

XXXI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia
(OTDK)
Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció
Budapest, 2013. április 18-20.

Általánosított fixponttételek és alkalmazásaik stabilitási problémákra

Szerző:

Nagy Tímea

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar, Matematika-informatika Szak,
alapképzés, III. év

Témavezető:

dr. András Szilárd, egyetemi adjunktus

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar,
Magyar Matematika és Informatika Intézet

Küldő intézmény:

XV. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)

Lezárás dátuma:

2012. június 1.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Fixponttételek	2
1 Használt jelölések és fogalmak	2
2 Fixponttételek	3
2.1 Schauder típusú fixponttételek	3
2.2 Az általánosított metrikus tér és a Perov tétel	5
2.3 Az Ulam-Hyers stabilitás	7
Alkalmazások nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerekre	9
3 Alapfogalmak	9
4 Bilokális feltétel	10
4.1 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása a Perov tétel alkalmazásával	14
4.2 A megoldás létezése a Schauder tétel alkalmazásával	16
4.3 A bilokális peremfeltételek általánosítása	17
4.4 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása az általános peremfeltételek mellett a Perov tétel alkalmazásával	18
4.5 A megoldás létezése általánosított peremfeltételek mellett a Schauder tétel segítségével	19
5 Polilokális feltétel	20
5.1 A polilokális peremfeltételű rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége a Perov tétel alkalmazásával	22
5.2 A megoldás létezése a Schauder tétel segítségével	22
6 A peremfeltételek általánosítása	23

Bevezetés

A dolgozat két részre tagolódik. Az első részben több ismert fixponttétel kerül bemutatásra, a Brouwer-féle fixponttételtől kiindulva végigkövetjük a fixponttételek fejlődésének egy kis szakaszát. A Schauder tétel például a Brouwer tételre épül, viszont alkalmazkodik az aktuális matematikai eszköztárhoz, ilyen szempontból általánosítja a Brouwer-féle fixponttételt, általánosabb, végtelen dimenziós térre bizonyítja a fixpont létezését. A fejezetben bemutatott tételek közül számunkra legfontosabb a Perov tétel, mely általánosított teljes metrikus tereken értelmezett kontraktív leképezések fixpontjáról állítja a létezését és az egyértelműséget. Az általánosított metrikus tér bevezetése után a fixponttételek ilyen jellegű általánosítása nagy lépést jelentett, hiszen nagyon sok olyan probléma van, amit egy operátor fixpontproblémájára visszavezetve egyszerűen kezelhetünk a vektor-értékű norma vagy metrika segítségével. Végül a fixpontfeladatok egy fontos és hasznos tulajdonságával, az Ulam-Hyers stabilitással foglalkozunk, melynek gyakorlati hasznát az jelenti, hogy ha belátjuk egy fixpontfeladatról hogy Ulam-Hyers stabil, akkor azt tudjuk meg róla, hogy ha találunk egy "majdnem" fixpontot, vagyis egy olyan pontot, mely nagyon közel van az operátorban felvett értékéhez, akkor az a pont nagyon közel van a valódi fixponthoz.

Az [5], [7], [8] cikkek a fent említett módszerrel, vagyis nemlineáris operátorra alkalmazott fixponttétel segítségével vizsgálják nemlineáris elsőrendű differenciálegyenletek megoldásának létezését és egyértelműségét. Ezekről a cikkektől eltérően, a dolgozat második felében másodfokú nemlineáris differenciálegyenleteket vizsgálunk. Tekintsük a következő rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \end{cases},$$

melyet különböző nemlokális peremfeltételekkel ellátva, valamint az f és g függvényeket különböző reguláris tulajdonságokkal felruházva, megvizsgáljuk, hogy mikor használhatjuk az első fejezet tételeit és mikor jelenthetjük ki a rendszerről hogy létezik megoldása, létezik egyértelmű megoldása vagy Ulam-Hyers stabil. Az eljárás lényege az, hogy a fenti rendszer ekvivalens egy operátor fixpontfeladatával. Az operátor viszont $T(u) = T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$ alakú, ezért egy lehetséges és természetes eljárás, hogy általánosított metrikus téren dolgozunk.

A [9] cikkben hasonló, de sokkal sajátosabb rendszer megoldásának létezésével foglalkoznak más módszerekkel. Ebben a dolgozatban általánosabb rendszert vizsgálunk a fent említett módszerrel, és így látjuk be a megoldás létezését, egyértelműségét illetve stabilitását.

A dolgozat fő eredménye az utolsó általánosítás, amelyben a nemlokális peremfeltételek

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_0[x] \\ x'(0) = \alpha_1[x] \\ y(0) = \beta_0[y] \\ y'(0) = \beta_1[y] \end{cases}$$

alakúak. A fenti rendszert ezekkel a peremfeltételekkel ellátva a kapott rendszer például egy olyan fizikai rendszernek a modellje lehet, melyben két különböző mozgásban lévő testnek a pályáját akarjuk meghatározni, amelyek egymás gyorsulását szabályozzák, ismerve a kezdeti helyzetüket és sebességüket a pályáktól függő operátorok által. Ebből az általánosításból visszanyerhetjük a bilokális illetve Cauchy peremfeltételű feladatokat is.

Fixponttételek

1 Használt jelölések és fogalmak

1.1 Definíció. (Relációk és összeadás vektorokkal)

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, és $y = (y_1, \dots, y_n)$. Ekkor

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

és hasonlóan az ' $=$ ', ' $<$ ', ' $\geq$ ' valamint ' $>$ ' esetén.

Továbbá ha $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$x \leq c \Leftrightarrow x_i \leq c, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Az $x + y$ pedig komponensenkénti összeadást jelent, vagyis

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

1.1 Tétel. (A kompaktságról)

- (a) Ha egy halmaz kompakt, akkor zárt és korlátos is.
- (b) Általában nem igaz, hogy ha zárt és korlátos akkor kompakt is a halmaz.
- (c) Véges dimenzió esetén egy halmaz kompaktsága ekvivalens azzal, hogy a halmaz zárt és korlátos.

1.2 Definíció. (Operátorok tulajdonságai)

Legyenek X, Y Banach terek és $T : D \subset X \rightarrow Y$. A továbbiakban használjuk a következő fogalmakat:

- (a) T korlátos, ha D minden korlátos részhalmazát Y egy korlátos részhalmazába képezi le.
- (d) T kompakt, ha D minden korlátos részhalmazát Y -ban relatív kompakt részhalmazba viszi.
- (c) T teljesen folytonos, ha folytonos és kompakt.
- (d) T véges rangú operátor, ha $T(D) \subset Y'$, ahol Y' az Y tér egy véges dimenziós altere.

2 Fixponttételek

2.1 Schauder típusú fixponttételek

Először nézzük meg a Schauder-féle fixponttétel véges dimenziós előzményét, a Brouwer-féle fixponttételt.

2.1 Tétel. (Brouwer) [3, 28. oldal]

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy **nemüres, konvex és kompakt** halmaz, valamint a $T : D \rightarrow D$ **folytonos** operátor.

Ekkor létezik legalább egy $u \in D$ úgy, hogy

$$T(u) = u.$$

A Schauder fixponttételben általánosítjuk a teret, nem az $\mathbb{R}^n$ részhalmazát vesszük, hanem egy (nem feltétlenül véges dimenziós) Banach térnek a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező részhalmazát. Ekkor a következő tételt fogalmazhatjuk meg:

2.2 Tétel. (Schauder) [3, 33. oldal]

Legyen X egy Banach-tér, a $K \subset X$ **nemüres, konvex és kompakt** halmaz és a $T : K \rightarrow K$ **folytonos** operátor.

Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja, vagyis létezik $u \in K : T(u) = u$.

A bizonyítás a Brouwer-féle fixponttételre alapszik, a [3]-as alapján a következő lemma segítségével vezetjük vissza egy véges dimenziós problémára:

2.1 Lemma. [3, 26. oldal]

Legyen $H \subset X$ **korlátos és zárt** halmaz és $T : H \rightarrow Y$ teljesen folytonos operátor. Ekkor létezik egy véges rangú folytonos operátorsorozat $T_k : H \rightarrow Y$, mely H -n egyenletesen tart T -hez, vagyis

$$T(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u).$$

Ráadásul $T_k(H) \subset \text{conv}(T(H))$, bármely $k \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. (A 2.2-es tétel bizonyítása)

K kompakt és T folytonos, tehát T teljesen folytonos. K kompakt, tehát zárt és korlátos is, így használhatjuk a fenti lemmát, ami alapján léteznek a $T_j : K \rightarrow K$ véges rangú folytonos operátorok, melyek egyenletesen tartanak T -hez a K -n, vagyis

$$T(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j(u), \forall u \in K.$$

Mivel T_j véges rangú, tekinthetjük az $X_{n_j} \subset K$ alteret, mely a $T_j(K)$ által generált véges (n_j) dimenziós altér. Ekkor $T_j : K \cap X_{n_j} \rightarrow K \cap X_{n_j}$.

Most a T_j operátorokra a Brouwer fixponttételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\exists u_j^* \in K \cap X_{n_j} : T(u_j^*) = u_j^*, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mivel K kompakt, minden sorozatának van konvergens részsorozata K -ban. Legyen $u^* \in K$ az $(u_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens részsorozatának a határértéke. Ekkor

$$\begin{aligned} |T(u^*) - u^*| &\leq |T(u^*) - T(u_j^*)| + |T(u_j^*) - T_j(u_j^*)| + |T(u_j^*) - u^*| \\ &= |T(u^*) - T(u_j^*)| + |T(u_j^*) - T_j(u_j^*)| + |u_j^* - u^*| \\ &\rightarrow 0, \text{ amikor } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tehát $T(u^*) = u^*$, vagyis az így megszerkeztett $u^* \in K$ fixpontja az T operátornak. ■

Mivel a kompaktság fogalma csak véges dimenziós térben ekvivalens azzal, hogy a halmaz zárt és korlátos, pontosabban megfogalmazva ez azt jelenti, hogy általában nem minden zárt és korlátos halmaz kompakt. Így a Schauder tétel zárt és korlátos halmazokra való megfogalmazása általánosabb az előbbi megfogalmazásnál és a gyakorlatban hasznosabb is.

Állítás. Végtelen dimenziós tereken a zárt gömb általában nem kompakt.

Bizonyítás. Legyen $l^2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R} / \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ és $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$. Jelölje

$$\bar{B}(0, 1) = \{(x_n)_{n \geq 0} \subset l^2(\mathbb{R}) / \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq 1\}.$$

Tegyük fel, hogy $\bar{B}(0, 1)$ kompakt. Ekkor a 2.2-es tétel alapján

$$\forall f : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \bar{B}(0, 1), f \text{ folytonos} \Rightarrow \exists x^* \in \bar{B}(0, 1) : f(x^*) = x^*$$

Tekintsük a következő leképezést:

$$f(x_1, x_2, \dots) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) \in \bar{B}(0, 1).$$

A függvény jól értelmezett és mivel $(x_1, x_2, \dots) \in \bar{B}(0, 1)$, $1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ is a $[0, 1]$ intervallumban van, tehát a $\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) \in \bar{B}(0, 1)$ is teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \left\| \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2, x_1, x_2, \dots\right) - \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2, y_1, y_2, \dots\right) \right\|^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 + \|x - y\|^2 \\ &\leq 2 \cdot \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Tehát f Lipschitz, vagyis folytonos operátor. Vizsgáljuk meg a fixpontot:

$$f(x^*) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}, x_1^*, x_2^*, \dots\right) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots) \Rightarrow x_1^* = x_2^* = x_3^* = \dots$$

Viszont világos, hogy a fenti tulajdonsággal rendelkező $l^2(\mathbb{R})$ -beli elem csakis az $x^* \equiv 0$ lehet, mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty$ egyenlőtlenség igaz kell legyen. Viszont ez ellentmond annak, hogy

$$f(x^*) = (1, 0, 0, \dots).$$

Tehát a 2.2-es tétel alapján az egységgömb nem kompakt az $l^2(\mathbb{R})$ téren. ■

2.3 Tétel. (Schauder)[3, 33. oldal]

Legyen X Banach-tér, $D \subset X$ **nemüres, zárt, korlátos és konvex** halmaz és a $T : D \rightarrow D$ **teljesen folytonos** operátor.

Ekkor T -nek van legalább egy fixpontja D -ben.

A bizonyításhoz a Mazur lemmát használjuk.

2.2 Lemma. (Mazur lemma)[3, 33. oldal]

Banach-tér relatív kompakt részhalmazának a konvex burka relatív kompakt.

Bizonyítás. (A 2.3-as tétel bizonyítása)

Mivel T teljesen folytonos és D korlátos, a definíció alapján következik, hogy $T(D)$ relatív kompakt. Ekkor a Mazur lemma alapján a $T(D)$ konvex burka is relatív kompakt, vagyis a $K = \overline{\text{conv}(T(D))}$ kompakt. Továbbá K konvex (konvex burkoló lezártja konvex) és $K \subset D$, mivel $T(D) \subset D$ és D konvex és zárt. Most alkalmazva a 2.2-es tételt a $T : K \rightarrow K$ operátorra, azonnal következik a fenti tétel. ■

2.2 Az általánosított metrikus tér és a Perov tétel

2.1 Definíció. (Általánosított metrikus tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *vektor-értékű metrika* alatt a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést értjük melyre teljesülnek:

- i) $d(u, v) \geq 0$, $\forall u, v \in X$; $d(u, v) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $u = v$;
- ii) $d(u, v) = d(v, u)$, $\forall u, v \in X$;
- iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $\forall u, v, w \in X$.

Az i)-iii)-ben szereplő a relációk és az összeadás $\mathbb{R}_n$ -ben értendők az 1.1-es definíció alapján.

A fenti metrikával ellátott (X, d) teret általánosított metrikus térnek nevezzük. Ezen a téren is megfogalmazhatóak fixponttételek. Például a Banach-féle fixponttételt ilyen irányban Perov általánosította (lásd [3] és [2]) a következő fogalmak segítségével:

2.2 Definíció. (Nullához konvergáló mátrix)

Az $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ mátrixról akkor mondjuk hogy nullához konvergáló, ha

$$M^k \rightarrow 0_n, \quad k \rightarrow \infty,$$

ahol 0_n az n -dimenziós nullmátrix, és a tartás komponensenként értendő.

Megjegyzés. (A nullmátrix tulajdonságai)

Legyen $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:

i) M nullához konvergáló;

ii) $I_n - M$ nemszinguláris (invertálható) és

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + M^2 + \dots,$$

ahol I_n az n -dimenziós egységmátrixot jelöli;

iii) ha $\det(I_n - \lambda M) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor $|\lambda| < 1$;

iv) $I_n - M$ nemszinguláris és $(I_n - M)^{-1}$ -nek pozitívak az elemei.

2.3 Definíció. (Kontraktív leképezés)

Legyen az (X, d) általánosított metrikus tér. A $T : X \rightarrow X$ leképezés kontraktív, ha létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy bármely $u, v \in X$ esetén

$$d(T(u), T(v)) \leq Md(u, v).$$

2.4 Tétel. (Perov) [3, 153. oldal]

Legyen az (X, d) általánosított teljes metrikus tér, a $T : X \rightarrow X$ kontraktív operátor és az $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ a megfelelő nullához konvergáló Lipschitz mátrix.

Ekkor létezik $u^* \in X$, mely T -nek egyetlen fixpontja és bármely $u \in X$:

$$d(T^k(u), u^*) \leq M^k(I - M)^{-1}d(u, T(u)) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Bizonyítás. Legyen u_0 egy tetszőleges elem X -ből és definiáljuk az $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy:

$$u_{k+1} = T(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mivel T kontraktív az M Lipschitz mátrixszal, felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} d(u_k, u_{k+1}) &= d(T(u_{k-1}), T(u_k)) \leq Md(u_{k-1}, u_k) \leq M^2d(u_{k-2}, u_{k-1}) \leq \\ &\leq \dots \leq M^k d(u_0, u_1), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} d(u_k, u_{k+m}) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(u_{k+i}, u_{k+i+1}) \\ &\leq d(u_0, u_1) \sum_{i=0}^{m-1} M^{k+i}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$d(u_k, u_{k+m}) \leq M^k \cdot (I - M)^{-1} \cdot d(u_0, u_1). \quad (2.2)$$

Tehát $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy sorozat. Legyen $u^* \in X$ a határértéke. Ekkor $T(u^*) = u^*$ és a (2.2)-ös egyenlőtlenségben $m \rightarrow \infty$ esetén éppen a tételben kijelentett (2.1)-es egyenlőtlenséget kapjuk.

A fixpont egyértelműségét az bizonyítja, hogy ha létezne két különböző fixpont, $u_1^* \neq u_2^*$, akkor

$$d(u_1^*, u_2^*) = d(T^k(u_1^*), T^k(u_2^*)) \leq M^k \cdot d(u_1^*, u_2^*),$$

viszont mivel a jobboldal 0-hoz tart, $u_1^* = u_2^*$. ■

2.3 Az Ulam-Hyers stabilitás

Az általánosított metrikus térhez hasonlóan értelmezhetjük az általánosított normált teret is.

2.4 Definíció. (Általánosított normált tér)

Tekintsük az $X \neq \emptyset$ halmazt. Ekkor a halmazon értelmezett *vektor-értékű norma* alatt a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést értjük, melyre teljesülnek:

- i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \|x\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$;
- ii) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|, \forall x \in X, a$ skalár;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Az i)-iii)-ben szereplő relációk és összeadások $\mathbb{R}_n$ -ben értendőek az 1.1-es definíció alapján. A fenti normával ellátott $(X, \|\cdot\|)$ teret általánosított normált térnek nevezzük.

Megjegyzés. Minden általánosított normált tér származtat egy általánosított metrikus teret, melynek általánosított metrikája a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ úgy, hogy

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

2.5 Definíció. (Ulam-Hyers stabilitás)

Legyen (X, d) általánosított metrikus tér és a $T : X \rightarrow X$ operátor. A $T(x) = x$ fixpontfeladat *Ulam-Hyers stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik a $\delta > 0$ valós szám úgy, hogy

$$d(x, T(x)) < \delta \Rightarrow \exists x^* \in X : T(x^*) = x^*, d(x, x^*) < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Megjegyzés. 1.) Az Ulam-Hyers stabilitást értelmezhetjük a 2.4-es definíció értelmében vett általánosított normált téren is, vagyis az $(X, \|\cdot\|)$ általánosított normált téren értelmezett $T : X \rightarrow X$ operátor fixpontfeladata *Ulam-Hyers stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik a $\delta > 0$ valós szám úgy, hogy

$$\|x - T(x)\| < \delta \Rightarrow \exists x^* \in X : T(x^*) = x^*, \|x - x^*\| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

2.) Az 1.)-es megjegyzéshez hasonlóan a 2.3-as definíció is átfogalmazható általánosított normált térre, miszerint ha (X, d) általánosított normált tér, akkor a $T : X \rightarrow X$ leképezés kontraktív, ha létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy

$$\|T(u) - T(v)\| \leq M\|u - v\|, \forall u, v \in X.$$

Megjegyzés. A fenti tulajdonsággal rendelkező fixpontfeladatokat gyakorlatban általában egyszerű megoldani, mivel a definíció alapján elégséges egy közelítő megoldást találni (ekkor $d(x, T(x)) < \delta$) mondjuk numerikus módszerekkel, és az elég közel lesz a valódi megoldáshoz.

2.5 Tétel. (Ulam-Hyers stabilitás)[6]

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ általánosított teljes normált tér. Legyen $T : X \rightarrow X$ kontraktív operátor, vagyis létezik $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix:

$$\|T(x) - T(y)\| < M \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Ekkor az $x = T(x)$ fixpontfeladat *Ulam-Hyers stabil*.

Bizonyítás. A Perov fixponttétel alapján létezik egy egyértelmű $x^* \in X$ fixpontja T -nek. Legyen $x = T(x) + h = T_1(x)$, ahol $h \in X$ és $\|h\| < \delta$. Látható, hogy T_1 is kontraktív operátor az M nullához konvergáló mátrixszal, mivel

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq M \cdot \|x - y\|.$$

Tehát létezik egyértelműen egy $x \in X$: $x = T_1(x) = T(x) + h$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x - x^*\| &= \|T(x) + h - T(x^*)\| \\ &\leq \|T(x) - T(x^*)\| + \|h\| \\ &\leq \|T(x) - T(x^*)\| + \delta \\ &\leq M \cdot d(x, x^*) + \delta \end{aligned}$$

vagyis $d(x, x^*) \leq \delta(I_n - M)^{-1}$.

Tehát minden közelítő megoldás, melyre teljesül az $\|x - T(x)\| < \delta$ egyenlőtlenség, elég közel van a valódi megoldáshoz. ■

Alkalmazások nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerekre

Az előző fejezetbeli eredményeket felhasználva ebben a fejezetben különböző nemlokális peremfeltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszerek megoldásainak létezését, egyértelműségét és Ulam-Hyers stabilitását vizsgáljuk.

Mindezek érdekében először egy integráloperátort rendelünk a rendszerhez úgy, hogy az operátor fixpontja megoldása legyen a rendszernek, majd különböző feltételeket szabunk az f és g függvényekre (például legyenek Lipschitz tulajdonságúak vagy legfennebb lineáris növekedésűek) és az első fejezetben tárgyalt fixponttételek segítségével megoldjuk az imént szerkesztett fixpontfeladatot. A [7] és [8] cikkek elsőrendű rendszereket vizsgálnak hasonló módszerekkel.

3 Alapfogalmak

Az első fejezet eredményein kívül a következő alapfogalmakra is szükségünk lesz:

3.1 Definíció. (Carathéodory függvény)

Legyenek X, Y topologikus terek és (T, M, μ) mérhető tér. Az $F : T \times X \rightarrow Y$ leképezés Carathéodory függvény, ha

- i) $F(\cdot, x)$ mérhető, $\forall x \in X$,
- ii) $F(t, \cdot)$ folytonos, $\forall t \in T$.

3.2 Definíció. (Lipschitz tulajdonság)

Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz tulajdonságú a második és a harmadik változóban, ha léteznek az a, b pozitív valós számok úgy, hogy

$$|F(s, x, y) - F(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a|x - \tilde{x}| + b|y - \tilde{y}|, \quad \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

3.3 Definíció. (Legfennebb lineáris növekedés)

Azt mondjuk, hogy az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény legfennebb lineárisan nő a második és a harmadik változó szerint, ha léteznek az a, b, c pozitív valós számok úgy, hogy

$$|F(s, x, y)| \leq a|x| + b|y| + c, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

4 Bilokális feltétel

Tekintsük a következő bilokális peremfeltételű differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x(0) + b_{11}x'(0) = 0 & (1) \\ a_{12}x(1) + b_{12}x'(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y(0) + b_{21}y'(0) = 0 & (3) \\ a_{22}y(1) + b_{22}y'(1) = 0 & (4) \end{cases} \quad (4.1)$$

Legyenek $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, és $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $b_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$, ahol $i, j \in \{1, 2\}$. Továbbá jelölje

$$\sigma_i = -a_{i1}a_{i2} + a_{i2}b_{i1} - a_{i1}b_{i2},$$

és legyen $\sigma_i > 0$.

Alakítsuk át a rendszerben szereplő differenciálegyenleteket integrálegyenletekké. Ehhez integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.2)$$

Végezzük el a $t_1 = 1$ helyettesítést és fejezzük ki $x'(0)$ -át és $x'(1)$ -et az (1)-es illetve a (2)-es feltételekből. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$-x(1) + \frac{b_{12}}{a_{12}} \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \cdot x(0) = - \frac{b_{12}}{a_{12}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.3)$$

Integráljuk a (4.2)-es egyenletet a $[0, t_2]$ intervallumon, ahol $t_2 \geq t_1$:

$$x(t_2) - x(0) = -t_2 \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \cdot x(0) - \int_0^{t_2} (t_2 - s) f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.4)$$

Ismét végezzük el a $t_2 = 1$ helyettesítést és rendezzük az egyenletet:

$$x(1) - x(0) \left(1 - \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) = - \int_0^1 (1 - s) f(s, x(s), y(s)) ds. \quad (4.5)$$

Adjuk össze a (4.3)-as és a (4.5)-ös egyenletet és fejezzük ki az $x(0)$ -át:

$$x(0) = - \left(\frac{b_{11}a_{12}}{a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}} \right) \int_0^1 \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} + 1 - s \right) f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Visszahelyettesítve a (4.4)-es egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - t \cdot \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) \cdot \frac{b_{11}a_{12}}{\sigma_1} \cdot \int_0^1 \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} + 1 - s \right) f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^t (t - s) f(s, x(s), y(s)) ds \\ &= \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds, \end{aligned}$$

ahol $G_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 G_1(t, s) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) - (t - s) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - s \cdot a_{12}b_{11} - t \cdot a_{11}b_{12} - t \cdot a_{11}a_{12} \\ + t \cdot s \cdot a_{11}a_{12} + t \cdot a_{11}b_{12} - t \cdot b_{11}a_{12} + t \cdot a_{11}a_{12} \\ - s \cdot a_{11}b_{12} + s \cdot b_{11}a_{12} - s \cdot a_{11}a_{12}) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} [b_{11} \cdot (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) + s \cdot a_{11}(t \cdot a_{12} - b_{12} - a_{12})] & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tehát

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \quad (4.6)$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left(1 - t \cdot \frac{a_{21}}{b_{21}}\right) \cdot \frac{b_{21}a_{22}}{\sigma_2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{b_{22}}{a_{22}} + 1 - s\right) g(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^t (t - s) g(s, x(s), y(s)) ds \\
 &= \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds,
 \end{aligned}$$

ahol $G_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2} (b_{22} + a_{22} - t \cdot a_{22}) \cdot (b_{21} - s \cdot a_{21}), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{1}{\sigma_2} (b_{21} - t \cdot a_{21}) \cdot (b_{22} + a_{22} - s \cdot a_{22}), & 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

Tekintsük a $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ operátorokat úgy, hogy:

$$\begin{cases} T_1(x, y)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ T_2(x, y)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds \end{cases} \quad (4.7)$$

és a

$$T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2, T = (T_1, T_2) \quad (4.8)$$

operátort. Látható, hogy a (4.1)-es differenciálegyenlet rendszer a fenti átalakításokat és jelöléseket követően tekinthető úgy, mint a $T(u) = u$ fixpontfeladat, vagyis ha

$$\exists u^* = (x^*, y^*) \in (\mathbb{C}[0, 1])^2 : T(u^*) = u^*,$$

akkor x^* és y^* teljesítik a (4.1)-es rendszer egyenleteit a bilokális peremfeltételekkel együtt.

4.1 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 1)

A (4.6)-os következtetés és a $\sigma_i > 0$ feltétel alapján

$$G_1(t, s) \geq 0, \quad \forall (t, s) \in [0, 1]^2.$$

Bizonyítás. 1. eset: $0 \leq s \leq t$

Ekkor

$$\begin{aligned} G_1(t, s) &= \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}) \\ &= \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} \cdot (1 - t)) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}). \end{aligned}$$

Látható, hogy

- $\frac{1}{\sigma_1} > 0$,
- $(b_{12} + a_{12} \cdot (1 - t)) \geq 0$, mivel $b_{ij}, a_{ij}, 1 - t \geq 0$,
- $-a_{11}a_{12} + b_{11}a_{12} - a_{11}b_{12} > 0 \Rightarrow a_{12}(-a_{11} + b_{11}) > a_{11}b_{12} \geq 0 \Rightarrow -a_{11} + b_{11} \geq 0 \Rightarrow b_{11} \geq a_{11} \geq s \cdot a_{11} \Rightarrow b_{11} - s \cdot a_{11} \geq 0$

2. eset: $0 \leq t \leq s$

Ekkor $G_1(t, s) = \frac{1}{\sigma_1} (b_{11} - t \cdot a_{11}) \cdot (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) \geq 0$ a fentihez hasonló gondolatmenet alapján. ■

4.2 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 2)

$$G_1(t, s) \leq \begin{cases} G_1(s, s), & 0 \leq s \leq t \\ G_1(t, t), & 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Bizonyítás. Mindkét esetben egyszerűen belátható az adott egyenlőtlenség. Például az első esetben:

$$G_1(t, s) \leq G_1(s, s) \Leftrightarrow -t \cdot a_{12} \leq -s \cdot a_{12} \Leftrightarrow 0 \leq s \leq t$$
■

4.3 Lemma. (A $G_i(t, s)$ tulajdonsága, 3)

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12})/t \in I \right\}, \\ \gamma_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11})/t \in I \right\} \end{aligned}$$

$$\text{és } \alpha = \frac{-a_{11}a_{12} + 3a_{12}b_{11}}{3\sigma_1} > \frac{1}{3}, \Gamma = \begin{cases} \gamma_1 & \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \gamma_2 & \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ valamint}$$

$$\delta_1 = \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_2} (6b_{21}b_{22} + 3\sigma_2 + 2a_{21}a_{22}) / t \in I \right\},$$

$$\delta_2 = \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_2} (b_{22} + a_{22} - t \cdot a_{22}) \cdot (b_{21} - t \cdot a_{21}) / t \in I \right\}$$

$$\text{és } \beta = \frac{-a_{21}a_{22} + 3a_{22}b_{21}}{3\sigma_1} > \frac{1}{3}, \Delta = \begin{cases} \delta_1 & \beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \delta_2 & \beta \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ekkor } \sup_{t \in I} \int_0^1 G_1(t, s) ds \leq \Gamma \text{ és } \sup_{t \in I} \int_0^1 G_2(t, s) ds \leq \Delta$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz az előző két lemmát használjuk.

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_1(s, s) ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - s \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - s \cdot a_{11}) ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \int_0^1 b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - s(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}a_{12}) + s^2 a_{11}a_{12} ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} \left[(b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}) - \frac{1}{2}(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}a_{12}) + \frac{1}{3} \cdot a_{11}a_{12} \right] \\ &= \frac{1}{6\sigma_1} [6b_{11}b_{12} + 3a_{12}b_{11} - 3a_{11}b_{12} - a_{11}a_{12}] \\ &= \frac{1}{6\sigma_1} [6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}], \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_1(t, t) ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}) ds \\ &= \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}). \end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$\int_0^1 G_1(t, s) ds \leq \begin{cases} \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11}), & 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

$$\text{Tehát } \sup_{t \in I} \int_0^1 G_1(t, s) ds = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}.$$

Vizsgáljuk a γ_1 -et, a γ_2 -őt valamint ezek maximumát:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sup \left\{ \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12})/t \in I \right\} \\
&= \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) \\
\gamma_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{\sigma_1} (b_{12} + a_{12} - t \cdot a_{12}) \cdot (b_{11} - t \cdot a_{11})/t \in I \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_1} \sup \left\{ b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) + t^2 \cdot a_{11}a_{12}/t \in I \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_1} (b_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}) + \frac{1}{\sigma_1} \sup \left\{ t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12})/t \in I \right\}
\end{aligned}$$

Viszont

$$\begin{aligned}
&t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) < 0 \\
&\Leftrightarrow t \cdot a_{11}a_{12} - (a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12}) < 0 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-t) \cdot a_{11}a_{12} + a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12},
\end{aligned}$$

ami igaz.

Mivel a 0 értéket fel is veszi a kifejezés a $t = 0$ esetben

$$\Rightarrow \sup \left\{ t^2 \cdot a_{11}a_{12} - t(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12} + a_{11}a_{12})/t \in I \right\} = 0$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{6\sigma_1} (6b_{11}b_{12} + 3\sigma_1 + 2a_{11}a_{12}) \\
&= \frac{b_{11}b_{12}}{\sigma_1} + \frac{1}{2} + \frac{a_{11}a_{12}}{3\sigma_1}, \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\sigma_1} b_{11}b_{12} + \frac{1}{\sigma_1} a_{12}b_{11}.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\max \{ \gamma_1, \gamma_2 \} = \begin{cases} \gamma_1 & \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ \gamma_2 & \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, vagyis $\int_0^1 G_1(t, s) \leq \Gamma$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $\int_0^1 G_2(t, s) \leq \Delta$.

■

4.1 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása a Perov tétel alkalmazásával

Megjegyzés. A (4.1)-es egyenletrendszerben szereplő f és g függvények Lipschitz tulajdonságúak a második és a harmadik változóban a (3.1)-es definíció alapján, ha léteznek olyan a_i , b_i , pozitív valós számok, $i \in \{1, 2\}$, és

$$\begin{cases} |f(s, x, y) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_1|x - \tilde{x}| + b_1|y - \tilde{y}|, & \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \\ |g(s, x, y) - g(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_2|x - \tilde{x}| + b_2|y - \tilde{y}|, & \forall x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.9)$$

4.1 Tétel. Tekintsük a (4.1)-es egyenletrendszert. Ha f és g Lipschitz tulajdonságú függvények és $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik pontosan egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. Igazoljuk a Perov tétel segítségével, hogy a (4.8)-as operátornak egyetlen fixpontja van. A Perov tétel alkalmazásához igazoljuk, hogy létezik $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}_+)$ nullához konvergáló mátrix úgy, hogy bármely $u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$ esetén

$$\|T(u) - T(\tilde{u})\| \leq M \cdot \|u - \tilde{u}\|,$$

ahol

$$\|u\| = \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} \quad \forall u = (x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2,$$

és $\|\cdot\|_\infty$ a maximumnormát jelöli, vagyis $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$.

A fenti cél érdekében végezzük el a következő majorálásokat:

$$\begin{aligned} |T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| &= \left| \int_0^1 G_1(t, s) \cdot (f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))) ds \right| \\ &\leq (a_1 \|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1 \|y - \tilde{y}\|_\infty) \int_0^1 |G_1(t, s)| ds \end{aligned}$$

A 4.1, 4.2, 4.3-as lemmák alapján

$$\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Gamma \cdot (a_1 \|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1 \|y - \tilde{y}\|_\infty).$$

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Delta \cdot (a_2 \|x - \tilde{x}\|_\infty + b_2 \|y - \tilde{y}\|_\infty),$$

ahol a (4.1)-es tétel előtti jelöléseket használtuk.

Tehát

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\tilde{u})\| &= \|T(x, y) - T(\tilde{x}, \tilde{y})\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \\ \|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

Tehát a T kontrakatív operátor, vagyis az I fejezet 2.4-os tétele alapján létezik $u^* = (x^*, y^*)$ T -nek egyetlen fixpontja. Ez implikálja a rendszer egyértelmű megoldásának létezését. ■

4.2 Tétel. Az előző tétel feltételei mellett a (4.1)-es rendszer az I fejezet 2.5-es tétele alapján Ulam-Hyers stabil.

Bizonyítás. Az I fejezet 2.5-es tétele alapján a kontrakatív operátorok Ulam-Hyers stabilak. A (4.1)-es rendszerhez rendelt T operátor kontrakatív, vagyis a $T(u) = u$ fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil, ami implikálja a rendszer Ulam-Hyers stabilitását. ■

4.2 A megoldás létezése a Schauder tétel alkalmazásával

Megjegyzés. Legyenek f és g legfennebb lineárisan növekvő függvények, vagyis az (3.2)-es definíció alapján léteznek $a_i, b_i, c_i, i \in \{1, 2\}$ pozitív valós számok úgy, hogy $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} |f(s, x, y)| \leq a_1|x| + b_1|y| + c_1 \\ |g(s, x, y)| \leq a_2|x| + b_2|y| + c_2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Legyen $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \Gamma & b_1 \cdot \Gamma \\ a_2 \cdot \Delta & b_2 \cdot \Delta \end{pmatrix}$ ahol Γ és Δ a (4.1)-es tételbeli jelölések.

4.3 Tétel. Ha a (4.1)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek és $M_{\Gamma\Delta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. Ismét a (4.8)-as funkcionálról bizonyítjuk hogy van legalább egy fixpontja. A lineáris növekedési feltétel miatt a Schauder tételt (I fejezet 2.3-as tétel) fogjuk alkalmazni. Ehhez keresnünk kell egy $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre $T(D) \subset D$.

A 4.1-es tétel jelöléseit használva a bizonyítás alapján felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G_1(t, s)| ds &\leq \Gamma, \\ \int_0^1 |G_2(t, s)| ds &\leq \Delta. \end{aligned}$$

A (4.7)-es jelölés, az f növekedési tulajdonsága és a fenti megjegyzés alapján:

$$\begin{aligned} \|T_1(x, y)\|_\infty &\leq \Gamma(a_1\|x\|_\infty + b_1\|y\|_\infty + c_1) \\ \|T_2(x, y)\|_\infty &\leq \Delta(a_2\|x\|_\infty + b_2\|y\|_\infty + c_2) \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \|T(x, y)\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y)\|_\infty \\ \|T_2(x, y)\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Keressük meg $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $\|x\|_\infty \leq R_1$ és $\|y\|_\infty \leq R_2$, akkor $\|T_1(x, y)\|_\infty \leq R_1$ és $\|T_2(x, y)\|_\infty \leq R_2$, vagyis ha

$$u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in ([0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\},$$

akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

A nullmátrix tulajdonságait figyelembevéve ehhez elégséges, hogy az

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I_n - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1\Gamma \\ c_2\Delta \end{pmatrix}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, és akkor az I fejezet 2.3-as tétele alapján a T operátornak létezik legalább egy fixpontja, vagyis a (4.1)-es rendszernek is. ■

Megjegyzés. A fenti esetben a megjelent Green-függvényeket meg tudtuk majorálni a peremfeltételekben szereplő együttthatók segítségével. Így láttuk hogy hogyan kell megszerkeszteni a megfelelő mátrixot, ami nullához konvergáló kell legyen. Viszont azt is láthattuk, hogy a Green-függvények elágazó függvények, melyek mindkét águkon folytonosak, tehát megmajorálhatjuk őket anélkül, hogy expliciten megkeresnénk a majoránst.

Ezt kihasználva a 2.3-as alfejezetben megvizsgáljuk hogy a peremfeltételek általánosításával hogyan kezelhetjük a létezést és az egyértelműséget.

4.3 A bilokális peremfeltételek általánosítása

Legyenek a peremfeltételek az $\alpha_i, \beta_i : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ lineáris és folytonos funkcionálokön keresztül a következőképpen általánosítva:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ x'(0) = \alpha_0[x] & (1) \\ x(1) = \alpha_1[x'] & (2) \\ y'(0) = \beta_0[y] & (3) \\ y(1) = \beta_1[y'] & (4) \end{cases} \quad (4.11)$$

Integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon és alkalmazzuk rá az α_1 funkcionált:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds =: f_1(t_1) \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \alpha_1[x'] - \alpha_0[x] \cdot \alpha_1[1] = \alpha_1[f_1]$$

$$\Rightarrow x(1) = \alpha_0[x] \cdot \alpha_1[1] + \alpha_1[f_1]. \quad (4.13)$$

A (4.12)-as egyenletet a $[0, t_2]$ intervallumon integrálva, a $t_2 = 1$ helyettesítést elvégezve, a kapott egyenletet vonjuk ki a (4.13)-es egyenletből és fejezzük ki az $x(0)$ -át. Így azt kapjuk, hogy

$$x(t) = \alpha_0[x](\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds,$$

$$\text{ahol } f_1(t) = - \int_0^t f(s, x(s), y(s))ds.$$

Hasonlóan

$$y(t) = \beta_0[y](\beta_1[1] + t - 1) + \beta_1[g_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds,$$

$$\text{ahol } g_1(t) = - \int_0^t g(s, x(s), y(s))ds.$$

Legyenek a $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ funkcionálok úgy, hogy:

$$\begin{cases} T_1(x, y)(t) = \alpha_0[x](\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ T_2(x, y)(t) = \beta_0[y](\beta_1[1] + t - 1) + \beta_1[f_2] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds \\ \quad - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \end{cases}$$

Így a $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionálhoz tartozó fixpont feladat megoldása elvezet a (4.11)-es differenciálegyenlet rendszer megoldásához.

4.4 A megoldás létezése, egyértelműsége és Ulam-Hyers stabilitása az általános peremfeltételek mellett a Perov tétel alkalmazásával

4.4 Tétel. *Legyenek f és g Lipschitz tulajdonságúak, azaz teljesítsék a (4.9)-es feltételt.*

Legyen $M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\| + 1) + a_1(\|\alpha_1\| + 2) & b_1(\|\alpha_1\| + 2) \\ \|\beta_0\|(\|\beta_1\| + 1) + a_2(\|\beta_1\| + 2) & b_2(\|\beta_1\| + 2) \end{pmatrix}$ nullához konvergáló mátrix. Ekkor a (4.11)-es rendszer Ulam-Hyers stabil és létezik egyértelmű megoldása.

Bizonyítás. Ekkor $|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)| =$

$$\begin{aligned} &= \left| (\alpha_0[x - \tilde{x}])(\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1 - \tilde{f}_1] + \int_0^1 (1-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (t-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s)))ds \right| \\ &\leq |\alpha_0[x - \tilde{x}]| |\alpha_1[1] + t - 1| + |\alpha_1[f_1 - \tilde{f}_1]| + \int_0^1 |(1-s)| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\ &\quad + \int_0^t |t-s| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1 - \tilde{f}_1\|_\infty \\ &\quad + \int_0^1 |(1-s)| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds + \int_0^t |t-s| |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{y}(s))| ds. \end{aligned}$$

Így $\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\| + 1)\|x - \tilde{x}\|_\infty + \|\alpha_1\| \cdot (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) + 2 \cdot (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) \\ &= (\|\alpha_0\|(\|\alpha_1\| + 1) + a_1(\|\alpha_1\| + 2))\|x - \tilde{x}\|_\infty + (b_1(\|\alpha_1\| + 2))\|y - \tilde{y}\|_\infty, \end{aligned}$$

és teljesen hasonlóan

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq (\|\beta_0\|(\|\beta_1\| + 1) + a_2(\|\beta_1\| + 2))\|x - \tilde{x}\|_\infty + (b_2(\|\beta_1\| + 2))\|y - \tilde{y}\|_\infty.$$

Tehát megkaptuk a kívánt majorálást:

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &\leq \begin{pmatrix} \|\alpha_0\|(\|\alpha_1\|+1)+a_1(\|\alpha_1\|+2) & b_1(\|\alpha_1\|+2) \\ \|\beta_0\|(\|\beta_1\|+1)+a_2(\|\beta_1\|+2) & b_2(\|\beta_1\|+2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x-\tilde{x}\|_\infty \\ \|y-\tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \|x-\tilde{x}\|_\infty \\ \|y-\tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tehát a T kontraktív operátor, vagyis az I fejezet 2.4-os tétele alapján egyetlen $u^* = (x^*, y^*)$ létezik úgy, hogy $T(u) = u$ és az I fejezet 2.5-es tétele alapján a fixpontprobléma Ulam-Hyers stabil. Mindez implikálja a rendszer egyértelmű megoldásának létezését és Ulam-Hyers stabilitását. ■

4.5 A megoldás létezése általánosított peremfeltételek mellett a Schauder tétel segítségével

4.5 Tétel. Ha a (4.11)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek (vagyis teljesítik a (4.10)-es feltételt) és $M_{\alpha\beta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressük a $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre igaz, hogy $T(D) \subset D$.

Ehhez vizsgáljuk a $|T_1(x, y)(t)|$ -t.

$$\begin{aligned} &\left| (\alpha_0[x]) (\alpha_1[1] + t - 1) + \alpha_1[f_1] + \int_0^1 (1-s)f(s, x(s), y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \right| \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1\|_\infty + \int_0^1 |(1-s)|f(s, x(s), y(s))|ds \\ &\quad + \int_0^t |t-s|f(s, x(s), y(s))|ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty |\alpha_1[1] + t - 1| + (a_1\|x\|_\infty + b_1x_\infty + c_1) \left(1 + \int_0^t tds\right) + \|\alpha_1\| \cdot \|f_1\|_\infty \end{aligned}$$

Hasonlóan majorálhatjuk a $T_2(x, y)(t)$ -t. Ha t -vel szuprémumra térünk, a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\|T(u)\| \leq M_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(\|\alpha_1\|+2) \\ c_2(\|\beta_1\|+2) \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $\|x\|_\infty \leq R_1$ és $\|y\|_\infty \leq R_2$, akkor $\|T_1(x, y)\|_\infty \leq R_1$ és $\|T_2(x, y)\|_\infty \leq R_2$, vagyis ha

$$u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\},$$

akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1(\|\alpha_1\|+2) \\ c_2(\|\beta_1\|+2) \end{pmatrix}$ teljesüljön. ■

5 Polilokális feltétel

Tekintsük a következő polilokális feltételű másodfokú differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\ a_{11}x'(0) + b_{11}x'(1) = 0 & (1) \\ a_{12}x(0) + b_{12}x(1) = 0 & (2) \\ a_{21}y'(0) + b_{21}y'(1) = 0 & (3) \\ a_{22}y(0) + b_{22}y(1) = 0 & (4) \end{cases} \quad (5.1)$$

Ahol $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory függvények, a_{ij}, b_{ij} , valós számok, $i, j \in \{1, 2\}$, és $a_{11} + b_{11} \neq 0, a_{12} + b_{12} \neq 0, a_{21} + b_{21} \neq 0, a_{22} + b_{22} \neq 0$.

Az első differenciálegyenletet integráljuk a $[0, t_1]$ intervallumon, ahol $t_1 \in I$. Ekkor:

$$x'(t_1) - x'(0) = - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds.$$

A $t_1 = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$x'(1) - x'(0) = - \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds.$$

viszont az (1)-ből $x'(1)$ -et kifejezve és visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$x'(0) = \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Így

$$x'(t_1) = \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds.$$

Az így kapott egyenletet integráljuk a $[0, t_2]$ intervallumon, ahol $t_1 < t_2$:

$$x(t_2) - x(0) = t_2 \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds dt_1.$$

Ismét $t_2 = 1$ -et helyettesítünk a fenti egyenletbe, majd kifejezzük a (2)-ből az $x(1)$ -et

$$\begin{aligned} x(1) - x(0) &= \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds - \int_0^1 (1-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ x(1) - x(0) &= \int_0^1 \left(\frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - 1 + s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ -x(0) \cdot \left(1 + \frac{a_{12}}{b_{12}} \right) &= \int_0^1 \left(\frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - 1 + s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\ x(0) &= \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} \int_0^1 \left(\frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} - s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} \int_0^1 \left(\frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} - s \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \int_0^1 f(s, x(s), y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^t (t-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&= \int_0^1 \left(\frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \right) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&\quad - \int_0^t (t-s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds \\
&= \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds,
\end{aligned}$$

ahol $G_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
G_1(t, s) &= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} - (t-s) \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} + s \cdot \frac{a_{12}}{a_{12} + b_{12}} - t \cdot \frac{a_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
&\quad \begin{cases} \frac{a_{11} \cdot b_{12}}{(a_{11} + b_{11})(a_{12} + b_{12})} - s \cdot \frac{b_{12}}{a_{12} + b_{12}} + t \cdot \frac{b_{11}}{a_{11} + b_{11}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases}
\end{aligned}$$

Hasonlóan $y(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds$, ahol $G_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, és

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{a_{21} \cdot b_{22}}{(a_{21} + b_{21})(a_{22} + b_{22})} + s \cdot \frac{a_{22}}{a_{22} + b_{22}} - t \cdot \frac{a_{21}}{a_{21} + b_{21}} \\ 0 \leq s \leq t \end{cases} \\
\begin{cases} \frac{a_{21} \cdot b_{22}}{(a_{21} + b_{21})(a_{22} + b_{22})} - s \cdot \frac{b_{22}}{a_{22} + b_{22}} + t \cdot \frac{b_{21}}{a_{21} + b_{21}} \\ 0 \leq t \leq s \end{cases}$$

Legyen $\Gamma \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $|G_1(t, s)| \leq \Gamma$ és $\Delta \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $|G_2(t, s)| \leq \Delta$.
Legyenek

$$T_1(x, y)(t) = \int_0^1 G_1(t, s) \cdot f(s, x(s), y(s)) ds$$

$$T_2(x, y)(t) = \int_0^1 G_2(t, s) \cdot g(s, x(s), y(s)) ds$$

és $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2$, $T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionál.

Ekkor a $T(u) = u$ fixpontfeladat $\forall u^* = (x^*, y^*) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2$ megoldása kielégíti a (5.1)-es rendszert.

5.1 A polilokális peremfeltételű rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége a Perov tétel alkalmazásával

Legyenek f és g Lipschitz tulajdonságú függvények, vagyis bármely $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |f(s, x, y) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_1 |x - \tilde{x}| + b_1 |y - \tilde{y}| \\ |g(s, x, y) - g(s, \tilde{x}, \tilde{y})| \leq a_2 |x - \tilde{x}| + b_2 |y - \tilde{y}| \end{cases}$$

ahol a_i, b_i valós számok $\forall i \in \{1, 2\}$.

5.1 Tétel. Ha f és g Lipschitz tulajdonságú függvények és létezik Γ és Δ a fenti módon és az $M_{\Gamma\Delta} = \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix}$ nullához konvergál, akkor a (5.1)-es rendszernek pontosan egy megoldása van.

Bizonyítás. Az előző alfejezetben látott módszerhez hasonlóan majoráljuk a

$$|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)|$$

kifejezést. Végeredményül azt kapjuk, hogy

$$\|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Gamma[a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty]$$

és

$$\|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \leq \Delta[a_2\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_2\|y - \tilde{y}\|_\infty]$$

vagyis

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(\tilde{u})\| &= \|T(x, y) - T(\tilde{x}, \tilde{y})\| = \begin{pmatrix} \|T_1(x, y) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \\ \|T_2(x, y) - T_2(\tilde{x}, \tilde{y})\|_\infty \end{pmatrix} \\ &\leq \begin{pmatrix} a_1\Gamma & b_1\Gamma \\ a_2\Delta & b_2\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} \\ &= M_{\Gamma\Delta} \cdot \|u - \tilde{u}\| \end{aligned}$$

■

5.2 A megoldás létezése a Schauder tétel segítségével

5.2 Tétel. Ha a (5.1)-es rendszerben szereplő f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek (vagyis teljesítik a (4.10)-es feltételt) és $M_{\Gamma\Delta}$ nullához konvergáló mátrix, akkor a rendszernek létezik legalább egy (x^*, y^*) megoldása.

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressük a $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt, melyre igaz, hogy $T(D) \subset D$.

Ehhez vizsgáljuk a $|T_1(x, y)(t)|$ -t.

$$\begin{aligned}
|T_1(x,y)(t)| &\leq \int_0^1 |G_1(t,s)| \cdot |f(s,x(s),y(s))| ds \\
&\leq \Gamma(a_1 \|x\|_\infty + b_1 \|y\|_\infty + c_1)
\end{aligned}$$

Végeredményül:

$$\|T(u)\| \leq M_{\Gamma\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\infty \\ \|y\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \Gamma \\ c_2 \Delta \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\}$, akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \Gamma \\ c_2 \Delta \end{pmatrix}$ teljesüljön.

Tehát az I fejezet 2.3-as tétele alapján a bizonyítás teljes. ■

6 A peremfeltételek általánosítása

Most vizsgáljuk azt az általánosított peremfeltételt, amikor az $x(0)$ és az $x'(0)$ értékeket ismerjük valamilyen $\alpha_i, \beta_i : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ lineáris és folytonos funkcionálokon keresztül:

$$\begin{cases}
x''(t) = -f(t, x(t), y(t)) & t \in [0, 1] =: I \\
y''(t) = -g(t, x(t), y(t)) \\
x(0) = \alpha_0[x] & (1) \\
x'(0) = \alpha_1[x] & (2) \\
y(0) = \beta_0[y] & (3) \\
y'(0) = \beta_1[y] & (4)
\end{cases} \quad (6.1)$$

Integráljuk az első egyenletet a $[0, t_1]$ intervallumon, majd a kapott egyenletet integráljuk a $[0, t]$ intervallumon. Így azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds. \quad (6.2)$$

Legyenek $T_1, T_2 : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ funkcionálok úgy, hogy:

$$\begin{cases}
T_1(x, y)(t) = \alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds \\
T_2(x, y)(t) = \beta_0[y] + t \cdot \beta_1[y] - \int_0^t (t-s)g(s, x(s), y(s))ds
\end{cases}$$

Így a $T : (\mathcal{C}[0, 1])^2 \rightarrow (\mathcal{C}[0, 1])^2, T = (T_1, T_2)$ teljesen folytonos funkcionálhoz tartozó fixpont feladat megoldása elvezet a (6.1)-es differenciálegyenlet rendszer megoldásához.

6.1 Tétel. Ha az $M = \begin{pmatrix} \|\alpha_0 + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0 + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix}$ mátrix nullához konvergáló és az f és g függvények Lipschitz tulajdonságúak, akkor a (6.1)-es rendszer Ulam-Hyers stabil és létezik egyértelmű megoldása.

Bizonyítás. A $T(u) = u$ fixpontfeladat megoldásához alkalmazzuk a Perov tétel. Ezért írjuk fel a $|T_1(x, y)(t) - T_1(\tilde{x}, \tilde{y})(t)|$ -t:

$$\begin{aligned} &= |\alpha_0[x - \tilde{x}] + t \cdot \alpha_1[x - \tilde{x}] - \int_0^t (t-s)(f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y}))ds| \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + \int_0^t |t-s| \cdot |f(s, x(s), y(s)) - f(s, \tilde{x}, \tilde{y})|ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty + (a_1\|x - \tilde{x}\|_\infty + b_1\|y - \tilde{y}\|_\infty) \int_0^t |t-s|ds. \end{aligned}$$

Szuprémumra térve kapjuk, hogy $\|T(u) - T(\tilde{u})\| \leq \begin{pmatrix} \|\alpha_0\| + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0\| + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix}$.

A Perov tétel (első fejezet, 2.6-os tétel) alapján tehát létezik egyetlen fixpontja a $T(u) = u$ fixpontfeladatnak. A 2.7-es tétel alapján pedig a fixpontfeladat Ulam-Hyers stabil. Mindez implicálja a rendszer stabilitását és azt is, hogy a rendszernek létezik egyértelmű megoldása. ■

6.2 Tétel. Ha a fent megadott $M = \begin{pmatrix} \|\alpha_0\| + a_1 + \|\alpha_1\| & b_1 \\ \|\beta_0\| + a_2 + \|\beta_1\| & b_2 \end{pmatrix}$ mátrix nullához konvergáló és az f és g függvények legfennebb lineáris növekedésűek, akkor a (6.1)-es rendszernek van legalább egy megoldása.

Bizonyítás. A Schauder tétel alkalmazásához keressünk egy $D \subset (\mathcal{C}[0, 1])^2$ nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazt úgy, hogy $T(D) \subset D$.

$$\begin{aligned} |T_1(x, y)(t)| &= |\alpha_0[x] + t \cdot \alpha_1[x] - \int_0^t (t-s)f(s, x(s), y(s))ds| \\ &\leq |\alpha_0[x]| + |t| \cdot |\alpha_1[x]| + \int_0^t |t-s| \cdot |f(s, x(s), y(s))|ds \\ &\leq \|\alpha_0\| \cdot \|x\|_\infty + |t| \cdot \|\alpha_1\| \cdot \|x\|_\infty + \int_0^t |t-s| \cdot (a_1|x(s)| + b_1|y(s)| + c_1)ds \end{aligned}$$

Hasonlóan majorálhatjuk a $T_2(x, y)(t)$ -t. t -vel szuprémumra térve a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\|T(u)\| \leq M \cdot \begin{pmatrix} \|x - \tilde{x}\|_\infty \\ \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a kívánt halmazt megkapjuk, keressük az $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ számokat, melyekre ha $u \in B(R_1, R_2) = \{(x, y) \in (\mathcal{C}[0, 1])^2 : \|x\|_\infty \leq R_1, \|y\|_\infty \leq R_2\}$, akkor $T(u) \in B(R_1, R_2)$.

Ehhez elégséges, hogy $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \geq (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ teljesüljön. ■

Megjegyzés. A fenti (6.1)-es általános peremfeltételű rendszerből az α_i, β_i funkcionálok megválasztásával visszakaphatjuk a (4.1)-s és a (5.1)-es rendszereket. Például a (6.1)-es rendszert kapjuk, ha

$$\alpha_0[x] = -\frac{b_{11}}{a_{11}}x'(0)$$

és

$$\alpha_2[x] = a_{12}x(1) + b_{12}x(0) - x'(0).$$

Ezek a funkcionálok lineárisak.

Hivatkozások

- [1] András Szilárd: *Ecuatii Integrale Fredholm-Volterra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, (2005)
- [2] Perov A. I., Kibenko A. V.: *On a certain general method for investigation of boundary value problems (Russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR 30 (1966), 249-264
- [3] Radu Precup: *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (2002)
- [4] Radu Precup: *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, *Mathematical and Computer Modelling*, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 703 - 708
- [5] Radu Precup: *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, *Mathematical Models in Engineering, Biology and Medicine: International Conference on Boundary Value Problems: AIP Conf. Proc.* 1124, pp. 284-293 Santiago de Compostela, (2008)
- [6] I.A. Rus: *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, *Fixed Point Theory*, 10(2009), 305-320.
- [7] Octavia Nica: *Nonlocal initial value problem for first order differential system*, kiadás folyamatban
- [8] Octavia Nica, Radu Precup: *On the nonlocal initial value problem for first order differential systems*, *Stud. Univ. Babeș-Bolyai* 56(2011), No. 3, 113 - 125
- [9] Pasc Gavruta, Soon-Mo Jung, Yongjin Li: *Hyers-Ulam stability for second-order linear Differential equations with boundary conditions*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol 2011 (2011), No. 80, pp. 1-5.