) \subset D$. Mivel T folytonos és D nemüres, konvex és kompakt, alkalmazhatjuk a 2.2 tételt, amely alapján $\exists u^* \in D : \tilde{T}(u^*) = u^*$

Igazoljuk, hogy $\|u^*\| \in [r, R]$. Ehhez vizsgáljuk a következő három esetet:

- $\|u^*\| = 0 \Rightarrow \tilde{T}(u^*) = h = 0$, ami ellentmondás
- $0 < \|u^*\| < r$

$$\Rightarrow u^* = T\left(\frac{r}{\|u^*\|} \cdot u^*\right) + \left(1 - \frac{\|u^*\|}{r}\right) \cdot h \quad \Bigg/ \cdot \frac{r}{\|u^*\|}$$
A $\mu := \left(1 - \frac{\|u^*\|}{r}\right)$, $v := \frac{r}{\|u^*\|} \cdot u^*$ jelöléseket használva $\Rightarrow T(v) + \mu \cdot h = v$, ahol $\|v\| = r$ és $\mu > 0$, ami ellentmond a (2.7)-es feltételnek, vagyis ez az eset sem állhat fenn.
- $\|u^*\| > R \Rightarrow u^* = T\left(\frac{R}{\|u^*\|} \cdot u^*\right)$ Legyen $v := \frac{R}{\|u^*\|}$ és $\lambda := \frac{\|u^*\|}{R}$. Ekkor azt kapjuk, hogy $T(v) = \lambda v = u^*$, vagyis most a (2.6)-es feltételnek mondunk ellent.

■

2.4 Az általánosított metrikus tér és a Perov tétel

2.2 Definíció. (Általánosított metrikus tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *vektor-értékű metrika* alatt a

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

leképezést értjük melyre teljesülnek:

- i) $d(u, v) \geq 0$, $\forall u, v \in X$; $d(u, v) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $u = v$;
- ii) $d(u, v) = d(v, u)$, $\forall u, v \in X$;
- iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $\forall u, v, w \in X$.

Az i)-iii)-ben szereplő a relációk és az összeadás $\mathbb{R}^n$ -ben értendők az 1.1-es definíció alapján.

A fenti metrikával ellátott (X, d) teret általánosított metrikus térnek nevezzük. Ezen a téren is megfogalmazhatóak fixponttételek. Például a Banach-féle fixponttételt ilyen irányban Perov általánosította (lásd [10] és [9]) a következő fogalmak segítségével:

Állítás. (A nullához konvergáló mátrix tulajdonságai)[10, 152. oldal]

Legyen $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:

- i) M nullához konvergáló;
- ii) $I_n - M$ nonszinguláris (invertálható) és

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \dots,$$

ahol I_n az n -dimenziós egységmátrixot jelöli;

- iii) ha $\det(I_n - \lambda M) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor $|\lambda| < 1$;

- iv) $I_n - M$ nonszinguláris és $(I_n - M)^{-1}$ -nek pozitívak az elemei.

Bizonyítás. (A fenti állítás bizonyítása)

i) $\Rightarrow$ ii)

M nullához konvergáló mátrix. Ahhoz hogy $I - M$ nonszinguláris legyen, elégséges azt igazolni, hogy

$$(I - M)x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ megoldása az egyenletnek. Ekkor $x = Mx = M^2x = \dots = M^kx = \dots$, vagyis ha k -val tartunk ∞ -hez, azt kapjuk, hogy $x = 0$. Tehát $I - M$ nonszinguláris.

Másrészt mivel

$$\begin{aligned} I - (I - M)(I + M + M^2 + \dots + M^k) &= M^{k+1} \\ \Rightarrow (I + M + M^2 + \dots + M^k) &= (I - M)^{-1}(I - M^{k+1}), \end{aligned}$$

vagyis $(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \dots$, mivel M nullához konvergáló mátrix.

ii) $\Rightarrow$ i)

Mivel $I_n - M$ nonszinguláris mátrix, melyre fennáll az

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \dots$$

összefüggés, egyértelmű, hogy a $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = 0$ kell teljesüljön.

ii) $\Rightarrow$ iv)

Mivel M pozitív elemeket tartalmaz, és a ii)-es feltevésben eleve szerepel, hogy $I_n - M$ nonszinguláris, ez az implikció egyértelmű.

iv) $\Rightarrow$ i)

Legyen $M_k = I_n + M + M^2 + \dots + M^k$. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$M_k(I_n - M) = I_n - M^{k+1}.$$

Figyelembe véve, hogy M pozitív elemeket tartalmaz, valamint az iv) alapján $(I_n - M)$ nonszinguláris és $(I_n - M)^{-1}$ pozitív elemeket tartalmaz, felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_k &= (I_n - M^{k+1})(I_n - M)^{-1} \\ &= (I_n - M)^{-1} - M^{k+1}(I_n - M)^{-1} \\ &\leq (I_n - M)^{-1}. \end{aligned}$$

Mivel M_k növekvő, ismét egyértelmű, hogy a $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = 0$ teljesül. ■

2.3 Definíció. (Kontraktív leképezés)

Legyen az (X, d) általánosított metrikus tér. A $T : X \rightarrow X$ leképezés kontraktív, ha létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy bármely $u, v \in X$ esetén

$$d(T(u), T(v)) \leq M d(u, v).$$

2.9 Tétel. (Perov) [10, 153. oldal]

Legyen az (X, d) általánosított teljes metrikus tér, a $T : X \rightarrow X$ kontraktív operátor és az $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ a megfelelő nullához konvergáló Lipschitz mátrix.

Ekkor létezik $u^* \in X$, mely T -nek egyetlen fixpontja és bármely $u \in X$:

$$d(T^k(u), u^*) \leq M^k(I - M)^{-1}d(u, T(u)), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Bizonyítás. (A 2.9-es tétel bizonyítása)

Legyen u_0 egy tetszőleges elem X -ből és definiáljuk az $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy:

$$u_{k+1} = T(u_k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mivel T kontraktív az M Lipschitz mátrixszal, felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} d(u_k, u_{k+1}) &= d(T(u_{k-1}), T(u_k)) \leq M d(u_{k-1}, u_k) \leq M^2 d(u_{k-2}, u_{k-1}) \leq \\ &\leq \dots \leq M^k d(u_0, u_1), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} d(u_k, u_{k+m}) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(u_{k+i}, u_{k+i+1}) \\ &\leq d(u_0, u_1) \sum_{i=0}^{m-1} M^{k+i}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$d(u_k, u_{k+m}) \leq M^k \cdot (I - M)^{-1} \cdot d(u_0, u_1). \quad (2.9)$$

Tehát $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy sorozat. Legyen $u^* \in X$ a határértéke. Ekkor $T(u^*) = u^*$ és a (2.9)-es egyenlőtlenségben $m \rightarrow \infty$ esetén éppen a tételben kijelentett (2.8)-as egyenlőtlenséget kapjuk.

A fixpont egyértelműségét az bizonyítja, hogy ha létezne két különböző fixpont, $u_1^* \neq u_2^*$, akkor

$$d(u_1^*, u_2^*) = d(T^k(u_1^*), T^k(u_2^*)) \leq M^k \cdot d(u_1^*, u_2^*),$$

viszont mivel a jobboldal 0-hoz tart, $u_1^* = u_2^*$. ■

2.5 Az Ulam-Hyers stabilitás

Az általánosított metrikus térhez hasonlóan értelmezhetjük az általánosított normált teret is.

2.4 Definíció. (Általánosított normált tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *vektor-értékű norma* alatt a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést értjük, melyre teljesülnek:

- i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$;
- ii) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|, \forall x \in X, a$ skalár;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Az i)-iii)-ben szereplő relációk és összeadások $\mathbb{R}_n$ -ben értendők az 1.1-es definíció alapján. A fenti normával ellátott $(X, \|\cdot\|)$ teret általánosított normált térnek nevezzük.

Megjegyzés. Minden általánosított normált tér származtat egy általánosított metrikus teret, melynek általánosított metrikája a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ úgy, hogy

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

2.5 Definíció. (Ulam-Hyers stabilitás)

Legyen (X, d) általánosított metrikus tér és a $T : X \rightarrow X$ operátor. A $T(x) = x$ fixpontfeladat *Ulam-Hyers stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik a $\delta > 0$ valós szám úgy, hogy

$$d(x, T(x)) < \delta \Rightarrow \exists x^* \in X : T(x^*) = x^*, d(x, x^*) < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Megjegyzés. (Értelmezések az általánosított normált téren)

- 1.) Az Ulam-Hyers stabilitást értelmezhetjük a 2.4-es definíció értelmében vett általánosított normált téren is, vagyis az $(X, \|\cdot\|)$ általánosított normált téren értelmezett $T : X \rightarrow X$ operátor fixpontfeladata *Ulam-Hyers stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik a $\delta > 0$ valós szám úgy, hogy

$$\|x - T(x)\| < \delta \Rightarrow \exists x^* \in X : T(x^*) = x^*, \|x - x^*\| < \varepsilon. \quad (2.11)$$

- 2.) Az 1.)-es megjegyzéshez hasonlóan a 2.3-as definíció is átfogalmazható általánosított normált térre, miszerint ha (X, d) általánosított normált tér, akkor a $T : X \rightarrow X$ leképezés kontraktív, ha létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy

$$\|T(u) - T(v)\| \leq M\|u - v\|, \forall u, v \in X.$$

- 3.) A 2.9-es tétel a következőképp fogalmazható át:

Legyen az $(X, \|\cdot\|)$ általánosított teljes normált tér, a $T : X \rightarrow X$ kontraktív operátor és az $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ a megfelelő nullához konvergáló Lipschitz mátrix.

Ekkor létezik $u^* \in X$, mely T -nek egyetlen fixpontja és bármely $u \in X$:

$$\|T^k(u) - u^*\| \leq M^k(I - M)^{-1}\|T(u) - u\|, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Megjegyzés. A fenti tulajdonsággal rendelkező fixpontfeladatokat gyakorlatban általában egyszerű megoldani, mivel a definíció alapján elégséges egy közelítő megoldást találni (ekkor $d(x, T(x)) < \delta$) mondjuk numerikus módszerekkel, és az elég közel lesz a valódi megoldáshoz.

2.10 Tétel. (Ulam-Hyers stabilitás)[5]

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ általánosított teljes normált tér. Legyen $T : X \rightarrow X$ kontraktív operátor, vagyis létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix:

$$\|T(x) - T(y)\| < M \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Ekkor az $x = T(x)$ fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil.

Bizonyítás. (A 2.10-es tétel bizonyítása)

A Perov fixponttétel alapján létezik egy egyértelmű $x^* \in X$ fixpontja T -nek.

Legyen $T_1(x) = T(x) + h$, ahol $h \in X$ és $\|h\| < \delta$. Látható, hogy T_1 is kontraktív operátor az M nullához konvergáló mátrixszal, mivel

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq M \cdot \|x - y\|.$$

Tehát létezik egyértelműen egy $x \in X$: $x = T_1(x) = T(x) + h$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x - x^*\| &= \|T(x) + h - T(x^*)\| \\ &\leq \|T(x) - T(x^*)\| + \|h\| \\ &\leq \|T(x) - T(x^*)\| + \delta \\ &\leq M \cdot d(x, x^*) + \delta \end{aligned}$$

vagyis $d(x, x^*) \leq \delta(I_n - M)^{-1}$.

Tehát minden közelítő megoldás, melyre teljesül az $\|x - T(x)\| < \delta$ egyenlőtlenség, elég közel van a valódi megoldáshoz. ■

Alkalmazások nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerekre

Az előző fejezetbeli eredményeket felhasználva ebben a fejezetben különböző nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerek megoldásainak létezését, egyértelműségét és Ulam-Hyers stabilitását vizsgáljuk.

Mindezek érdekében először egy integráloperátort rendelünk a rendszerhez úgy, hogy az operátor fixpontja megoldása legyen a rendszernek, majd különböző feltételeket szabunk az f és g függvényekre (például legyenek Lipschitz tulajdonságúak vagy legfennebb lineáris növekedésűek) és az első fejezetben tárgyalt fixponttételek segítségével megoldjuk az imént szerkesztett fixpontfeladatot. A [6] és [7] cikkek elsőrendű rendszereket vizsgálnak hasonló módszerekkel.

3 Alapfogalmak

Az első fejezet eredményein kívül a következő alapfogalmakra is szükségünk lesz:

3.1 Definíció. (Carathéodory függvény)

Legyenek X, Y topologikus terek és (T, M, μ) mérhető tér. Az $F : T \times X \rightarrow Y$ leképezés Carathéodory függvény, ha

- i) $F(\cdot, x)$ mérhető, $\forall x \in X$,
- ii) $F(t, \cdot)$ folytonos, $\forall t \in T$.

3.2 Definíció. (Lipschitz tulajdonság)

Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz tulajdonságú a második és a harmadik változóban, ha léteznek az a, b pozitív valós számok úgy, hogy bármely $s \in \mathbb{R}$ esetén:

$$|F(s, x, y) - F(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a|x - \tilde{x}| + b|y - \tilde{y}|, \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

3.3 Definíció. (Legfennebb lineáris növekedés)

Azt mondjuk, hogy az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény legfennebb lineárisan nő a második és a harmadik változó szerint, ha léteznek az a, b, c pozitív valós számok úgy, hogy bármely $s \in \mathbb{R}$ esetén:

$$|F(s, x, y)| \leq a|x| + b|y| + c, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

3.4 Definíció. (Kiegészítés a 1.6-os definícióhoz, a $\mathcal{C}^1$ norma)

Legyen $|\cdot| : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ egy norma. A $\mathcal{C}^1$ osztályú függvények normájaként a $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1} : \mathcal{C}^1(K) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést vesszük, úgy, hogy bármely $u \in \mathcal{C}^1(K)$ esetén

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1} = |u| + \delta \cdot |u'|, \quad (3.3)$$

ahol $|\cdot| : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ norma.

4 Bilokális feltétel

4.1 A probléma megfogalmazása és tulajdonságainak vizsgálata

Tekintsük a következő bilokális peremfeltételű differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x(0) + b_{11}x'(0) = 0 & (1) \\ a_{12}x(1) + b_{12}x'(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y(0) + b_{21}y'(0) = 0 & (3) \\ a_{22}y(1) + b_{22}y'(1) = 0 & (4) \end{cases} \quad (4.1)$$

Legyenek $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, és $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $b_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$, ahol $i, j \in \{1, 2\}$. Továbbá jelölje

$$\sigma_i = -a_{i1}a_{i2} + a_{i2}b_{i1} - a_{i1}b_{i2}, \quad (4.2)$$

és legyen $\sigma_i > 0$.

Alakítsuk át a rendszerben szereplő differenciálegyenleteket integrálegyenletekké. Ehhez integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.3)$$

Végezzük el a $t_1 = 1$ helyettesítést és fejezzük ki $x'(0)$ -át és $x'(1)$ -et az (1)-es illetve a (2)-es feltételekből. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$-x(1) + \frac{b_{12}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \cdot x(0) = - \frac{b_{12}}{a_{12}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.4)$$

Integráljuk a (4.3)-es egyenletet a $[0, t_2]$ intervallumon, ahol $t_2 \geq t_1$:

$$x(t_2) - x(0) = -t_2 \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \cdot x(0) - \int_0^{t_2} (t_2 - s) f(s, x(s), y(s)) ds, \quad (4.5)$$

ahol a $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$ összefüggések miatt a következő átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds dt_1 &= \int_0^{t_2} \int_s^{t_2} f(s, x(s), y(s)) dt_1 ds \\ &= \int_0^{t_2} f(s, x(s), y(s)) \int_s^{t_2} dt_1 ds \\ &= \int_0^{t_2} (t_2 - s) f(s, x(s), y(s)) ds \end{aligned}$$

Ismét végezzük el a $t_2 = 1$ helyettesítést és rendezzük az egyenletet:

$$x(1) - x(0) \left(1 - \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) = - \int_0^1 (1 - s) f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.6)$$

Adjuk össze a (4.4)-as és a (4.6)-ös egyenletet és fejezzük ki az $x(0)$ -át:

$$x(0) = - \left(\frac{b_{11}a_{12}}{a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}} \right) \int_0^1 \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} + 1 - s \right) f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Visszahelyettesítve a (4.5)-es egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - t \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) \cdot \frac{b_{11}a_{12}}{\sigma_1} \cdot \int_0^1 \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} + 1 - s \right) f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^t (t-s) f(s, x(s), y(s)) ds \\ &= \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds, \end{aligned}$$

ahol $G_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G_1(t, s) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) - (t-s) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - s \cdot a_{12}b_{11} - t \cdot a_{11}b_{12} - t \cdot a_{11}a_{12} \\ \quad + t \cdot s \cdot a_{11}a_{12} + t \cdot a_{11}b_{12} - t \cdot b_{11}a_{12} + t \cdot a_{11}a_{12} \\ \quad - s \cdot a_{11}b_{12} + s \cdot b_{11}a_{12} - s \cdot a_{11}a_{12}) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} [b_{11} \cdot (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) + s \cdot a_{11}(t \cdot a_{12} - b_{12} - a_{12})] & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Tehát

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1 - t \cdot \frac{a_{21}}{b_{21}} \right) \cdot \frac{b_{21}a_{22}}{\sigma_2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{b_{22}}{a_{22}} + 1 - s \right) g(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^t (t-s) g(s, x(s), y(s)) ds \\ &= \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds, \end{aligned}$$

ahol $G_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2}(b_{22} + a_{22} - t \cdot a_{22}) \cdot (b_{21} - s \cdot a_{21}), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_2}(b_{21} - t \cdot a_{21}) \cdot (b_{22} + a_{22} - s \cdot a_{22}), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Tekintsük a $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ operátorokat úgy, hogy:

$$\begin{cases} T_1(x, y)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ T_2(x, y)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds \end{cases} \quad (4.9)$$

és a

$$T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2, T = (T_1, T_2) \quad (4.10)$$

operátort. Látható, hogy a (4.1)-es differenciálegyenlet rendszer a fenti átalakításokat és jelöléseket követően tekinthető úgy, mint a $T(u) = u$ fixpontfeladat, vagyis ha

$$\exists u^* = (x^*, y^*) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : T(u^*) = u^*,$$

akkor x^* és y^* teljesítik a (4.1)-es rendszer egyenleteit a bilokális peremfeltételekkel együtt.

4.1 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 1)

A (4.7)-os következtetés és a $\sigma_i > 0$ feltétel alapján

$$G_1(t, s) \geq 0, \forall (t, s) \in [0, 1]^2.$$

Bizonyítás. (A 4.1-es lemma bizonyítása)

1. eset: $0 \leq s \leq t \leq 1$

Ekkor

$$\begin{aligned} G_1(t, s) &= \frac{1}{\sigma_1}(b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}) \\ &= \frac{1}{\sigma_1}(b_{12} + a_{12} \cdot (1 - t)) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}). \end{aligned}$$

Látható, hogy

- $\frac{1}{\sigma_1} > 0$,
- $(b_{12} + a_{12} \cdot (1 - t)) \geq 0$, mivel $b_{ij}, a_{ij}, 1 - t \geq 0$,
- $-a_{11}a_{12} + b_{11}a_{12} - a_{11}b_{12} > 0 \Rightarrow a_{12}(-a_{11} + b_{11}) > a_{11}b_{12} \geq 0 \Rightarrow -a_{11} + b_{11} \geq 0 \Rightarrow b_{11} \geq a_{11} \geq s \cdot a_{11} \Rightarrow b_{11} - s \cdot a_{11} \geq 0$

2. eset: $0 \leq t \leq s \leq 1$

Ekkor $G_1(t, s) = \frac{1}{\sigma_1}(b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) \geq 0$ a fentihez hasonló gondolatmenet alapján.

■

4.2 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 2)

$$G_i(t, s) \leq \begin{cases} G_i(s, s), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ G_i(t, t), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Bizonyítás. (A 4.2-es lemma bizonyítása)

Mindkét esetben egyszerűen belátható az adott egyenlőtlenség. Például az első esetben:

$$G_1(t, s) \leq G_1(s, s) \Leftrightarrow -t \cdot a_{12} \leq -s \cdot a_{12} \Leftrightarrow 0 \leq s \leq t$$

■

4.3 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 3)

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) / t \in I \right\}, \\ \gamma_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}) / t \in I \right\} \end{aligned}$$

$$\text{és } \alpha = \frac{-a_{11}a_{12} + 3a_{12}b_{11}}{3\sigma_1} > \frac{1}{3}, \quad \Gamma = \begin{cases} \gamma_1 & \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \gamma_2 & \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{valamint}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_2} (6b_{21}b_{22} + 3\sigma_2 + 2a_{21}a_{22}) / t \in I \right\}, \\ \delta_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_2} (b_{22} + a_{22} - t \cdot a_{22}) \cdot (b_{21} - t \cdot a_{21}) / t \in I \right\} \end{aligned}$$

$$\text{és } \beta = \frac{-a_{21}a_{22} + 3a_{22}b_{21}}{3\sigma_1} > \frac{1}{3}, \quad \Delta = \begin{cases} \delta_1 & \beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \delta_2 & \beta \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ekkor } \sup_{t \in I} \int_0^1 G_1(t, s) ds \leq \Gamma \text{ és } \sup_{t \in I} \int_0^1 G_2(t, s) ds \leq \Delta$$

Bizonyítás. (A 4.3-as lemma bizonyítása) A bizonyításhoz az előző két lemmát használjuk.

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_1(s, s) ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}) ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \int_0^1 b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - s(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}a_{12}) + s^2a_{11}a_{12} ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \left[(b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}) - \frac{1}{2}(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}a_{12}) + \frac{1}{3} \cdot a_{11}a_{12} \right] \\ &= \frac{1}{6\sigma_1} [6b_{11}b_{12} + 3a_{12}b_{11} - 3a_{11}b_{12} - a_{11}a_{12}] \\ &= \frac{1}{6\sigma_1} [6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}], \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\int_0^1 G_1(t, t) ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}) ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}).\end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$\int_0^1 G_1(t, s) ds \leq \begin{cases} \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Tehát $\sup_{t \in I} \int_0^1 G_1(t, s) ds = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Vizsgáljuk a γ_1 -et, a γ_2 -őt valamint ezek maximumát:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) / t \in I \right\} \\ &= \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) \\ \gamma_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}) / t \in I \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \sup \left\{ b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) + t^2 \cdot a_{11}a_{12} / t \in I \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_1} (b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}) + \frac{1}{\sigma_1} \sup \left\{ t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) / t \in I \right\}\end{aligned}$$

Viszont

$$\begin{aligned}t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) &< 0 \\ \Leftrightarrow t \cdot a_{11}a_{12} - (a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < (1 - t) \cdot a_{11}a_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12},\end{aligned}$$

ami igaz.

Mivel a 0 értéket fel is veszi a kifejezés a $t = 0$ esetben

$$\Rightarrow \sup \left\{ t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) / t \in I \right\} = 0$$

Tehát

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) \\ &= \frac{b_{11}b_{12}}{\sigma_1} + \frac{1}{2} + \frac{a_{11}a_{12}}{3\sigma_1}, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\sigma_1} b_{11}b_{12} + \frac{1}{\sigma_1} a_{12}b_{11}.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\max \{ \gamma_1, \gamma_2 \} = \begin{cases} \gamma_1 & \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \gamma_2 & \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, vagyis $\int_0^1 G_1(t, s) \leq \Gamma$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $\int_0^1 G_2(t, s) \leq \Delta$.

■

4.2 A megoldás létezése, egyértelmősége és Ulam-Hyers stabilitása a Perov tétel alkalmazásával

Megjegyzés. A (4.1)-es egyenletrendszerben szereplő f és g függvények Lipschitz tulajdonságúak a második és a harmadik változóban az (3.1)-es definíció alapján, ha léteznek olyan a_i, b_i , pozitív valós számok, $i \in \{1, 2\}$, hogy

$$\begin{cases} |f(s, x, y) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_1|x - \tilde{x}| + b_1|y - \tilde{y}|, \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \\ |g(s, x, y) - g(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_2|x - \tilde{x}| + b_2|y - \tilde{y}|, \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.11)$$

4.1 Tétel. Tekintsük a (4.1)-es egyenletrendszert. Ha f és g Lipschitz tulajdonságú függvények és $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik pontosan egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. Igazoljuk a Perov tétel segítségével, hogy a (4.10)-as operátornak egyetlen fixpontja van. A Perov tétel alkalmazásához igazoljuk, hogy létezik $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy bármely $u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$ esetén

$$\|T(u) - T(\tilde{u})\| \leq M \cdot \|u - \tilde{u}\|,$$

ahol

$$\|u\| = \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} \quad \forall u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2,$$

és $\|\cdot\|_\infty$ a maximumnormát jelöli, vagyis $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$.

A fenti cél érdekében végezzük el a következő majorálásokat:

$$\begin{aligned} |T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t, s) \cdot (f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))) ds \right| \\ &\leq (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) \int_0^1 |G_1(t, s)| ds \end{aligned}$$

A 4.1, 4.2, 4.3-as lemmák alapján

$$\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Gamma \cdot (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty).$$

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Delta \cdot (a_2\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_2\|y - \tilde{y}\|_\infty),$$

ahol a (4.1)-es tétel előtti jelöléseket használtuk.

Tehát

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\tilde{u})\| &= \|T(x, y) - T(\tilde{x}, \tilde{y})\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \\ \|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

Tehát a T kontraktív operátor, vagyis a 2. fejezet 2.9-os tétele alapján létezik $u^* = (x^*, y^*)$ T -nek egyetlen fixpontja. Ez implikálja a rendszer egyértelmű megoldásának létezését. ■

4.2 Tétel. *A 4.1-es tétel feltételei mellett a (4.1)-es rendszer Ulam-Hyers stabil.*

Bizonyítás. A 2. fejezet 2.10-es tétele alapján a kontraktív operátorok Ulam-Hyers stabilak. A (4.1)-es rendszerhez rendelt T operátor kontraktív, vagyis a $T(u) = u$ fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil, ami implikálja a rendszer Ulam-Hyers stabilitását. ■

4.3 A megoldás létezése a Schauder tétel alkalmazásával

Megjegyzés. Legyenek f és g legfennebb lineárisan növekvő függvények, vagyis az (3.2)-es definíció alapján léteznek $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$ pozitív valós számok úgy, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} |f(s, x, y)| \leq a_1|x| + b_1|y| + c_1 \\ |g(s, x, y)| \leq a_2|x| + b_2|y| + c_2. \end{cases} \quad (4.12)$$

Legyen $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$ ahol Γ és Δ a (4.1)-es tételbeli jelölések.

4.3 Tétel. Ha a (4.1)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek és $M_{\Gamma\Delta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. Ismét a (4.10)-as funkcionálról bizonyítjuk hogy van legalább egy fixpontja. A lineáris növekedési feltétel miatt a Schauder tételt (I fejezet 2.3-as tétel) fogjuk alkalmazni. Ehhez keresnünk kell egy $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre $T(D) \subset D$.

A 4.1-es tétel jelöléseit használva a bizonyítás alapján felírhatjuk, hogy

$$\int_0^1 |G_1(t, s)| ds \leq \Gamma,$$

$$\int_0^1 |G_2(t, s)| ds \leq \Delta.$$

A (4.9)-es jelölés, az f növekedési tulajdonsága és a fenti megjegyzés alapján:

$$\begin{aligned} \|T_1(x, y)\|_\infty &\leq \Gamma(a_1\|x\|_\infty + b_1\|y\|_\infty + c_1) \\ \|T_2(x, y)\|_\infty &\leq \Delta(a_2\|x\|_\infty + b_2\|y\|_\infty + c_2) \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \|T(x, y)\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y)\|_\infty \\ \|T_2(x, y)\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Keressük meg $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $\|x\|_\infty \leq R_1$ és $\|y\|_\infty \leq R_2$, akkor $\|T_1(x, y)\|_\infty \leq R_1$ és $\|T_2(x, y)\|_\infty \leq R_2$, vagyis ha

$$u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in ([0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\},$$

akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

A nullmátrix tulajdonságait figyelembevéve ehhez elégséges, hogy az

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, és akkor a 2. fejezet 2.3-as tétele alapján a T operátornak létezik legalább egy fixpontja, vagyis a (4.1)-es rendszernek is. ■

4.4 Bilokális feltétel, amikor a jobboldal x' és y' is függ

A nemlineáris folyadékmechanika sok problémája valamilyen másod- (vagy magasabb) rendű differenciálegyenlettel modellezhető. Például a [4]-es cikk egy harmadfokú folyadékon keresztül történő hővezetés problémáját vizsgálja, mely két párhuzamos lemez között található, melyeket melegítünk. Ezt a jelenséget a következő rendszerrel írja le:

$$\begin{cases} x''(t) = +a\varphi(t)x'(t) - 2a\varphi'(t)x(t) + a\varphi''^2(t) \\ y''(t) + a\varphi(t)y'(t) + 2x(t) + 4a\varphi'^2(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = b = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{M}; M = ct \end{cases} \quad (4.13)$$

Látható, hogy ez a rendszer annyiban tér el a (4.1)-es általános alakú rendszertől, hogy az ott szereplő f és g függvények itt függnak a x' -től illetve y' -től is. Mivel az alkalmazások terén általában ilyen típusú rendszerekkel találkozunk, melyekben a jobboldalak függnak az x' -től és az y' -től is, a következőkben vizsgáljuk meg ezt az esetet, valamint fogalmazzuk meg a létezési illetve egyértelműségi tételeket.

Tehát tekintsük a következő bilokális peremfeltételű differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) \\ a_{11}x(0) + b_{11}x'(0) = 0 & (1) \\ a_{12}x(1) + b_{12}x'(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y(0) + b_{21}y'(0) = 0 & (3) \\ a_{22}y(1) + b_{22}y'(1) = 0 & (4) \end{cases} \quad (4.14)$$

Mint az eddigiekben, legyenek $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, és $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $b_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Az előző rendszerhez hasonlóan ezt a rendszert is átalakíthatjuk egy operátor fixpontfeladatává. Megfigyelhetjük, hogy a megjelent plusz feltétel, vagyis az, hogy az f illetve g függvények x' -től és az y' -től is függhetnek, nem változtat a gondolatmenet elején. Így az előző gondolatmenethez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$x(t) = \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds,$$

valamint

$$y(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds,$$

ahol σ_i a 4.2-es egyenletben adott, $G_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, valamint a 4.7-es és a 4.8-as egyenletek alapján

$$G_i(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} (b_{i2} + a_{i2} - t \cdot a_{i2}) \cdot (b_{i1} - s \cdot a_{i1}), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_i} (b_{i1} - t \cdot a_{i1}) \cdot (b_{i2} + a_{i2} - s \cdot a_{i2}), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Látható, hogy az eszközölt változtatás nem módosít a G_1, G_2 Green függvények tulajdonságain, tehát a továbbiakban is fennállnak a 4.1-es, a 4.2-es és a 4.3-as lemmák az előzőleg bevezetett jelölésekkel.

Most írjuk fel a megfelelő operátort, aminek a fixpontfeladata ekvivalens a rendszert kielégítő x illetve y keresésével.

4.4 Lemma. Legyenek $i \in \{1, 2\}$ -re a következő operátorok:

$$T_i(x, y)(t) = \int_0^1 G_i(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds \quad (4.16)$$

Ekkor $T_1, T_2 : (\mathcal{C}^1[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}^1[0, 1]$.

Bizonyítás. (A 4.4-es lemma bizonyítása)

$$\frac{dT_i}{dt}(x, y)(t) = \int_0^1 \frac{\partial G_i}{\partial t}(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds,$$

ahol

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t, s) = \begin{cases} -\frac{a_{i2}}{\sigma_i}(b_{i1} - s \cdot a_{i1}), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ -\frac{a_{i1}}{\sigma_i}(b_{i2} + a_{i2} - s \cdot a_{i2}), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt}(x, y)(t) &= - \int_0^t \frac{a_{i2}}{\sigma_i}(b_{i1} - s \cdot a_{i1}) \cdot f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds \\ &\quad - \int_t^1 \frac{a_{i1}}{\sigma_i}(b_{i2} + a_{i2} - s \cdot a_{i2}) \cdot f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) ds, \end{aligned}$$

ami folytonos t szerint.

Így valóban $T_1, T_2 : (\mathcal{C}^1[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}^1[0, 1]$. ■

Továbbá tekintsük a

$$T : (\mathcal{C}^1[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}^1[0, 1])^2, \quad T = (T_1, T_2) \quad (4.17)$$

operátort. Látható, hogy a (4.14)-es differenciálegyenlet rendszer a megfelelő átalakításokat és jelöléseket követően tekinthető úgy, mint a $T(u) = u$ fixpontfeladat, vagyis ha

$$\exists u^* = (x^*, y^*) \in (\mathcal{C}^1[0, 1])^2 : T(u^*) = u^*,$$

akkor x^* és y^* teljesítik a (4.14)-es rendszer egyenleteit a bilokális peremfeltételekkel együtt.

4.5 Lemma. Az ??-es definícióban szereplő $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ normát tekintve a $(\mathcal{C}^1[0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ teljes metrikus tér.

Megjegyzés. A (4.14)-es egyenletrendszerben szereplő f és g függvények rendelkezzenek a következő tulajdonságokkal: legyenek a_i, b_i, c_i, d_i pozitív valós számok, $i \in \{1, 2\}$ úgy, hogy

$$\begin{cases} |f(s, x, y, x', y') - f(s, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}')| \leq a_1|x - \tilde{x}| + b_1|y - \tilde{y}| + c_1|x' - \tilde{x}'| + d_1|y' - \tilde{y}'|, \\ \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \\ |g(s, x, y, x', y') - g(s, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}')| \leq a_2|x - \tilde{x}| + b_2|y - \tilde{y}| + c_2|x' - \tilde{x}'| + d_2|y' - \tilde{y}'|, \\ \quad \forall x, x', y, y', \tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{y}' \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4 Tétel. Tekintsük a (4.14)-es egyenletrendszert. Ha f és g a fenti tulajdonsággal rendelkező függvények és $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$ nullához konvergáló mátrix, ahol Γ és Δ a 4.3-as lemma jelölései, akkor a rendszernek létezik pontosan egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete a (4.1)-es tétel bizonyításához hasonlóan a következő: a Perov tétel segítségével igazoljuk, hogy a (4.17)-es operátornak egyetlen fixpontja van. A Perov tétel alkalmazásához igazoljuk, hogy a fent megadott $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy bármely $u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$ esetén

$$\|T(u) - T(\tilde{u})\| \leq M \cdot \|u - \tilde{u}\|,$$

ahol

$$\|u\| = \begin{pmatrix} \|x\|_{\mathcal{C}^1} \\ \|y\|_{\mathcal{C}^1} \end{pmatrix}, \quad \forall u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2,$$

és $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ az ??-es definíció alapján a $\mathcal{C}^1$ -beli normát jelöli, vagyis

$$\|x\|_{\mathcal{C}^1} = \|x\|_{\infty} + \delta \|x'\|_{\infty}, \quad \forall x \in \mathcal{C}^1[0, 1]$$

$$\text{és } \delta = \max \left\{ \frac{c_i}{a_i}, \frac{d_i}{b_i} / i \in \{1, 2\} \right\}.$$

A 4.1-es, 4.2-es és a 4.3-as lemmák alapján végezzük el a következő majorálásokat:

$$\begin{aligned} & |T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| = \\ & = \left| \int_0^1 G_1(t, s) \cdot (f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{x}'(s), \tilde{y}'(s))) ds \right| \\ & \leq \int_0^1 |G_1(t, s)| \cdot |f(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{x}'(s), \tilde{y}'(s))| ds \\ & \leq (a_1 \|x - \tilde{x}\|_{\infty} + b_1 \|y - \tilde{y}\|_{\infty} + c_1 \|x' - \tilde{x}'\|_{\infty} + d_1 \|y' - \tilde{y}'\|_{\infty}) \int_0^1 |G_1(t, s)| ds \\ & \leq \Gamma [a_1 (\|x - \tilde{x}\|_{\infty} + \delta \|x' - \tilde{x}'\|_{\infty}) + b_1 (\|y - \tilde{y}\|_{\infty} + \delta \|y' - \tilde{y}'\|_{\infty})] \end{aligned}$$

Így

$$\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\mathcal{C}^1} \leq \Gamma \cdot (a_1 \|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{C}^1} + b_1 \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1}).$$

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\mathcal{C}^1} \leq \Delta \cdot (a_2 \|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{C}^1} + b_2 \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1}).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\tilde{u})\| &= \|T(x, y) - T(\tilde{x}, \tilde{y})\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\mathcal{C}^1} \\ \|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\mathcal{C}^1} \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_{\mathcal{C}^1} \\ \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1} \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

Tehát a T kontraktív operátor, vagyis a 2. fejezet 2.9-es tétele alapján létezik $u^* = (x^*, y^*)$ T -nek egyetlen fixpontja. Ez implikálja a rendszer egyértelmű megoldásának létezését. ■

4.5 Tétel. (Ulam-Hyers stabilitás)

Az előző tétel feltételei mellett a (4.14)-es rendszer Ulam-Hyers stabil.

Bizonyítás. A (4.14)-es rendszerhez rendelt T operátor kontraktív, vagyis 2. fejezet 2.10-es tétele alapján a $T(u) = u$ fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil, ami implikálja a rendszer Ulam-Hyers stabilitását. ■

4.6 Tétel. Legyenek f és g legfennebb lineárisan növekvő függvények az $a_{1,2}, b_{1,2}$ és $c_{1,2}$ pozitív valós számokkal (lásd 4.3-es megjegyzés). Legyen $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$, ahol Γ és Δ a 4.3-as lemma jelölései.

Ha a (4.1)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek és $M_{\Gamma\Delta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. (A 4.6-os tétel igazolása)

A 4.3-as tételhez hasonlóan ismét azt igazoljuk, hogy a (4.17)-es operátornak van legalább egy fixpontja. A lineáris növekedési feltétel miatt a Schauder tételt (1. fejezet 2.3-as tétel) fogjuk alkalmazni.

Keressük meg a $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre $T(D) \subset D$. Felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \|T_1(x, y)\|_\infty &\leq \Gamma(a_1\|x\|_\infty + b_1\|y\|_\infty + c_1), \\ \|T_2(x, y)\|_\infty &\leq \Delta(a_2\|x\|_\infty + b_2\|y\|_\infty + c_2). \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \|T(x, y)\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y)\|_\infty \\ \|T_2(x, y)\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Keressük meg $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $\|x\|_\infty \leq R_1$ és $\|y\|_\infty \leq R_2$, akkor $\|T_1(x, y)\|_\infty \leq R_1$ és $\|T_2(x, y)\|_\infty \leq R_2$, vagyis ha

$$u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in ([0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\},$$

akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

A nullmátrix tulajdonságait figyelembevéve ehhez elégséges, hogy az

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, és akkor a 2. fejezet 2.3-as tétele alapján a T operátornak létezik legalább egy fixpontja, vagyis a (4.1)-es rendszernek is. ■

Megjegyzés. A fenti esetekben a megjelent Green-függvényeket meg tudtuk majorálni a peremfeltételekben szereplő együtthatók segítségével. Így láttuk hogy hogyan kell megszerkeszteni a megfelelő mátrixot, ami nullához konvergáló kell legyen. Viszont azt is láthattuk, hogy a Green-függvények elágazó függvények, melyek mindkét ágon folytonosak, tehát megmajorálhatjuk őket anélkül, hogy expliciten megkeresnénk a majoránst.

Ezt kihasználva a 2.5-ös alfejezetben megvizsgáljuk hogy a peremfeltételek általánosításával hogyan kezelhetjük a létezést és az egyértelműséget.

4.5 A bilokális peremfeltételek általánosítása

Legyenek a peremfeltételek az $\alpha_i, \beta_i : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ lineáris és folytonos funkcionálokon keresztül a következőképpen általánosítva:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ x'(0) = \alpha_0[x] & (1) \\ x(1) = \alpha_1[x'] & (2) \\ y'(0) = \beta_0[y] & (3) \\ y(1) = \beta_1[y'] & (4) \end{cases} \quad (4.19)$$

Integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon és alkalmazzuk rá az α_1 funkcionált:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds =: f_1(t_1) \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \alpha_1[x'] - \alpha_0[x] \cdot \alpha_1[1] = \alpha_1[f_1]$$

$$\Rightarrow x(1) = \alpha_0[x] \cdot \alpha_1[1] + \alpha_1[f_1]. \quad (4.21)$$

A (4.20)-as egyenletet a $[0, t_2]$ intervallumon integrálva, a $t_2 = 1$ helyettesítést elvégezve, a kapott egyenletet vonjuk ki a (4.21)-es egyenletből és fejezzük ki az $x(0)$ -át. Így azt kapjuk, hogy

$$x(t) = \alpha_0[x](\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds,$$

$$\text{ahol } f_1(t) = - \int_0^t f(s, x(s), y(s))ds.$$

Hasonlóan

$$y(t) = \beta_0[y](\beta_1[1] + t - 1) + \beta_1[g_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds,$$

$$\text{ahol } g_1(t) = - \int_0^t g(s, x(s), y(s))ds.$$

Legyenek a $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ funkcionálok úgy, hogy:

$$\begin{cases} T_1(x, y)(t) = \alpha_0[x](\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ T_2(x, y)(t) = \beta_0[y](\beta_1[1] + t - 1) + \beta_1[g_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \end{cases}$$

Így a $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2, T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionálhoz tartozó fixpont feladat megoldása elvezet a (4.19)-es differenciálegyenlet rendszer megoldásához.

Most vizsgáljuk meg a megoldás létezését, egyértelműségét és a rendszer Ulam-Hyers stabilitását az eddigiekben is tárgyalt feltételekre, vagyis az f és g Lipschitz- illetve legfennebb lineáris növekedési tulajdonságát tekintve.

4.7 Tétel. (Lipschitz tulajdonság)

Legyenek f és g Lipschitz tulajdonságúak, azaz teljesítsék a (4.11)-es feltételt.

Legyen $M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\|+1) + a_1(\|\alpha_1\|+2) & b_1(\|\alpha_1\|+2) \\ \|\beta_0\|(\|\beta_1\|+1) + a_2(\|\beta_1\|+2) & b_2(\|\beta_1\|+2) \end{pmatrix}$ nullához konvergáló mátrix. Ekkor a (4.19)-es rendszer Ulam-Hyers stabil és létezik egyértelmű megoldása.

Bizonyítás. Ekkor $|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| =$

$$\begin{aligned} &= \left| (\alpha_0[x - \tilde{x}])(\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1 - \tilde{f}_1] + \int_0^1 (1-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (t-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)))ds \right| \\ &\leq |\alpha_0[x - \tilde{x}]| |\alpha_1[1] + t - 1| + |\alpha_1[f_1 - \tilde{f}_1]| + \int_0^1 |(1-s)| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\ &\quad + \int_0^t |t-s| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1 - \tilde{f}_1\|_\infty \\ &\quad + \int_0^1 |(1-s)| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds + \int_0^t |t-s| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds. \end{aligned}$$

Így $\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\|+1)\|x - \tilde{x}\|_\infty + \|\alpha_1\| \cdot (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) + 2 \cdot (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) \\ &= (\|\alpha_0\|(\|\alpha_1\|+1) + a_1(\|\alpha_1\|+2))\|x - \tilde{x}\|_\infty + (b_1(\|\alpha_1\|+2))\|y - \tilde{y}\|_\infty, \end{aligned}$$

és teljesen hasonlóan

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq (\|\beta_0\|(\|\beta_1\|+1) + a_2(\|\beta_1\|+2))\|x - \tilde{x}\|_\infty + (b_2(\|\beta_1\|+2))\|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

Tehát megkaptuk a kívánt majorálást:

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &\leq \begin{pmatrix} \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\|+1) + a_1(\|\alpha_1\|+2) & b_1(\|\alpha_1\|+2) \\ \|\beta_0\|(\|\beta_1\|+1) + a_2(\|\beta_1\|+2) & b_2(\|\beta_1\|+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tehát a T kontraktív operátor, vagyis a 2. fejezet 2.9-os tétele alapján egyetlen $u^* = (x^*, y^*)$ létezik úgy, hogy $T(u) = u$ és a 2. fejezet 2.10-es tétele alapján a fixpontprobléma Ulam-Hyers stabil. Mindez implicálja a rendszer egyértelmű megoldásának létezését és Ulam-Hyers stabilitását. ■

4.8 Tétel. (Legfennebb lineáris növekedés)

Ha a (4.19)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek (vagyis teljesítik a (4.12)-es feltételt) és $M_{\alpha\beta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressük a $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre igaz, hogy $T(D) \subset D$.

Ehhez vizsgáljuk a $|T_1(x, y)(t)|$ -t.

$$\begin{aligned} & \left| (\alpha_0[x]) (\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s) f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^t (t-s) f(s, x(s), y(s)) ds \right| \\ & \leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1\|_\infty + \int_0^1 |(1-s)| f(s, x(s), y(s))| ds \\ & \quad + \int_0^t |t-s| |f(s, x(s), y(s))| ds \\ & \leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + (a_1 \|x\|_\infty + b_1 x_\infty + c_1) \left(1 + \int_0^t t ds \right) + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1\|_\infty \end{aligned}$$

Hasonlóan majorálhatjuk a $T_2(x, y)(t)$ -t. Ha t -vel szuprémumra térünk, a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\|T(u)\| \leq M_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(\|\alpha_1\| + 2) \\ c_2(\|\beta_1\| + 2) \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $\|x\|_\infty \leq R_1$ és $\|y\|_\infty \leq R_2$, akkor $\|T_1(x, y)\|_\infty \leq R_1$ és $\|T_2(x, y)\|_\infty \leq R_2$, vagyis ha

$$u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\},$$

akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1(\|\alpha_1\| + 2) \\ c_2(\|\beta_1\| + 2) \end{pmatrix}$ teljesüljön. ■

5 Polilokális feltétel

Tekintsük a következő polilokális feltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x'(0) + b_{11}x'(1) = 0 & (1) \\ a_{12}x(0) + b_{12}x(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y'(0) + b_{21}y'(1) = 0 & (3) \\ a_{22}y(0) + b_{22}y(1) = 0 & (4) \end{cases} \quad (5.1)$$

Ahol $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, a_{ij}, b_{ij} , valós számok, $i, j \in \{1, 2\}$, és $a_{11} + b_{11} \neq 0$, $a_{12} + b_{12} \neq 0$, $a_{21} + b_{21} \neq 0$, $a_{22} + b_{22} \neq 0$.

Az első differenciálegyenletet integráljuk a $[0, t_1]$ intervallumon, ahol $t_1 \in I$. Ekkor:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds.$$

A $t_1 = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$x'(1) - x'(0) = - \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds.$$

viszont az (1)-ből $x'(1)$ -et kifejezve és visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$x'(0) = \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Így

$$x'(t_1) = \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Az így kapott egyenletet integráljuk a $[0, t_2]$ intervallumon, ahol $t_1 < t_2$:

$$x(t_2) - x(0) = t_2 \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds dt_1.$$

Ismét $t_2 = 1$ -et helyettesítünk a fenti egyenletbe, majd kifejezzük a (2)-ből az $x(1)$ -et

$$\begin{aligned} x(1) - x(0) &= \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^1 (1-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ x(1) - x(0) &= \int_0^1 \left(\frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - 1 + s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ -x(0) \cdot \left(1 + \frac{a_{12}}{b_{12}} \right) &= \int_0^1 \left(\frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - 1 + s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ x(0) &= \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} \int_0^1 \left(\frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} - s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} \int_0^1 \left(\frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} - s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^t (t-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&= \int_0^1 \left(\frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^t (t-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&= \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds,
\end{aligned}$$

ahol $G_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
G_1(t, s) &= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - (t-s) \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} + s \cdot \frac{a_{12}}{a_{12} + b_{12}} - t \cdot \frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases}
\end{aligned}$$

Hasonlóan $y(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds$, ahol $G_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, és

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{a_{21} \cdot b_{22}}{(a_{21} + b_{21})(a_{22} + b_{22})} + s \cdot \frac{a_{22}}{a_{22} + b_{22}} - t \cdot \frac{a_{21}}{a_{21} + b_{21}} \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
= \begin{cases} \frac{a_{21} \cdot b_{22}}{(a_{21} + b_{21})(a_{22} + b_{22})} - s \cdot \frac{b_{22}}{a_{22} + b_{22}} + t \cdot \frac{b_{21}}{a_{21} + b_{21}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

Legyen $\Gamma \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $|G_1(t, s)| \leq \Gamma$ és $\Delta \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $|G_2(t, s)| \leq \Delta$.
Legyenek

$$T_1(x, y)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds$$

$$T_2(x, y)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds$$

és $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionál.

Ekkor a $T(u) = u$ fixpontfeladat $\forall u^* = (x^*, y^*) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$ megoldása kielégíti a (5.1)-es rendszert.

5.1 A polilokális peremfeltételű rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége a Perov tétel alkalmazásával

Legyenek f és g Lipschitz tulajdonságú függvények, vagyis bármely $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |f(s, x, y) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_1|x - \tilde{x}| + b_1|y - \tilde{y}| \\ |g(s, x, y) - g(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_2|x - \tilde{x}| + b_2|y - \tilde{y}| \end{cases}$$

ahol a_i, b_i valós számok $\forall i \in \{1, 2\}$.

5.1 Tétel. Ha f és g Lipschitz tulajdonságú függvények és létezik Γ és Δ a fenti módon és az $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix}$ nullához konvergál, akkor a (5.1)-es rendszernek pontosan egy megoldása van.

Bizonyítás. Az előző alfejezetben látott módszerhez hasonlóan majoráljuk a

$$|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)|$$

kifejezést. Végeredményül azt kapjuk, hogy

$$\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Gamma[a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty]$$

és

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Delta[a_2\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_2\|y - \tilde{y}\|_\infty]$$

vagyis

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\tilde{u})\| &= \|T(x, y) - T(\tilde{x}, \tilde{y})\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \\ \|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

■

5.2 A megoldás létezése a Schauder tétel segítségével

5.2 Tétel. *Ha a (5.1)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek (vagyis teljesítik a (4.12)-es feltételt) és $M_{\Gamma\Delta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.*

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressük a $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre igaz, hogy $T(D) \subset D$.

Ehhez vizsgáljuk a $|T_1(x, y)(t)|$ -t.

$$\begin{aligned} |T_1(x, y)(t)| &\leq \int_0^1 |G_1(t, s)| \cdot |f(s, x(s), y(s))| ds \\ &\leq \Gamma(a_1 \|x\|_\infty + b_1 \|y\|_\infty + c_1) \end{aligned}$$

Végeredményül:

$$\|T(u)\| \leq M_{\Gamma\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \Gamma \\ c_2 \Delta \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\}$, akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \Gamma \\ c_2 \Delta \end{pmatrix}$ teljesüljön.

Tehát a 2. fejezet 2.3-as tétele alapján a bizonyítás teljes. ■

6 A peremfeltételek általánosítása

Most vizsgáljuk azt az általánosított peremfeltételt, amikor az $x(0)$ és az $x'(0)$ értékeket ismerjük valamilyen $\alpha_i, \beta_i : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ lineáris és folytonos funkcionálokon keresztül:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha_0[x] & (1) \\ x'(0) = \alpha_1[x] & (2) \\ y(0) = \beta_0[y] & (3) \\ y'(0) = \beta_1[y] & (4) \end{cases} \quad (6.1)$$

Integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon, majd a kapott egyenletet integráljuk a $[0, t]$ intervallumon. Így azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s) f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (6.2)$$

Legyenek $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ funkcionálok úgy, hogy:

$$\begin{cases} T_1(x, y)(t) = \alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s) f(s, x(s), y(s)) ds \\ T_2(x, y)(t) = \beta_0[y] + t \cdot \beta_1[y] - \int_0^t (t-s) g(s, x(s), y(s)) ds \end{cases}$$

Így a $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2, T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionálhoz tartozó fixpont feladat megoldása elvezet a (6.1)-es differenciálegyenlet rendszer megoldásához.

6.1 Tétel. Ha az $M = \begin{pmatrix} \|\alpha_0 + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0 + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix}$ mátrix nullához konvergáló és az f és g függvények Lipschitz tulajdonságúak, akkor a (6.1)-es rendszer Ulam-Hyers stabil és létezik egyértelmű megoldása.

Bizonyítás. A $T(u) = u$ fixpontfeladat megoldásához alkalmazzuk a Perov tétel. Ezért írjuk fel a $|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)|$ -t:

$$\begin{aligned} &= |\alpha_0[x - \tilde{x}] + t \cdot \alpha_1[x - \tilde{x}] - \int_0^t (t-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})) ds| \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + \int_0^t |t-s| \cdot |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + (a_1 \|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1 \|y - \tilde{y}\|_\infty) \int_0^t |t-s| ds. \end{aligned}$$

$$\text{Szuprémumra térve kapjuk, hogy } \|T(u) - T(\tilde{u})\| \leq \begin{pmatrix} \|\alpha_0\| + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0\| + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix}.$$

A Perov tétel (első fejezet, 2.6-os tétel) alapján tehát létezik egyetlen fixpontja a $T(u) = u$ fixpontfeladatnak. A 2.7-es tétel alapján pedig a fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil. Mindez implikálja a rendszer stabilitását és azt is, hogy a rendszernek létezik egyértelmű megoldása. ■

6.2 Tétel. Ha a fent megadott $M = \begin{pmatrix} \|\alpha_0\| + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0\| + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix}$ mátrix nullához konvergáló és az f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek, akkor a (6.1)-es rendszernek van legalább egy megoldása.

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressünk egy $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt úgy, hogy $T(D) \subset D$.

$$\begin{aligned} |T_1(x, y)(t)| &= |\alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s) f(s, x(s), y(s)) ds| \\ &\leq |\alpha_0[x]| + |t| \cdot |\alpha_1[x]| + \int_0^t |t-s| \cdot |f(s, x(s), y(s))| ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x\|_\infty + \int_0^t |t| \cdot (a_1 |x(s)| + b_1 |y(s)| + c_1) ds \end{aligned}$$

Hasonlóan majorálhatjuk a $T_2(x, y)(t)$ -t. t -vel szupréumra térve a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\|T(u)\| \leq M \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\}$, akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ teljesüljön. ■

Megjegyzés. A fenti (6.1)-es általános peremfeltételű rendszerből az α_i, β_i funkcionálok megválasztásával visszakaphatjuk a (4.1)-s és a (5.1)-es rendszereket. Például a (6.1)-es rendszert kapjuk, ha

$$\alpha_0[x] = -\frac{b_{11}}{a_{11}} x'(0)$$

és

$$\alpha_2[x] = a_{12}x(1) + b_{12}x(0) - x'(0).$$

Ezek a funkcionálok lineárisak.

Hivatkozások

- [1] Allaberen Ashyralyev, Ozgur Yildirim: *On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 14, No. 1, pp. 165-194, February 2010
- [2] András Szilárd: *Ecuatii Integrale Fredholm-Volterra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, (2005)
- [3] András Szilárd, Szilágy Zsolt: *Geometria II*, Státus kiadó, Csíkszereda, (2006)
- [4] Elena Corina Cipu, Carmen Pricină *Numerical study for two point boundary problems in nonlinear fluid mechanics*
- [5] I.A. Rus: *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory, 10(2009), 305-320.
- [6] Octavia Nica: *Nonlocal initial value problem for first order differential system*, kiadás folyamatban
- [7] Octavia Nica, Radu Precup: *On the nonlocal initial value problem for first order differential systems*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai 56(2011), No. 3, 113 - 125
- [8] Pasc Gavruta, Soon-Mo Jung, Yongjin Li: *Hyers-Ulam stability for second-order linear Differential equations with boundary conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2011 (2011), No. 80, pp. 1-5.
- [9] Perov A. I., Kibenko A. V.: *On a certain general method for investigation of boundary value problems (Russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR 30 (1966), 249-264
- [10] Radu Precup: *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (2002)
- [11] Radu Precup: *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Mathematical and Computer Modelling, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 703 - 708
- [12] Radu Precup: *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine: International Conference on Boundary Value Problems: AIP Conf. Proc. 1124, pp. 284-293 Santiago de Compostela, (2008)