

**AZ ALGORITMUS MEGÉRTÉSE
SZEMBEN
A MEGÉRTÉS ALGORITMUSÁVAL**

TARTALOMJEGYZÉK

Az algoritmus megértése szemben a megértés algoritmusával

TARTALOMJEGYZÉK	2
I. BEVEZETÉS	4
I. 1. Hibakezelés – Error management	5
II. TUDÁSSZERVEZŐDÉS	7
II. 1. Matematikai fogalomalkotás	7
II. 1. 1. A matematika három világa – David Tall elmélete (2004)	8
II. 1. 2. Variáció elmélet – Marton, Runesson és Tsui (2004)	9
II. 1. 3. A probléma felvetése – Cunningham (2004)	10
II. 1. 4. A „Mi van, ha nem?” stratégia – Brown és Walter (1993)	11
II. 1. 5. Hármaskódolás elmélet - Dehaene (1992)	11
II. 1. 6. Folyamatorientált modell - McCloskey (1992)	12
II. 1. 7. Matematikai meghatározások	12
II. 2. Matematikai műveletek	15
II. 2. 1. APOS elmélet	16
III. PIAGET PSZICHOGENETIKAI ELMÉLETE A MATEMATIKAI FOGALMAKRÓL.....	17
III. 1. A műveletek szerepe	17
III. 2. A műveletek felépítésének szakaszai	19
III. 2. 1. A konkrét műveletek szakasza	19
IV. VAN HIELE ELMÉLETE	22
IV. 1. Struktúrák-szerkezetek.....	23

IV. 2. A Van Hiele szintek.....	24
IV. 2. 1. Első szint – Felismerés	25
IV. 2. 2. Második szint – Analízis.....	25
IV. 2. 3. Harmadik szint – Hozzárendelés.....	26
IV. 2. 4. Negyedik szint – Dedukció, következtetés.....	26
IV. 2. 5. Ötödik szint – Szabályalkotás (Rigour)	27
IV. 3. Az elmélet tulajdonságai	27
IV. 4. A tanulás fázisai	28
IV. 5. Összegzés.....	28
V. MATEMATIKAI TANULÁSI MOTIVÁCIÓ	30
V. 1. Matematika iránti attitűd	30
V. 2. Van Hiele elmélet és motiváció	32
VI. A KUTATÁS LEÍRÁSA	33
VI. 1. Célok.....	33
VI. 2. Hipotézisek	34
VI. 3. A kutatásban résztvevő személyek.....	39
VI.4. Eszközök	41
VI.5. Az eredmények bemutatása.....	44
VI. 6. Az eredmények értelmezése és következtetések.....	49
VI. 7. A kutatás korlátai és továbbfejlesztési lehetőségek.....	50
VI. 8. Összegzés.....	52
VII. KÖNYVÉSZET	53
VIII. Mellékletek	56

I. BEVEZETÉS

Sokat hangoztatott tanári vélemény, hogy a tanulásban a megértés és nem a memorizálás játssza a fontosabb szerepet. Nem szeretünk szóról szóra tanulni és a közvélemény sem azt tartja tehetséges, okos diáknak, aki csupán felszínesen tanul és memorizál. A közvélemény és tudományos álláspont ezen a téren nagyon egybecsengő: a tanulás akkor hatékony, ha megértésre támaszkodik, az emlékezetünk is befogadóbb a mélyebb szintű információfeldolgozásra, hosszabb távon képes tárolni az információt, ha körültekintő elemzésnek vetettük alá, mintha csak a felszíni jegyek alapján kódolnánk (Craik és Lockhart, 1972, Baddeley nyomán). Dolgozatunkban a megértés és tanulás kérdéskörét szeretnénk tudományos eszközökkel körüljárni, különös tekintettel azokra a kognitív tényezőkre, amelyek a matematika tanulásában fontos szerepet játszanak.

A matematika tanulása, tanítása izgalmas interdiszciplináris terület: érdekes a matematikus és pszichológus számára is. Jól kontrollált környezetet biztosít a kognitív képességek kibontakozására és nagyon széles körben differenciál. Az iskolai siker és sikertelenség ezen a területen nagyon korán megmutatkozik, és az egymásra épülő fogalmak nehezen, vagy egyáltalán nem teszik lehetővé azt, hogy utólag egészítsük ki a megértés hiányzó darabkait. A diákokat nagyon könnyen évekig kudarcra predesztinálja akár az első néhány iskolai hét is. Ennek a folyamatnak sokféle tényező állhat a háttérében. Jelen kutatásunkban a következő aspektusokat szeretnénk a figyelem fókuszába helyezni:

- o hogyan alakul ki a számfogalom?
- o számolás alapműveleteinek használata feltételezi-e a számfogalom kialakulását?
- o milyen összefüggés van a matematikai attitűd, tanulási motiváció és matematikai megértés, teljesítmény között?

Tekintettel arra, hogy a fókuszálás magában hordozza a sarkítás veszélyeit is, szeretnénk az egyes fogalmakat összefüggéseiben tárgyalni, de a teljesség igénye nélkül. Mára már minden fogalomnak saját könyvtáryi szakirodalma van, jelen kutatásunkban minden kérdést pszichológiai nézőpontból közelítünk meg.

Dolgozatunkban az áttekinthetőség érdekében a következő logikai sorrendet követjük: a bevezetőben szó esik arról, hogy mi irányította a figyelmünket az algoritmusok és megértés témakörére, milyen új szempontok merülnek fel a korábbi kutatásokhoz képest.

Mivel a téma szorosan kötődik a tudásszerveződéshez, fontosnak tartjuk, hogy szó essen azon alapkonceptiókról is, melyeket a kognitív pszichológia korábban is használt a fogalmak kialakulásával kapcsolatban. Ezt követően rátérünk azon elméletekre, amelyek a megértés és fejlődés kapcsolatát modellezik. Piaget pszichogenetikai elmélete nagy hatást gyakorolt arra, ahogyan jelen pillanatban az intelligencia és kognitív képességek fejlődését értelmezzük, de érdemesnek találtuk a Piaget megközelítésével bizonyos mértékben összezsengő, helyenként azonban lényegesen eltérő álláspontú holland kutató, Van Hiele elméletét is bemutatni. Ezek az elméletek képezik dolgozatunk és hipotéziseink elméleti hátterét.

I. 1. Hibakezelés – Error management

A 70-es, 80-as években több tanulmány készült a diákok matematika területén elkövetett jellegzetes hibáiról (Radatz, 1979, Reiss nyomán). Ezek a tanulmányok diagnosztikai szempontból közelítették meg a témát és az volt a céljuk, hogy feltárják a hibák hátterében álló okokat. Nagyon kevés olyan tanulmány készült, ami nem a diagnosztikai megközelítést vette volna alapul, hanem a diákok hiba-kezelési szokásait (mistake-handling), ez egy ígéretes kutatási területnek bizonyult.

A különböző országokban végzett videofelvételes kutatások nyomán azt találták, hogy a diákok csak nagyon ritkán követnek el nyilvánosan hibákat az osztályteremben (Heinze, 2005). Németországban a videofelvételek során a nyolcadikos osztályos diákok térmértan órán átlagosan kevesebb, mint 5 hibát követnek el 45 perc alatt. A tanárok többnyire nem úgy kezelik a hibákat, mint lehetőséget a tanításra, implicit módon kerülnek a hibák megbeszélését, a hibaforrások feltárását. Ennek nyomán nem meglepő, hogy Oser és Psychiger (2005) és Heinze (2005) eredményei szerint a svájci és német diákok nem ismerik fel a saját hibáikban rejlő lehetőségeket.

Az elkövetett hibák oktatásban betöltött szerepéről sokan úgy gondolják, hogy jelentős és hangsúlyos, de a gyakorlatban nagyon kevesen élnek ezzel a lehetőséggel és a kutatások is kevés útmutatást nyújtanak. Borasi (1996) kidolgozta a hibák felhasználásának egy alternatív módját: az ő felfogásában a hibák ugródeszkaként

szolgálhatnak a felfedezéshez. Megkülönbözteti az absztrakció három szintjét: a feladat bemutatását (az egyes eseteknek megfelelően), a feladat megoldásához szükséges technikai eszköztár megértését, ill. a matematika természetének megértését, a tanuláshoz való hozzáállás három szintjét (remediation – újraértelmezés, felfedezés és vizsgálat). Az absztrakciós szintek és tanulási szintek minden kombinációjára meghatározza az elkövetett hibák felhasználásának lehetőségét. (Reiss, 2007)

A matematika órákon az egyéni hiba-kezelés különböző szerepeket játszhat az egyes matematikai feladatoknak megfelelően. Az elvek, formulák, algoritmusok alkalmazásakor mindig van egy célunk, egy bizonyos információ mennyiséget meg kell jegyezni és meg kell érteni ahhoz, hogy a tudásanyagot az illető feladat esetében is alkalmazni tudjuk. A hibák hatékony beépítése a metakogníciók egy specifikus megközelítéseként is értelmezhetők, ami előfeltétele a komplex érvelési és bizonyítási feladatok megoldásának (Heinze, Reiss, 2007).

A fent említett kutatók és eredményeik arra ösztönöztek, hogy érdemes a diákok szisztematikus hibáit tanulmányozni. Nagyon sok tanár panaszkodik a diákok figyelmetlenségére, felületes feladat megoldására, de vajon minden esetben erről lenne szó? Sokan azzal érvelnek, hogy a gyerek néha önállóan is jól oldja meg a feladatot, ezek szerint tudja és érti, hogy hogyan kellene, csak nem figyel eléggé. Valószínűleg sok esetben igazuk is van a tanároknak, és a figyelem elterelése rontja a teljesítményt, de a szisztematikus hibák árulkodhatnak másról is. Feltevődik a kérdés, hogy az alapszámításokban előforduló hibák száma a műveletek automatizálódásával miért nem csökken szignifikánsan? Miért nem csak elírások fordulnak elő? Hogyan lehet, hogy egy-egy algoritmust néha jól és néha rosszul alkalmaz? Ilyen és hasonló megfigyelések késztettek a jelenség behatóbb elemzésére.

A hibakezelés kérdésére a műveletek tárgyalásánál még visszatérünk, előbb azonban fontosnak tartjuk a matematikai fogalomalkotás fontosabb fogalmait és az azokkal kapcsolatos kutatásokat bemutatni.

II. TUDÁSSZERVEZŐDÉS

II. 1. Matematikai fogalomalkotás

A matematika tudománya a fogalmak segítségével működik, amik valójában elméleti objektumok meghatározásokkal, amelyeket a megismerés eszközeként, tárgyak, objektumok megkülönböztetésére használunk, tételekkel, a jellemzők, kapcsolatok bemutatására, különböző folyamatok, tárgyi kapcsolatok és műveleti eredmények követésére. Ezek az aspektusok nehézkesen fejlődnek ki a diákok elméjében, de a matematikai kultúra megszerzésével, a matematikai tevékenység során elkerülhetetlenül összekapcsolódnak ezek a fogalmak és hozzájárulnak a működéshez (ugyanabban az értelemben, ahogy a matematika is). (Brousseau, 2006 Kaldrimidou, Sakonidis, Tzekaki nyomán).

A fent említett kutatók megfogalmazásában a fogalmak kialakulása része a matematikai kultúra elsajátításának, ill. a tevékenység lesz az a felület, ahol a fogalmak automatikusan össze is kapcsolódnak. Ez az elképzelés nem tesz különbséget a megértés különböző szintjei között, a műveletek, algoritmusok itt a tevékenység produktumai. Ez a fajta megközelítés jellemzi a legtöbb oktatási rendszert, matematikai tanítási stratégiát. A diákok elsősorban a tevékenység által sajátítják el az új ismereteket, de, hogy melyik kutató mit gondol a mögöttes folyamatokról, az nagyon eltérő képet mutat és fontos kérdés abból a szempontból, hogy milyen tevékenységeket válasszunk ki a hatékony fejlesztéshez.

A továbbiakban azt a folyamatot szeretnénk részletesebben is körüljárni, ahogy a legelső matematikai fogalmak kialakulnak, összekapcsolódnak, műveletekbe szerveződnek. A teljesség igénye nélkül bemutatunk néhány jelentős elméletet a témakörben.

II. 1. 1. A matematika három világa – David Tall elmélete (2004)

David Tall (2004) elképzelése szerint a matematikai gondolkodásnak három egymástól elkülönülő, de kapcsolati hálóban lévő „világa” létezik. Mindegyik a kifinomultság sajátos fejlődési sorozatával, az igazság iránti elköteleződésével átíveli a fejlődés teljes felületét az újszülött matematikájától a kutató matematikus matematikájáig. (Tall, 2004). Ezek az elképzelések is, akárcsak a kognitív fejlődés más elméletei, mint a Van Hiele elmélet, Dubinsky, Sfard fejlődésemélete, a Piaget elmélete által befolyásoltak (hiszen magukba foglalják az absztrakció hármass elméletét). A három elmélet Piaget megfogalmazásában: a tapasztalati (empirikus) absztrakció, amely arra fókuszál, hogy a gyermek hogyan képezi le a tárgyak tulajdonságait, a pszeudo-empirikus absztrakció, fókuszában azokkal a jelentésekkel, amelyek tárgyak tulajdonságaival végzett műveletekhez kapcsolódnak, ill. a reflektív absztrakció, amely azon folyamatra fókuszál, hogy hogyan válik a cselekvés és művelet az asszimiláció tematikus tárgyává. (Sarvestani, 2011 nyomán)

Tall a kognitív fejlődést három szakaszra osztja: a fogalmi-tárgyasult világ, formális-axiomatikus világ és a perceptuális-szimbolikus világ.

Az első: a fogalmi-tárgyasult világ (conceptual-embodied world or embodied world) alapján azokat a matematikai fogalmakat alkalmazza, amelyek az érzékszervek által befogadhatóak, mint például a geometria (Tall, 2004).

A második: perceptuális-szimbolikus világ a szimbólumok használatának, ezen képességeknek a világa. A szimbólumok azon eszközök, amelyek átváltoztatják a „tedd meg”/„csináld” matematikát a „gondold át” matematikává. (Tall, 2004) Ebben a világban az egyén már mentális műveleteket végez a fogalmakkal, a szimbólumok egyszerre jelölik a feldolgozást és fogalmat is.

A harmadik: formális-axiomatikus világ arra alapul, hogy a tulajdonságok végső soron terminusokban, törvényekben fejeződnek ki, a matematika szerkezetét meghatározó axiómákban. Az egyén akkor ér el a megértésnek ezen szintjére, amikor a fogalmakról alkotott mentális reprezentációi kiforrottak és képesek a műveleteket tárgyként kezelni, eljutni a formális definíciókig. Ezen a szinten már a tulajdonságok kikövetkeztethetőek a törvényekből és elvekből. (Tall, 2004)

Ez az elmélet szemléletesen mutatja be a matematikai megértés és fogalomalkotás egyes lépcsőfokait is, hiszen a magasabb rendű folyamatok, amelyeket a második és harmadik „világ” feltételez, építenek azokra a fogalmakra, amelyek az első szinten kialakulnak. Jól példázza ez az analógia azt, ahogyan a diákok fogalmi rendszere újjászerveződik a megismerési folyamat során, ellentétben azokkal az elképzelésekkel, ahol csupán kibővül a fogalmi rendszer.

II.1. 2. Variáció elmélet – Marton, Runesson és Tsui (2004)

A variáció elmélet (Marton, Tsui, 2004, Kullberg, nyomán, 2007) Marton és Booth 1997-es fenomenografikus kutatásaira épül (phenomenographic research¹). Az elmélet arra vonatkozik, hogy hogyan tapasztaljuk a világot magunk körül. Az elmélet szerint a tanulás a szétválasztáson alapul. Tanulni annyi, mint szétválasztani, megkülönböztetni a tárgyak egyes tulajdonságait. A diákok különböznek aszerint, hogy milyen jelenségeket és tulajdonságokat választanak szét, így a tanulás eredménye más és más. Ahhoz, hogy egy tulajdonságot szét lehessen választani a megfigyelt jelenségek összességéből, arra van szükség, hogy a tulajdonság szisztematikusan jelenjen meg. Egy sajátos tulajdonság rendszerrel bíró fogalom, szituáció vagy jelenség esetén, ha a fogalom egy aspektusa úgy változik, hogy közben minden más állandó marad, akkor az illető tulajdonságot „tetten értük”. Ebben a megközelítésben a tanár feladata, hogy lehetővé tegye a diákok számára, a szükséges variációt, illetve az attól való eltérést, feltárva így a tárgy kritikus aspektusait. Marton, Runesson és Tsui (2004) azt állítják, hogy „a kritikus tulajdonságok legalább részben empirikusan is fellelhetők – például a tanulókkal készített interjúkból, vagy az órán történt események elemzéséből, illetve meg kell őket határozni minden tanulási objektum esetén, merthogy kritikus tulajdonságokról csak az egyes objektumok esetén beszélhetünk” (Kullberg nyomán, 2007).

A tanórák tanulmányozása során a kritikus tulajdonságokat a pre és poszt tesztek megfogalmazásában találjuk. Fontos, hogy a kritikus tulajdonságokat ne csak elmondjuk a diákoknak, nekik kell azokat érzékelniük. Ez azt jelenti, hogy a tanár feladata, hogy a diák figyelmét ráirányítsa a kritikus aspektusokra. Ha a diák nem lesz képes

¹ Fenomenografikus megközelítés: A kognitív paradigmán belül a fenomenográfia empirikusan kutatja azt, hogy a különböző jelenségeket milyen különféle, minőségileg is különböző módokon tapasztaljuk és értjük meg; s hogy az így létrejött leíró kategóriák milyen logikai elven kapcsolódnak egymáshoz, s milyen kritériumok mentén szerveződnek hierarchikus rendbe (Marton, 1994, Kálmán, 2004 nyomán).

megkülönböztetni az egyes tulajdonságokat, akkor az nehézséget okoz majd a tanulási folyamatban. Ezért az egyes tulajdonságok különböző variációinak megtapasztalása lényeges a tanulás szempontjából (Kullberg, 2007).

Ezen elmélet bizonyos mértékben megfelelne a jegyösszehasonlító elmélet (Rips és mtsi, 1973, Smith és mtsi, 1974, Keane, Eysenck nyomán, 2003) fordított változatának, ahol a fogalmak, jelenségek közötti különbségeket keressük. A jegyösszehasonlító elméletet nagyon sok kritika érte, mert nem volt alkalmas arra, hogy a hétköznapi életben használt fogalmi rendszert kifogástalanul modellezze, de a jól definiált matematikai fogalmakra (páros szám, páratlan szám, geometriai alakzat) Armstrong és mtsi (1983) is azt találták, hogy az elmélet működik (Keane, Eysenck nyomán, 2003).

II. 1. 3. A probléma felvetése – Cunningham (2004)

A probléma felvetése nagyon fontos része a matematika tananyagának, és lényeges része a matematikai tevékenységnek is (Brown és Walter, 1993, NCTM, 2000). A probléma felvetése magába foglalja az eredeti probléma általánosítását, azokat a kérdéseket, amik a szituáció feltérképezését célozzák, akárcsak a probléma újfogalmazását a problémamegoldás során (Silver, 1994). Ha arra készítjük a diákokat, hogy fogalmazzák meg a problémát a maguk számára, azzal nagyban elősegítjük a szerteágazó és rugalmas gondolkodást, növeljük a diákok problémamegoldó készségét, kiszélesedik azáltal a matematikai észlelés, gazdagodnak, megszilárdulnak az alapfogalmak (Brown és Walter, 1993, English, 1996). Ezek mellett segíthet abban, hogy a diák önállósodjon a tanártól és a tankönyvtől, megadja a lehetőséget a diákoknak arra, hogy elköteleződjenek a tanulás mellett (belső motivációval oldják meg a feladatot).

Cunningham (2004) kimutatta, hogy a problémafeltárással a diákok érvelése és reflexiója is kibővült. Amikor a diák eljut oda, hogy képes legyen önmaga megfogalmazni az új problémákat, nem a tanár, az azt feltételezi, hogy sokkal inkább magáénak érzi majd és emiatt könnyebben építi be majd a meglévő tudásanyagába is. Mindez megnövekedett kíváncsiságot, elköteleződést és lelkesedést eredményez a matematika irányába. A tanulás motivációs tényezőire egy későbbi fejezetben részletesebben is visszatérünk majd.

II. 1. 4. A „Mi van, ha nem?” stratégia – Brown és Walter (1993)

Brown és Walter (1993) javasolt egy új megközelítést a probléma felvetéséhez a matematika tanításában: a „Mi van, ha nem?” stratégiát. A stratégia arra alapoz, hogy ha megváltoztatjuk a probléma jellemzőit, akkor az érdekes és új megközelítéseket eredményezhet, ami új befektetéseket mutatkozik majd meg. Ebben a megközelítésben a diákokat a probléma háromszintű újraelemzésére bátorítják azért, hogy a közel álló problémákra is fény derüljön. Az első lépésben a diákok egy listát kell készítsenek a probléma jellemzőiről. A második szinten feltevődik a „Mi van ha nem?” kérdés és elkezdenek javaslatokat adni az egyes jellemzők mentén. A harmadik szinten újabb kérdések merülnek fel az addigi alternatívák kapcsán. A stratégia előnye, hogy kimozdítja a diákok gondolkodását abból a sémából, hogy a problémáknak, feladatoknak egyetlen helyes megoldása lehetséges. A probléma felvetésnek ez a módja lehetőséget ad az ötletek széleskörű megvizsgálására, ill. a probléma mélyebb megértésére azáltal, hogy a fókuszpontban már nem csak a megoldás van (Lavy és Shriki, 2007).

II. 1. 5. Hármass kódolás elmélet - Dehaene (1992)

A számok reprezentációjával kapcsolatban Stanislas Dehaene (1992) hármass kódolás elmélete leírja azokat a mentális reprezentációkat, amelyeket az egyszerű numerikus feladatok megoldásához használunk. Az elmélet értelmében a számokat nem egy egységes reprezentációban tároljuk, hanem három egymással kapcsolatban lévő, de különböző rendszer segítségével. Az analóg mennyiség reprezentáció a számokat egy „mentális számegeteshez” hasonlóan tárolja, ahol minden szám a mennyiségével arányos mértékben kap helyet: minél nagyobb a szám, annál nagyobb a reprezentációja is. Az auditoros verbális szókeret a számokat nyelvi formában, vagyis hangok sorozataként tárolja. A vizuális arab szám formátum az arab számokhoz kapcsolódó egyes műveleteket tárolja, illetve kevésbé specifikált módon szerepe van a párossági döntésekben. Az analóg mennyiség reprezentáció a rendszer zajossága miatt nem tudja pontosan tárolni a számok értékét: minél nagyobb a szám, annál nagyobb a jelhez kapcsolódó zaj is. Ezzel ellentétben a verbális rendszer pontos, de önmagában nem hordoz információt a számok nagyságáról, a számok jelentését nem tudja hozzákapcsolni az általa tárolt hangsorozathoz. (Dehaene, 1992, 2001, 2003)

A három rendszer összekapcsoltnan működik, mindegyik rendszer külön bemenetet kap és külön kimenetet küld. A vizuális arab számformátum az arab számok olvasását és írását végzi, a verbális rendszer betűket olvas és ír, ugyanakkor a kimondott és hallott számneveket értelmezi, míg az analóg rendszer a vizuális becslésekért. A becslés segítségével hozzávetőleges értéket kapunk a mennyiségről.

II. 1. 6. Folyamatorientált modell - McCloskey (1992)

McCloskey elmélete szerint a számok tárolására egyetlen egységes reprezentáció létezik, amelynek két alapvető folyamata van: numerikus feldolgozási folyamatok és számolási mechanizmusok (McCloskey, 1992). A numerikus feldolgozás a számok és a mennyiségek megértésére és produkciójára vonatkozik, tehát a számok és az általuk jelölt mennyiségek beolvasását és a kimenet létrehozását foglalja magában. Ez a folyamat az elmélet szerint független a jelöléstől, ilyen értelemben absztrakt. A másik alapvető folyamat a számolási folyamat, amely lehetővé teszi különböző numerikus információkon végzett műveleteket. A számolási mechanizmusok McCloskey modelljében az aritmetikai tények előhívása, és a számolási procedúrák, azaz az összetettebb számoláshoz szükséges részlépések, amelyek a tanulás során automatikussá váltak. McCloskey nagyobb hangsúlyt fektet a feldolgozás során a tények és procedúrák elkülönülésére, míg Dehaene részletesebben írja le az analóg mennyiségrendszer feldolgozási mechanizmusait, de a két elmélet nem mond ellent egymásnak.

Dahaene (1998) elméletében a számfogalom reprezentálását három, viszonylag független rendszer végzi míg McCloskey elméletében az input és output folyamatok egyetlen rendszer segítségével, absztrakt módon valósulnak meg: a mennyiség reprezentációjáért felelős rendszer képes a leképezéshez szükséges összes tulajdonságot kezelni, szintetizálni egy sajátos, a bemeneti kódrendszertől független formában.

II. 1. 7. Matematikai meghatározások

A meghatározás a matematika és matematikai nevelés fontos részének számít (Harel, Selden, és Selden, 2006; Ouvrier-Buffet, 2002; Shir és Zaslavsky, 2001), ill. jelentős szereppel bír a fogalmak megértésében, a feladatok megoldásában, a problémamegoldás folyamatában. A tanulásban a meghatározás megszerkesztése,

szervezése a már meglévő fogalmak használatával szemben ugyanolyan fontos, mint a problémamegoldás, a találgatás, általánosítás és bizonyítás (Ouvrier-Buffet, 2006).

Kang és Cho (2002) azonosított 5 meghatározási módot, amit az iskolai mértanban használnak: *sinonimous*, *denotative*, *implicative*, *constructive*, *analytic*. Az első három meghatározási módszer klasszikusnak minősül, míg az utóbbi kettő tudományosnak. A meghatározás megalkotásában a gyakorlatias, praktikus meghatározási módszerek esetében az észlelt jellemzőket, a direkt módon hasznos jellemvonásokat választjuk ki, míg a tudományos meghatározás esetén az ok-okozatiság, a kapcsolódás szerint választunk, ami megmutatja, hogy milyen módon függenek egymástól a fogalmak, hogy lépnek egymással interakcióba. Az utóbbi módszereknek tulajdoníthatóan egymástól elszigetelt információk között is teremthetünk kapcsolatot.

Fischbein (1987) azt állította, hogy a példák/prototípusok központi szerepet játszanak az intellektuális tevékenységben, és hangsúlyozta a denotatív módszer (*denotative method*) fontosságát. Egy a fogalomról alkotott prototípus olyan objektumra vonatkozik, ami hordozza a fogalom tulajdonságait, ilyen formában hozzájárul az intellektuális tevékenységhez is. Skemp (1971) kiegészítette ezt azzal, hogy a fogalmi tanulás megalapozza a magasabbrendű matematikai elvek elsajátítását is. Szerinte a fogalmi tanulás leghatékonyabb módja az induktív érvelés mentén valósul meg, amelyben a megfelelő prototípus kéznél van abban, hogy segítsen a diákoknak felfedezni a példák közötti hasonlóságokat, hogy fel tudják építeni a hasonlóságokból a fogalmat.

Az absztrakció nagyon fontos elemeit képezik az általánosítás és szintetizálás. Az általánosítás származtatás az egyes esetekből, a hasonló folyamatokra való kiterjesztés, az absztrakció egy konstruktív folyamat, amely a rendelkezésre álló kellékekből és a matematikai objektumok közötti kapcsolatokból valósul meg. Dreyfus (1991) szerint ez a folyamat függ a sajátos tulajdonságok és kapcsolatok izolációjától. A diákok konstruktív mentális tevékenysége függ attól, hogy mennyire van a figyelem azokra a szerkezeti elemekre fókuszálva, amik alkotják a fogalmat és mennyire van elterelve a lényegtelen kontextuális információkról. A szintézis elve azt jelenti, hogy az egyes elemeket úgy kombináljuk, hogy egységes egészet alkossanak, egy entitást. Az összefüggéstelen részletek össze kell olvadjanak egy kapcsolati rendszerré (Kyung, EunSung, és SangHun, 2007 nyomán).

Kyung, EunSung, és SangHun (2007) kutatásában a diákokat arra kérték, hogy platóni poliédereket építsenek megadott anyagokból, majd minden poliédert alapos megfigyelés után határozzanak meg. A diákok csoportokban dolgoztak és a három csoportból az első tökéletesen meghatározta a poliéder fogalmát, a másodiknak nem sikerült megadni a tökéletes meghatározást, a harmadiknak pedig nagyobb nehézségei adódtak. Az első csoportnak sikerült nemcsak általánosítani és szintetizálni a poliéder tulajdonságait, hanem sikerült a tulajdonságok közötti kapcsolatokat is feltárni, majd meghatározni, hogy mely kritikus tulajdonságok határozzák meg a poliédert. Így sikerült a matematikai definícióval egy logikailag izomorf meghatározást megfogalmazni. A második csoportban az általánosítás szintén sikeres volt, de a szintézisben elakadtak. Dreyfus (1991) szerint az absztrakció akkor valósul meg, ha a diákok figyelmét a kritikus tulajdonságokra irányítják. A második csoport ennek értelmében a megértésnek azon a pontján rekedt meg, amelynek során az egyes komponensek közötti kapcsolatokat kellett volna feltárni ahhoz, hogy megkülönböztessék a poliédereket egymástól. (Kyung, EunSung, SangHun, 2007 nyomán).

Mariotti és Fishbein (1997) azt hangsúlyozza, hogy vannak olyan diákok, akik gestalt módon vizuális információként fogják fel az egyes alakzatokat, így elvesznek a részletekben. Ezzel magyarázható talán az, hogy a harmadik csoportnak az egyes tulajdonságokat sem sikerült megfelelő módon feltárni, kiválasztani a lényegeseket a kevésbé meghatározóktól (azoktól, amelyeket elsősorban vizuálisaknak nevezhetnénk) (Kyung, EunSung, SangHun, 2007 nyomán).

Az első csoport által ismét bizonyítást nyert, hogy a matematikában tehetséges diákok az általánosítás, szintetizálás és absztrakció tekintetében jól teljesítenek (Kyung, EunSung, SangHun, 2007).

A fenti elméletek már részletesebben elemzik a matematikai tevékenység mögötti folyamatokat. Kyung, EunSung, SangHun (2007) kutatásában a megértés különböző szintjeit tárgyalja, de nem csupán elkülöníti az önálló folyamatokat, hanem hierarchikus viszonyba is állítja őket. Ebben az értelmezésben azonos korosztályú diákok a feladatmegoldás során a gondolkodási folyamat más-más szintjén is lehetnek. A fenti kutatás nem ad egyértelmű magyarázatot a jelenségre és nem von párhuzamot az életkornak megfelelő funkciókkal, de érdekes kérdéseket vet fel:

- Mi lehet a szintkülönbség hátterében?

- *Más típusú matematikai feladatok esetében is hasonló különbségeket találunk?*
- *Az azonos korú gyerekek miért nincsenek azonos szinten az általánosítás, szintetizálás és absztrakció tekintetében?*

II. 2. Matematikai műveletek

Az előző fejezetben már érintettük a műveletek témakörét is, hiszen a fogalmak önmagukban nem léteznek. A tudás szerveződése feltételezi a fogalmak azonnali összekapcsolódását, és ez által a rajtuk és velük végzett műveleteket is, ezért tartunk lényegesnek megemlíteni néhány olyan kutatást is, amelyek közvetlenül ezt a témakört érintették.

Amint találkozunk egy matematikai problémával, a diákok spontán módon algoritmusokat és folyamatokat kezdenek el használni. Például Cramer, Post és Currier (1993) megfigyelték, hogy a diákok az arányok helyett sokszor a kivonást használják (1. ábra), mert észlelik ugyan a különbséget az értékek között, de a probléma szerkezetét nem tudják követni. Az ilyen jelenségeket Fishbein és Barash (1993) az algebrai modellek téves alkalmazásának nevezi.

1. ábra: tipikus hibák, Cramer, Post és Currier (1993)

$$\frac{3a+5b}{2a+5c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3+b}{2+c} = \frac{1}{2} \text{ and } (x-6)(x-9) < 0 \Rightarrow x < 6$$

Ezek meglehetősen gyakoriak a diákok körében. A diákok nagy részének gondot okoz, hogy különbséget tegyen a szerkezeti megértés (elgondolás) és műveleti elgondolás között (Sfard, 1991). Úgy kezelik az egyenlőségeket, mint egy sablont, amit „X=„ –vé kell alakítani. Amikor az egyenletet a diákok nem úgy fogják fel, mint kapcsolatot, relációt, a középiskolás és általános iskolás diákok az egyenlőségjelet úgy alkalmazzák, mint egy jelet, ami készletet valamire – például arra, hogy megoldásként megadjunk egy értéket (Kieran, 1981). A diákok tehát nem-referenciális szimbolikus érvelést alkalmaznak, amikor úgy kezelik a matematikai szimbólumokat, mintha „azok önálló életet élnének”, anélkül, hogy a kapcsolati rendszerükre figyelnének.

II. 2. 1. APOS elmélet

Az APOS elmélet (Action, Process, Object, Schema) is Piaget elméletére vezethető vissza. Piaget (1977) úgy írja le a műveleteket, mint olyan cselekvések, amelyek internalizálhatóak, visszafordíthatóak és egy-egy rendszerhez kötötten érvényesülnek, olyan rendszerhez, amelyet egy-egy törvény ural. Piaget úgy gondolja, hogy „a gondolatok műveleti jellege nem kijelentésekben jut kifejeződésre, hanem abban, hogy képes egy kijelentést egy másikká átalakítani”. A műveleti folyamatok, vagy reflektív absztrakciók négy tulajdonsággal rendelkeznek:

- internalizált cselekvések
- visszafordíthatóak
- néhány változatra vonatkoznak
- részei egy műveleti rendszernek

A reflektív absztrakció feltételezi a fogalommal történő cselekvést, a cselekvés átalakítását műveletté, ami magára a gondolkodási szint újraszerveződésére vonatkozik, ez a cselekvések összehangolódásán alapul és már nem csak egyetlen fogalomra vonatkozik. A cselekvés (Action) egy matematikai tartalom átalakítása valamilyen algoritmus alapján. Az agy úgy válaszol a cselekvésre, hogy kialakít egy belső műveletet, ezt nevezzük feldolgozásnak, kialakult folyamatnak (Process). Amikor az agy teljességében megkülönbözteti az önálló folyamatot, és már tudatában van, akkor született meg az új fogalom. A séma (Schema) a cselekvés, folyamat-feldolgozás, fogalom együttese (Sarvestani , 2011 nyomán).

III. PIAGET PSZICHOGENETIKAI ELMÉLETE A MATEMATIKAI FOGALMAKRÓL

Kutatásunkban szeretnénk rávilágítani azokra az elméleti és konceptuális különbségekre, amelyek elvezettek a hipotéziseink megfogalmazásához. Az egyik alapvető elmélet, amelyből kiindulunk, a pszichogenetikai elmélet.

Piaget neve a korábbiakban is felmerült, hiszen a kognitív fejlődésről közzétett elmélete nagymértékben befolyásolta azt, ahogyan ma a kognitív képességek kialakulásáról gondolkodunk, ill. azt, ahogyan az oktatási rendszereink felépülnek. Piaget elmélete sajátos abból a szempontból, hogy a biológia, pszichológia és logika (matematika) fogalmait egységes, egymást meghatározó kontextusba helyezi.

A század elején a kognitív képesség kutatása szorosan együtt járt az intelligencia fogalmának körvonalazódásával. Ebben a tudományos közegben Piaget megfogalmazásában az intelligencia alkalmazkodás, amely a következőképpen valósul meg: „A mentális asszimiláció a tárgyaknak a viselkedési sémákba történő beépítése, mely sémák nem mások, mint a tevőlegesen megismételhető cselekvések vetületei.” (Piaget, 1967)

Az alkalmazkodás két formája: asszimiláció és akkomodáció, egy sor fejlődési fázison megy át addig, amíg képes lesz az egyén a környezet változásaihoz adekvát módon hozzáigazodni.

Piaget fogalmai nagyon gyorsan elterjedtek és közismertté váltak a szakirodalomban. A továbbiakban a pszichogenetikai elmélet azon aspektusait fogjuk bemutatni, amelyek a számfogalom kialakulásához direkt módon kötődnek.

III. 1. A műveletek szerepe

Piaget elméletében a gyermek értelmi fejlődésének kapcsán az egyik legfontosabb kérdés, hogy milyen szintű és színvonalú műveletek elvégzésére képes: „a logikai gondolkodás alapvető tulajdonsága az, hogy műveleti jellegű, azaz a cselekvést annak belsővé tétele (interiorizálása) révén hosszabbítja meg. Ezen a ponton egyeznek a legkülönbözőbb irányzatokból származó vélemények.” (Piaget, 1967)

A fejlődése során egyre csiszoltabb és általánosabb mentális cselekvési eszköztára alakul ki, aminek megfigyelésére nagyon alkalmasak a matematikai műveletek.

„Ha tehát az értelem valódi működését akarjuk megragadni, a szellem e természetes mozgását meg kell fordítanunk, és magának a cselekvésnek a szemszögéhez kell visszakanyarodnunk: a műveletnek, mint belső cselekvésnek a lényege csakis ekkor válik napnál világosabbá. S a műveletet a valóságos cselekvéshez, az értelem forrásához és közegéhez kötő folytonosság így derül ki. Ennek a felfogásnak a megvilágítására mi sem alkalmasabb, mint a matematikai nyelvről, erről a tisztán intellektuális, átlátszó és megtévesztő képzetektől mentes nyelvről való elmélkedés. Bármilyen matematikai kifejezésben, mint amilyen például az $(x^2 + y = z - u)$, minden egyes tag végeredményben egy cselekvést jelöl: az $(=)$ egy behelyettesítés lehetőségét, a $(+)$ jel egy összevonást, a $(-)$ egy szétválasztást, a négyzetre emelés (x^2) azt a cselekvést, hogy x -et x -szer kell venni (...). Ezen szimbólumok mindegyike tehát egy cselekvésre utal, amely valóságos is lehetne, amelyet azonban a matematikai nyelv csupán elvontan, belsővé vált cselekvések, azaz gondolkodási műveletek formájában jelöl.” (Piaget, 1967)

Piaget elképzelésében a gondolkodási folyamatok a műveleti szinttől kezdve egyensúlyban vannak abban az értelemben, hogy megszilárdultak azok a struktúrák, amelyek zökkenőmentesen magukba tudják olvasztani az új ismereteket, vagyis a műveletek „jól” működnek, ellentmondásmentesen. Az egyensúlynak 4 feltételt határozott meg (a matematikai „csoportok” esetében – a minőségi csoportoknál 5 feltétel van):

1. A csoportok elemei egymással **összevonhatóak**, aminek eredményeként a csoport egy új eleme jön létre (így a műveletek is összevonhatóakká válnak).
2. Minden átalakítás **visszafordítható** (a matematikában a csoport minden egyes direkt műveletének megvan az inverze: összeadás-kivonás, szorzás-osztás)
3. **Ugyanazon eredményre vezetnek** a különböző gondolkodási útvonalak (elkalandozások), ez különbözteti meg őket az észleléstől, ahol eltérő útvonalak eltérő eredményre vezetnek
4. Az inverzével kombinált művelet eltörlődik (ami a gyermeki gondolkodást nem jellemzi, mert a gyermek nem őrzi meg a kiindulópontot – ha a hipotézise nem igazolódik be, nem tud visszatérni az eredeti kérdéshez)

Piaget kidolgozta a műveletek osztályozását, és azt a fejlődési folyamatot írta le, amelynek során az egyes műveletek kifejlődnek. A műveletek kialakulását az egyensúlyi állapot jelzi.

III. 2. A műveletek felépítésének szakaszai

A nyelv megjelenésétől kezdve, pontosabban attól kezdve, hogy megjelenik a szimbolikus funkció, amely lehetővé teszi a nyelvelsajátítást (18 hónapostól 2 éves korig), elkezdődik egy szakasz, amely 4 éves korig tart, és amelyet egy szimbolikus és prekonceptuális fejlődés jellemez.

Körülbelül 4-től 7 vagy 8 éves korig, az előző szakasszal a belső folytonosságot megtartva alakul ki az intuitív gondolkodás, amelynek előrehaladó tagolódása a műveletek kialakulásához vezet.

7-8 éves kortól 11-12 éves korig szerveződnek a „konkrét műveletek”, azaz a gondolkodás műveleti csoportosulásai, amelyek a manipulálható vagy az észlelhető tárgyakra vonatkoznak. A számfogalom kialakulásának kérdésével foglalkozva bennünket ennek a szakasznak a sajátosságai foglalkoztatnak leginkább.

11-12 éves kortól kezdve az ifjúkor alatt végül kialakul a formális gondolkodás, ennek csoportosulatai jellemzik a befejező reflexív intelligenciát. (Piaget, 1967)

III. 2. 1. A konkrét műveletek szakasza

Ahogy azt fentebb olvashattuk, a konkrét műveletek szakasza feltételezi, hogy a gyermek a korábbi mentális fejlődési lépcsőfokokat megtette. Ezen szakasz előtt a műveletek kezdetleges formáit már felfedezhetjük a gondolkodásában, de ezek többnyire izoláltan és ellentmondásos formában vannak jelen. A lényeges változások a gyermek 7 éves kora körül jelentkeznek és ezért szokták a 7 éves kort az iskolakezdéshez alkalmas életkornak tekinteni.

„Tulajdonképpen a műveleti csoportosulatok amelyek 7 éves korban (néha egy kicsit előbb) alakulnak ki, a következő struktúrákhoz vezethetnek. Először is, eljutnak a gyerekek az osztályok elkülönítésének logikai műveleteihez és az asszimetrikus összefüggések sorbarendezésének a műveleteihez (...), a 7 éves gyermek sorba tud rakni pálcákat, táskákat és a sorrendet újra képes megtalálni, ha az egészet összekeverjük; megfigyeli, hogy a sor melyik elemének felel meg egy bizonyos másik sor eleme.

Sőt, az osztályok lekülönítésének és a minőségi sorozatalalkotás műveleteinek az egyidejű létrehozása maga után vonja a számok rendszerének a megjelenését. Kétségtelen, hogy a kisgyerek nem várja meg ezt a műveleti általánosítást azért, hogy megalkossa az első számokat, de a számok 1 és 6 év között még intuitívak, mivel perceptív megjelenésekhez vannak kötve. Megtaníthatjuk ugyan számolni a gyereket, de a tapasztalat azt mutatja, hogy a számok verbális használata magukkal a numerikus műveletekkel igen csekély kapcsolatban van, utóbbiak néha megelőzik a beszédben való számolást, vagy ezt követik ugyan, de szükségszerű kapcsolat nélkül.” (Piaget, 1967)

Tehát a számfogalom kialakulása szükségszerűvé válik akkor, amikor a fent említett mentális műveletek elvégzésére képessé válik. Piaget értelmezésében a gyerek korábban is manipulál a számokkal, de intuitív módon, a kisgyermek gondolkodásában nem alkotnak a számok egységes rendszert addig, amíg nem képes bizonyos mentális cselekvésekre. Feltevődik azonban a kérdés, hogy a számfogalom kialakulása a konkrét műveletek szakaszában milyen szinten valósul meg?

„A szám tárgyak sorozata, amelyeket egymással megfeleltethetőnek és sorbarendezhetőnek egyaránt fogunk fel, egyetlen különbség közöttük a sorrendben elfoglalt helyük lesz: a különbségnek és egyenlőségnek ez az egyesítése feltételezi a minőségek eltörlését. Ezeknek a műveleteknek, amelyek összegyűjtik a tárgyakat, hogy osztályozhassuk, sorba rendezhessük, megszámozhassuk őket, a tárgyakat magukat alkotó műveletek felelnek meg. (...) Azonban fontos megjegyeznünk, hogy ezek a különböző logikai-aritmetikai vagy tér-idő csoportosítások még messze vannak attól, hogy olyan formális logikát tartalmazzanak, amely alkalmazható minden fogalomra és minden érvelésre. Itt érkezünk el egy lényeges ponthoz, mind a megismerés elméletét, mind a pedagógiai gyakorlatot illetően: ha az oktatást adaptálni akarjuk a fejlődéslélektan eredményeihez az iskolai hagyományok logicizmusával szemben. Tulajdonképpen ugyanazok a gyerekek, akik elértek az imént leírt műveletekhez, ezekre rendes körülmények között képtelenek akkor, amikor már nem manipulálhatnak a tárgyakkal, amikor arra kérjük őket, hogy egyszerű verbális állítások segítségével gondolkodjanak. Azok a műveletek, amelyekről itt szó van, tehát a „konkrét”, a nem formális műveletek, még mindig a cselekvéshez kötődnek, ezt strukturálják logikailag; ide értve azokat a szavakat is, amelyekkel cselekvésüket kísérik, ezek ugyanis nem teremtik meg egy cselekvéstől független logikai beszéd kialakításának a lehetőségét.” (Piaget, 1967)

Piaget tehát abból a szempontból tesz különbséget a megértés különböző szintjei között, hogy mennyire kötődik a gyermek a konkrét tárgyakhoz. Egyértelműen kijelenti, hogy a kisiskolás gyermekek gondolkodása még nagyon függ a tárgyak fizikai jelenlététől. Érdekes azonban az a megközelítés, hogy a számok ezen a szinten Piaget elmélete szerint önálló konstruktumok, nem tesz különbséget a számjegyek és a mögöttes jelentésük között. Visszautal az intuitív gondolkodásra, de nem beszél arról, hogy mi történik, ha a gyerek minden más szempontból az elvont gondolkodás felé tart, de a számokat még mindig intuitív módon kezeli. Ugyancsak kérdés marad azon diákok helyzete is, akik már ebben a korban viszonylag könnyedén dolgoznak egy elvont fogalmi rendszerben is, a konkrétól elszakadva. Mivel Piaget elmélete nem tartalomhoz kötött és alkalmazása elsősorban a beiskolázás kapcsán valósul meg, nem véletlen, hogy nagyon sok későbbi kutatás alapjául szolgált. A továbbiakban egy olyan elméletet fogunk bemutatni, ami sok szempontból épít a pszichogenetikai elméletre. A Van Hiele elmélet megközelítésében érvényesek a Piaget által körvonalazott fejlődési szakaszok, de nem olyan általános értelemben, mint ahogyan azt eredetileg az elmélet feltételezi. A biológiai struktúrák kialakulása Van Hiele értelmezésében fontos ahhoz, hogy a gyerek képes legyen a megértés különböző szintjeire eljutni, de ennek a folyamatnak inkább csak egy alsó határt szabnak, ami alatt a gyerek nem képes bizonyos mentális műveleteket elvégezni, de a struktúrák megléte még nem elegendő.

IV. VAN HIELE ELMÉLETE

Annak érdekében, hogy az elméletet a lehető legpontosabban mutathassuk be, azokat a fogalmakat fogjuk használni, amelyeket a szerzők maguk is használtak, de a fejezet végén visszatérünk azokra a kifejezésekre, amelyeket a szakirodalomban hasonló kontextusban találnánk. A matematikai és pszichológiai nyelvezet a kognitív pszichológia területén találkozik és megnyugtató módon mindkét nézőpontból ugyanúgy érvényes következtetésekre vezet.

Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldof tanárokként szembesültek a diákok matematika tanulási nehézségeivel. Megfigyelték, hogy az általános iskolai geometria jóval magasabb szintű gondolkodást feltételez, mint amire az elemi iskola követelményei felkészítenek. A diákokkal végzett kutatásaik nyomán azt találták, hogy a diákok egy 5 lépcsős fejlődési folyamaton mennek át, kezdve a holisztikus gondolkodástól, az elemző, analitikus gondolkodáson át egészen a szigorú matematikai következtetésig. A magasabb szintű gondolkodáshoz el kell jutniuk a vizsgálódás fázisától az integrálás fázisáig.

Elméletük összetett abból a szempontból, hogy nem csupán arról szól, hogy mi legyen a tanítás tartalma, hanem a tanári szerepet is újraértelmezi, mint segítőt, aki a diákokat a különböző szintek felé irányítja. Van Hiele elképzelésében: „A megértés magasabb szintje nem sajátítható el tanítás által, mégis egy megfelelő eszközválasztással a tanár létrehozhatja a kedvező feltételeket a magasabb gondolkodási szint eléréséhez.” (Van Hiele, 1959). A tanárok ebben az elképzelésben arra kellene fektessék a hangsúlyt, hogy segítsék a diákokat a magasabb szintű megértésben az által, hogy szerkezeteket, struktúrákat tanítanak meg és nem tartalmakat, tényeket.

„Megértettem, hogy a tények tanítása nem lehet a matematikatanítás célja, meggyőződtem arról, hogy az elsajátítás/ belsővé tétel (development of insight) fejlesztése kellene legyen a cél. ...Azt tapasztaltam, hogy az elsajátítás érthető úgy is, mint a szerkezetek, struktúrák észlelése.” (Van Hiele, 1959)

IV. 1. Struktúrák-szerkezetek

A struktúra egy fontos jelenség: lehetővé teszi, hogy az állatok és emberek olyan helyzetekben is képesek legyenek az adekvát cselekvésre, amelyekkel korábban ugyanolyan formában nem találkoztak. Az emberek a struktúrák segítségével értik meg egymást: észlelik azokat és a megfelelő módon folytatni tudják.

Van Hiele megközelítésében léteznek erős és gyenge szerkezetek attól függően, hogy mennyire rugalmasak. Az erős szerkezetek azok, amelyek szigorúan egyetlen egy formában folytathatóak, kiterjeszthetőek, amíg a gyenge szerkezetek nem folytathatóak teljes bizonyossággal, gyakran adódnak hibák. Van Hiele úgy értelmezte a matematikai struktúrákat, hogy amennyiben pontos szabályok határozzák meg őket, nagyon merevek és erősek.

Van Hiele (1986) (Usiskin, 1982 nyomán) a Gestalt pszichológiára hagyatkozva a struktúrák tulajdonságait így határozta meg:

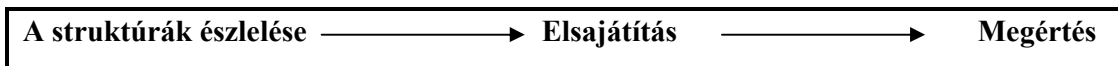
1. A struktúra kiterjeszthető. Ha valaki ismeri a struktúra egy részét, ismeri a kiterjesztését is. A kiterjesztett struktúra ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy része.
2. A struktúra tekinthető egy finomabb struktúra részének is. Az eredeti szerkezetet nem változtatja meg ezáltal, de elképzelhető, hogy az épület magasabb szintjein részletesebb tulajdonságokat találunk, mint az alapszerkezetben.
3. A struktúra része lehet egy nála „befogadóbb” szerkezetnek. Ennek szintén lehet több tulajdonsága is, némelyek közülük meghatározzák az eredeti szerkezetet.
4. Egy adott szerkezet izomorf lehet egy másik szerkezettel. Ebben az esetben mindkét szerkezetet bizonyos szabályok meghatározzák, amelyek megfelelnek egymásnak. Ha az egyiket tanulmányoztuk, akkor azt is megtudtuk ezáltal, hogy a másik hogyan épül fel.

Ahhoz, hogy a fenti tulajdonságokat szemléltesse, van Hiele (1980) az emberi csontváz analógiát használta. Amikor egy csontváza nézünk „a szerkezet kiterjesztése úgy következik be, hogy felismerjük, hogy bennünk is van egy csontváz”. A második tulajdonság abban mutatkozik meg, amikor a csontváz egyes részeit tanulmányozzuk és nevet adunk az egyes részleteknek, a harmadik pont abban állna, ha állati csontvázakat tanulmányozva, az emberi szerkezethez hasonlítanánk őket, míg az utolsó tulajdonság az

állati és emberi csontváz megfeleltetése lehetne (az egyiket ismerve, a másikat is könnyen le tudjuk írni).

Van Hiele szerint az első és negyedik tulajdonság magától értetődő, az emberek automatikusan felismerik ezeket, amíg a második és harmadik tulajdonság tanulást igényel. Van Hiele elképzelésében, ha a tanulás célja az elsajátítás, akkor abban kell segíteni a diákokat, hogy a struktúrák, szerkezetek megértésében fejlődjenek.

A tanulás modellje:



Az elsajátítással kapcsolatban Van Hiele (1986) a következőket fogalmazta meg:

1. Az elsajátítás abban fedezhető fel, ha megjelenik egy adekvát válasz egy új szituációban.
2. Az elsajátítás megállapítható, ha egy erős szerkezettel végzett tevékenység után az egyén képes leolvasni a megfelelő válaszokat az új kérdésekre is.
3. Az elsajátítás váratlanul és hirtelen következik be, nem betervezhető. (De elő lehet segíteni a megfelelő tevékenységek által.)

A Van Hiele elmélet meghatározza a megértés különböző szintjeit, a továbbiakban ezeket a szinteket mutatjuk be.

IV. 2. A Van Hiele szintek

A szinteket a szerzők eredetileg 0-tól 4-ig számozták, Wirszup (1976) számozta újra őket 1-től 5-ig. A szintek elnevezése Hoffertől (1979) származik, a szerzők nem nevezték el a szinteket. 1986-tól kezdődően Pierre van Hiele is az 1-estől kezdődő számozást használta, ezt vette át a legtöbb kutatás is, így mi ezt a számozást használjuk majd a továbbiakban. Az elmélet szemléltetésére a szerző a geometriai példákat használta, de nem korlátozta az elmélet érvényességét a geometriára vagy a matematikára.

„Azon gondolkodási szintek nyomon követése, amelyek a geometriában is szerepet játszanak, nem csak erre érvényes, mivel nem tartalomba illesztettek, hanem az emberi gondolkodásba” (Van Hiele, 1959).

IV. 2. 1. Első szint – Felismerés

A diák különféle cselekvéseket végez a geometriai formákkal (háromszögekkel, egyenesekkel) a felismerés révén, megnevezi őket és a felszíni jegyek alapján össze is hasonlítja. Az észlelés ezen a szinten még csupán vizuális. Az a diák, aki ezen a szinten van, holisztikusan ismeri fel az alakzatokat, anélkül, hogy a részleteket megfigyelné. Például a téglalapot valószínűleg azért ismeri fel, mert hasonlít egy ajtóra, nem amiatt, hogy 4 oldala van és 4 egyenlő nagyságú szöge, ezeket észre sem veszi. A forma a fontos, nem a tulajdonságok, azokat tudja csak megnevezni név szerint.

Jelen kutatásunkban a Van Hiele elméletet nem a geometria, hanem a számfogalom szempontjából szeretnénk alapul venni. A számfogalom kialakulása nagyon fontos témakörnek bizonyult, szorosan kötődik az alpműveletek elsajátításához, így mi ebben a megközelítésben párhuzamot keresünk a Van Hiele elmélet és a matematikai alpműveletek háttérében álló mechanizmusok között.

Az első szakaszban, az elmélet értelmében, a diákok felismerik a számjegyeket, vizuálisan meg tudják különböztetni őket egymástól, de nem a tulajdonságaik mentén (mentális úton), hanem elsősorban az érzékelés révén.

IV. 2. 2. Második szint – Analízis

A diákok a tapasztalat révén felfedezik a szabályszerűségeket, tulajdonságokat (hajtogatás, mérés útján, elemzik az egyes alkotóelemeket, és az ezek közötti kapcsolatokat). Ezen a szinten a diák arra használja a tulajdonságokat, hogy leírja, jellemezze az egyes alakzatokat. Például a diák az analízis szintjén elmondja, hogy egy négyzetnek van négy egyenlő oldala, négy egyenlő szöge, de ugyanaz a diák nem fogja fel azt, hogy hogyan tartozhat egy alakzat egyszerre több kategóriába is, amelyeknek különböző nevük van (hogyan lehet egy téglalap egyszerre paralelogramma is). Az alakzat ezen a szinten a tulajdonságainak az összessége. A diák képes lehet meghatározni az egyes alakzatokat, de nem érti a meghatározás lényegét.

A számfogalommal kapcsolatban azt mondhatnánk, hogy a diák felismeri a számok közötti viszonyokat, de nem érti, hogy egy szám hogyan lehet több halmaznak a tagja (a természetes számok és egész számok halmazának pl.). Képes elvégezni egyes műveleteket, de nem érti a mögöttes szerkezetet. Ezen a szinten például a diákok össze tudják adni a számokat, ha egymás alá írjuk őket (mert így tanulták az iskolában), de egy

más formában feladva már nem tudja ugyanazt a műveletet elvégezni. A számokról tárolt tulajdonságokat feladathoz köti, minden feladatnak megtanulja a megoldási technikáját.

IV. 2. 3. Harmadik szint – Hozzárendelés

A követés által, vagy informális támpontokkal a diák logikai kapcsolatokat teremt az egyes tulajdonságok között. Képes ezeket a kapcsolatokat hasznosítani az egyes alakzatok esetében is, de több alakzat között is. Ezen a szinten a diák megérti az elvont kapcsolatokat az egyes alakzatok között, előbb megérti, hogy a téglalap egyidőben paralelogramma is, majd képes kikövetkeztetni a tulajdonságokat deduktív módon is. A meghatározás szerepét még nem érti, a matematikai érvelés még ezen a ponton nincs kialakulva, de már a lényeges aspektusokra is tud figyelni.

Az alapl műveletek területén ez a szint úgy jelentkezik, hogy a diákok már mennyiségként kezelik a számokat, nem csupán számjegyekként, nem tudják a szabályokat általánosítani, de képesek ugyanazt a műveletet a szimbólumoktól függetlenül elvégezni, ill. következtetni a szerkezet hiányzó elemeire.

Pl. $9 + \square = 14$ típusú feladatokat is meg tudja oldani, érti azt is, hogy $X + X = 2X$, de az iskolai matematika oktatásban ezen a ponton hirtelen váltás tapasztalható. Nem ezen az úton folytatódik a tanítás, a diákok nem ezeket a gondolkodási utakat járják tovább, hanem egy sor új információt tanítanak nekik (negatív számok, törtek, ...).

Az elmélet szerint képesek lennének megérteni, hogy a számok különböző halmazokhoz tartoznak, de ezzel a gondolattal az iskolai tananyagban csak később, évek múltán találkozhatnak egy egész más kontextusban.

IV. 2. 4. Negyedik szint – Dedukció, következtetés

A diákok képesek elméleteket bebizonyítani, elméletek között kapcsolatokat felismerni. Képesek hasznosítani azokat a kapcsolatokat, amelyeket a harmadik szinten felfedeztek. Ennek eredményeként a geometria már nem csupán alakzatok kollekciója, hanem sokkal inkább egy formális matematikai rendszer.

Ezt a szintet az iskolai oktatásban a számfogalom kapcsán nem szoktuk ellenőrizni, nem szoktunk olyan feladatokat adni a diákoknak, hogy hasonlítsák össze az összeadás és szorzás műveletét, csak a magasabb iskolai osztályokban találkozhatnak olyan feladatokkal, ahol bizonyításokhoz felhasználhatják az alapl műveleteket, de bizonyos értelemben a

szöveges feladatok megoldása már ezt a szintű gondolkodást feltételezi. Ahhoz, hogy egy diák képes legyen elvonatkoztatni a számjegyektől és felfedezze, hogy mikor melyik műveletet alkalmazhatja, milyen sorrendben van rájuk szüksége ill. milyen jelölést alkalmazzon, ahhoz már képes kell legyen meglátni a műveletek közötti összefüggéseket is.

IV. 2. 5. Ötödik szint – Szabályalkotás (Rigour)

A diák a különböző feltételezés-rendszereken belül állít fel elméleteket, ezeket hasonlítja össze és elemzi. A geometria ezen szintje nagyon elvont és nem is szükségszerűen használ konkrét képeket, ábrákat, alakzatokat. Ezen a szinten már maguk a szabályok, axiómák képezik a szigorú ellenőrzés tárgyát. Az absztrakció az elsődleges. A diák képes átgondolni, hogy a megtanult tulajdonságok és szabályszerűségek egy része csak az euklideszi geometriában érvényesek.

A számfogalom esetében az ötödik szintű megértés feltételezi, hogy diák képes például műveleteket végezni többféle számrendszerben is, nem csupán a tízesben (pl. kettes számrendszerben).

Az öt szintet némely tanulmányokban már leegyszerűsített formában találjuk (Pegg, Devey, 1998):

Vizuális szint (I szint): a vizuális információk határozzák meg az ítéleteket

Leíró szint: (I és II szint): az elemek és kapcsolatok szintje

Elméleti szint (IV. és V. szint): létrejön egy egységes értelmezés, következtetési rendszer, a geometriát, mint euklideszi rendszert értelmezi

IV. 3. Az elmélet tulajdonságai

Az elmélet a következő tulajdonságokkal együtt érvényes:

- o a szintek szekvenciálisak, szakaszosak
- o minden szintnek megvan a sajátos szimbólumrendszere, kapcsolatrendszere és nyelvezete
- o ami az egyik szinten implicit módon jelenik meg, az egy következő szinten explicitté válik

- o az a tananyag, ami a diák szintje fölött tanítanak, szint-redukcióval közvetíthető
- o az egyik szintről a következőre való fejlődés sokkal inkább a tapasztalat révén jön létre, nem az életkor, vagy érettség kérdése
- o a fejlődés különböző fázisokon megy át, amíg az egyén az egyik szintről a másikra ér

IV. 4. A tanulás fázisai

Fuys és munkatársai (1988) újrafogalmazták a fázisokat és így határozták meg őket: információs fázis, irányított figyelem, kifejezés, szabad elhelyezés és integráció.

Információs fázis vagy vizsgálódás: a diák megismerkedik a munkaterülettel (melyek a prototípusok, melyek nem számítanak prototípusnak az adott területen).

Irányított figyelem: a diák a tevékenység révén felfedez bizonyos kapcsolatokat (a hajtogatással, méréssel, szimmetria vizsgálattal).

Kifejezés: a diák tudatosítja a kapcsolatokat, megpróbálja megfogalmazni azokat a szavak segítségével, megtanulja az adekvát kifejezéseket (szaknyelvet) és kifejezi az egyes tulajdonságokat

Szabad elhelyezés: egyre összetettebb feladatok segítségével, a diák megtalálja az új fogalmak helyét a saját fogalomrendszerében (a megismert tulajdonságokat alkalmazza a korábbi ismereteire)

Integráció: a diák összegzi a megtanultakat, kialakít egy egységes képet a kapcsolatok hálójáról, amely most már számára is hozzáférhető (összegzi az új síkidom tulajdonságait).

A Van Hiele elmélet értelmében a szintek közötti átjárás nem természetes úton valósul meg, nem automatikusan, hanem egy tanulási-tanítási program részeként. A tanárok szerepe ebben nagyon jelentős. Megteremthetik a tanuláshoz kedvező feltételeket, ellenkező esetben felelősek is lehetnek a diákok alacsony teljesítményéért.

IV. 5. Összegzés

A Van Hiele elmélet geometriai példákat használ, de amint azt korábban is említettük, az elmélet nem csupán geometriai fogalmakra érvényes. A tanulási folyamatot

nagyon sajátos formában, öt szinten értelmezve írja le. Meghatározza az egyes szintek jellemzőit és azokat a fázisokat, amelyek a két szakasz közötti tanulási folyamatot jellemzik. Piaget pszichogenetikai elméletével ellentétben, a Van Hiele elmélet nem életkorhoz és a biológiai éréshez köti a megértési folyamatok fejlődését, hanem a tanulási tapasztalathoz, a szerkezetek elsajátításához. Van Hiele és Piaget elmélete sokban hasonlít egymáshoz, mindkét elmélet szakaszokban képzei el a fejlődést és a szakaszok között hierarchikus viszonyt feltételez, de néhány lényeges ponton mégis eltér egymástól. Van Hiele elmélete a tanulás irányából közelíti meg a kognitív fejlődést és nagy szerepet tulajdonít a beszédnek, míg Piaget elmélete a beszéd kialakulásán túl nem hangsúlyozza a nyelv tanulásban betöltött szerepét.

A szintváltás feltételezi a tanár-diák együttműködését, ami nem véletlenül emlékeztet a Vygotsky féle tanulás elképzeléséhez, mindkét elméletben megjelenik a nyelvi eszköztár jelentősége a tanulásban, a mediátor szerepe és a környezet hatása.

Jelen kutatásunkban a számfogalom összefüggéseiben vizsgáljuk a megértés különböző szintjeit. Azon túl, hogy a számfogalom esetében megpróbáljuk beazonosítani és operacionalizálni a kognitív folyamatokat, fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy valószínűleg mindaz, ami a számfogalom esetében a magasabb szinteknek felel meg, valamilyen más matematikai modul (pl. kombinatorika) esetén az első szintekhez kapcsolódna. A diákok a mi elképzelésünkben valahányszor újszerű szerkezetekkel találkoznak, a megértés első szintjétől kezdődően bejárnak egy sajátos utat. Ebben a kutatásban mi most csupán a számfogalom témakörével foglalkozunk, és a továbbiakban kitérünk olyan tényezőkre is, amelyek jelenléte készteti a diákot a továbblépésre, és amelyek hiányában akár hosszútávon is egy alacsonyabb szinten rekedhet a diák.

V. MATEMATIKAI TANULÁSI MOTIVÁCIÓ

A tanulási motivációt fontos tényezőnek tartjuk a kognitív képességek fejlődésének témakörében, hiszen számtalan kutatási eredmény talált összefüggést az iskolai siker-kudarck és tanulási motívumok között. Mi most elsősorban a matematikai fogalmak elsajátításának összefüggésében tárgyaljuk a motivációs tényezőket, nem áll szándékunkban tágabb összefüggéseket elemezni. Az előző fejezetekben is többször előkerültek a motivációs pszichológia fogalmai, de fontosnak tartottuk, hogy ne csak érintőlegesen tárgyaljuk a matematika tanulási motivációját, hiszen feltűnően nagy a szórása a diákok körében, a matematikával szemben senki nem semleges, aki érti, az többnyire szereti is, aki nem érti, az egyértelműen el is utasítja (Cunningham, 2004).

V. 1. Matematika iránti attitűd

Több olyan kutatás volt már ami a matematika iránti attitűdöt, a vele kapcsolatos hiedelmeket vizsgálta. Shoenfeld (1989), McLeon (1992), Broun (1988) azt találta, hogy kapcsolat van a diákok attitűdje és a matematikai teljesítménye között. Cobb (1986) szerint is van kapcsolat a matematikával kapcsolatos hiedelmek és a matematika tanulása között (Eleftherios, Theodosios, 2007 nyomán).

Regna és Dalla (1992) azt jelentik ki, hogy ha a tanár lelkes a tanításban és a tervezésben és ezt közvetíti a diákok számára is, akkor a diákok attitűdje is pozitív irányba változik. Kifer és Robitaille (1989), Philipou és Christou (2000) szerint a hiedelmeket a szociális környezet is befolyásolja. Dematte és mts-ai: az attitűdöt az ország oktatási rendszere is befolyásolja. Christou C. és Philipou G. (1999) a 13 éves gyerekek hiedelmeit kutatta négy országban (Ciprus, Finnország, Amerikai Egyesült Államok, Oroszország).

A fenti kutatások arra engednek következtetni, hogy a kognitív képességek interakcióban vannak az attitűddel és a matematikával kapcsolatos hiedelmekkel.

Goldin (1999) megfogalmazásában a hiedelem „egy többszörösen kódolt kognitív szerveződés, amihez a birtokosa egy magasabbrendű értéket asszociál/társít (az azt alátámasztó tényezőkkel együtt). Cooney (1999) meghatározása: „a diszpozíciók egy csoportja, ami arra vonatkozik, hogy bizonyos dolgokat bizonyos körülmények közepette tegyünk” (Eleftherios, Theodosios, 2007 nyomán), ahhoz a következtetéshez vezet, hogy

„különböző körülmények kiválthatják a hiedelmek egy adott csoportját” (Presmeg 1988). Széles körben elfogadott, hogy a hiedelmek a személy személyes kogníciói, elméletei és elképzelései amelyek a szubjektív oktatáson egyik formáját képezik. Természetük szerint részben logikusak és részben emocionálisak. McLeod (1992) szerint a hiedelmek természetük szerint nagymértékben kognitívak és hosszú idő alatt formálódnak ki. A hiedelmeket a továbbiakban úgy használjuk, mint a személyes ítéletet, szemléletmódot, ami hozzájárul az egyéni tudásanyaghoz formális indoklás nélkül (Eleftherios, Theodosios, 2007 nyomán).

A fenti megközelítés értelmében minden információhoz, amit a memóriánkban tárolunk, hozzákapcsolódik egy olyan kódrendszer, amit a tartalommal együtt hasznosítunk, de nem tudatosan tárolunk és hívunk elő. Ez a kódrendszer (nevezzük mondjuk motivációs értéknek) már a kódolás fázisában befolyással lehet a kognitív feldolgozás minőségére. A kognitív rendszer képes leolvasni az ugyancsak kognitív természetű információhoz kapcsolódó hiedelmeket, és nem tárolja azokat az információkat, amelyeket önmagára nézve negatívnak értékel.

Az attitűd: sok kutatás használja a fogalmat abban az értelemben, hogy magába foglalja a matematikáról és a selfről kialakult hiedelmeket. McLeod (1992) elfogadja, hogy az attitűd olyan affektív válasz, ami magába foglal mérsékelt intenzitású és ésszerű stabilitású pozitív és negatív érzelmeket, megjelenhet automatikusan, úgy mint az ismételt matematikára adott érzelmi válaszreakció, vagy mint áttétel egy új, de a régihez kötődő feladatra (Eleftherios, Theodosios, 2007 nyomán),. Hannula (2002) szerint az attitűd nem egy egységes pszichológiai konstruktum, hanem a különböző kiértékelési folyamatok eredményeként létrejövő viselkedések egy kategóriája. Hannula szerint az attitűd változik bizonyos körülmények között.

Kapetanias és Zachariades kutatásában (2007) 9-12-es középiskolás diákok matematikával kapcsolatos hiedelmeit vizsgálták, ill. a matematikai attitűdöt. Azt találták, hogy a matematika hasznosságába vetett szilárd bizalom pozitívan korrelál a matematikai fogalmak tanulásával, a mélyebb és jobb megértésével, a magasabb matematikai teljesítménnyel, ill. a bizonyítási folyamat megértésével. A matematika tanulásának két szintjét különböztették meg: az első szint a megértés, a második szint a reflektálás. Azt találták, hogy mindkét komponens pozitívan korrelál a matematikai teljesítménnyel, míg a matematika folyamatok szemlélete negatívan korrelál ugyanezzel. Figyelemre méltó, hogy

a faktoranalízis során a matematika szeretete volt a legmagasabb pozitív korrelációban a teljesítménnyel és matematikai készséggel.

V. 2. Van Hiele elmélet és motiváció

Az elmélet értelmében a magasabb szintek feltételezik, hogy a diák az alacsonyabb szintekre már eljutott. Ha a tanár a diákat egy magasabb szinten tanítja, mint amilyen szintet elért a diák, akkor nem lesz képes hasznosítani a magyarázatot. Ebben az esetben a tanár megfogalmazhatja a magyarázatot azon a szinten, ami a diák megértési szintjének megfelel. Sajnos a legtöbb esetben nem ez történik. Amikor a diákok nem értik, a tanár megpróbálja újramagyarázni az ismereteket, de a saját tudásához mérten, nem a diákok szintjének megfelelően.

A diákok így gyorsan elveszítik a fonalat és folyamatos kudarcra ítélik magukat. A sikerélmény hiányában egy idő után a diákok nem motiváltak a tanulásra, elveszítik a belső motivációjukat, felfedezőkedvüket. Ahogy azt korábban bemutattuk, a tanulás Van Hiele elképzelésében öt fázis mentén történik. „Mindaddig, amíg a tanulási folyamat tart, kiugrások figyelhetők meg a tanulás görbéjén, de amint ez stabilizálódik, kialakult az új szint. A tanulási folyamat befejeződött, de később majd újrakezdődik. Úgy tűnik, hogy a diák közben „megért” (a feladatra). A tanár nem magyarázza már tovább a feladatot. Ő is, és mindazok a diákok, akik az új szintre értek azonos nyelvezetet használnak, amit azok a diákok, akik nem értek el erre a szintre, nem értenek. Aki nem érti magyarázatot, annak a helyzet reménytelennek tűnik. Ettől még imitálhat néhány tevékenységet, de azok nem lesznek a sajátjai mindaddig, amíg nem ér el a megfelelő szintre. A tanulás folyamat jellegű, a megfelelő algoritmusok elsajátítása, rutinja feltételei lesznek a következő megértési szintnek. (Van Hiele, 1959).

VI. A KUTATÁS LEÍRÁSA

VI. 1. Célok

Elméleti célkitűzések

A szakirodalmi elemzés alapján, a kognitív pszichológiában megszokott módon egy olyan elméleti, részben matematikai modellt szeretnénk felállítani, amely érvényes pszichológiai következtetésekhez vezet az értelmi képességek, matematikai gondolkodás fejlődésével kapcsolatban. Szeretnénk szisztematikusan, kísérletekkel vizsgálni a modell érvényességét és határait, kiegészítve ezzel a matematikai készségfejlesztés szakirodalmát.

Gyakorlati céljaink

A szociálisan hátrányos helyzetű gyerekek matematikai készségeit szeretnénk fejleszteni, feltárva a hiányosságok háttérében álló kognitív és non-kognitív befolyásoló tényezőket azért, hogy segítsük az iskolai teljesítményüket, növeljük a továbbtanulási esélyeiket. Célunk, hogy sikeresebben és hatékonyabban sajátítsák el az iskolai matematikai tananyagot, hogy ez megmutatkozzon az iskolai osztályzatban is és később majd a továbbtanulási arányuk megnövekedésében is.

Azonos korú gyerekek lehetnek teljesen különböző mentális műveleti szinten, az egyéni különbségek egyéniesített fejlesztést igényelnek és a matematikai készségek fejlesztésével a globális tanulási képesség hatékonysága is megnövekedhet.

Módszertani célok

Célként tűztük ki, hogy kidolgozunk egy eszköztárat, amelynek segítségével hozzáférhetővé válnak a matematikai fogalomalkotásban szerepet játszó mentális folyamatok, és azon motivációs tényezők, amelyek befolyásolhatják a mentális teljesítményt. Ahhoz, hogy kidolgozzuk a megfelelő eszköztárat a felméréshez és fejlesztéshez, az alábbi szempontokat vettük figyelembe:

- A módszertan feleljen meg az elméleti háttérnek
- Igazodjon az életkori sajátosságokhoz

VI. 2. Hipotézisek

Mivel kutatásunk alapvetően két vonalon valósul meg, a hipotéziseinket szintén két nagyobb kategóriába oszthatjuk.

A matematikai készségek, részképességek és műveleti szintek képezik a kutatás egyik dimenzióját, míg a matematikai motiváció fejlesztése képezi a másik dimenziót.

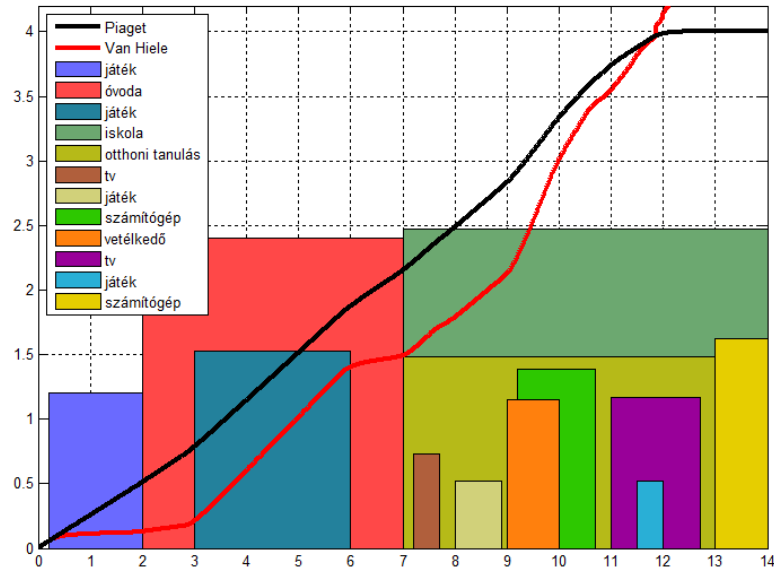
A *matematikai készségekkel* kapcsolatos feltevéseink rendszert képeznek. Azt feltételezzük, hogy a számfogalom kialakulása nem egyszeri és életkorhoz kötött, hanem különböző mentális lépésekben valósul meg.

Jean Piaget pszichogenetikai elméletében a különböző életkorokhoz kapcsolódó agyi struktúrák kialakulása feltételezi, hogy a gyermek a világgal folytatott folyamatos kölcsönhatásban egy olyan szintre jutott, amikor képes a mennyiség és számfogalom elsajátítására. Ez a változás hirtelen következik be és visszafordíthatatlan. Mi azt feltételezzük, hogy az agyi struktúrák kialakulása szükséges ugyan a számfogalom elsajátításához, de nem elégséges és nem is azonnali változást eredményez. Azonos korú gyermekek lehetnek teljesen különböző mentális szinteken, ennek megfelelően különböző teljesítményt produkálva.

A 2. ábra szemlélteti az értelmi fejlődést a pszichogenetikai elmélet és Van Hiele modell értelmezésében. Ha szigorúan értjük Piaget fejlődéselméletét, akkor az életkor előrehaladtával 12 éves korig a fejlődés a tapasztalatoktól kis mértékben befolyásolva az alábbi függvény szerint alakul. A Van Hiele görbe azt szemlélteti, hogy a gyermek fejlődését a tapasztalatok meghatározzák, az életkor csupán keretet szab a fejlődésnek, de nem adja meg az irányát, sebességét.

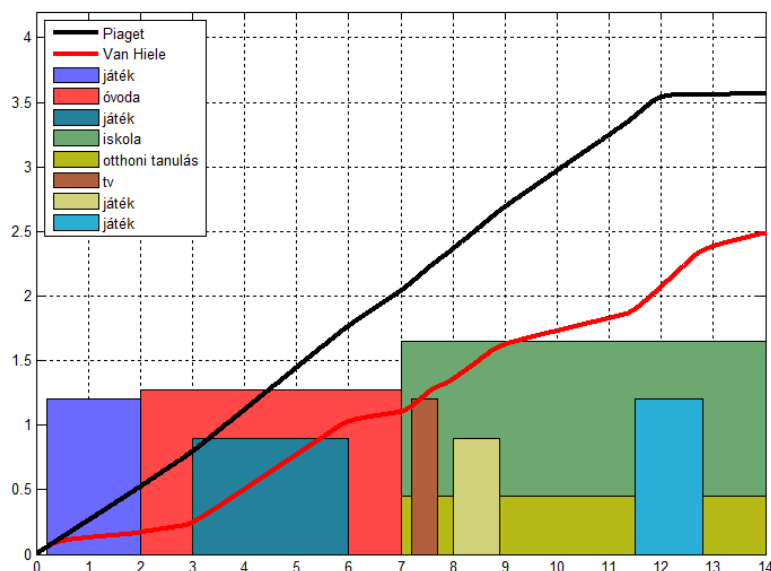
Egy átlagos gyermek hétköznapijait nagyon változatos és gazdag tapasztalatszerzés jellemzi. Amennyiben sokféle tapasztalattal szembesül, a fejlődés görbéje a Piaget által előrejelzett módon alakul. Az ábra egy hipotetikus helyzetet szemléltet, az, hogy melyik tapasztalat milyen súlyozással kellene valójában beszámítson a fejlődés folyamatába, további kutatásokat igényelne. Jelen esetben a tapasztalatokat a gyerekek beszámolóinak alapján súlyoztuk.

2. ábra: Az értelmi fejlődés életkorok és fejlődési szakaszok szerinti ábrázolása a pszichogenetikai elmélet és Van Hiele modell szerint. A két görbe megfelelő számú tapasztalat esetén szinte egybeesik.



Az ábra szociálisan hátrányos helyzetű gyerekek esetén, feltevéseink szerint másképp alakul. Ezek a gyerekek kevesebb matematikai tapasztalattal rendelkeznek, a környezetük kevésbé gazdag az ilyen jellegű ingerekben, így a fejlődési görbe már nem a pszichogenetikai elmélet elvárásainak megfelelően alakul (3. ábra). A Van Hiele elmélet szerint kirajzolt görbe nemhogy nem haladja meg, de jóval alatta marad annak a szintnek, amit a pszichogenetikai elmélet szerint elvárnánk. Ez a lemaradás nem mutatkozik meg a klasszikus Piaget-próbákon, de meghatározó lehet az iskolai előrehaladás tekintetében.

3. ábra: Az értelmi fejlődés életkorok és fejlődési szakaszok szerinti ábrázolása a pszichogenetikai elmélet és Van Hiele modell szerint, szociálisan hátrányos helyzetű gyerekek esetén: a két görbe nagy mértékben eltér egymástól.



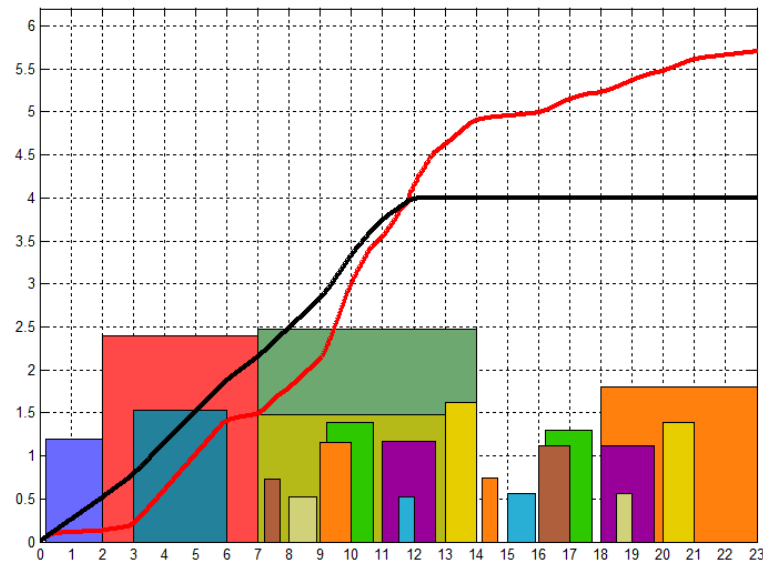
A feltevéseink értelmében, amikor a gyerekek 12 éves korban elérik a pszichogenetikai elmélet szerinti legmagasabb értelmi potenciált, addig a Van Hiele elmélet szerint csupán a fejlődés harmadik szintjén vannak. Tehát a Piaget szerinti negyedik szint (*Az Elvont gondolkodás* szintje) megfelel a Van Hiele-i harmadik szintnek (*A Hozzárendelés* szintjének). Az életkor előrehaladtával a fejlődés a Van Hiele modell értelmében a 4. ábra szerint alakulhat. Nem szükségszerűen halad előre, a modell szerint az emberek nagy része csupán a harmadik szintet éri el, de a megfelelő mennyiségű és minőségű tapasztalatok esetén a fejlődés továbbhaladhat a negyedik, ötödik szint fele.

Természetesen mi most csupán az alpműveletek, számfogalom témakörére koncentrálnunk, de ehhez hasonló módon más modulokban is felépíthetnénk elméleti modelleket. Az egyes tapasztalatok jelen esetben is hipotetikus módon adtuk hozzá, de egy szimuláció segítségével megoldható lenne egyéni szinten kirajzolni a fejlődésgörbét.

A Van Hiele görbe nem haladja meg a Piaget görbét, az utóbbit is befolyásolják a tapasztalatok, de csak az elméleteknek megfelelő módon. Piaget elképzelésében normál populáción nagyjából egy szakasz lemaradás lehet a megfelelő tapasztalatok hiányában,

míg a Van Hiele görbe betartja a Piaget által szabott felső határokat, de az alatt bármilyen értéket felvehet.

4. ábra: Az értelmi fejlődés az életkor előrehaladtával a Piaget és Van Hiele elmélet szerint: az egyik görbe 12 éves kor után nem nő tovább, míg a másik a tapasztalatok hatására tovább növekszik.



Ahhoz, hogy a modellt teszteljük, három hipotézist kell igazolnunk.

1. Hipotézis: A tapasztalat mediálja a számfogalom megértése és matematikai teljesítmény közötti kapcsolatot.

Piaget pszichogenetikai elméletében a tapasztalat hozzájárul az agyi struktúrák kialakulásához, de csupán másodlagos szereppel bír, leginkább a hiánya játszik szerepet és okozhat némi lemaradást (néhány hónap, vagy egy év késéssel ér egy következő műveleti szintre), míg a mi elképzelésünkben a Van Hiele elméletet alkalmazva azt feltételezzük, hogy a biológiai konstruktumok csupán keretet szabnak a fejlődésnek, de nem indítják be automatikusan a mentális folyamatokat. Ez leginkább a szociálisan hátrányos helyzetű gyerekeknél figyelhető meg, véleményünk szerint éppen a tapasztalat szegény, ingerszegény környezet teszi a tapasztalat szerepét világosabbá. Feltételezésünk szerint a megfelelő mennyiségű és intenzitású tapasztalat közvetíti az új információ

hatását, segíti a kognitív rendszer újrastrukturálódását: az új információ nem okoz önmagában teljesítménynövekedést a megfelelő mennyiségű matematikai tevékenység hiányában.

2. Hipotézis: Az algoritmusok használata nem feltételezi a mögöttes folyamatok megértését.

Az, hogy egy gyermek képes a számokat egymás alá írni, képes azokat egy szabály alkalmazásával új formába helyezni, nem jelenti azt, hogy elvégezte azokat a mentális műveleteket, amelyek a mennyiségek egyesítését feltételezik. Ha elvégezte a megfelelő mentális műveleteket, akkor a számjegyekkel végzett feladatok megoldása és konkrét tárgyakkal végzett műveletek megoldása között nem lehet különbség (a teljesítmény szempontjából).

3. Hipotézis: Összefüggés van a munkamemória és matematikai teljesítmény között.

Minél jobb valakinek a munkamemóriája, annál nagyobb pontszámot ér el a számolási feladatokban is. Ezt a hipotézisünket az indokolja, hogy a munkamemória viszonyítási alapként szolgálhat a gyerekek kognitív képességeit illetően.

A *motivációs vonal* mentén:

I. 1. Hipotézis: Összefüggés van a matematikai attitűd és a matematikai teljesítmény között. Azok, akik a matematikához negatív módon viszonyulnak, alacsonyabb teljesítményt érnek el, mint azok, akik pozitív attitűddel.

I. 1. Hipotézis: A motivációs program hatására megnő a gyerekek matematika tanulással szembeni motivációja.

A kontroll csoport nem részesül a beavatkozásban.

A használt változók operacionalizálása:

Matematikai teljesítmény: a matematika feladatokban elért eredményeket mennyiségi változó formájában két változatban használjuk fel.

Pontszám: a helyesen megoldott feladatok száma

Matematika iránti attitűd: milyennek ítéli a személy a matematikát, milyen érzések és belső hozzáállás kapcsolódnak hozzá, tartalmazza a kognitív és emocionális összetevőket is.

Mérése: a matekfeladatokon mért próbálkozások száma ill. a matematikai attitűd kérdőíven elért pontszám

Matematika tanulási motiváció: a matematika tanulásának motívumai, azok intenzitása és irányulása.

- Intenzitása: a feladatmegoldással töltött idő (számítógépes program)
- Irányulása: kérdőív a matematikai motivációról

Munkamemória: a műveletvégzéshez szükséges memória „térfogata”.

Mérése: számítógépes programon mért pontszám: játékidő és teljesítmény.

VI. 3. A kutatásban résztvevő személyek

A kutatásban összesen 34 gyerek vett részt, akik két különböző intézményben tanulnak. A kísérleti csoportban 15 gyerek volt, akik egy gyereketthonban élnek, 12-13 évesek. A kontroll csoportban szintén V. osztályos gyerekek voltak, akik szociálisan hátrányos helyzetben, de nem gyereketthonban élnek. A csoportba sorolás több szempontot vett figyelembe. Elsősorban igyekeztünk úgy kialakítani a csoportokat, hogy a vizsgált változók szempontjából kiegyensúlyozott csoportokat tudjunk összehasonlítani, másrészt a kísérleti csoport a fejlesztés szempontjából is elérhető kellett legyen.

A kutatás motivációs vonala mentén 17 mentort vontunk be a fejlesztés folyamatába, akik a gyerekekkel egy ebből a célból kifejlesztett internetes felületen

tartják a kapcsolatot. A mentorok egyetemisták, vagy frissen végzettek, akik reál tudományokat tanultak, a matematikával kapcsolatban pozitív attitűddel rendelkeznek. Annak érdekében, hogy a megfelelő személyeket vonjuk be a feladatra, az interjú és kérdőív módszerét alkalmaztuk, így a kezdeti 30 személyből végül csupán 17 személyt választottunk be. A kiválasztás kritériumai között személyiségvonások, kommunikációs készségek és belső motiváltság játszottak kulcsszerepet.

A kísérleti csoportból minden gyereknek van egy mentora. A kontroll csoportban nem alkalmaztuk a motivációs fejlesztő tréninget.

A teljes mintát tekintve a gyerekek és mentorok közel fele fiú, közel fele lány.

VI.4. Eszközök

Az eszközök egy része követi a *pszichometriás kiértékelés* alapelveit. Szigorúan kidolgozott értékelési szempontokat veszünk figyelembe a felmérés eszközeinek megszerkesztésében és alkalmazásában is, de fontosnak tartjuk az egyéni különbségek figyelembevételét is, így az egyes változók jellegének megfelelően használunk *dinamikus kiértékelést* is. Bizonyos értelemben azt is mondhatjuk, hogy a mediált tanulási tapasztalat egy sajátos formáját igyekszünk megvalósítani az által, hogy néhány változónk esetében a mediátor szerepét a számítógép játssza.

Az eszközök kidolgozása több lépésben történt. Az első lépésben a felmérés eszközeit dolgoztuk ki, majd a fejlesztés és beavatkozás eszközeit.

A fejlesztés 2011. novemberében kezdődött, majd 7 hónapon át havi rendszerességgel tréningszerűen zajlott, egész addig, amíg a gyerekeket bevontuk az internetes felület használatába. Attól kezdve a gyerekek hetente kétszer két órás szervezett programon vettek részt, ahol egyénileg használhatták a számítógépes rendszert.

A matematikai teljesítmény felmérésére és fejlesztésére kidolgozott eszközök:

1. Preteszt – Poszt teszt

Összeállítottunk két izomorf feladatsort a gyerekek életkorának megfelelően (*lásd Melléklet 4.*). A feladatsorban megjelennek mindazok a műveleti elemek, amelyeket a számfogalom kialakulásával kapcsolatban meg akarunk figyelni. A feladatsort általános iskolai matematika tanárok segítségével, előmérések alapján dolgoztuk ki. Az algoritmusok alkalmazása, a próbálkozások száma, az ismeretlen behelyettesítése, a feladatmegoldás ideje, pontossága mind hozzájárulnak a kognitív térkép kialakításához. A feladatmegoldást követi egy beszélgetés a gyerekekkel, ahol megfigyelhetővé válnak azok a hiányosságok, amelyek megakadályozták, vagy segítették a helyes feladatmegoldást.

A preteszt és poszt teszt felvételének körülményei megegyeznek, időben mindkét feladatsorra a gyerekeknek 5 percük van, és teljesen önállóan dolgoznak mindkét esetben.

Az eredmények kiértékelésekor figyelembe vesszük nemcsak a helyesen megoldott feladatok pontszámát, hanem azt is, hogy a kísérletben résztvevő személyek milyen stratégiákat alkalmaztak (a részeredményeket és számításokat ugyanarra a lapra írták).

2. Kognitív térkép a számfogalomra

A beavatkozást a számfogalom esetében a Van Hiele elmélet megértési szintjeinek megfelelően építettük fel. Az elmélet azt feltételezi, hogy minden megértési szintnek megvan a sajátos fogalmi rendszere, ami megmutatkozik a műveletvégzés minőségében. Azért, hogy hozzáférhetőbbé váljanak az egyes műveleti elemek, kidolgoztunk egy kognitív térképet kifejezetten a számfogalom kialakulásának és szakaszainak megfigyelésére. Ezek a szakaszok nem rendeződnek egyértelműen hierarchikus módon, nagymértékben függenek az egyéni tulajdonságoktól, így diagnosztikai szempontból pontosabb eszközre volt szükségünk, mint a feladatok megoldásában mutatott teljesítmény.

A térkép megőrzi a Feuerstein-i kognitív térkép összetevőit, de a megfigyelt konstruktumok kiélezetten a számfogalom megértésének dinamikáját rajzolják ki (*lásd Melléklet 6.*).

3. Munkamemória mérése

A célcsoport számára élvezhető eszközt akartunk kidolgozni, hiszen az eredmények torzításához nagymértékben hozzájárul az alulmotivált viselkedés. Az eszköz, amivel a munkamemóriát mérjük a gyerekek életkori sajátosságainak megfelelően játékszerű, de nagyon aprólékos információkat ad vissza az aktuális kognitív működésről.

A játékban néhány másodpercig egy négyzethálót lát a játékos, aminek néhány négyzete kék, míg a többi fehér. A játékos feladata hogy a látott ábrát reprodukálja, vagyis az üresen (fehéren) megadott négyzetháló megfelelő négyzeteit kattintással sötétítse be. Ha jó a megoldás, akkor a feladat nehezedik, ha rossz, akkor egy könnyebb feladatot kap.

A szintek nehezedésében van egy függőleges és egy vízszintes irány. A vízszintes irány elemeit **nehézségi kategóriának** nevezzük, és ezek a: könnyű, közepes, nehéz. A függőleges irányban vannak a **nehézségi szintek** és ezek 3x3-astól 10x10-es tábláig mennek.

A játék részletes leírását a mellékletekben tüntetjük fel (*lásd Melléklet 1.*).

4. A számfogalommal kapcsolatos kognitív készségek fejlesztése

A számfogalommal kapcsolatos műveletek működését nehéz megfigyelni, hiszen az iskolai oktatás alapvetően arra van beállítódva, hogy a gyerekek számolási készségét fejlessze, alakítsa ki. Ennek érdekében már az első néhány hónapban a feladatmegoldás kerül az iskolai tevékenység középpontjába, nem a megértés fejlesztése. Kidolgoztunk egy olyan 2 órás tevékenységet, amelynek során a gyerekek a konkrét műveletektől eljutnak a számjegyekkel végzett algoritmusokig az által, hogy ők maguk fedezik fel az algoritmusokat és nem kész eszközökként kapják őket.

A foglalkozást Primas módszernek neveztük, mert a Primas projekt (András, Csapó, Nagy, Szilágyi, Sipos, Soós, 2010) egyik tankönyvéből származó gyakorlatokat használjuk keretként. A foglalkozás során a szokatlanság révén próbáljuk a gyerekek figyelmét elterelni a beállítódott cselekvésekről és olyan kontextusba helyezni a számok világát, amelyben felfedezhetik újra a mennyiségek-számjegyek kapcsolatát, az alapműveleteket.

A módszer részletes leírását a mellékletekben tüntetjük fel.(lásd *Melléklet 2.*).

5. A motiváció és attitűd mérése

Kérdőív (lásd *Melléklet 3-5.*).

VI.5. Az eredmények bemutatása

Az első hipotézisünkkel kapcsolatban azt találtuk, hogy a számfogalom megértése és teljesítmény között nagyon jelentős és szoros kapcsolat van, minél nagyobb a megértés, annál nagyobb lesz a teljesítmény is ($r = 0.86$, $p < 0.01$). A beavatkozásunk kifejezetten a számfogalom megértését célozta és azt vizsgáltuk, hogy a beavatkozás hatására megnő-e a matematikai teljesítmény. Ezzel kapcsolatban azt találtuk, hogy a hipotézisünk beigazolódott, a kísérleti csoportban jelentősen nőtt a teljesítmény a beavatkozás után (1. Táblázat). Míg a kontroll csoportban a beavatkozás hiányában nem volt jelentős különbség a pre és poszt teszt között (2. Táblázat).

1. Táblázat: A matematikai teljesítmény beavatkozás előtti és beavatkozás utáni értékei közötti különbség a kísérleti csoportban (Preteszt és Poszt teszt közötti különbség)

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Matematikai teljesítmény - Preteszt	15	14,47	5,50	3,98	$p < 0,01$
Matematikai teljesítmény – Poszt teszt	15	10,33	4,86		

2. Táblázat: A Preteszt és Poszt teszt közötti különbség a kontroll csoportban

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Matematikai teljesítmény - Preteszt	19	13,32	5,30	0,50	$p = 0,62$
Matematikai teljesítmény – Poszt teszt	19	13,05	5,03		

A kísérleti és kontroll csoport között a kutatás elején nem találtunk jelentős különbséget. A kutatás végén sem lett szignifikáns a különbség, de a kísérleti csoport átlaga 10,33-ról 14,47-re nőtt, míg a kontroll csoportban a teljesítmény átlaga 13,32-ről 13,05-re csökkent.

A teljes mintát tekintve nem találtunk szignifikáns különbséget a fiúk és lányok matematikai teljesítménye között a pretesztben, de a poszt tesztben a lányok jelentősen jobb eredményt értek el, mint a fiúk (3. Táblázat).

3. Táblázat: A fiúk és lányok matematikai teljesítménye közötti különbségek a pretesztben és poszt tesztben

Vizsgált változók	A személyek száma		Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Matematikai teljesítmény - Preteszt	fiúk	18	10,61	5,34	-1,67	p=0,103
	lányok	16	13,56	4,84		
Matematikai teljesítmény – Poszt teszt	fiúk	18	11,61	5,50	-2.66	p=0,012
	lányok	16	16,00	3,83		

A második hipotézisünk teszteléséhez kiválasztottuk azon mutatókat, amelyek a konkrét tárgyakkal végzett műveletekhez kapcsolódnak és összehasonlítottuk azokkal az eredményekkel, amelyeket a számjegyekhez kötött feladatmegoldás során kaptunk. Mindkét kategóriában azonos számú feladat volt és a megoldáshoz szükséges műveletek szempontjából izomorf. Az eredményeket a 4. Táblázatban szemléltetjük.

4. Táblázat: A konkrét tárgyakon végzett műveletek eredményei és számjegyekhez kötött feladatokon elért eredmények közötti különbségek.

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Feladatmegoldás konkrét tárgyakon	15	0,91	1,08	-6,65	p<0, 01
Feladatmegoldás számjegyekkel	15	3,35	2,09		

A fenti eredmények azt mutatják, hogy nagyon jelentős különbség van a konkrét tárgyakon végzett feladatok eredményei és számjegyekhez kötött feladatok eredményei között ($t = 6,65$, $p < 0, 001$).

A harmadik hipotézisünk teszteléséhez kiszámítottuk a résztvevők átlagteljesítményét és összehasonlítottuk a munkamemória átlagteljesítményével és a

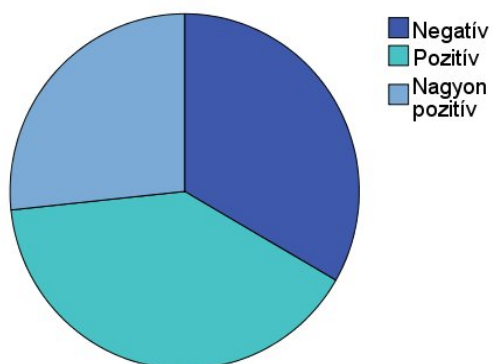
maximálisan elért pontszámmal. Azt találtuk, hogy jelentős, de közepesen erős kapcsolat van a munkamemória teszten elért maximális pontszám és átlag matematikai teljesítmény között ($r=0,53$, $p=0,04$), de nincs jelentős együtt járás a munkamemória feladatok átlagteljesítménye és átlag matematikai teljesítmény között ($r=0,45$, $p=0,09$).

A kutatás motivációs vonala mentén megfogalmazott hipotézissel kapcsolatban azt találtuk, hogy a vizsgált mintában a kísérleti csoportban jelentős összefüggés van a preteszten (r_1) és poszt teszten (r_2) elért matematikai teljesítmény és matematikával szembeni attitűd között, minél pozitívabb az attitűd, annál nagyobb a teljesítmény ($r_1=0,59$, $p_1=0,01$; $r_2=0,52$, $p_2=0,04$). A kapcsolat a preteszt esetében erősebb, de így is mindkét esetben csupán közepes erősségű. Megvizsgáltuk az együttjárást az attitűdskála mindkét összetevőjére (családi és iskolai) és azt találtuk, hogy a kísérleti csoportban az attitűd családi összetevője jelentősen korrelál a matematikai teljesítménnyel mind a preteszt, mind a posztteszt esetében ($r_{pre}=0,64$, $p_{pre}=0,01$; $r_{poszt}=0,56$, $p_{poszt}=0,02$).

A kísérleti csoportban nagyon jelentős és szoros összefüggést találtunk az attitűdskála iskolai és családi vonatkozása között, minél negatívabb a családból hozott attitűd, annál negatívabb lesz az iskolai matematikával szembeni attitűd is, míg abban az esetben, ha a családi attitűd pozitív, pozitív lesz az iskolai matematikával szembeni attitűd is ($r=0,727$, $p=0,002$). A teljes mintát tekintve szintén jelentős korreláció van az attitűdskála iskolai és családi vonatkozása között ($r=0,43$, $p=0,01$).

A kísérleti csoportban, ahogy az 1. Diagram is szemlélteti, a minta egyharmadának negatív, közel egyharmadának pozitív és 26%-ának nagyon pozitív a matematikával szembeni attitűdje.

1. Diagram: A matematikával szembeni attitűd százalékos eloszlása a mintában



Nem találtunk jelentős összefüggést a motivációs kérdőív eredményei és az attitűd kérdőív pontszámai között ($r=0,25$, $p=0,35$).

A kísérleti és kontroll csoport között nem találtunk jelentős különbséget.

Azt találtuk, hogy a kísérleti csoportban jelentős különbség volt az között, hogy hány feladatot próbáltak a résztvevők megoldani a preteszten és a poszt teszten (5. Táblázat).

5. Táblázat: a résztvevők feladat megoldási próbálkozásai a beavatkozás előtt és után a kísérleti csoportban

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Próbálkozások a pretesztben	15	12,33	5,16	-4,34	$p<0,01$
Próbálkozások a poszt tesztben	15	16,13	4,96		

Ezek az eredmények arra engednek következtetni, hogy megnőtt a feladat iránti elkötelezettség, feladatmegoldási motiváció.

A kontroll csoportban nem találtunk jelentős különbséget a próbálkozások számában a pre- és poszt teszt között (6. Táblázat).

6. Táblázat: a résztvevők feladat megoldási próbálkozásai a beavatkozás előtt és után a kontroll csoportban

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Próbálkozások a pretesztben	19	15,32	4,54	-0,053	p=0,958
Próbálkozások a poszt tesztben	19	15,37	5,58		

A beavatkozás hiányában nem nőtt meg a feladat iránti elkötelezettség, ami arra enged következtetni, hogy a motivációs tényezőkre a beavatkozásnak hatása van.

A későbbiekben bemutatjuk, hogy a milyen változás következett be a motivációban a kutatás végén, amikor a motivációra is beavatkoztunk.

Ahogy a 7. Táblázat mutatja, a poszt tesztben nem mutatkozott ugyan szignifikáns különbség a résztvevők matematikai motivációjában a preteszt és poszt teszt között, de azt találtuk, hogy a beavatkozás hatására nőtt a diákok matematikai motivációja, ezt a változást 87 %-os valószínűséggel nem a véletlen okozta.

7. Táblázat: a résztvevők összesített motivációs értékei a pre- és poszt tesztben

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Össz Motiváció a pretesztben	15	19,87	5,57	-1,57	p=0,13
Össz Motiváció a poszt tesztben	15	21,20	4,19		

A 8. Táblázatban azt láthatjuk, hogy a diákok motivációjában látható változást nagyrészt az iskola komponens okozza.

8. Táblázat: a motiváció iskolai összetevőjének változása a kutatás végén

Vizsgált változók	A személyek száma	Átlagok	Szórás	t-érték	Szignifikancia szint
Iskolai Motiváció a pretesztben	15	10,40	2,79	-1,82	p=0,08
Iskolai Motiváció a poszt tesztben	15	11,33	2,12		

Azt, hogy ez a különbség sem szignifikáns, magyarázhatjuk azzal, hogy csak nagyon kis mintán sikerült a beavatkozást véghezvinni.

A motiváció családi összetevőjéről azt mondhatjuk, hogy keveset változott, közel sem olyan mértékben, mint az iskolai összetevő ($t=1,07$, $p=0,30$).

VI. 6. Az eredmények értelmezése és következtetések

Az eredmények csupán a vizsgált mintán érvényesek, általános érvényű következtetést nem vonhatunk le belőlük, de az első és második hipotézisünk beigazolódása arra enged következtetni, hogy még 12-13 éves korban sem egyértelmű a számfogalom teljes mértékű kialakulása, az algoritmusok heurisztikus használata jellemzőbb inkább, mint a mélyebb szintű megértés. Azt találtuk tehát, hogy érdemes lenne szélesebb körű vizsgálódást kezdeményezni a Van Hiele modell alkalmazhatóságáról, hiszen a matematika több területén (geometria, számfogalom) eredményesnek tűnik.

Természetesen jelen kutatásunkban csak a számfogalom néhány aspektusát vizsgáltuk, a konkrét és elvont gondolkodás peremfelületén vizsgálódunk és azt találtuk, hogy további kutatásokat is érdemes lenne kezdeményezni annak érdekében, hogy feltárjuk a matematikai műveletek kialakulásának folyamatát. Betekintést nyertünk abba, hogy a gyerekek a konkrét gondolkodás szintjéről nehezen transzferálják a megoldási algoritmusokat a számokkal való műveletvégzésre, de mindenképp jobban, mint amit a Piaget elmélet megjósol. Ellentmondásosnak érezzük azt a megközelítést, hogy a gyerekek iskolai oktatása a számokkal való műveletvégzésre fókuszál, annak ellenére, hogy a konkrét tárgyak szintjén sem képesek bizonyos algoritmusokat alkalmazni, ill.

magának a számok szerkezetének mélyreható ismerete nélkül végeznek műveletsorokat. A számfogalom, numerikus gondolkodás nagyon izgalmas kutatási terület abból a szempontból is, hogy az egyén szintjén megmutatkozó fejlődési különbségek nagyon dinamikusak behozhatóak annak ellenére, hogy a lemaradás szembetűnő lehet az életkorhoz és átlagteljesítményhez viszonyítva.

A Van Hiele elmélet értelmében a tapasztalatok sokszínűsége nagy mértékben befolyással van arra, hogy hogyan alakul az egyén numerikus gondolkodásának fejlődése: minél minőségibb a tapasztalat, annál jobban reagál az organizmus a környezeti ingerekre, de ennek biológiai, neuropszichológiai hátterét a jelen kutatásunkban nem állt módunkban megvizsgálni. A fejlődésben lévő fiatal szervezet nagyon rugalmasan és hirtelen képes újrastrukturálni az információk viszonylag nagy mennyiségét, ami a kutatás számára korlátokat szab és az eszközök precízebb kalibrálására ösztönöz.

A matematikával szembeni attitűd és a teljesítmény kapcsolata ismét megmutatkozott, fontosnak tartjuk, hogy a kognitív fejlesztés során figyelembe vegyünk a non-kognitív tényezők szerepét is. A motiváció kognitív és non-kognitív tényezőivel együtt nagy mértékben befolyással lehet arra, hogy milyen tapasztalatokkal szembesül egy 12-13 éves gyerek, ezért a kognitív fejlesztéssel párhuzamosan a motivációs fejlesztést is lényegesnek tartjuk (abban a formában, ahogy arra a résztvevők befogadóak). Azt tapasztaltuk a kutatás során, hogy a motivációs fejlesztő programunk hatásos ugyan, de hosszú időt vesz igénybe. Egy longitudinális kutatás során valószínűleg sokkal jobban megfigyelhetővé válna a fejlesztés hatása, eredményessége.

VI. 7. A kutatás korlátai és továbbfejlesztési lehetőségek

Jelen kutatásunk egy széleskörű vizsgálódáshoz nyújthat kiindulópontot, amelyben nem csupán a modell érvényessége, hanem a felhasznált eszközök validitása, hatékonysága is a vizsgálódás tárgya lehet. A kognitív fejlesztés témaköre nagyon szerteágazó, ezért jobban kontroll alatt kellene tartani az egyes befolyásoló tényezőket, ehhez az ismételt méréses, több csoportos (akár több kísérleti és kontroll csoport) kísérleti dizájn lenne kézenfekvő. A fejlődés megszilárdulása érdekében hosszabb időre van szükség, többszöri megfigyelésre.

Nagy esély van arra, hogy az egyes befolyásoló tényezők interferáljanak, együtt fejtik ki a hatásukat és emiatt az észlelt változás valódi okairól keveset tudunk meg. A

részvevők ebben a kutatásban sok szempontból fejlesztésre szorulnak, így nehéz differenciálni a fejlesztőprogram hatását azoktól a hatásoktól, amelyek érik őket a hétköznapi életben.

A numerikus gondolkodás és analógias gondolkodás, analógias transzfer kapcsolatát is érdekes kutatási kérdésnek tartjuk jelen kutatásunk fényében. A konkrét és elvont fogalomalkotás közötti transzfert nem sikerült mélyrehatóan megvizsgáljuk, de azt találtuk, hogy nem egyértelmű 12-13 éves korban sem, hogy a konkrét tárgyakkal végzett műveleteket a gyerekek képesek átvinni egy hasonló szerkezetű, de felszíni jegyeiben különböző problémahelyzet megoldásához. Az eszközök kialakításához kezdetben felnőttekkel végeztettünk gyakorlatokat és azt találtuk, hogy még az ő esetükben sem működött a transzfer mindaddig, amíg nem világítottunk rá a szerkezeti hasonlóságokra. Természetesen a következtetések levonásához további vizsgálódásra lenne szükség.

Az eszközök továbbfejlesztésével nagyon izgalmas kérdéseket lehetne vizsgálni. Ha az internetes felületet feltöltenénk fejlesztő programokkal, egy sor kognitív funkció működését, egymásra épülését vizsgálhatnánk. Egy ilyen kutatás kezdeti szakaszában egy olyan verziót hoznánk létre, ami alkalmas a felmérésre és bizonyos keretek között a fejlesztésre is, de alapvetően statikus (számítástechnikai szempontból), a függő változó a független változó rögzített értékei mentén mérhető. A független változó (a játékok nehézségi szintje és képesség kategóriái) kezdetben megadott értékek szerint egy hierarchiát alkotnak és a kutatásban résztvevő gyerekek fejlettségi szintjét a kutatás végén annak alapján állapítjuk meg, hogy a hierarchia melyik szintjét érte el a legelső felmérésen elért eredményeihez képest. A második szakaszban a rendszer olyan módon válna dinamikussá, hogy azokat az értékeket, amelyeket a játékokhoz alapbeállításként rendeltünk, egy következő lépésben változtathatóvá tennénk, így ha a felhasználók sokan és sokszor használják a rendszert, az képes lesz az elért eredményeiket elemezni és ellenőrizni, hogy megfelelnek-e a kezdeti értékeknek. Amennyiben nem felelnek meg, javaslatokat tesz az értékek helyettesítésére és mindezt nyomon követve, hosszú idő után információkat kapnánk arról, hogy adott populáción milyen hierarchiát alkotnak a képességek és milyen kapcsolatban állnak egymással.

A fejlesztés folyamatában nehézséget okozott, hogy a gyerekeknek nem volt saját otthoni számítógépe, a gyerekek otthonában sem volt hozzáférhető számítógép, így a foglalkozásokat egy, az otthonhoz közeli ifjúsági központban tartottuk meg, az ottani

számítógépeket használhatták, de valószínűleg az internetes oktatás sokkal könnyebben megoldható lenne olyan körülmények között, ahol van ebből a célból kialakított számítógépes terem.

VI. 8. Összegzés

Ha összegezni szeretnénk az eredményeket, azt mondhatjuk, hogy a kutatás a számfogalom kialakulásának folyamatából néhány jelenséget sikerült feltárjon, a legtöbbet csak érintőleges ugyan, de ez alapjául szolgálhat a további vizsgálódásnak.

Az eredményeket egy speciális igényű mintán kaptuk, a szociálisan hátrányos helyzetű gyerekek matematika tanulási nehézségének leküzdéséhez szerettünk volna ilyen formában hozzájárulni. Ahhoz, hogy igazán hatékony fejlesztést valósítsunk meg, fontos, hogy az eszközöket a célcsoport jellemzőinek mentén alakítsuk ki és a fejlesztés lehetőleg illeszkedjen az iskolai oktatás tartalmi követelményeihez. Az eredményeink arra engednek következtetni, hogy a tanulási motiváció és készségfejlesztés párhuzamos fejlesztése valóban hatékony lehet.

Az elemi numerikus reprezentációk sokkal összetettebb elemzést igényelnek, mint amit a jelen dolgozatban sikerült bemutatni. A kutatás alkalmazási lehetőségei az eredmények pedagógiai alkalmazhatóságában rejlenek, kidolgozhatunk olyan kognitív fejlesztési módszereket, amelyek segítségével hatékonyabbá válik a matematika oktatása. A kutatás folytatásaként kidolgozhatunk egy olyan modellt, amely figyelembe veszi a tárgyreprezentáció szerepét a mennyiségek feldolgozásában, egy ilyen modell a különböző diszkalkuliák esetében is hozhat új információkat a számolási nehézségek kialakulásának okairól.

VII. KÖNYVÉSZET

- András Sz., Csapó H., Nagy Ö., Szilágyi., Sipos K és Soós A. (2010). – *Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás*, Státus kiadó, Csíkszereda
- Baddeley, A. (2001). - *Az emberi emlékezet*. Osiris Kiadó, Budapest.
- Brown, S. I. Walter, M. I.(1993). - *Problem Posing in Mathematics Education* Stephen I. Brown & Marion I. Walter (Eds.) Problem Posing: Reflection and Applications, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 16-27
- Christou, C. and Philippou, G. (1999). ‘*Students’ mathematical beliefs of four countries in comparison*’, in G. Philippou (Ed), Current state of research on mathematical beliefs, Proceedings MAVI-8 Workshop, Cyprus, pp. 28-37
- Cramer, K., Post, T., Currier, S. (1993). - *Learning and teaching ratio and proportion: Research implications*. In D. Owens (Ed.), Research ideas for the classroom (pp. 159–178). New York: Macmillan.
- Cunningham, R.(2004). - *Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, mathematics and computer education*, 38(1), 83-89
- Dehaene, S. (1992). *Varieties of numerical abilities*. *Cognition*, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (2001). *Précis of The Number sense. Mind & Language*, 16, 16-36
- Dehaene, S. (2003). *Számérzék*. Osiris, Budapest
- Dematte, A. and Eccher Dall’Eco, S. M., Furinghetti, F. (1999). ‘*An exploratory study on students’ beliefs about mathematics as a social-cultural process*’, in G. Philippou (Ed), Current state of research on mathematical beliefs, Proceedings of the MAVI-8 Workshop, Cyprus, pp. 38-47
- Eleftherios, K., Theodosios, Z. (2007). - *Student’s beliefs and attitudes about studying and learning mathematics*, University of Athens, Greece, PME 31 Vol 3, 97-104

- English, L.D. (1996). - *Children's problem posing and problem solving preferences*, J. Mulligan - M. Mitchelmore (szerk.), Research in Early Number Learning. Australian Association of Mathematics Teachers.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company
- Goldin, G.A. (1999). '*Affect, meta affect and mathematical belief structures*', in E. Pehkonen and G. Torner (Eds), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics*, Proceedings of the workshop in Oberwolfach, pp. 37-42
- Hanulla, S. M. (2002). *Attitude towards Mathematics: Emotions, Expectations and Values*, Educational Studies in Mathematics, 49, 25-46
- Harel, G., Selden, A., Selden, J. (2006). - *Advanced mathematical thinking*. In: Gutiérrez, A., Boero, P. (szerk.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam, Netherlands, Sense Publishers.
- Heinze, A., Reiss, K. (2007). - *Mistake-handling activities in the mathematics classroom: effects of an in-service teacher training on student's performance in geometry*, In: Jeong-Ho W., Hee-Ch. L., Kyo-Sik P., Dong-Yeop D. (szerk.) *PME 31*, Volume 3, Seoul, 2007
- Hoffer, A. (1979). - *Geometry*. Teacher's Edition. Menlo Park, CA: Addison – Wesley
- Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., Tzekaki, M. (2006): *On the mathematical knowledge under construction in the classroom: a comparative study*, University of Ioannina, Democritus University of Thrace, Aristotle University of Thessaloniki, Greece
- Kálmán O., (2004)- *Magyar pedagógia*, 104. évf. 1 szám, 95-114. (2004) *A hallgatók tanulási sajátosságainak változásai a felsőoktatás éveitől kezdve*
- Kang, H., G., Cho, Y.M. (2002). - *The different definition - methods in school geometry and didactical Implications*, The Journal of Educational Research in Mathematics, Seoul, Korea: KESM 12(1), 95-108.
- Eysenck, M. V., Keane, M. T. (1997). *Kognitív pszichológia*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp.
- Kieran, Carolyn. (1981).- *Concepts Associated with the Equality Symbol*. Educational Studies in Mathematics 12, 317–26.

- Kifer, E., Robitaille, D. F. (1989). '*Attitudes, preferences and opinions*', in D.F. Robitaille and R.A.Garden (Eds.), *The IEA study of mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics*. International studies in educational achievement, Oxford: Pergamon Press, pp.178-208
- Kullberg, A. (2007). *Can lessons be replicated?* Göteborg University, Sweden
- KyungHwa, L., EunSung, K., SangHun, S. (2007).– *The analysis of activity that gifted students construct definition of regular polyhedra*, Korea National University of Education, Gyeongin National University Of Education
- Lavy, I., Shriki, A. (2007). *Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers*
- McCloskey, M. (1992). *Cognitive mechanism in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia*. *Cognition*, 44, 107-157
- NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics* (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Ouvrier-Buffet, C. (2006). *Classification_ activities and definition construction at the elementary level*, PME 30, vol.4.297-304 Prague, Czech Republic
- Pegg, J., Davey, G. (1998). *A synthesis of Two Models: Interpreting Student Understanding in Geometry*. In R. Lehrer & C. Chazan, (Eds.), *Designing Learning*
- Piaget, I. (1967) – *Az értelem pszichológiája*, Gondolat, Budapest, 1993. 20., 55, 57, 173, 200, 203. o
- Presmeg, N. C. (1988). *School Mathematics in culture-conflict situations*, Educational Studies in Mathematics, 19, 2, 163-167
- Regna, S. and Dalla, L. (1993). *Affect: A critical component of mathematical learning in early childhood*, in R.J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom: Early childhood*, New York: Mac Millan/NCTM, pp. 22-42
- Sarvestani, A. K. (2011). - *Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept*, 13. o

- Sfard, A. (1991).- *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36
- Silver, E. A., Mamona - Downs J., Leung, S. S., Kenney, P. A. (1996). *Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study*, Journal for Research in Mathematics Education, 27 (3) 293-309
- Skemp, R. R. (1971). – *A matematikatalulás pszichológiája*, Egde 2000 Kiadó, 2005
- Tall, D. (2008). - *The Transition to Formal Thinking in Mathematics*, Vol. 20, No. 2, 5-24, 7. oldal
- Tall, D.(2004). - *Thinking through three worlds of mathematics*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (PME) 2004. Vol 4 pp. 281-288
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project.)Chicago: University of Chicago.(ERIC Document Reproduction Service No.ED 220 288).
- van Hiele, P. M. (1959). *Development and the learning process*. Acta Paedagogica Ultrajectina (pp.1-31).Groningen:J. B. Wolters.
- Van Hiele, P. M. (1980). *Levels of thinking,how to meet them, how to avoid them. Paper presented at the presession meeting of the Special Interest Group for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics,Seattle,WA.
- Wirsup, I. (1976). *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In Space and Geometry: Papers from a Research Workshop*, J. L. Martin, Columbus OH: ERIC/SMEAC