



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Híradástechnikai Tanszék

Kvantumbitek és kvantumműveletek újszerű megjelenítése fraktálokkal

Készítette: Galambos Máté (VIII.)
E-mail: galambos@mcl.hu

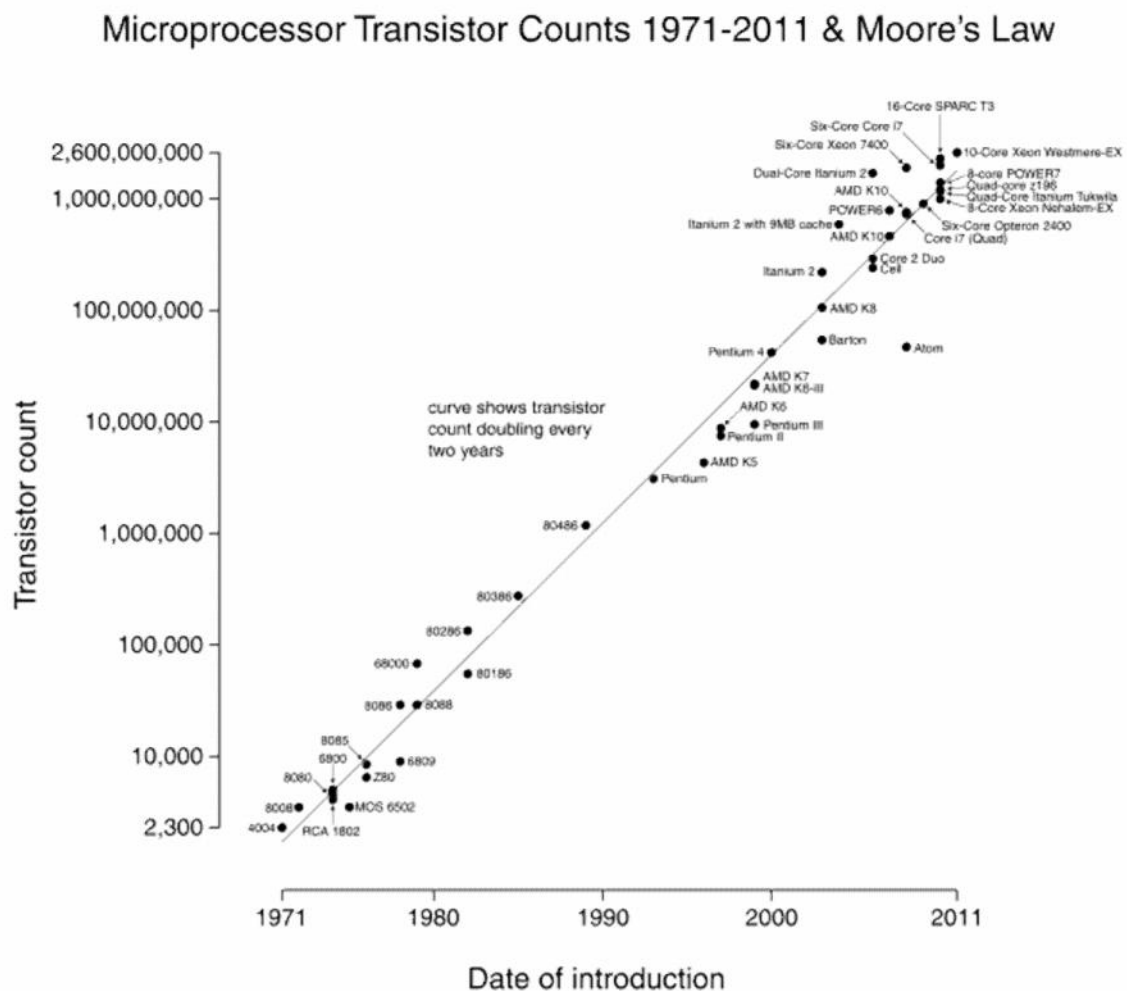
Konzulensek:
Dr. Bacsárdi László, Híradástechnikai Tanszék
Dr. Imre Sándor, Híradástechnikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Kvantuminformatikai alapismeretek	4
2.1. A kvantummechanika alaptörvényei	4
2.2. Műveletek, összefont bitek	7
2.3. A sűrűségmátrix	10
2.4. Bloch-gömb	11
3. Új reprezentáció fraktálokkal	13
3.1. Egy qubit reprezentálása	13
3.2. Több qubites rendszerek reprezentálása	16
3.3. Tenzorszorzatok és fraktálleírás	17
3.4. Összefont állapotok és szétválaszthatóság	20
3.5. Mérés és feltételes valószínűségek	22
3.6. Qubitek sorrendjének cseréje, rendezés	25
3.7. Logikai kapuk hatása	27
3.7.1. X operátor	27
3.7.2. Y operátor	29
3.7.3. Z operátor	31
3.7.4. CNOT operátor	32
3.7.5. H operátor	32
3.8. Kapcsolat a sűrűségmátrixszal	35
3.9. Általánosítás véges állapotú, diszkrét kvantumrendszerekre	36
3.10. Általánosítás egyéb reprezentációk alkotásához	37
3.10.1. Reprezentáció percc diagramokkal	37
3.10.2. Reprezentáció színezett csúcsú kockákkal	38
3.10.3. Reprezentáció Bloch gömbökből alkotott fraktálokkal	39
3.10.4. Általánosítás előjeles címkézett bináris fák segítségével	40
4. Összefoglalás	43
4.1. Eredmények	43
4.2. Tovább lépési lehetőségek	43
5. Melléklet	45
5.1. Tenzorszorzat	45
5.2. Szorzat szerkesztés parabola segítségével	45
5.3. Bra-ket formalizmus vektorokkal	46
Hivatkozások	48

1. Bevezetés

A kvantuminformatika alapötletéhez legegyszerűbben a Moore-törvényként elhíresült empirikus megfigyelés alapján juthatunk el. Gordon Moore, az Intel egyik alapítója publikálta 1965-ben [1] felfedezését arról a hosszú távú trendről, miszerint egy integrált áramkörben költséghatékonyan elhelyezhető tranzisztorok száma nagyjából kétevente megduplázódik. Az összefüggés máig pontosnak bizonyult, és ezzel egyidejűleg folyamatos méretcsökkenés is megfigyelhető az integrált áramkörök világában, ami azt jelenti, hogy ha ez a trend folytatódik, akkor előbb vagy utóbb eljutunk arra a pontra, ahol egy bitnyi információt egy atomban kell tárolnunk.



1. ábra Moore-törvénye logaritmikus skálán ábrázolva [2].

Ilyen mérettartományban már a kvantummechanika törvényei érvényesek, ami jelentős működésbeli különbségeket fog jelenteni a mostani számítógépekhez képest. Ennek a kihangsúlyozására az így tárolt biteket kvantumbiteknek (vagy röviden qubitnek) szokás nevezni, az ezekkel operáló számítógépeket kvantumszámítógépeknek, általánosságban pedig a kvantummechanikán alapuló információátvitelt, feldolgozást és továbbítást összefoglaló néven kvantuminformatikának hívjuk.

Ahhoz, hogy kvantumszinten tároljunk digitális információt, olyan kvantummechanikai objektumokra van szükségünk, melyek legalább két, mérésekkel jól megkülönböztethető állapottal rendelkeznek. Ilyen lehet például az elektronok, vagy atommagok spinje (perdülete), fotonok függőleges, vagy vízszintes polarizációja, esetleg elektronok jelenléte, vagy hiánya arany és gallium-arzenid nanopöttyökön (vagyis igen kisméretű, legfeljebb néhány ezer atomból álló kristályokon).

A terület elméleti háttere ma már részletesen kidolgozott, amiből pontosan tudjuk, hogy a kvantuminformatika számos olyan alkalmazási lehetőséget rejt magában, ami klasszikus algoritmusokkal nem megvalósítható. Például az úgynevezett Grover algoritmus [3], mely nagy, rendezetlen adatbázisban valósít meg keresést rendkívül hatékonyan, a Peter Shor nevével fémjelzett prímfaktorizációs algoritmus [4] pedig polinomiális idő alatt képes feltörni az RSA titkosítást. Kommunikációban a kvantumkriptográfiai algoritmusok [5] [6] [7], melyek tökéletes feltörhetetlenséget biztosíthatnak, és az úgynevezett szupersűrű kódolás [7], mely képes megduplázni az átvitt információ mennyiségét, csak néhány példa a sok közül.

Ennek ellenére a kvantuminformatika relatíve lassan fejlődő terület, ami részben annak köszönhető, hogy a kvantummechanika absztrakt természete miatt az elmélet nehezen érthető, a helyzetet pedig csak rontja, hogy eddig nem létezett olyan reprezentáció, mely klasszikus analógiával vezetné be a több kvantumbitből álló rendszerek viselkedését. Ez a dolgozat egy ilyen reprezentációt mutat be, téglalapokkal és fekete-fehér színezéssel jelenítve meg az egyes kvantumbiteket, a bitek közti összefüggéseket pedig a téglalapok rekurzív egymásmellé helyezésével, és fraktálok alkotásával hozza összefüggésbe.

2. Kvantuminformatikai alapismeretek

Az elmélet szerint a kvantumbitek viselkedése független attól, hogy pontosan milyen fizikai objektum (például elektron vagy foton) hordozza az információt, és attól is, hogy az adott objektumnak melyik tulajdonságába van kódolva az információ (például egy foton polarizációja vagy fázisa is hordozhat információt), így a továbbiakban erről nem beszélünk részletesebben. Az itt következő részben azokról az alapvető összefüggésekről lesz szó, melyek minden kvantuminformatikai rendszerre érvényesek, az alkalmazás céljától és megvalósítás módjától függetlenül.

2.1. A kvantummechanika alaptörvényei

Az állapot

Függetlenül attól, milyen fizikai rendszer hordozza az információt, az ilyen rendszerek állapotait minden esetben az úgynevezett Hilbert tér egy vektoraként reprezentáljuk. Ez egy – komplex számtest felett értelmezett – lineáris vektortér, mely általában végtelen dimenziós, de a kvantuminformatikában általában csak kétdimenziós altereivel foglalkozunk. A kétdimenziós altérben választott ortonormált bázis vektorait tekintjük a bit 0 és 1 értékének, és az altérben található vektorokat az úgynevezett bra-ket formalizmus szerint speciális zárójelekbe tett betűkként, vagy számokként szokás jelölni. A bázisvektorok jele például: $|0\rangle$ és $|1\rangle$. Mivel a vektortér lineáris, ezért egy kétállapotú fizikai rendszer nem csak a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ állapotok valamelyikében lehet, hanem ezeknek tetszőleges komplex számokkal képzett linárkombinációja is lehetséges:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Ez az úgynevezett szuperpozíció.

Időfejlődés

Az állapotok időbeli megváltozását a Hilbert tér vektorira ható unitér operátorokkal lehet leírni. Ezeket jelölésben kalappal ellátott nagybetűkkel szoktuk megjeleníteni, például:

$$\hat{U}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (2)$$

Mivel a leírás statisztikus jellegű (vagyis szemben például a newtoni mechanikával, melyben arra a kérdésre kerestük választ, hogy egy adott t időpillanatban milyen állapotban van egy adott test - például hol van, vagy milyen sebességgel mozog - addig a kvantummechanika olyan kérdésekre ad választ, hogy milyen valószínűséggel van egy adott pillanatban a vizsgált részecske egy adott állapotban - például egy adott helyen). Az állapothoz tartozó valószínűség nem más, mint a megfelelő állapotvektorhoz tartozó komplex együttható abszolút érték négyzete.

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle : \begin{cases} P(|0\rangle) = |a|^2 \\ P(|1\rangle) = |b|^2 \end{cases} \quad (3)$$

Ez alapján a komplex együtthatókat valószínűségi amplitúdónak, vagy röviden amplitúdónak nevezzük. (Ennek fényében az is látható, hogy az összes lehetséges állapothoz tartozó együttható abszolút értékének négyzetösszege egyet kell, hogy adjon, hiszen a részecskének biztosan lennie kell valamilyen állapotban).

$$\left. \begin{matrix} P(|0\rangle) = |a|^2 \\ P(|1\rangle) = |b|^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4)$$

Mérés

Azt, hogy pontosan milyen állapotban van a részecske, méréssel állapíthatjuk meg, ami (szemben a klasszikus fizikával) befolyásolja a rendszert. Azt, hogy mik a lehetséges állapotok, amiben a rendszerünket találhatjuk, a mérési összeállítás határozza meg: például egy függőleges és vízszintes polarizáció mérésére alkalmas berendezés a beérkező fotont mindig e két állapot valamelyikében fogja találni, viszont ha negyvenöt fokkal elforgatjuk a berendezést, mindig két átlós polarizációt regisztrál az eszközünk. Azt viszont, hogy a részecskét milyen valószínűséggel találjuk egy adott állapotban, ezzel nem lehet befolyásolni, tehát függetlenül a mérés elvétől, két mérőműszer nem ad más mérési eredményt, sőt, az sem változtatja meg a mért állapotok valószínűségét, ha más lehetséges állapotokat kezdünk keresni. Ha elforgatjuk a detektorunkat, az új valószínűségeket a Hilbert tér egy bázis transzformációja alapján lehet számolni. Fontos tudni, hogy két állapotot csak akkor tudunk egyértelműen megkülönböztetni egymástól, ha azok egymásra a Hilbert térben ortogonálisak.

Ha egy általános normált állapotban valószínűsítünk meg mérést, akkor a következő valószínűséggel kapunk egy adott $|\varphi\rangle$ normált vektorhoz tartozó állapotot:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \\
|\varphi\rangle &= b_0|0\rangle + b_1|1\rangle \\
P(|\varphi\rangle) &= |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 = |a_0b_0^* + a_1b_1^*|^2
\end{aligned} \tag{5}$$

Ahol a $\langle\varphi|$, úgynevezett bra vektor a $|\varphi\rangle$ ket vektor adjungáltja. (Ha a rendszer leírására használt vektorunk nem normált, a valószínűséget még le kell osztanunk annak hosszával.) Amennyiben a ket vektorokat komplex értékű oszlopvektoroknak képzeljük, akkor a bra vektorok ezek konjugált transzponáltjaiként sorvektorok lesznek, a kettejük szorzata pedig a szokásos értelemben vett skalárszorzat.

Amennyiben a mérést ugyanabban a bázisban végezzük, amiben leírtuk a rendszert, más szóval annak a valószínűségét keressük, hogy a rendszerünk egy $|n\rangle$ normált bázisvektornak megfelelő állapotban van, akkor az összefüggés a (6) képletnek megfelelően egyszerűsödik, vagyis visszakapjuk a (4) összefüggést.

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle \\
\text{Ha :} \\
|n\rangle &= |0\rangle \\
P(|0\rangle) &= |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a|^2 \\
\text{Ha :} \\
|n\rangle &= |1\rangle \\
P(|1\rangle) &= |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |b|^2
\end{aligned} \tag{6}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a mérés a leíráshoz használatos bázisban történik, és bázis transzformációt sehol nem alkalmazunk.

A másik méréssel kapcsolatos fontos tudnivaló, hogy mivel befolyásolja az állapotot, vannak olyan információk, amiket egyidejűleg (vagyis egymás utáni mérésekkel) nem lehet kinyerni a rendszerből: például nem lehet megállapítani egyidejűleg egy részecske helyét és sebességét, mivel az egyik mérése a másikat befolyásolja. (A vizsgált rendszerünk a mérés után a mért $|\varphi\rangle$ állapotba kerül.)

Érdemes még megjegyezni, hogy mivel a mérésekkel az amplitúdók abszolút érték négyzetéről szerezhetünk információt, ezért egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal való szorzás nem változtatja a mérés végeredményét. Ezt a számot globális fázisfaktornak szokás nevezni, és mivel ez nem mérhető, tekinthetjük a leírás által mesterségesen behozott faktornak és teljes egészében elhanyagolhatjuk.

$$c(a|0\rangle + b|1\rangle) \equiv a|0\rangle + b|1\rangle, \quad \text{ha } |c|^2 = 1 \quad (a, b, c \in \mathbb{C}) \tag{7}$$

Összetett rendszer

Összetett rendszer esetén, vagyis ha egynél több kvantummechanikai objektum együttes viselkedését akarjuk leírni, az egyes objektumok lehetséges állapotai által kifeszített vektorterek tenzorszorzatát kell vennünk, mely maga is lineáris tér. Az egyszerűség kedvéért az összetett rendszerek leírásakor a jelölésben összevonjuk, és közös zárójelben ábrázoljuk a

ketvektorokat. A következő (8) példa azt mutatja be, hogy az 5.1. mellékletnek megfelelően hogyan lehet kiszámolni két tetszőleges kvantumállapot tenzorszorzatát, illetve hogyan szoktuk elhagyni a tenzorszorzat jeleket.

$$a_0|0_a\rangle \otimes b_1|1_b\rangle = a_0b_1(|0_a\rangle \otimes |1_b\rangle) \equiv a_0b_1|0_a1_b\rangle \quad (8)$$

A továbbiakban az alsó indexeléstől, mely azt hivatott jelezni, hogy melyik érték melyik bithez tartozik, eltekintünk, és ezt egyszerűen a bitértékek sorrendjének megtartásával fogjuk jelölni. Tehát előző példánk végeredménye a továbbiakban így jelenik majd meg:

$$a_0b_1|0_a1_b\rangle \equiv ab|01\rangle \quad (9)$$

Ha például két bitből álló, általános kvantumregisztert akarunk leírni, akkor az egy kétszer két, vagyis négy dimenziós térben fog történni. Ráadásul a négy szokványos állapot mellett ezek lineáarkombinációi is lehetségesek:

$$a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \quad ahol \ |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1 \text{ és } (a, b, c, d \in C) \quad (10)$$

Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tenzorszorzattér linearitása miatt olyan állapotok is előállhatnak, melyeket nem lehet felírni egy bites állapotok tenzorszorzataként. Például:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = ??? \otimes ??? \quad (11)$$

Ez azt bizonyítja, hogy a lineáarkombináció a tenzorszorzatképzéssel alkotott állapotok halmazából kivezet, vagy más szavakkal: egy több qubites rendszer jóval több, mint az egyes bitek összessége.

Az ilyen állapotoknak az alkalmazások szempontjából nagy jelentősége lesz.

2.2. Műveletek, összefont bitek

Kérdés, hogy a Boole-algebra műveleteihez képest milyen új műveleteket végezhetünk a kvantumbiteken. Az egy bites logikai kapuk közül négy alpműveletet szokás megkülönböztetni a kvantuminformatikában, ezeket $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$, és $\hat{H}$ operátorokkal jelöljük.

Az $\hat{X}$ operációt végrehajtó kapu a klasszikus NOT művelet kvantumos kiterjesztése, mely a két lehetséges állapothoz tartozó valószínűségi amplitúdókat cseréli fel:

$$\hat{X}(a|0\rangle + b|1\rangle) = b|0\rangle + a|1\rangle \quad (12)$$

Amennyiben a két állapot közül bármelyik amplitúdója nulla (és ennek megfelelően a másiké egy), visszakapjuk a klasszikus negálásnak megfelelő határesetet, és ebben az esetben úgynevezett klasszikus bemenetről, vagy klasszikus bitről beszélünk.

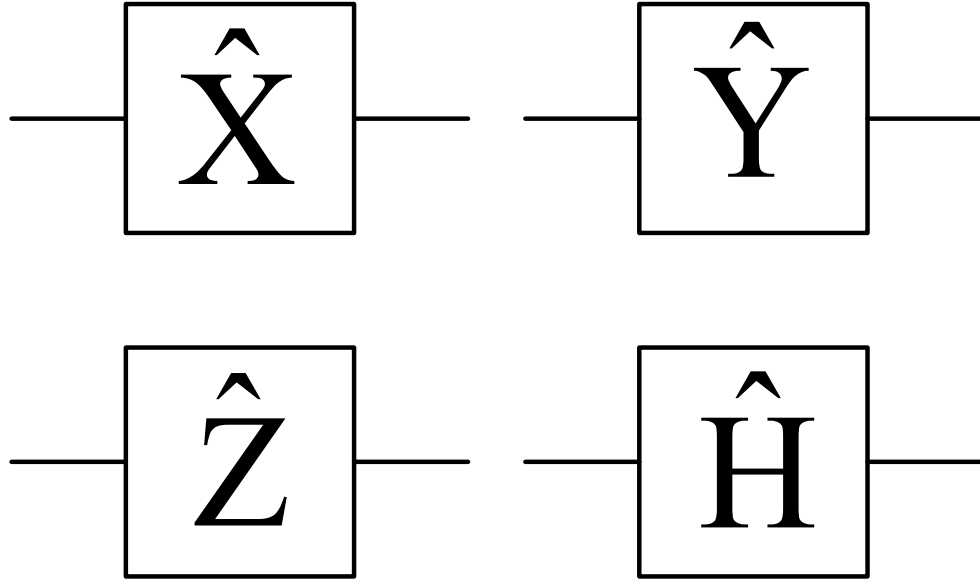
A többi operátornak nincs klasszikus megfelelője, ezek hatása rendre:

$$\hat{Y}(a|0\rangle + b|1\rangle) = i(b|0\rangle - a|1\rangle) \quad (13)$$

$$\hat{Z}(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle \quad (14)$$

$$\hat{H}(a|0\rangle + b|1\rangle) = \frac{a+b}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (15)$$

Ezeket a műveleteket végrehajtó egy bites kapuk rajzát lásd a 2. ábra.



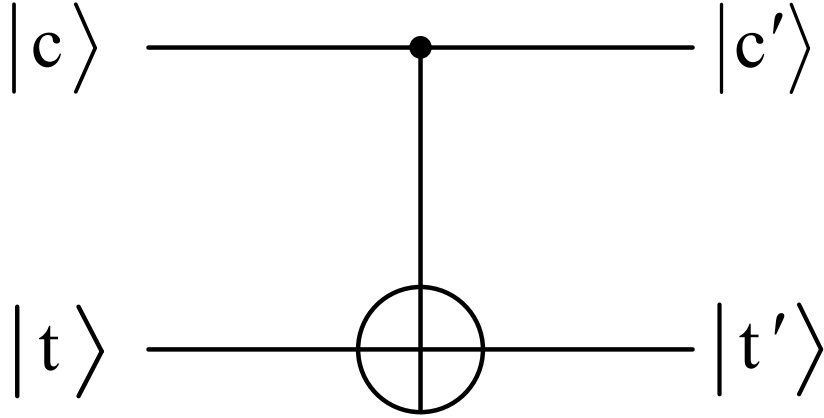
2. ábra Egy bites kvantumkapuk áramköri rajza.

A több bites operátorok közül csak a legfontosabbat, a kontrollált *NOT*, vagy röviden *CNOT* operátort említeném. Ez a művelet két biten operál, melyek közül az egyiket *c*, vagy kontroll bitnek, a másikat *t*, vagyis target bitnek szokás nevezni. Klasszikus esetben, amennyiben a kontroll bit értéke 0, a target bit változatlan marad, viszont ha 1, a target biten a kapu egy negálást hajt végre. Vagyis klasszikusan a *CNOT* igazságtáblája:

A kvantumbiteken végrehajtott *CNOT* művelet eredménye klasszikus bemenetekre megegyezik, általános esetben pedig (mivel, mint minden kvantummechanikai műveletnek, úgy ennek is lineárisnak kell lennie), ezek szuperpozíciója lesz, így:

$$|c\rangle \oplus |t\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \oplus (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|11\rangle + bd|10\rangle \quad (16)$$

Ahol a $\oplus$ jel a *CNOT* művelet végrehajtását jelöli. A *CNOT* kapu áramköri rajza a látható.

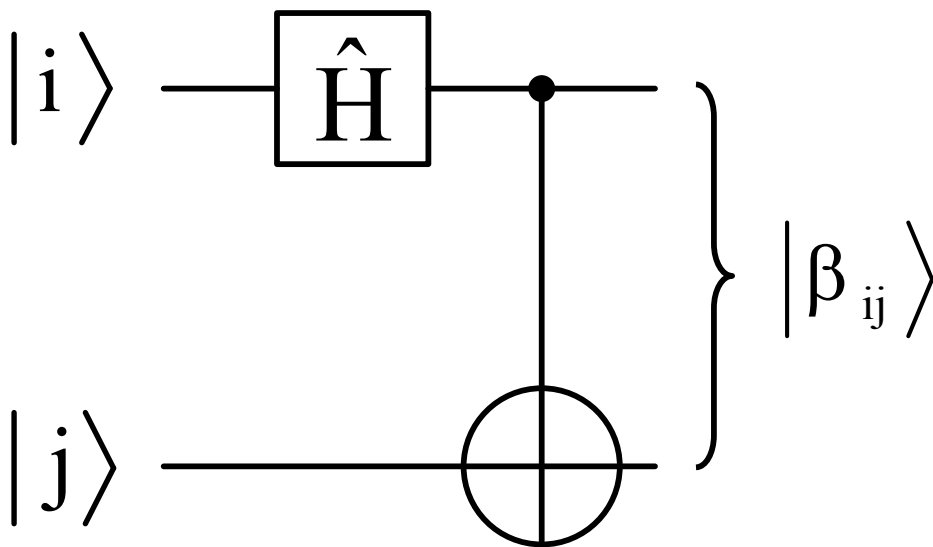


3. ábra Egy CNOT kapu áramköri rajza. Felül az úgynevezett kontroll, alul a target bit.

Be		Ki	
c	t	c'	t'
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Di Vincenzo bizonyította azt a tételt, miszerint a *CNOT* operátorral, és az egybites alpműveletek közül tetszőlegesen választott két operátorral – leggyakrabban az $\hat{X}$ és a $\hat{H}$ operátort választják – minden lehetséges kvantum-áramkör felépíthető [8]. (Megjegyzendő, hogy bár a biteknek nem feltétlenül van közük az elektromos áramhoz, például a dolgozat hátralévő részében főleg fény alapú információátvitelről lesz szó, ennek ellenére az egymás után következő kapuk rendszerét továbbra is áramkörnek szokás hívni.)

Szintén a *CNOT* művelet egy sajátos tulajdonsága eredményezi a legjellegzetesebb kétbites kvantumállapotokat, az úgynevezett összefon, vagy Bell-állapotokat. Az ezek előállítására szolgáló áramkör, és az egyes bemenetekhez tartozó kimenetek listája az alábbi, 4. ábrán látható:



4. ábra Összefon, úgynevezett Bell-állapotok létrehozására szolgáló kvantumáramkör.

Be	Ki
$ 00\rangle$	$ \beta_{00}\rangle = \frac{ 00\rangle + 11\rangle}{\sqrt{2}}$
$ 01\rangle$	$ \beta_{01}\rangle = \frac{ 01\rangle + 10\rangle}{\sqrt{2}}$
$ 10\rangle$	$ \beta_{10}\rangle = \frac{ 00\rangle - 11\rangle}{\sqrt{2}}$
$ 11\rangle$	$ \beta_{11}\rangle = \frac{ 01\rangle - 10\rangle}{\sqrt{2}}$

Ezeknek az állapotoknak az a sajátossága, hogy ha az egyik biten mérést hajtunk végre, annak végeredménye teljesen véletlenszerű, azonban a másik biten a mérés eredménye határozottan korrelál az első mérés eredményével. Ebben az az érdekes, hogy jelenlegi ismereteink szerint semmiféle paraméter nem rögzíti előre egy mérés eredményét [8], és a két mérést egymástól tetszőleges távolságban, és tetszőleges időpontban végrehajthatjuk, így elérhető, hogy a két bit között még fénysebességgel se jöhessen létre információcsere [9], a korreláció mégis fenn fog állni. (Ennek ellenére a véletlenszerűség miatt nem lehetséges információt továbbítani fénysebességnél gyorsabban, hiszen – mint arról a 2.1. fejezetben szó volt – a méréssel nem lehet befolyásolni annak végeredményét.)

További fontos tudnivaló, hogy ez a négy Bell-állapot a Hilbert térben ortogonális egymásra, vagyis lehetséges olyan mérést konstruálni, amivel egyértelműen megkülönböztethetők. (Gondoljunk csak az őket előállító áramkör megfordítására.)

2.3. A sűrűségmátrix

A sűrűségmátrixok az összetett kvantumrendszerek, vagy egyszerű kvantumrendszerek sokaságának leírására szolgáló matematikai objektumok. Általános formájuk:

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad \forall p_j \in \mathbb{R}, \quad \forall p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1 \quad (17)$$

Ahol p_j -k nem-negatív valós számok, melyek összege 1, a bra vektort pedig itt is úgy lehet elképzelni, mint a ket oszlopvektor konjugált transzponáltját (kettejük szorzata egy mátrixot ad). Ez a leírás azért érdekes, mert például elképzelhető olyan sokaság, melynek 50%-a egy adott, $j=n$ kvantumállapotban van ($p_n=1/2$), 50%-a pedig egy másik $j=m$ állapotban található ($p_m=1/2$). Ezt nevezzük kevert állapotnak, és abban az esetben, ha azonos bázisban mérünk, mint amiben leírtuk a rendszerünket, méréssel megkülönböztethetetlen a szuperponált állapottól. A különbség abban rejlik, hogy a kevert és szuperponált állapotok a bázistranszformációra másképp reagálnak. Éppen ezért fontos lesz, hogy a továbbiakban nem alkalmazunk bázistranszformációt, így nem lesz szükség rá, hogy mindenhol közöljük, kevert vagy szuperponált állapotokról beszélünk-e.

A sűrűségmátrix egy adott nm eleme ez alapján:

$$|\psi_j\rangle = \sum_i c_i^j |i\rangle, \quad \rho_{nm} = \sum_j p_j c_n^j (c_m^j)^* \quad (18)$$

A sűrűségmátrixot elsősorban azért szokták használni, hogy egyetlen matematikai objektummal le lehessen írni egy egész sokaságot, hátránya viszont, hogy bár a ket vektorokból történő megalkotása egyértelmű, a visszatranszformálás már nem. Más szóval ez annyit tesz, hogy míg egy adott ket vektorhoz mindig egy és pontosan egy sűrűségmátrix tartozik, addig előfordul, hogy egy sűrűségmátrix több ket vektornak is párja lehet.

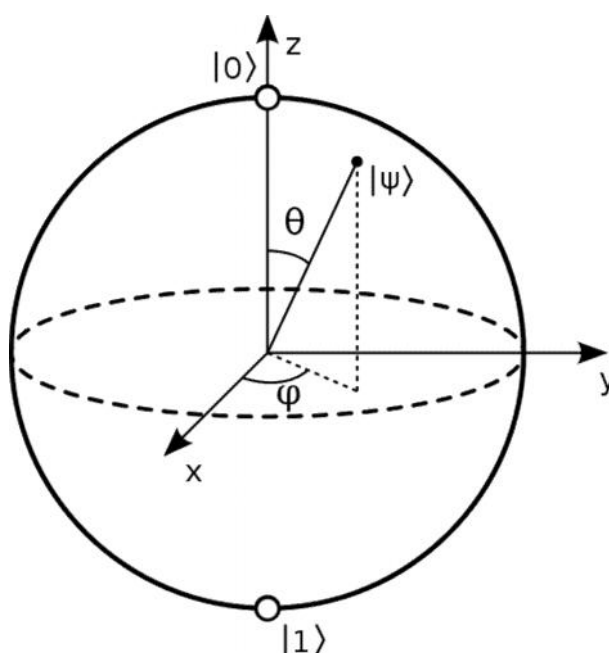
2.4. Bloch-gömb

Kétállapotú kvantumrendszereket könnyedén lehet ábrázolni az úgynevezett Bloch-gömbön, melyet Felix Bloch vezetett be 1946-ban [10], és azóta is változatlan formában használják a kvantuminformáció vizuális megjelenítésére.

A reprezentáció lényege, hogy a globális fázisfaktor miatt mindig fel lehet írni egy qubit együtthatóit úgy, hogy a $|0\rangle$ állapothoz tartozó valószínűségi amplitúdó valós szám, az amplitúdókat pedig kifejezhetjük trigonometrikus összefüggéseken keresztül:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle; \quad a, \theta, \phi \in \mathbb{R}; \quad b \in \mathbb{C} \quad (19)$$

A trigonometrikus összefüggésekben szereplő szögeket felhasználva, a qubit értéke egy egységnyi sugarú gömbfelületre mutató vektorral reprezentálható:



5. ábra Az úgynevezett Bloch-gömb egyetlen kvantumbit megjelenítésére alkalmas [11].

A klasszikus bitértékek a gömb északi és déli sarkánál találhatóak, a gömbfelület többi része pedig a szuperponált állapotokat jelöli.

A Bloch gömbön az egy qubitese $\hat{X}$, $\hat{Y}$ és $\hat{Z}$ kvantumkapuk az x , y és z tengely körüli, 180° -os forgatásokat valósítanak meg (innen kapták a nevüket).

Az egyik probléma a Bloch-gömbbel, hogy háromdimenziós reprezentációt ad, amit mindig nehezebb vizuálisan követni, mint egy kétdimenziósat. (Időről időre előkerül az a probléma, hogy az állapotot reprezentáló vektor a síkból kifelé, vagy a síkba befelé mutat, ami sokszor nem egyértelmű.)

A másik probléma, hogy a Bloch gömb használhatatlanná válik, ha több qubites, komplex rendszerekről van szó. Ez különösen az összefonott qubiteket érinti, melyek elengedhetetlenek a kvantumszámítógépek működéséhez. Bár ma már több olyan geometriai objektumot is ismerünk, melyek matematikailag ekvivalensek sok qubites rendszerekkel [12] [13], ezeknek sokszor megvannak a maguk korlátai (például kizárólag maximálisan összefonott rendszereket képesek ábrázolni), ráadásul általában komplikáltak, és nehéz róluk praktikusán használható információt leolvasni.

3. Új reprezentáció fraktálokkal

Az itt következő részben az általam kidolgozott reprezentációkról, és azok tulajdonságairól lesz szó.

3.1. Egy qubit reprezentálása

A 2.1. fejezet (1), (3) és (4) összefüggései alapján tetszőleges qubitre igaz, hogy:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle; \quad a, b \in \mathbb{C}; \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (20)$$

Más szóval egy tetszőleges kvantumállapot az egyes klasszikus bitértékek komplex lineárkombinációjaként áll elő, ahol a kombináció együtthatóinak, az úgynevezett valószínűségi amplitúdóknak az abszolútérték-négyzetösszege egyet ad. Ezt kiindulópontnak használva egy bitet reprezentálhatunk a következőképpen. Először is írjuk fel a komplex valószínűségi együtthatókat Euleri alakban:

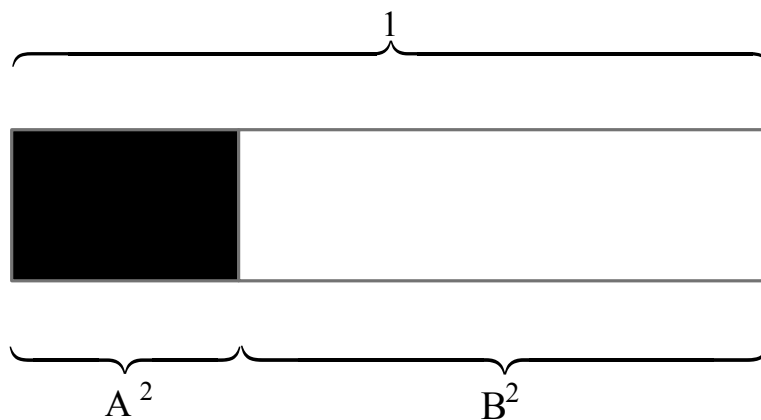
$$|\psi\rangle = Ae^{i\alpha}|0\rangle + Be^{i\beta}|1\rangle; \quad A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Erre a következő összefüggések teljesülnek:

$$0 \leq A, B \leq 1; \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi \quad (22)$$

$$A^2 + B^2 = 1 \quad (23)$$

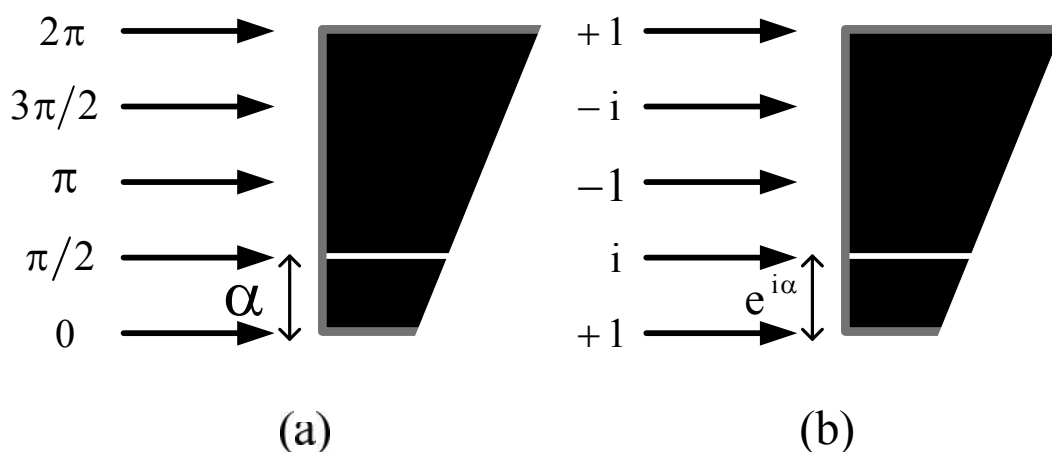
Vagyis a változókkal visszatértünk a valós számok korlátos halmazára, ami megkönnyíti majd a dolgunkat az állapotok reprezentálásakor. Ezeket az összefüggéseket felhasználva, a komplex számsík vektorainak A^2 és B^2 hossz négyzeteit ábrázolhatjuk a következő osztott sávdigrammal:



6. ábra Egyetlen kvantumbit reprezentálására alkalmas sávdigram. A fekete rész szélessége a 0 érték mérési valószínűségét, a fehér részé az 1 érték mérési valószínűségét mutatja.

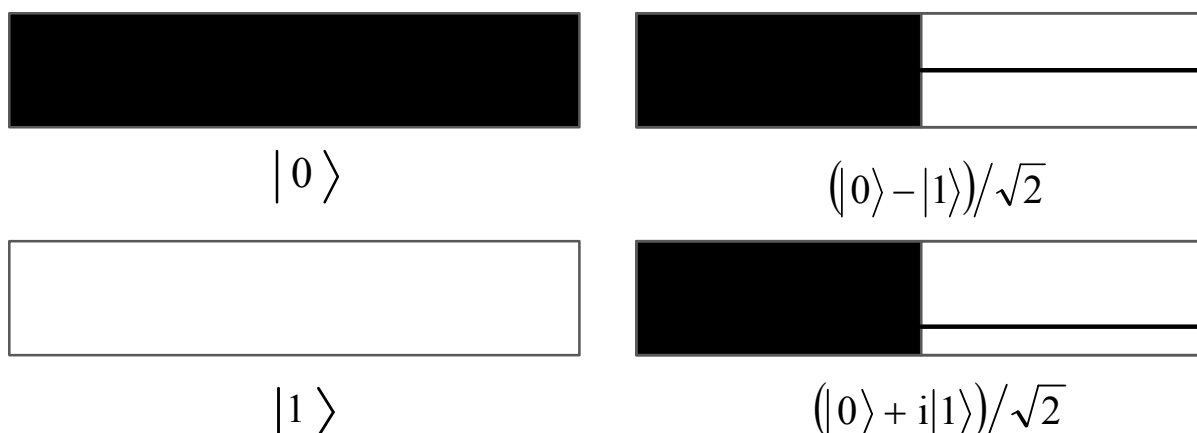
A szürke kerettel ellátott sáv fekete fele tartozzon a 0 bitérték amplitúdójának abszolút érték négyzetéhez, a fehér fele pedig az 1 bitértékéhez. Ez azért lesz hasznos a későbbiekben, mert, mint azt a 2.1. fejezet (3) összefüggésben már láttuk, a sávok szélessége így rögtön megadja a mérési valószínűségeket. Például, ha az egész csík fekete, a qubiten végzett mérés 1 valószínűséggel ad 0 értéket, ha az egész fehér, 1 valószínűséggel találjuk a rendszerünket az 1-es értékhez tartozó állapotban, míg ha félig fehér, félig fekete, a mérés 50-50% eséllyel ad 0-át vagy 1-et.

Ez a kép egyelőre nem tartalmazza az α -val és β -val jelölt fázisokat. A fázisinformáció megjelenítéséhez használhatunk a sávok egyes felére behúzott vízszintes csíkokat. A csíkok magassága fogja meghatározni az α és β Euler-szögek 0 és 2π közti nagyságát, illetve a hozzájuk tartozó exponenciális függvény egységnyi abszolút értékű eredményét. A csíkokhoz használjuk a sáv színének komplementerét (fehér alapon feketét, fekete alapon fehéret), és ha a csík magassága a sáv tetejére vagy aljára esne, tekintjük úgy, hogy a csík a szürke keret mögött van, így nem látszik. Ha ezt betartjuk, később nem fordulhat majd elő, hogy a csíkot véletlenül összekeverjük a sáv szürke szegélyével.



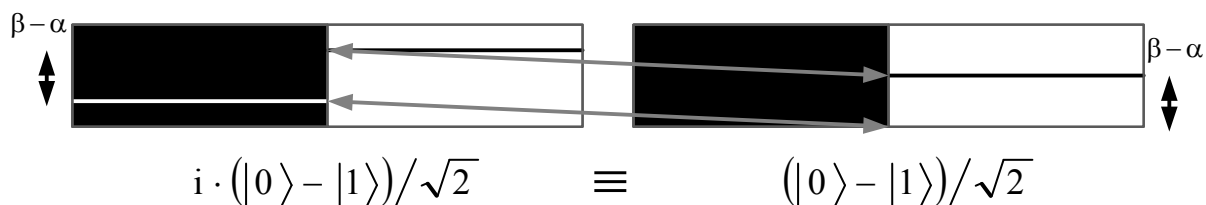
7. ábra A fázis megjeleníthető a sávok fekete és fehér felére behúzott, vízszintes csíkkal. A csík magasságából leolvasható az Euler-szög nagysága (a), vagy az exponenciális függvénnyel képzett egységnyi abszolút értékű komplex számérték (b).

Az eddigiek alapján lássunk néhány egyszerű példát:



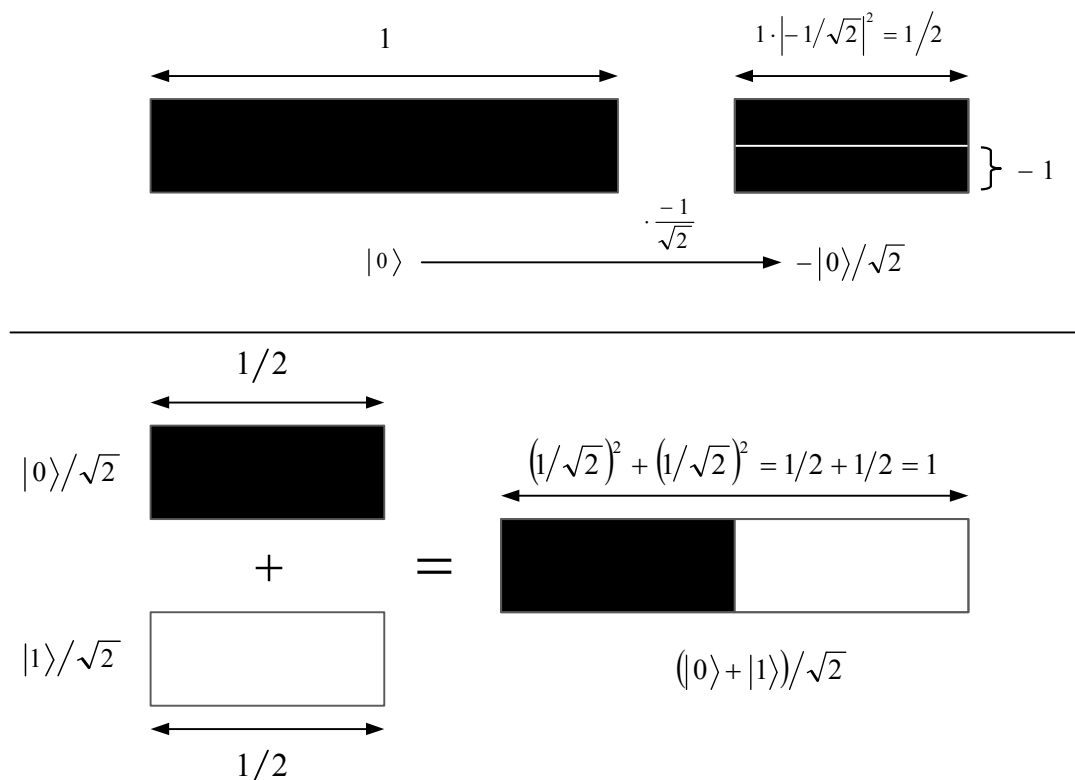
8. ábra Néhány egyszerűbb példa egy qubit ábrázolására. A fekete sávrész a 0 értékhez, a fehér az 1-hez tartozik. A sávrészek szélessége a mérési valószínűséget, a rajtuk elhelyezett vízszintes vonal magassága a fázist jelöli. (Amennyiben nincs vízszintes vonal, úgy tekintjük, hogy a fázis 0° és a csík a szürke keret „mögött” van.)

Érdemes még megemlíteni, hogy a globális fázis miatt, melyről a 2.1. fejezet (7) összefüggésében volt szó, a sáv két felén a csíkok tetszőleges magasságban lehetnek, egészen addig, amíg a magasságok relatív értéke megegyezik, ahogy az a 9. ábrán látszik. Ehhez kapcsolódik, hogy sokszor érdemes olyan globális fázist választani, ami a legkisebb bitértékű, nem nulla valószínűséggel előforduló állapothoz 0° -os Euler-szöveget rendel.



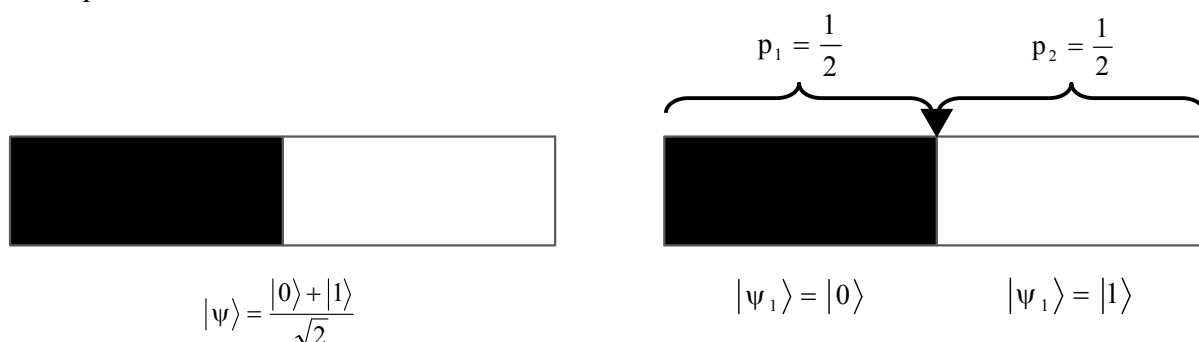
9. ábra A globális fázis miatt a fázisokat hordozó vízszintes vonalak tetszőleges magasságban lehetnek egészen addig, amíg egymáshoz viszonyított relatív magasságuk megegyezik.

A későbbiekben nem lesz igazán érdekes, de mivel egy-egyértelmű ekvivalencia van a kétdimenziós komplex vektorterek, és az ilyen jellegű osztott sávok között, bizonyítottan tekinthető, hogy a sávok maguk is vektorteret alkotnak. A sávok terében a műveletek az ekvivalencia szabályból következnek. Általános esetben egy komplex számmal való szorzás a sávon a szám abszolút-érték négyzetével való, vízszintes irányú merőleges affinitást, illetve a fázist reprezentáló sávok eltolását jelenti. Az összegzés alatt pedig egymásra ortogonális állapotok esetén az állapotokat reprezentáló sávok egymás mellé illesztését kell érteni. Mi a továbbiakban a tér (4) szerint értelmezett megszorításán dolgozunk, melyet a sáv egységnyi hossza biztosít.



10. ábra Az egy qubit reprezentálására szolgáló sávok vektorteret alkotnak. Egy komplex számmal való szorzás a szám négyzetével való merőleges affinitásnak, és a fázisinformáció reprezentálására szolgáló vízszintes vonal eltolásának felel meg (fent). Az összeadás művelete ortogonális állapotok esetén a sávreszek egymásmellé rajzolásával egyenértékű (lent).

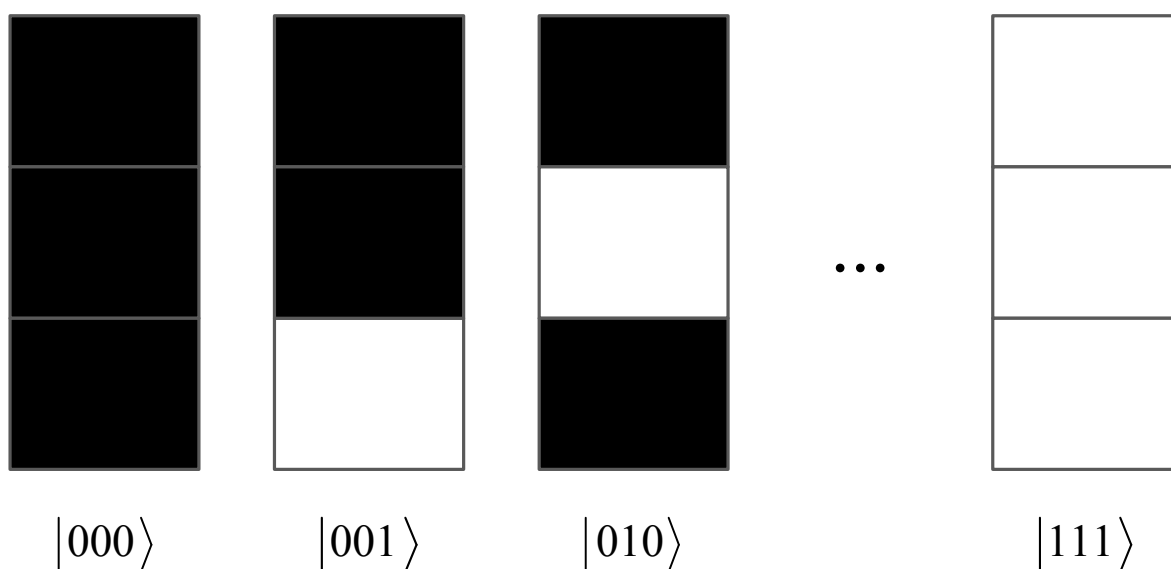
Bár a továbbiakban nem foglalkozunk kevert állapotokkal, megemlítjük, hogy a kevert és szuperponált állapot közti különbséget egy apró háromszög beillesztésével reprezentálhatjuk egyetlen qubit esetén.



11. ábra Balra egy szuperponált állapot látható, jobbra pedig egy kevert állapotot jelenítettünk meg. Felül a kis fekete háromszög mutatja, hogy itt valójában nem egy qubitról, hanem egy egész sokaságról beszélünk, melyek között két eltérő qubit is megtalálható $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ valószínűséggel. A továbbiakban kevert állapotokkal nem foglalkozunk.

3.2. Több qubites rendszerek reprezentálása

Több qubitből álló rendszerek esetén nagyon hasonlóan járhatunk el. Először is a biteket rendezzük olyan sorrendbe, ahogyan a protokoll végén mérni akarjuk őket, majd a bitértékeket jelöljük színekkel, feketével a 0-át, fehérrel az 1-et, majd a bitsorozat értékét fentről lefelé egymás alá illesztett, megfelelő színű sávokból alkotott oszlopokkal reprezentáljuk. (Más szóval a bitértéket fentről lefelé olvasva a sávok színe jeleníti meg.)



12. ábra Több bites rendszerek esetén a bitérték sorozatokat megjeleníthetjük függőleges oszlopok segítségével. Fentről lefelé olvasva a fekete 0-át jelent, a fehér 1-et.

A több qubitből álló kvantumrendszert az egy qubiteshez hasonlóan úgy fogjuk megjeleníteni, hogy a függőleges oszlopokat egymás mellé illesztjük, a bitértékek szerinti növekvő sorrendben. Ezek szélessége az adott bitsorozat mérési valószínűségét reprezentálja (a teljes szélességet továbbra is egységnyinek tekintjük), a fázisinformációt pedig az oszlopok

legalsó sávjában elhelyezett vízszintes csík fogja hordozni. A későbbi lépések egyszerűsítése érdekében a sávok közötti szürke keretet fölülről lefelé haladva mindenhol elhagyhatjuk, ahol azonos színű, azonos fázisú sávok érintkeznek, és a fölöttük lévő sávban nincs elválasztó vonal.

Egy általános, három qubites kvantumrendszeren bemutatva:

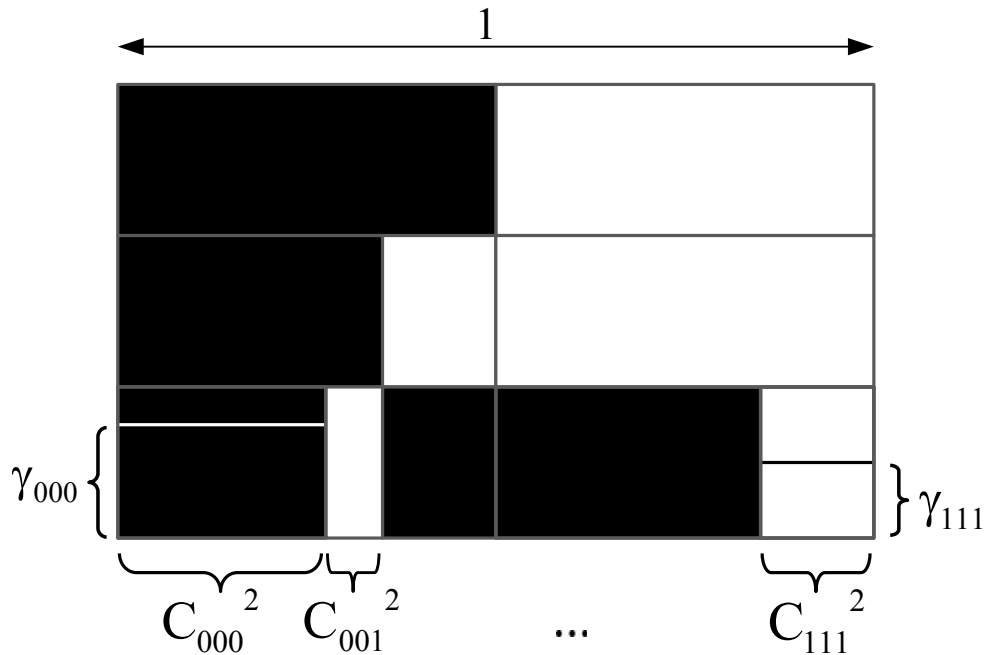
$$|\psi\rangle = C_{000} \exp(i\gamma_{000})|000\rangle + C_{001} \exp(i\gamma_{001})|001\rangle + \dots + C_{111} \exp(i\gamma_{111})|111\rangle \quad (24)$$

$$C_{000}, C_{001}, \dots, C_{111} \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq C_{000}, C_{001}, \dots, C_{111} \leq 1 \quad (25)$$

$$C_i^2 = P(i), \quad \sum_{i=000}^{111} C_i^2 = 1 \quad (26)$$

$$\gamma_{000}, \gamma_{001}, \dots, \gamma_{111} \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \gamma_{000}, \gamma_{001}, \dots, \gamma_{111} \leq 2\pi, \quad (27)$$

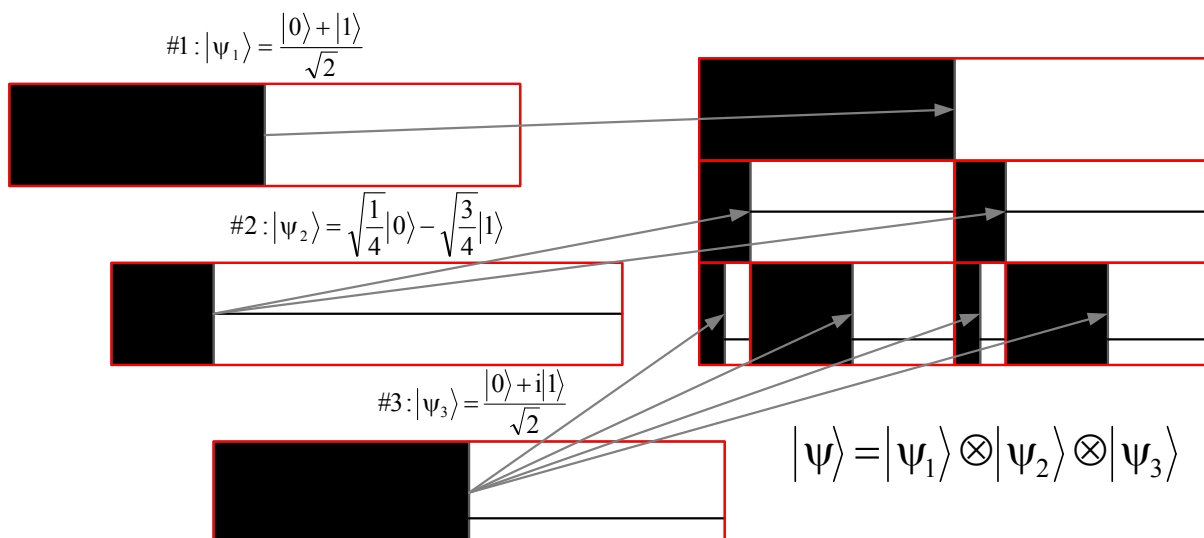
Ahogy az az összefüggésekből látszik, a változók ebben az esetben is valósak és korlátosak.



13. ábra Egy tetszőleges, három qubites rendszer megjelenítésére szolgáló reprezentáció.

3.3. Tenzorszorzatok és fraktáleírás

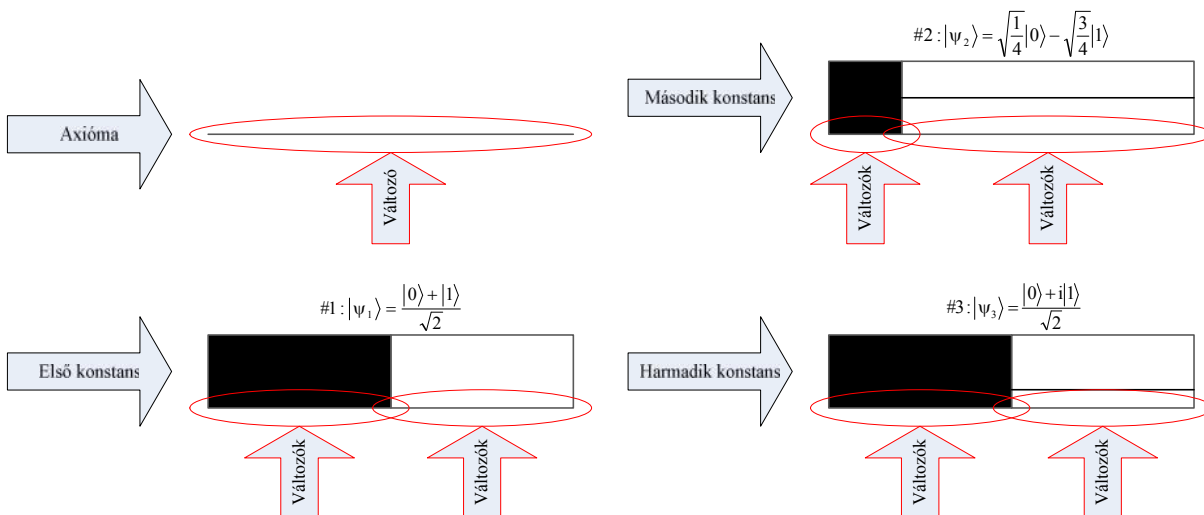
Bizonyos több qubites rendszereket fel lehet írni egy qubites rendszerek tenzorszorzataként. Ehhez először az előző fejezethez hasonlóan sorba kell rendeznünk a qubiteket úgy, ahogy az algoritmusunk végén majd mérni akarjuk őket. A következő lépésben vesszük az első két qubitet reprezentáló sávot és a másodikból az első sáv két fele alá másolunk egy-egy példányt úgy, hogy a vízszintes tengely mentén vett merőleges affinitással a másolatok szélességét a felettük lévő sáv részeinek szélességéhez igazítjuk.



14. ábra Három tetszőleges qubitből alkotott rendszer reprezentációja. Később be fogjuk látni, hogy ez a fázisinformáció megjelenítésének kis átalakítása után megegyezik azzal, amit a 3.2 fejezetben ismertetett sok qubites megjelenítéséből kapnánk ugyanezen három qubit tenzorszorzatára. Megjegyzendő, hogy a vörös keretekre valójában nincs szükség, azokat csak azért használjuk itt, hogy jobban látsszon, mit hova másolunk.

Ezek után a harmadik qubitról készítünk a vízszintes tengely mentén zsugorított példányokat, és bemásoljuk őket a második sáv minden egyes fele alá, majd ugyanezt megismételjük a negyedikkel, és így tovább. A kapott alakzat minden egyes új qubit hozzáadásával egyre bonyolultabb lesz.

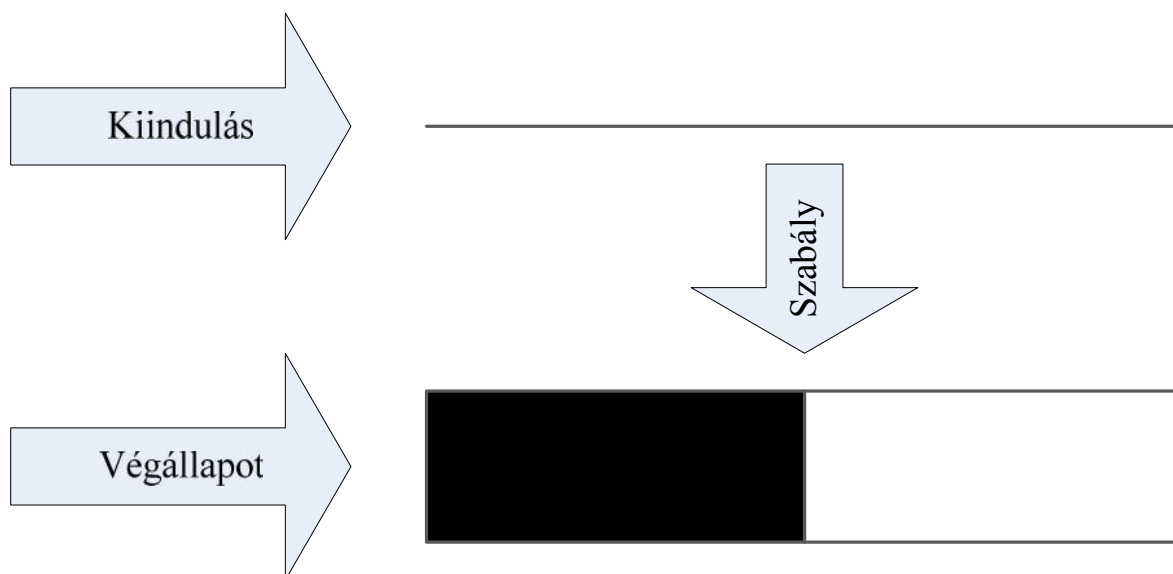
A kialakuló kép tulajdonképpen nem lesz más, mint egy véletlen fraktál. Ez leírható az úgynevezett Lindenmayer rendszerben [14] [15], mely a fraktálok gyártására szolgáló formális nyelv. Ehhez szükségünk van egy axiómának nevezett elemre, mely a fraktál kialakítása során a kezdeti feltételnek felel meg, majd úgynevezett konstansokat és változókat kell választanunk, melyek a rekurzív újírási szabály során megmaradnak, vagy átalakulnak.



15. ábra A három kvantumbithez tartozó sávok részei mint a Lindenmayer formalizmus konstansai és változói, illetve a kezdeti feltételként szolgáló, úgynevezett axióma.

Jelen esetben az axióma egy egységnyi szélességű, szürke, vízszintes csík, mely teljes egészében változó. Az első konstans az első qubitet reprezentáló sáv lesz, mely majdnem teljes egészében konstans is, leszámítva a szürke keret alsó részét, a sáv mindkét fele alatt. Mivel két fele van a sávnak, ezért ez tulajdonképpen két változót jelent, még akkor is, ha a

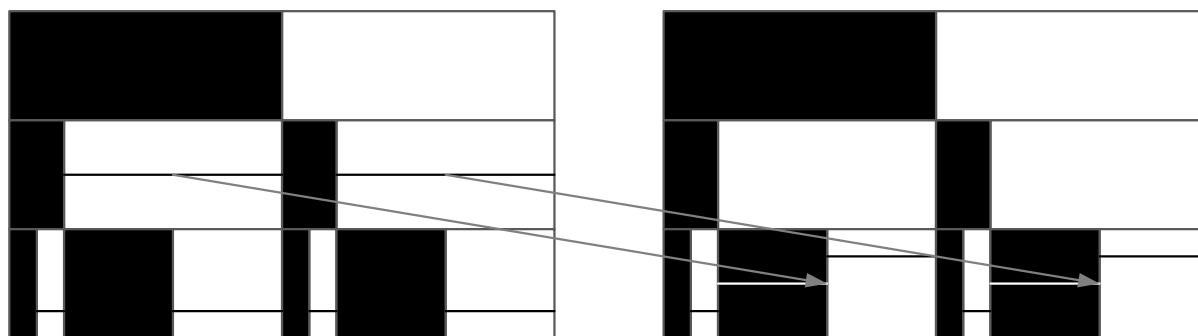
sáv teljes egészében fehér, vagy fekete – ekkor a sáv másik felét nulla-szélességűnek tekinthetjük. A rekurzív szabály, mely alapján a fraktált megalkotjuk, hogy a szürke keretek alsó részeit cseréljük a rákövetkező qubitet reprezentáló sávra.



16. ábra A fraktálalkotási algoritmus szabálya.

A véletlenfraktál-jelleget az adja, hogy a szabály nem teljesen determinisztikus, hiszen nem határozza meg a következő rekurziós lépés sávjait, melyek a konstansokat és változókat hordozzák.

Ha a végeredményt összehasonlítjuk azzal, amit a 3.2. fejezetben kaptunk, láthatjuk, hogy az egyetlen különbség, hogy ott a teljes fázisinformáció a legalsó sávokban volt. A tenzorszorot alakot könnyen át lehet alakítani a korábbi fejezetben említett kifejtett formába úgy, hogy az összes fázisinformációt hordozó vízszintes vonalat az oszlopok legalsó sávjába másoljuk, és összeadjuk a magasságukat. (Ha az eredmény magasabb lenne, mint maga a sáv, akkor tórusz-szerűen alulról térünk vissza a 2π periodicitás miatt.)



$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle = \\
 &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \left(\sqrt{\frac{1}{4}}|0\rangle - \sqrt{\frac{3}{4}}|1\rangle \right) \otimes \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \\
 &\equiv |\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{16}}|000\rangle + i\sqrt{\frac{1}{16}}|001\rangle - \sqrt{\frac{3}{16}}|010\rangle - i\sqrt{\frac{3}{16}}|011\rangle + \\
 &\quad + \sqrt{\frac{1}{16}}|100\rangle + i\sqrt{\frac{1}{16}}|101\rangle - \sqrt{\frac{3}{16}}|110\rangle - i\sqrt{\frac{3}{16}}|111\rangle
 \end{aligned}$$

17. ábra A fázisinformáció legalsó sávba másolásával létrehozhatjuk ugyan azt az ábrát, amit a 3.2-es fejezetben leírt módszerrel kapnánk az egyes qubitek tenzorszorzatára.

A fázisok két eltérő megjelenítési módja nem jelent lényegi különbséget, egészen egyszerűen a bra-ket formalizmusban ugyanazon állapot egy másfajta felírásának felelnek

meg. Ez a melléklet (38) összefüggéséből látszik, ami kimondja, hogy tenzorszorzatokban nem lehet egyértelműen megállapítani, hogy egy adott komplex szorzófaktor a tenzorszorzat melyik vektora hordoz.

Azt, hogy a fázisok legalsó sávba másolásával valóban ugyan azt a képet kapjuk, mint amit a 3.2. fejezet eljárásával kapnánk, úgy láthatjuk be, hogy egyenként bebizonyítjuk az Euleri amplitúdók négyzetére és az Euleri szögekre az ekvivalenciát. Ehhez ismét a melléklet (38) összefüggését hívjuk segítségül.

Ez alapján a következő összefüggés érvényes:

$$\begin{aligned} |\varphi_j\rangle &= C_1 \exp(i\gamma_1) |\psi_1\rangle \otimes C_2 \exp(i\gamma_2) |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes C_n \exp(i\gamma_n) |\psi_n\rangle = \\ &= C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n \cdot \exp(i(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n)) |\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n\rangle = \end{aligned} \quad (28)$$

Ahol minden $|\psi_j\rangle$ egy egybites, klasszikus állapotnak felel meg, és 2^n darab $|\varphi_j\rangle$ állapot létezik, melyek mind kölcsönösen ortogonálisak egymásra. A 3.2. fejezetben leírt általános ábrázolás az Euleri amplitúdók szorzatának négyzetét jeleníti meg a szélességben, a tenzorszorzat ábrázolás, pedig a merőleges affinitások segítségével, grafikusán számítja ki a négyzetek szorzatát, ezek megegyeznek egymással:

$$(C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n)^2 = (C_1)^2 \cdot (C_2)^2 \cdot \dots \cdot (C_n)^2 \quad (29)$$

A tenzorszorzat ábrázolásánál, amikor a teljes fázisinformációt a legalsó sávba másoljuk, a fázisinformációt megjelenítő vonalak magasságának összeadásakor tulajdonképpen az Euleri szögek összegét számítjuk ki, így a teljes rendszer megalkotásának kétfajta módszere ebből a szempontból is megegyezik.

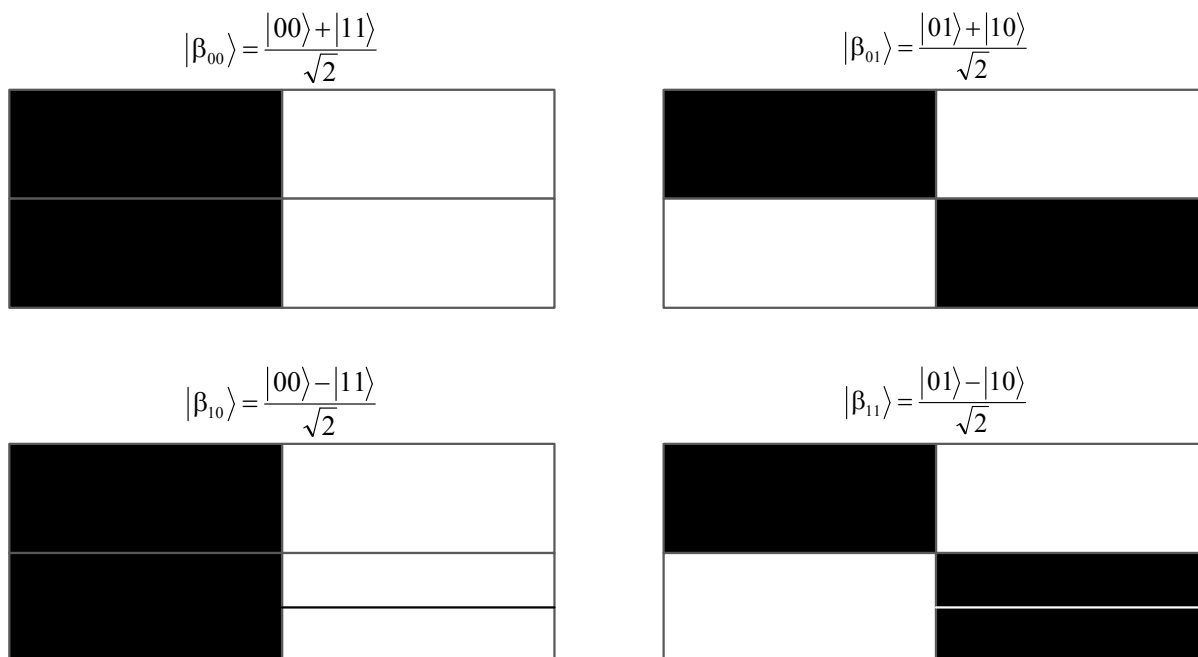
A 3.2. fejezetben definiáltunk egy módszert, mely tetszőleges sokbites állapotot képes reprezentálni. Mivel az itt közölt fraktálleírás a tenzorszorzatképet állítja elő, amiről a fentiekben beláttuk, hogy valóban azonos az általános megjelenítés tetszőleges tenzorszorzat állapotra alkalmazott esetével, így azt is beláttuk, hogy a fraktálalkotási algoritmus ebben az adott bázisban valóban ekvivalens a tenzorszorzással.

3.4. Összefont állapotok és szétválaszthatóság

Az előző fejezetben láttuk, hogyan kell egy qubites rendszerekből megalkotni egy tenzorszorzatot reprezentáló képet, most lássuk ugyanezt fordítva. Bizonyos esetekben tudnunk kell, hogy egy sok qubites rendszer egyes qubitjei hogyan viselkednek egy algoritmus végén. Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, meg kell fordítanunk a Lindenmayer rendszer szabályát és ki kell emelnünk a megfelelő elemeket a teljes képből. Ez tulajdonképpen pontosan úgy zajlik, ahogy azt a 14. ábrán láttuk, csak a nyilak iránya fordított. Amennyiben a fázisokat a legalsó sávba másolva elvégeztük a tenzorszorzást, úgy ehhez először 17. ábrának megfelelően ki kell emelnünk azokat (ez szintén a nyilak megfordítása mentén zajlik, miközben nem szabad elfelejteni, hogy az n -edik qubit kiemelésekor 2^{n-1} példányt akarunk kiemelni, még akkor is, ha ezek közül egyesek szélessége nulla).

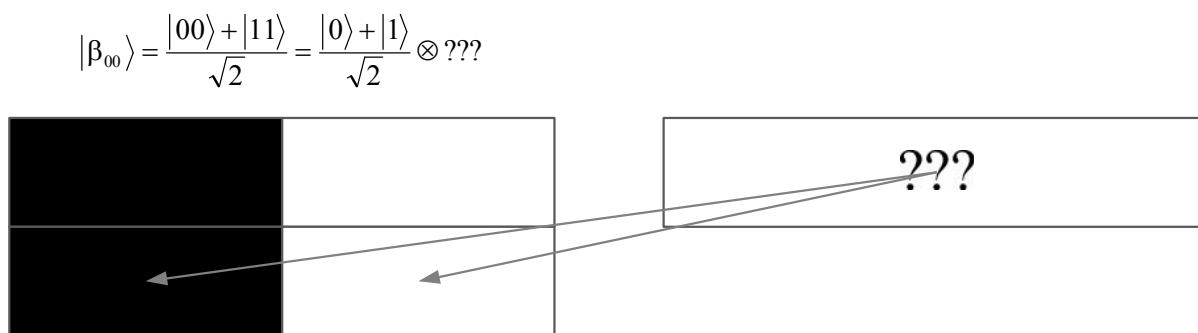
Fontos megjegyezni, hogy az ilyen kiemelés nem mindig végezhető el. Ez egy régóta ismert jelenség, mely szerint egy tetszőleges sokbites kvantumrendszer nem mindig bontható szét egy qubites állapotok tenzorszorzatára. Ezek a 2.2. fejezetben már említett összefont állapotok, és nagy jelentőségük van a legtöbb kvantumalgoritmusban. Az összefonódottságot

a 3.2. fejezetben leírtak alapján jeleníthetjük meg, például a 18. ábrán a Bell-bázis állapotait láthatjuk.



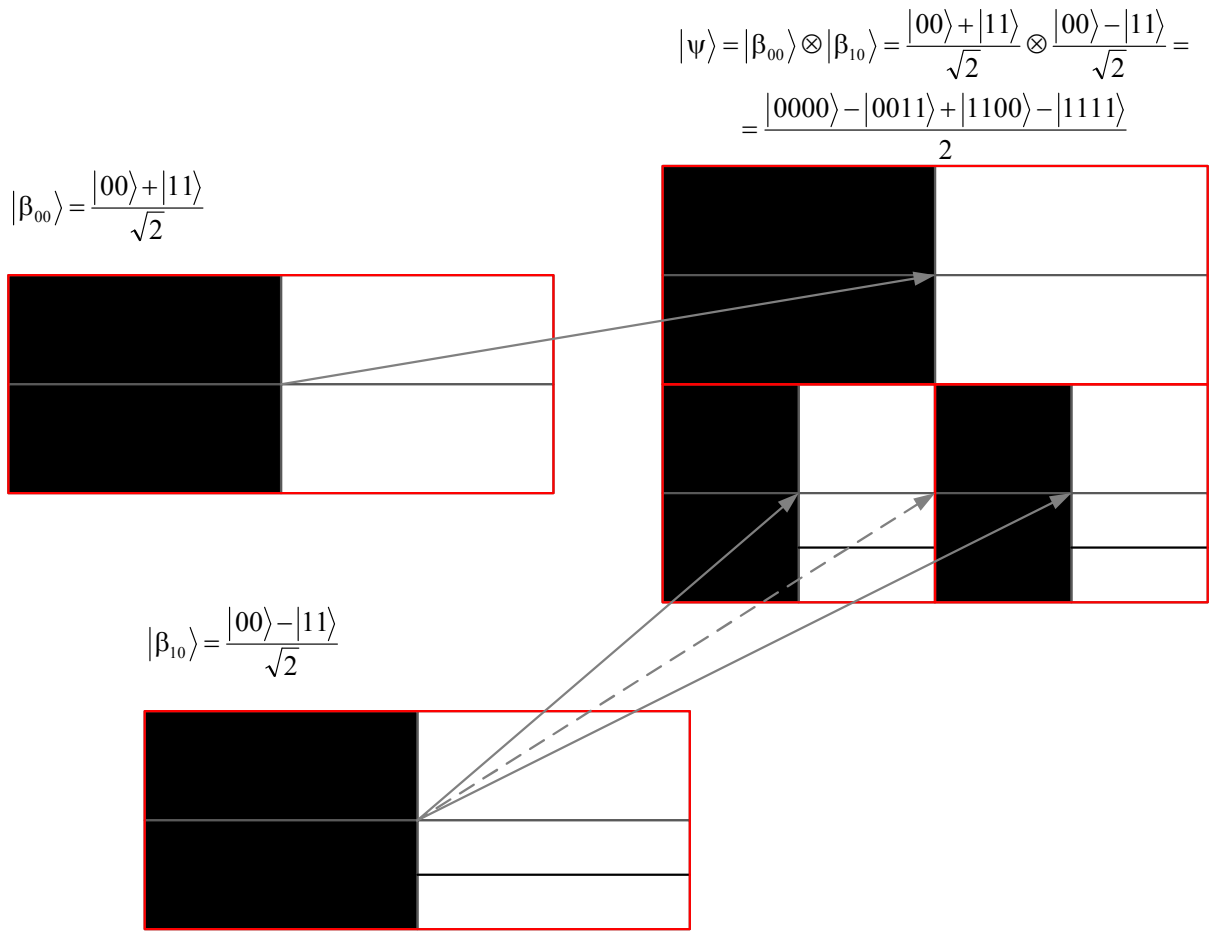
18. ábra A Bell bázis.

Már ránézésre látszik, hogy ezek egyike sem szétválasztható, hiszen nincs olyan egy qubites állapot, amit az első qubit két fele alá másolva megkaphatnánk a tenzorszorzatot, hiszen a második qubitot reprezentáló sáv színének egyszer fehérnek, egyszer feketének kellene lennie.



19. ábra Nem szétválasztható állapotok megjelenítése. Amint az az egyik Bell állapoton jól látszik, léteznek olyan állapotok, melyeket nem lehet felírni a tenzorszorzás megjelenítésére szolgáló rekurzív fraktálalkotással. Ha a két qubit szétválasztható lenne, létezne olyan qubit, amit az első két fele alá másolva megkaphatnánk az összetett képet, azonban ennek az egyik oldalon teljesen fehérnek, a másik oldalon teljesen feketének kellene lennie, ami nem lehetséges, így a Bell állapot nem szétválasztható.

Az igazán érdekes ebben a reprezentációban, hogy azt is egyértelműen meg tudja mutatni, ha egy sok qubites rendszer egyes részei szétválaszthatóak, mások viszont nem. A 20. ábrán egy négy qubitból álló rendszer látszik, mely két Bell-állapot tenzorszorzata, melyeket viszont külön-külön már nem lehet tovább bontani.

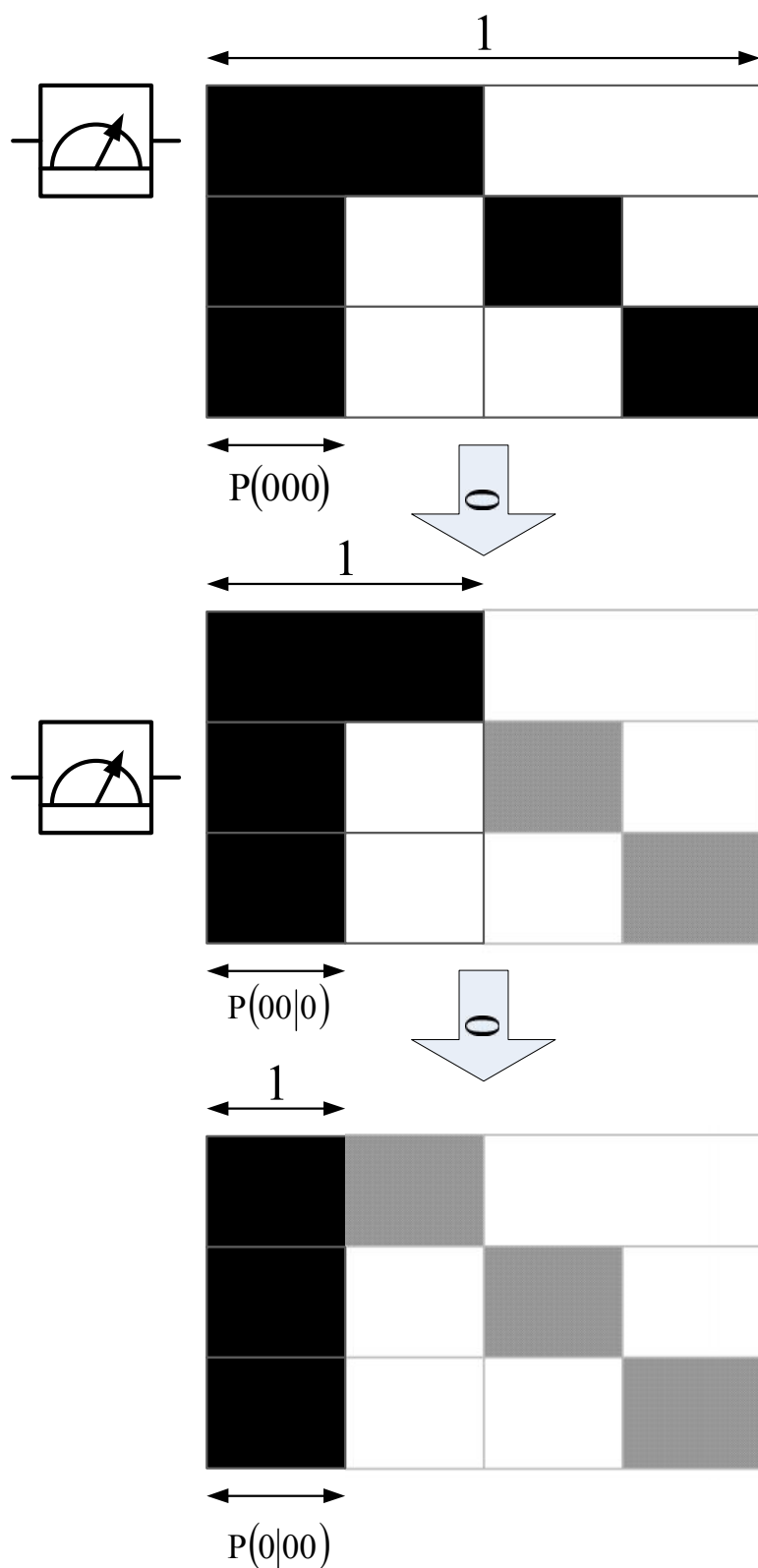


20. ábra Egy részlegesen szétválasztható állapot. Az első két és második két qubit egy-egy nem szétválasztható Bell állapotot alkot, a négy qubitből álló teljes rendszer azonban két két-qubites alrendszerre osztható.

A kiemelés ebben az esetben nagyon hasonlóan zajlik a Lindenmayer rendszerbeli szabály megfordításához, itt azonban az egyes qubitek kiemelése helyett egész bitszoportokat emelünk ki. A 20. ábrán a szaggatott nyíl azt ábrázolja, hogy az n -ediknek számító bitszoportból továbbra is 2^{n-1} példány van jelen, igaz ezek közül néhány nem látszik, hiszen nulla a szélességük. (A láthatatlan példányok az első két qubit $|01\rangle$ és $|10\rangle$ értékeihez tartoznak.)

3.5. Mérés és feltételes valószínűségek

Ha a teljes rendszeren mérést akarunk végezni, akkor az i -edik bitsorozathoz tartozó $P(i)$ valószínűség a 21. ábrának megfelelően C_i^2 -lesz. (Jelen esetben az i sorszámot bináris alakban kell elképzelni, a számozás nullától indul, a teljes rendszer reprezentálására szolgáló ábra szélességét pedig továbbra is egynek vesszük.)



21. ábra Az első qubiten végrehajtott mérés után kitakarhatjuk az ábra egyik felét. Tegyük fel, hogy a mérési eredmény 0 , ebben az esetben a fehér sávrész alatti állapotokat takarhatjuk ki (ha mérés 1 -ed adna, a fekete sávrész oldalával tennénk ugyan ezt). Ha a megmaradt oldal szélességét tekintjük 1 -nek, akkor az oszlopok ehhez viszonyított szélessége a feltételes valószínűségeket jelöli. Ezt az eljárást többször is ismételhetjük.

Azonban sok qubites kvantumrendszerek esetén előfordul, hogy az algoritmusunk közben le kell mérnünk egy qubit értékét, a többivel pedig további műveleteket kell végeznünk. Ekkor válik hasznossá az, hogy a sok qubites rendszert reprezentáló ábra megalkotásakor abba a sorrendbe rendeztük a biteket, ahogy majd mérni akarjuk őket. Ugyanis ha az első qubiten hajtunk végre egy mérést, annak az eredménye 0 vagy 1 lesz, a mérés utáni állapotot pedig az ábrának az a fele fogja megadni, amelyik a megfelelő szín alatt található. Például, ha az első biten végzett mérés 0-át ad eredményül, akkor az ábra baloldalát kell a továbbiakban figyelembe venni. Ha ennek az oldalnak a szélességét vesszük 1-nek, akkor az itt található függőleges oszlopok C_i^2 szélessége a feltételes valószínűségét fogja megadni a második és harmadik qubit értékének, az első qubit mérési eredményének függvényében. Például a 21. ábrán, ha teljes reprezentáció szélességét vesszük 1-nek, akkor az első oszlop szélessége megadja, mekkora a valószínűsége, hogy a teljes rendszeren végrehajtott mérés után 000 bitsorozatot kapunk eredményül.

Ha azonban csak az első qubiten hajtunk végre mérést, és tegyük fel, hogy ennek az eredménye 0 lesz, akkor a mérés utáni állapotot az ábra bal fele reprezentálja, ami – köszönhetően a fraktálok önhasonlóságának – maga is egy több bites kvantumrendszert ír le. Ekkor, ha ennek a szélességét tekintjük egységnyinek, az első oszlop szélessége azt a feltételes valószínűséget adja meg, hogy a második és harmadik qubiten végzett mérés eredménye 00, feltéve, hogy az elsőn végzett mérés eredménye 0.

Azt, hogy ez valóban így van, viszonylag könnyen be lehet látni az 5.3. mellékletben közölt, oszlop és sorvektorokon alapuló leírás segítségével. Egy n bitből álló rendszert egy N elemű, komplex értékű oszlopvektor ír le, ahol:

$$N = n^2 \quad (30)$$

A mérés utáni eredmény vizsgálatához először meg kell alkotnunk a mérés mátrixát a teljes rendszeren. Mivel a legelső qubitet mérjük, az ezen végzett mérés 2×2 -es mátrixának, és a többi qubiten végzett identitásnak a tenzorszorzata:

$$P_m = \underbrace{\begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}}_1 \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_2 \otimes \dots \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_n = \begin{bmatrix} M_0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & M_0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & M_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & M_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ahol attól függően, hogy melyik bázisállapotot mérjük:

$$M_0 = 1 \text{ és } M_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad M_0 = 0 \text{ és } M_1 = 1 \quad (32)$$

Ennek hatása egy tetszőleges n qubitből álló ket vektorra:

$$\begin{bmatrix} M_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_0 & & 0 \\ & & & M_1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N/2} \\ c_{(N/2)+1} \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \cdot c_1 \\ \vdots \\ M_0 \cdot c_{N/2} \\ M_1 \cdot c_{(N/2)+1} \\ \vdots \\ M_1 \cdot c_N \end{bmatrix} \quad (33)$$

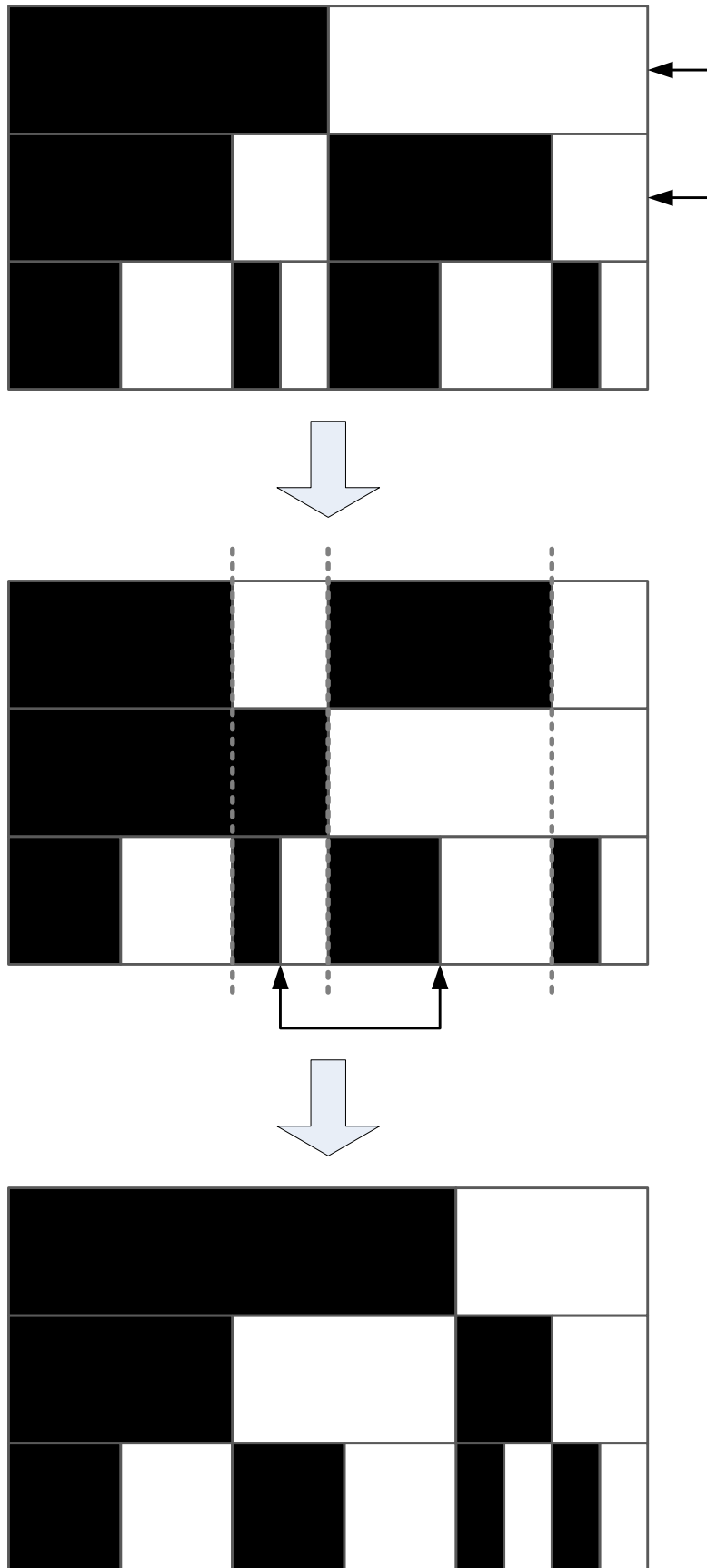
Amennyiben a mérés eredménye 0, a vektor második fele nullázódik le, amennyiben 1, az első fele. Ez felel meg annak, hogy a mérés után az ábra egyik felét elhagyjuk (amennyiben nem is volt olyan fele, amit el kellene hagynunk, az annak felel meg, hogy lenulláztuk a nullaszélességű részt). Ez a (33) kifejezés lesz a melléklet (49) képletének számlálója a nevező pedig a (33) kifejezés eredményvektorának hossza, vagyis ez felel meg annak, hogy a megmaradt rész szélességét tekintjük 1-nek.

Ezt a logikát pedig tovább lehet folytatni a többi qubitre is, ha a második qubiten végzett mérés eredménye is 0, a leszűkített rendszert is tovább szűkíthetjük. Az új, egységnyiinek tekintett szélességhez viszonyítva pedig az első oszlop szélessége azt adja meg, hogy mekkora a feltételes valószínűsége, hogy a harmadik qubiten végzett mérés nullát ad, ha az első két qubit mérési eredménye 00. (Jelen példánkban ez 1 valószínűségű, vagyis biztos esemény.)

Ezt természetesen tetszőleges bitkombinációra el lehet játszani, így a fraktál alakzatban egyúttal hatalmas mennyiségű információ van a feltételes valószínűségekről.

3.6. Qubitek sorrendjének cseréje, rendezés

Ahogy arról már korábban szó volt, a bitértékeket reprezentáló függőleges sávokat nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezzük. Abban az esetben azonban, ha valamilyen oknál fogva menet közben meg akarjuk változtatni, hogy milyen sorrendben mérjük a qubitet mérjük az algoritmusunk végén. Ekkor első lépésben megcseréljük a sávok sorrendjét, ami meg fogja zavarni a nagyságszerinti rendezésre, és az elválasztó sávokra vonatkozó korábbi konvencióinkat. Második lépésben az eltérő színekombinációjú, függőleges sávok mentén felvágjuk az állapotot reprezentáló képet, majd újrapozícionáljuk, és az eredményen ismét elvégezzük felülről lefelé haladva a szükségtelen elválasztó keretek eltávolítását.



22. ábra Ha meg akarjuk cserélni a qubitek sorrendjét, akkor a sávok felcserélése után szükség van egy további lépésre is, mellyel az oszlopokat cseréljük meg, hogy megtartsuk a bitértékek növekvő sorrendjét.

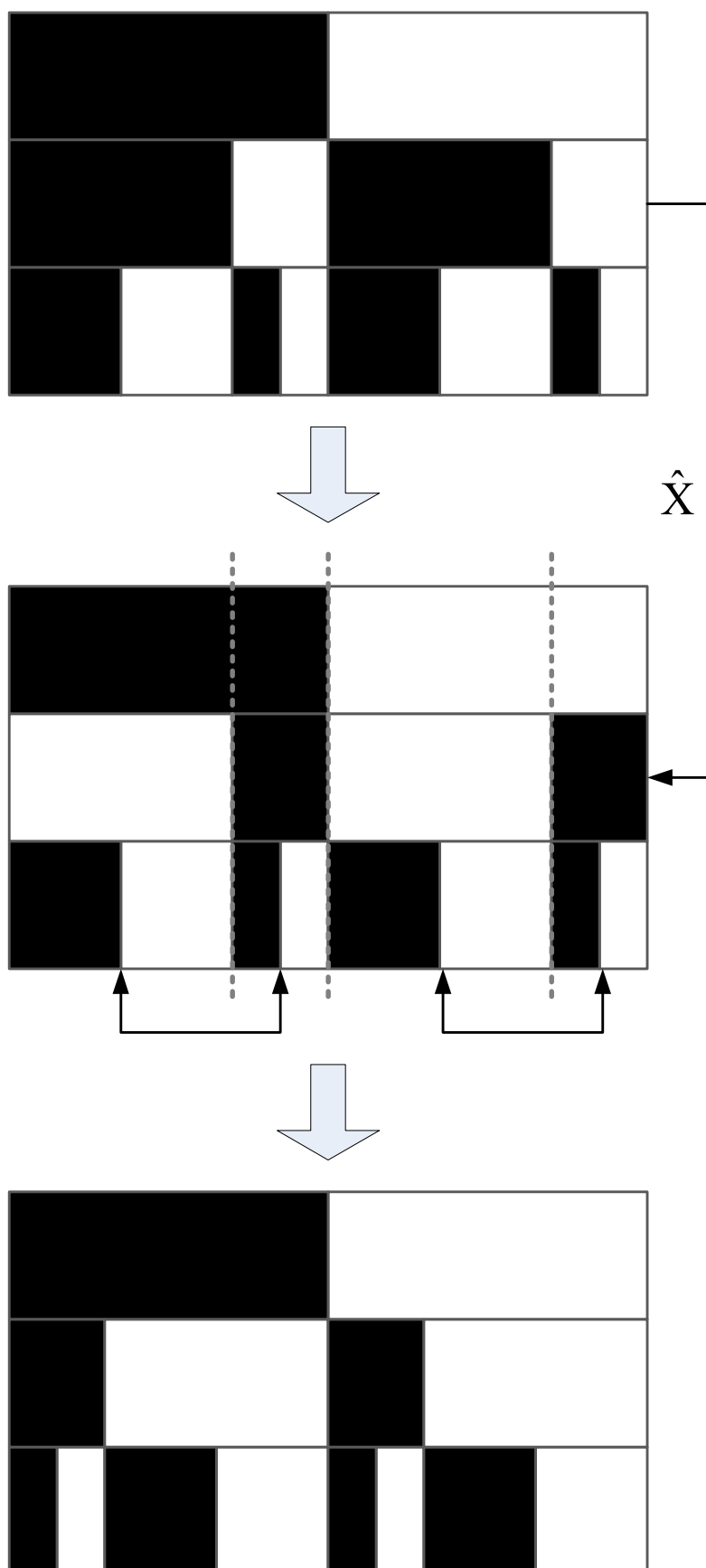
3.7. Logikai kapuk hatása

A 2.2. fejezetben leírt alpműveleteket vizuálisan is meg lehet jeleníteni, lássuk most ezeket.

3.7.1. X operátor

Ahogy azt a negálásnál láttuk, az $\hat{X}$ operátor a (12) képletnek megfelelően $|0\rangle$ állapotba viszi az $|1\rangle$ -et, és fordítva $|1\rangle$ -be a $|0\rangle$ -át. Ez vizuálisan annyit tesz, hogy a negált sáv részeinek színe feketéből fehérre, fehérből feketévé változik.

Természetesen sok qubites rendszer esetén ez megzavarhatja a bitsorozatok nagyságrendi sorrendjére vonatkozó konvenciónkat, ezért még egy további rendezési lépésre is szükség lehet. Ebben a 3.6. fejezethez hasonlóan a függőleges sávok mentén felvágjuk a reprezentációt, és az egyes sávok sorrendjét felcserélve alakítjuk ki a végleges képet.



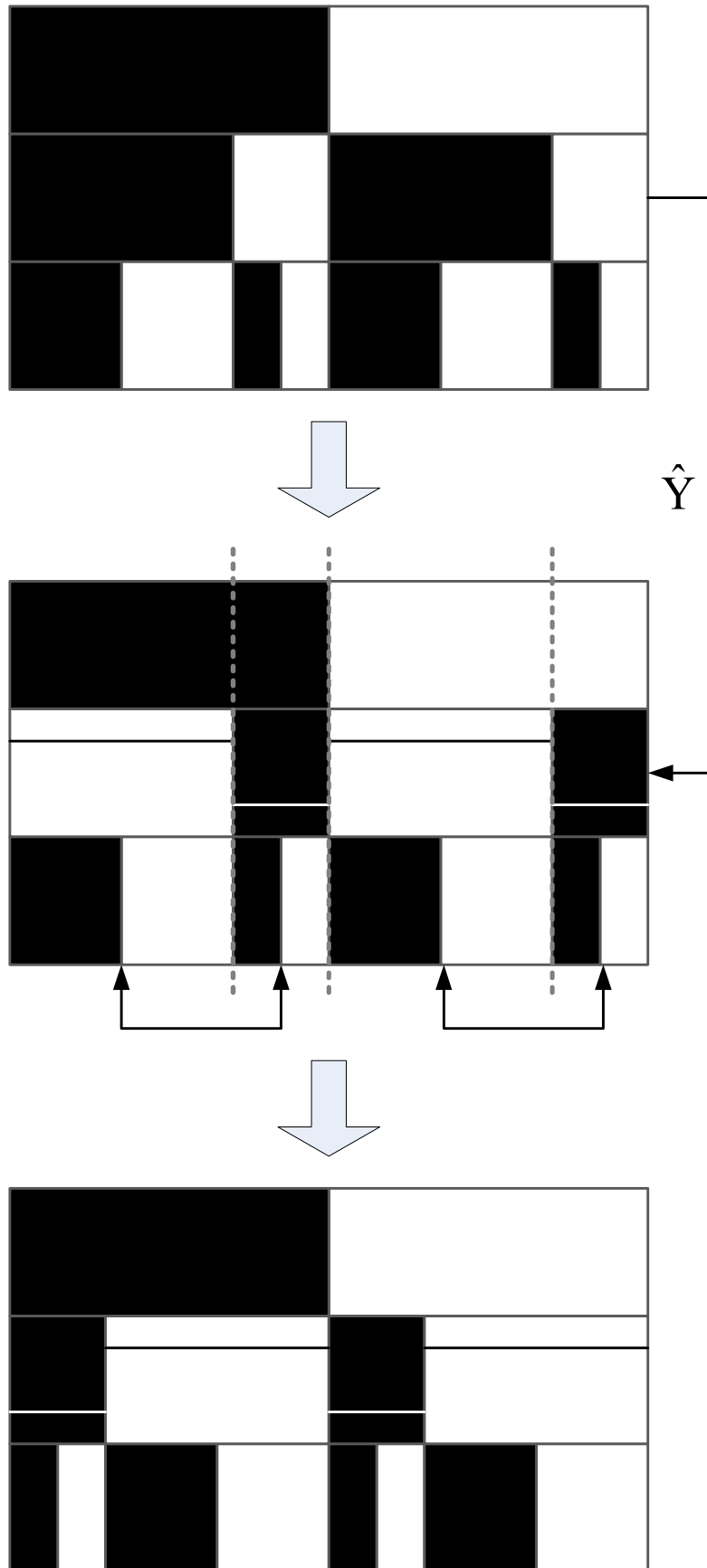
23. ábra Negálás esetén meg kell változtatnunk a negált sáv részeinek színét, majd át kell rendeznünk az oszlopokat, hogy megtartsuk a bitértékek növekvő sorrendjét.

3.7.2. Y operátor

Az $\hat{Y}$ művelet a (13) képletnek megfelelően a bitértékek megváltoztatásán túl, egy fáziseltolást is bevisz a rendszerbe. Ez az eltolás függ a bitértéktől, így fekete és fehér alapon más-más vízszintes vonalak fognak megjelenni. Mivel az Euler szögek összeadódnak, ez a fajta fázistolás a feketéről fehérre változó mezőkben a sáv magasságának háromnegyedével, a fehérről feketére változó mezőben egynegyedével tolja fölfelé a meglévő, fázist jelző vonalakat. (Emlékezzünk, hogy ha nincs látható vonal, akkor az azt jelenti, hogy az adott vonal legalul, a szürke keret mögött van, illetve, hogy a $2p$ periodicitás miatt a sáv alja és teteje tórusz-szerűen kapcsolódik egymáshoz.)

Megjegyzendő, hogy a megváltozott fázisinformációnak nem feltétlenül van értelme abban a sávban, ahol a változás történt. Amennyiben a változás azt eredményezi, hogy egyetlen qubitet reprezentáló állapot másolatait kapjuk (mint ahogy ezt a 24. ábrán is láthatjuk), akkor érdemes megtartani a fázisinformációt. Ha azonban nem ez a helyzet (például ha az ábrán felülről a második sávban a két fekete és két fehér rész aránya nem egyezik meg), akkor érdemes a fázisinformációt a rekurzív fraktálalkotási eljáráshoz hasonlóan a legalsó sávba másolni, és a magasságokat a periodicitás szem előtt tartásával összeadni.

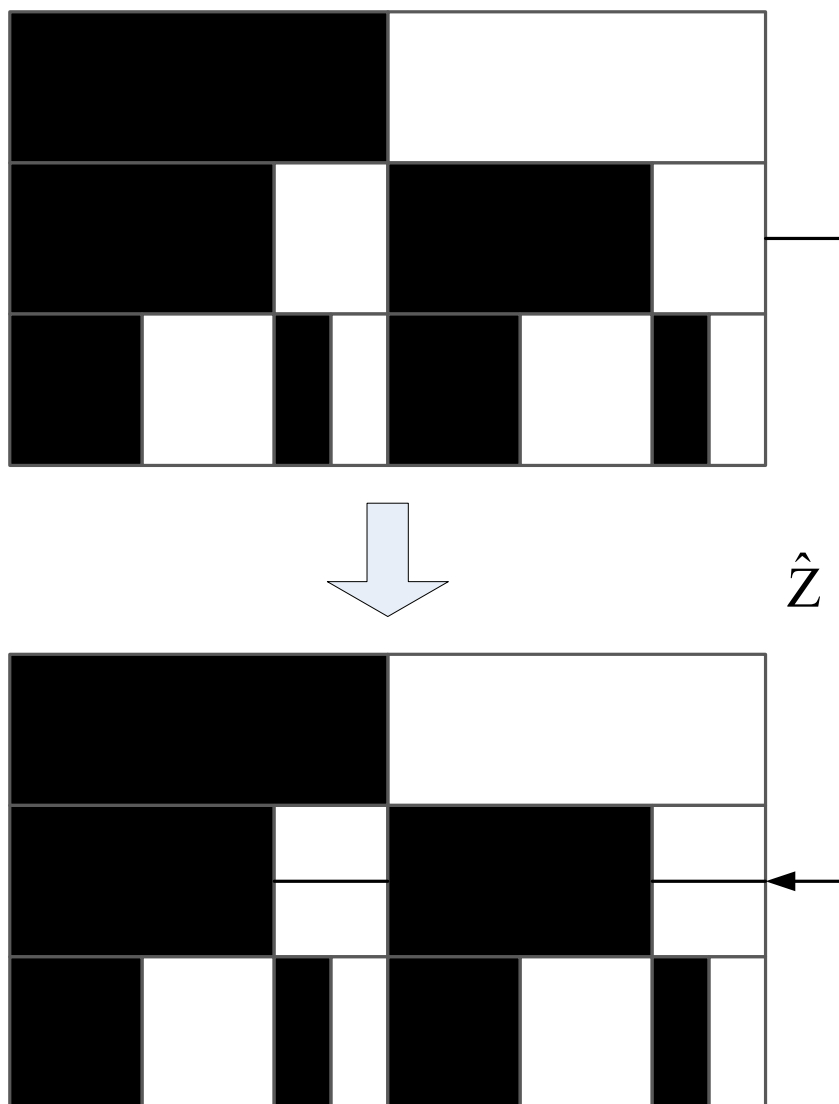
Mivel a sokbites állapotok sorrendje itt is felborulhat, szükség lehet egy további, rendező lépésre, úgy, ahogy azt a negálás esetében láttuk.



24. ábra Y kapu esetén a szín az ellenkezőjére változik, a feketéről fehérre változó sávban a fázist reprezentáló vonal $\frac{3}{4}$ -el felcsúszik, míg a feketéből fehérre változó sávrészekben csak $\frac{1}{4}$ -el. A színek változása miatt szükség van az oszlopok sorrendjének felcserélésére is.

3.7.3. Z operátor

A $\hat{Z}$ operátor nem változtatja a bitértékeket, így nincs olyan színváltozás sem, ami miatt a bitértékek nagyság szerinti sorrendje megváltozna. Az operátor egyetlen hatása a (14) összefüggés szerint egy fázistolás a fehér színű mezőkön. Az Euler szögek itt is összeadódnak, így abban az esetben, ha a fehér színű sávnak már volt nem 0° -os fázisa, a fázist jelző vonal fölfelé tolódik a sáv magasságának felével. Itt is igaz, hogy a periodicitás miatt, ha a sáv teteje fölé emelkedne, a vonal alulról tér vissza, illetve, hogy általános esetben érdemes a fázisinformációt a legalsó sávba másolni, a sávok magasságát összeadva.

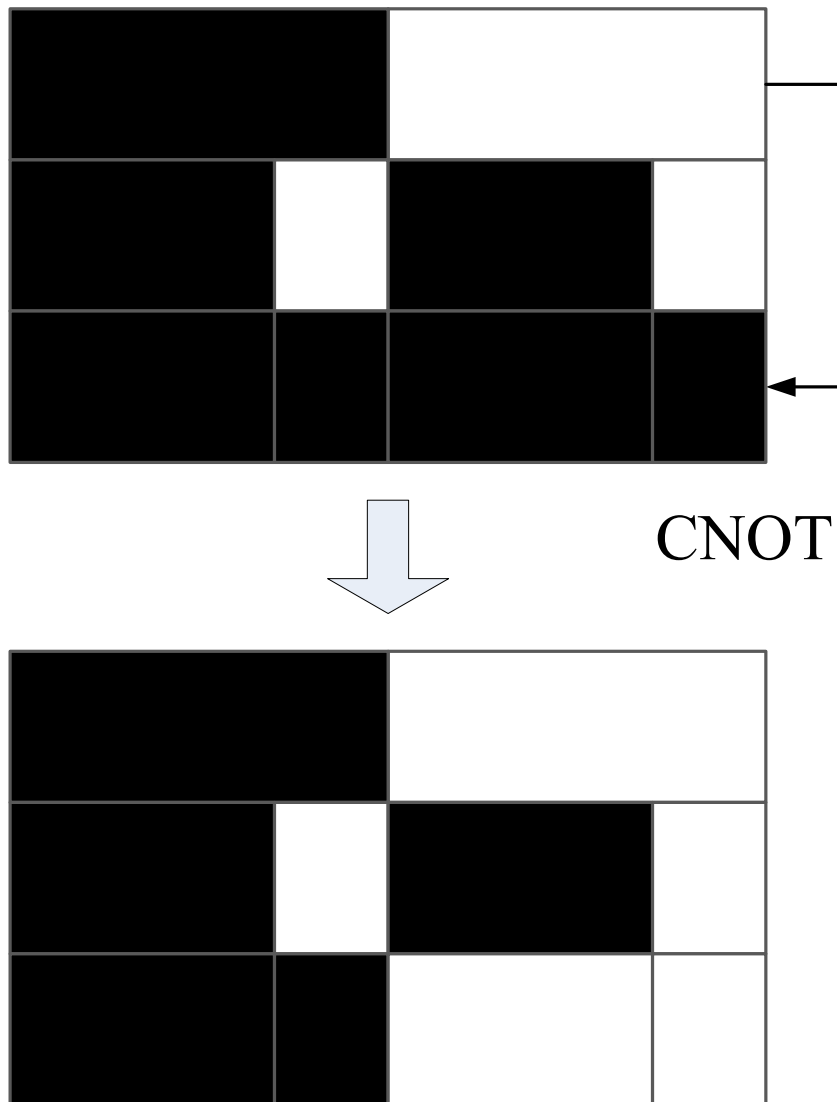


25. ábra A Z operátor hatására a fehér sávrészekben a fázist reprezentáló vonal $\frac{1}{2}$ -el felcsúszik.

3.7.4. CNOT operátor

A CNOT operátor hatása a negáláshoz igen hasonló, azonban mivel ez egy kontrollált operátor, a hatását csak akkor fejtí ki, ha a kontroll-bit értéke 1, más szóval azokban a függőleges oszlopokban, ahol a kontroll-bitet fehér sávrész reprezentálja.

Hasonlóan az előzőekhez itt is szükség lehet egy rendezési lépésre a 26. ábra azonban e helyett egy másik érdekes jelenséget mutat be: azt, ahogy a harmadik, klasszikus bitérték az első bitről vezérelve összefont állapotba kerül a kontroll bittel.



26. ábra A CNOT operátor hatására a kontroll bit fehér sávrészei alatt a target bit sávrészeinek színe megváltozik. Természetesen ez után szükség lehet egy rendezési lépésre is, amit az ábrán nem jelöltünk.

3.7.5. H operátor

Az összes alapvető logikai kapu közül a Hadamard kapu hatását a legnehezebb vizualizálni. Ez azért van, mert ez a kapu a sáv fekete és fehér részeinek arányát változtatja, még hozzá a sávrészek szélességének megfelelően. Ezért azt javasoljuk, hogy ennél az operátornál inkább papíron végezzük el a számítást, és az eredményt ábrázoljuk újra a fenti reprezentáció segítségével.

Inkább érdekességként, mint praktikus jelleggel azért itt most közöljük azt is, hogyan lehet egy egy-qubites állapoton a Hadamard operációt grafikusan elvégezni.

A (15) képletben a komplex számokat átírva Euleri alakba:

$$\begin{aligned} \hat{H}(A \exp(i\alpha)|0\rangle + B \exp(i\beta)|1\rangle) = \\ = \frac{\overbrace{A \exp(i\alpha)}^a + \overbrace{B \exp(i\beta)}^b}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\overbrace{A \exp(i\alpha)}^a - \overbrace{B \exp(i\beta)}^b}{\sqrt{2}}|1\rangle \end{aligned} \quad (34)$$

A sávrészek új szélességének meghatározásához ezeknek az abszolút-érték négyzetére lesz szükségünk. Ennek megfelelően alakítsuk tovább a következő kifejezést, mely a $|0\rangle$ érték valószínűségi amplitúdójának abszolút-érték négyzete:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a+b}{\sqrt{2}} \right|^2 &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right)^* = \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 + ab^* + a^*b}{2} = \\ &= \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A \exp(i\alpha) B \exp(-i\beta) + A \exp(-i\alpha) B \exp(i\beta)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{AB \exp\{i(\alpha - \beta)\} + AB \exp\{i(\beta - \alpha)\}}{2}}_{II.} \end{aligned} \quad (35)$$

Az átalakítások során kihasználtuk, hogy az Euleri amplitúdók négyzetének összege mindig egy (lásd (26) képlet), illetve, hogy az Euleri amplitúdó négyzete megegyezik a komplex szám abszolút-érték négyzetével. A * a komplex konjugálást jelöli.

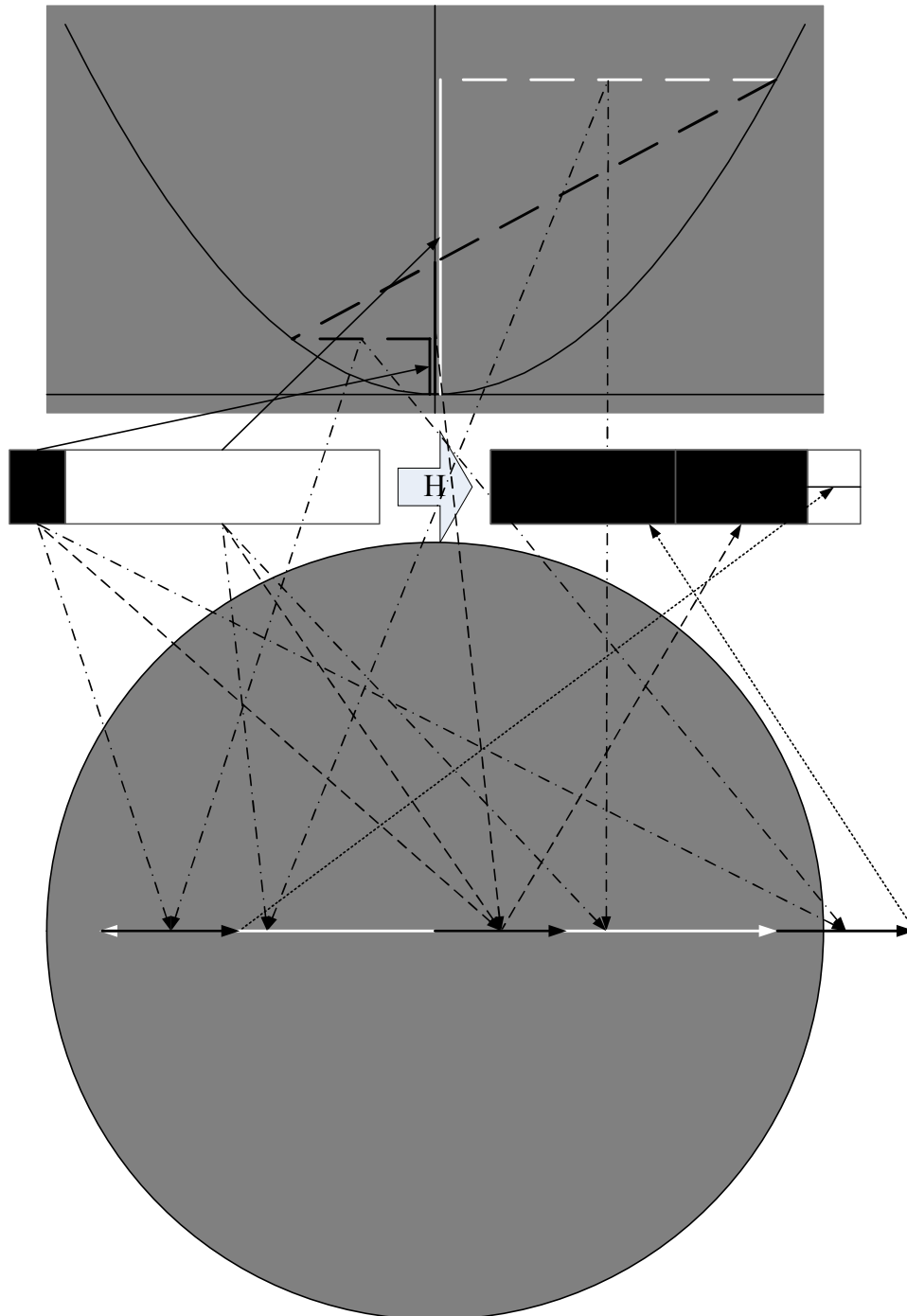
Szavakban kifejezve a (35) összefüggés végeredménye annyit tesz, hogy a Hadamard operátor hatására a fekete sáv az 1/2-ed hosszúsághoz képest annyival tér el, amennyi a II.-vel jelölt érték, ami tulajdonképpen egy komplex szám valós része. Ahhoz, hogy ezt a komplex számot ábrázolni tudjuk, szükségünk lesz még néhány trükkre. A kérdés egyszerűbbik része az $\alpha - \beta$ szög meghatározása. Ehhez elég vennünk a sáv fekete és fehér felén található, fázist jelölő vonalakat, majd az egyik magasságát a periodicitás szem előtt tartásával kivonni a másiktól (lényegében mindegy melyiket vonjuk ki melyikből).

Másrészt ki kell számolnunk az AB hosszúságot. Ehhez hívjunk segítségül egy parabolát, amit majd a későbbiekben is felhasználhatunk. A parabolán végzett vetítésekkel könnyedén megszerkeszthetjük hosszúságok négyzetét és gyökét, azonban van egy kevésbé ismert összefüggés is, amit felhasználhatunk: Ha egy $y=x^2$ egyenletű parabolán fekvő $(-a, a^2)$, (b, b^2) pontokat összekötjük egy egyenessel, akkor az egyenes a $(0, a \cdot b)$ pontban fogja metszeni az y tengelyt. (Természetesen csak akkor, ha a és b nem-negatív, valós számok.) Az összefüggés levezetését az 5.2. mellékletben lehet megtalálni.

Ennek ismeretében az AB szorzat úgy számolható ki, hogy először felmérjük a sáv fekete és fehér felének hosszát a parabola szimmetriatengelyére (27. ábra folytonos nyilak), majd merőlegesen egyeneseket szerkesztünk a parabola ívéig, és a metszéspontokat egyrészt levetítjük a szimmetriatengellyel párhuzamosan (vastag szaggatott vonal), másrészt egymással összekötve meghatározzuk a metszéspontot a szimmetriatengellyel (vastag szaggatott vonal).

Ez a pont fogja megadni a szorzat értékét, a fent meghatározott szög segítségével pedig megalkothatjuk a komplex vektort (vékony szaggatott nyíl), melyet a valós tengelyre vetítve

meghatározhatjuk, hogy mennyivel tolódik el a sáv fekete részének szegélye az $1/2$ -hez képest (vékony szaggatott nyíl). Azt hogy ez az eltolódás tulajdonképpen növeli, vagy csökkenti a fekete sáv méretét, a fázisok különbségének értéke fogja meghatározni. ($\pi/2$ -ig növekedés, $\pi/2$ és $3\pi/2$ között csökkenés, majd $3\pi/2$ felett ismét növekedés tapasztalható.)



27. ábra Általános esetben a Hadamard operátor hatásának vizuális megjelenítése rendkívül bonyolult lehet.

Az új fázisok meghatározásához részben ismét a parabolák segítségével meghatározott gyököket hívjuk segítségül (vastag szaggatott vonal), melyek az összeadandó vektorok hosszát fogják adni (szaggatott-pontozott nyíl), részben pedig a kiinduló qubit fázisértékeiből olvassuk majd le (szaggatott-pontozott nyíl) a komplex számsíkon ábrázolt vektor szögét. Miután a vektorokat összegeztük, állásukból leolvassuk a qubitünk fázisát (pontozott nyíl).

Érdekesség, hogy bár ebben az esetben csak a vektor állása érdekes, hossza nem, de ahhoz, hogy ezt helyesen meghatározzuk, mégis szükségünk van a másolás során a korrekt hosszak megtartására.

Szintén egy rejtett buktató, amire felhívjuk a figyelmet, hogy a Hadamard kapu az egyetlen a korábban ismertetett alpműveletek közül, mely alapvetően másképp reagál a szuperponált és kevert állapotokra (a 27. ábra kidolgozott példája egy szuperponált állapotra vonatkozik). Amennyiben kevert állapoton végezzük a műveletet, akkor az állapot összes lehetséges értékén külön el kell végeznünk azt, úgy, mintha mindegyik egységnyi hosszú lenne, majd a végeredményeket a valószínűséggel, mint egy vízszintes tengely mentén végrehajtott merőleges affinitás együtthatójával eltorzítva kell összeilleszteni. Ez a dolgot alapvetően nem foglalkozik sem sokaságokkal, sem bázis-transzformációkkal, így itt most ennél részletesebben nem térünk ki erre.

A legtöbb kvantumalgoritmusnál jól viselkedő, nevezetes bitértékekre haddatjuk a Hadamard operátort, így az eredményt szerkesztés nélkül, fejből is könnyű reprodukálni, de mint azt láttuk, az általános eset vizuális megjelenítése nem egyszerű. A 27. ábrán látható példa a számsík valós tengelyén marad (a szürke kör az egységgörte jelöli), de el lehet képzelni, hogy ha nem így lenne, mennyire komplikálttá válna a szerkesztés. Éppen ezért a Hadamard operátor hatásának tárgyalásától több qubites esetben eltekintünk, és inkább azt javasoljuk, hogy egyéb módszerekkel számolja ki az érdeklődő a végeredményt, majd azt fordítsa vissza a már ismertetett módszerek segítségével a vizuális reprezentációra.

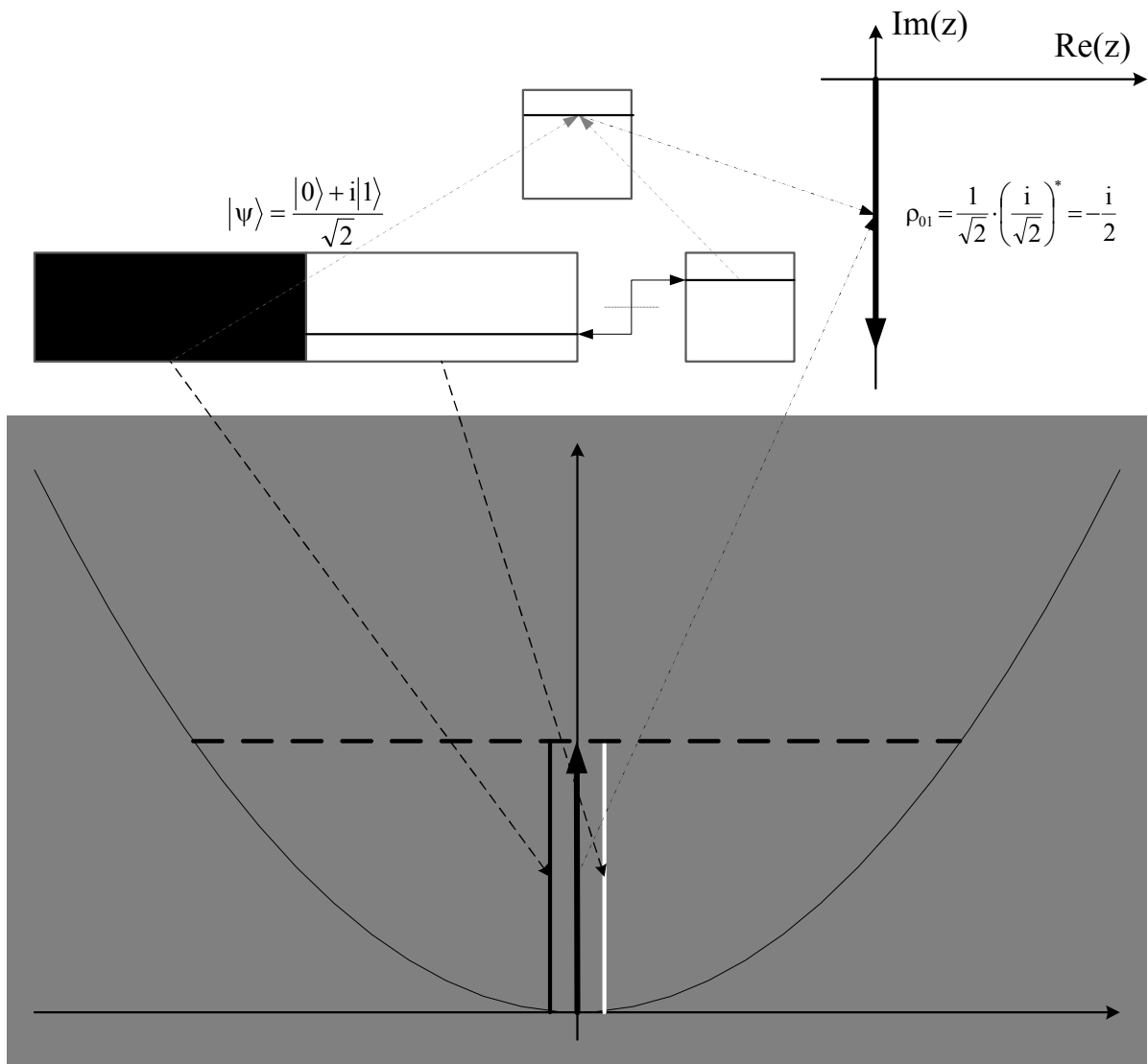
3.8. Kapcsolat a sűrűségmátrixszal

Az eddigiekben ismertetett képet felhasználhatjuk arra, hogy szerkesztéssel megállapítsuk belőle a sűrűségmátrix egyes elemeinek adatait. Mivel a sűrűségmátrix egy komplex értékű mátrix, ezért minden eleménél a nagyságot és fázist külön kell megállapítanunk. Mint eddig általában, itt is tiszta állapotokkal foglalkozunk. Minden különösebb számolgatás nélkül megállapíthatjuk, hogy ha eltekintünk a fázisinformációtól, akkor a függőleges oszlopok szélességei a sűrűségmátrix főátlóját adják.

A többi elem nagyságát az előző 3.7.5. fejezetből már ismert parabola segítségével szerkeszthetjük meg. Ekkor a sűrűségmátrix nm elemének nagyságához először felmérjük a képünk n -edik és m -edik függőleges oszlopához tartozó szélességeket (vékony, szaggatott nyíl) a parabola szimmetriatengelyére (n -et és m -et bináris alakban képzeljük el, a számozás 0-tól indul, az oszlopok sorszámának meghatározásakor ügyeljünk arra, hogy egyes sorszámokhoz 0 szélesség is tartozhat), majd arra merőlegesen a parabola ívéig vetítjük, és a metszéspontokat összekötve egyenest húzunk (vastag, szaggatott vonal). Az 5.2. melléklet szerint az egyenes szimmetriatengellyel vett metszéspontjának magassága adja a két hossz gyökének szorzatát, ami egyúttal a sűrűségmátrix megfelelő elemének abszolút értéke.

Már csak a fázisra van szükségünk. Ennek meghatározásához először vesszük az m elem fázisát reprezentáló vízszintes vonalat, tükrözzük a sáv magasságának felénél húzódó képzeletbeli szimmetriatengelyre (pontosított vonal, ez a művelet felel meg a komplex konjugálásnak), majd az így kapott magasságot hozzáadjuk az n -edik elem fázisának magasságához a 2π periodicitás figyelembevételével (szürke, szaggatott-pontosított nyíl – ez a művelet felel meg a komplex egységvektorok összeszorzásának).

Az eredményt ábrázolhatjuk a komplex számsík vektoraként, ahol a vektor hosszát a paraboláról, irányát pedig összegzett fázisból olvashatjuk le (duplapontosított-szaggatott nyíl).



28. ábra A sűrűségmátrix egyes elemeinek megjelenítése tiszta állapot esetén.

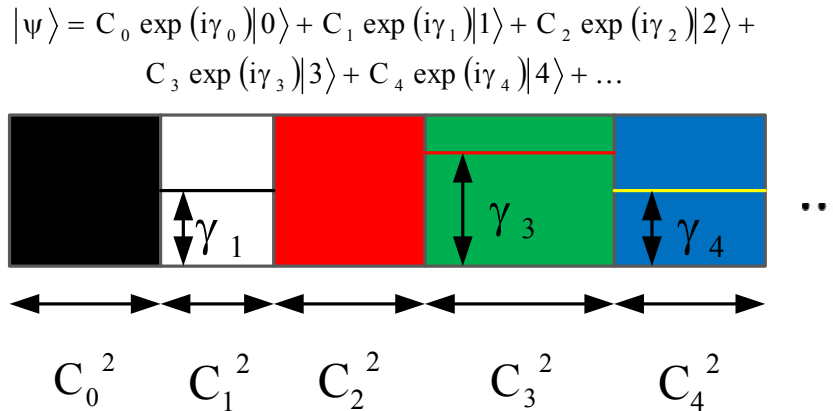
Abban az esetben, ha kevert állapotról van szó, a sokaság minden egyes elemét leíró tiszta állapot esetén el kell végezni ezt az eljárást, majd az eredményt megszorozni a p_i súlyfaktorokkal, és az így kapott sűrűségmátrixokat elemenként össze kell adni.

3.9. Általánosítás véges állapotú, diszkrét kvantumrendszerekre

Az itt leírtak elsősorban a qubitek megjelenítésére szolgálnak, ami azt jeleneti, hogy kétállapotú kvantumrendszereket, és az ezek tenzorszorzat terén értelmezett összetett rendszereket reprezentálják. Azonban abban az esetben, ha kettőnél több, de véges (és általában nem nagyszámú) kvantumállapottal rendelkező rendszert akarunk megjeleníteni, akkor követhetjük a következő eljárást. Először is megszámozzuk az állapotokat, és minden egyes állapothoz rendelünk egy szint.

Például tegyük fel, hogy egy elektron véges számú gerjesztett állapotát akarjuk megjeleníteni egy atomban. Ekkor az alapállapotot jelölhetjük $|0\rangle$ -val és fekete színnel, az első gerjesztett állapotot $|1\rangle$ -el és fehér színnel, és így tovább, a második harmadik és

negyedik gerjesztett állapotot rendre $|2\rangle$ -vel, $|3\rangle$ -al, $|4\rangle$ -el, illetve vörössel kékkel és zölddel. Az eddigiekhez hasonlóan az adott színnel kitöltött részekből álló vízszintes sávokban ábrázolhatjuk az egyes kvantumállapotok megtalálási valószínűségét, a fázisokat pedig a komplementer színnel jelölt vízszintes vonalak reprezentálják.



29. ábra Ha kettőnél több, véges számú ortogonális állapotban lehet a kvantumrendszerünk, a további állapotok megjelenítésére használhatunk egyéb színeket. Például egy elektron alapállapotát jelölhetjük feketével, első gerjesztett állapotát fehérrel, a másodikat pirossal a harmadikat zölddel, a negyediket kékkel, stb.

3.10. Általánosítás egyéb reprezentációk alkotásához

Bizonyos esetben fontos lehet, hogy olyan reprezentációkat alkossunk, melyek matematikailag ekvivalensek az eddig leírtakkal, de egyéb tulajdonságaikban különböznek. Például amiatt, hogy úgy döntöttünk, az Euleri amplitúdók négyzetét ábrázoljuk, a reprezentációnkból könnyű leolvasni az egyes mérési eredmények valószínűségét, és a feltételes valószínűségeket, ugyanakkor ennek az ára, hogy általános esetben bizonyos műveleteket, mint például a Hadamard operátor hatását bonyolult ábrázolni.

Az itt következő részekben a teljesség igénye nélkül, csak említés szintjén bemutatunk néhány egyéb reprezentációt, majd általánosítjuk őket címkézett előjeles bináris fákon keresztül.

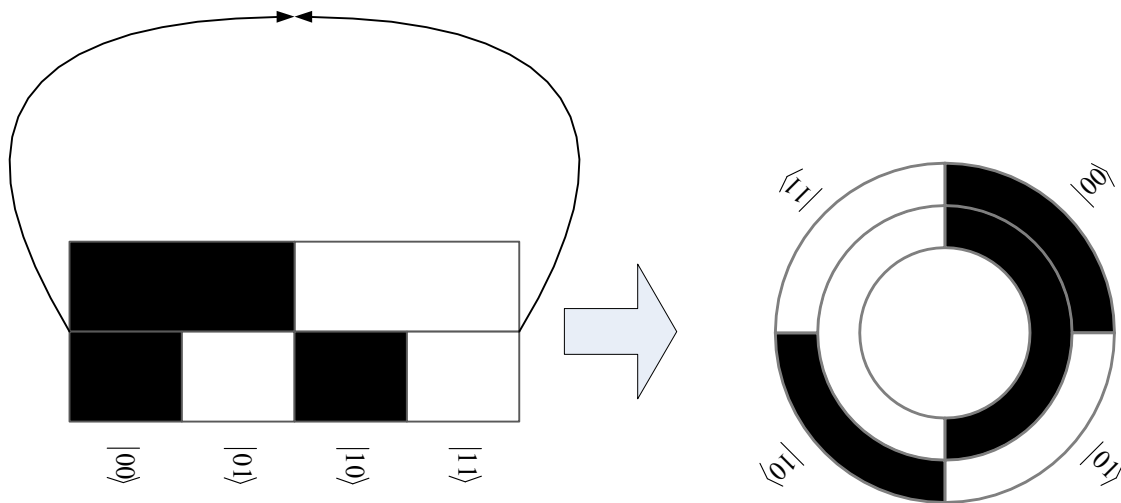
3.10.1. Reprezentáció percc diagramokkal

Az eddig ismertetett, sávdiaagramokra épített reprezentáció egyik gyengesége, hogy nagyon gyorsan „tömörödik”. Ez alatt azt kell érteni, hogy szerencsétlen esetben az n -edik qubitot reprezentáló sáv akár 2^n részből is állhat (a számozás 1-től indul). Ezen a helyzeten sokszor segít az összefonódottság, de erre természetesen általános bitsorozat reprezentálásakor nem számíthatunk, ami megnehezítheti a sok qubitból álló rendszerek reprezentálását.

A helyzetet némileg javíthatjuk azzal, ha a sávrepresentáció két végét összeillesztve sávok helyett egymásba ágyazott perccdiagramokat használunk, és a sugarasan, bentről kifelé induló szeleteket úgy rendezzük át, hogy azok az óramutató járása szerint növekvő sorrendben mutassák a bitértékeket. Mivel a percc kerülete is folyamatosan növekszik az újabb bitek hozzáadásával, ezért egyre több helyünk van a további szeletek reprezentálására.

Természetesen, mivel a szeletek száma hatványfüggvény szerint növekszik, a terület viszont csak négyzetesen, a reprezentáció így is tömörödni fog, de nem olyan gyorsan, mint a

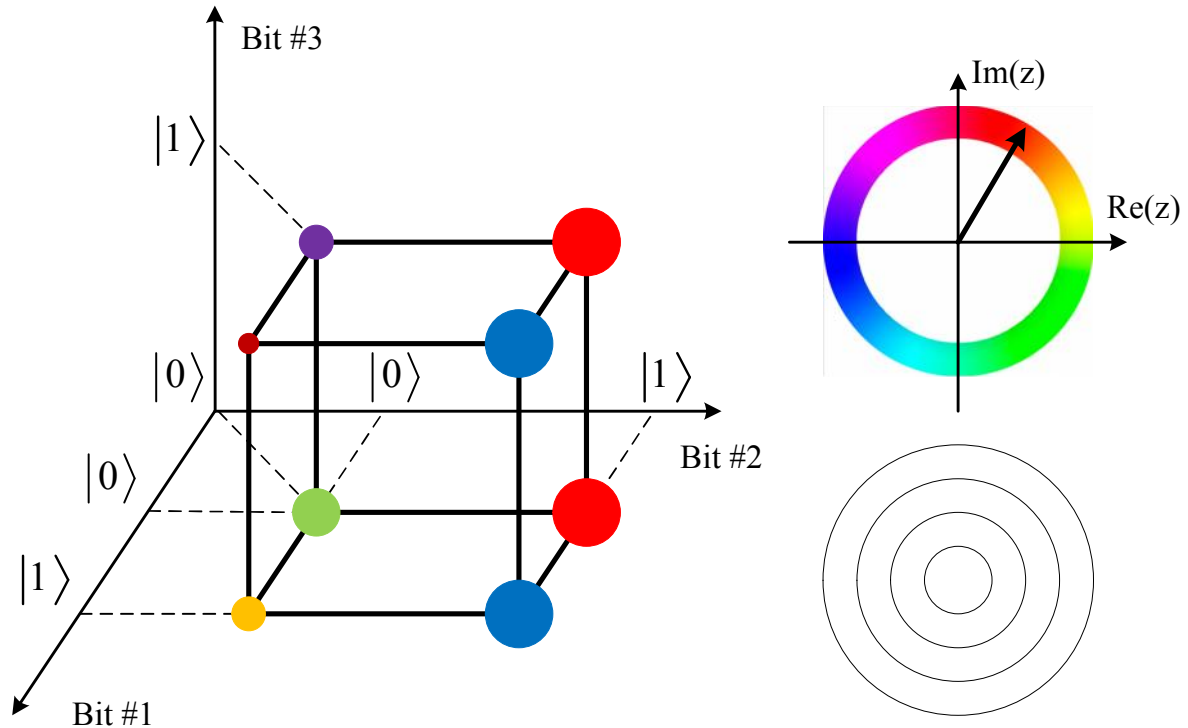
sávdigramok esetén. A módszer hátránya, hogy kisszámú qubit esetén feleslegesen pazarol helyet.



30. ábra Ha gyűrűbe zárjuk az eddig ismertetett reprezentációt, egyre több helyünk lesz a további sávrészek reprezentálására, hiszen a terület folyamatosan növekszik.

3.10.2. Reprezentáció színezett csúcsú kockákkal

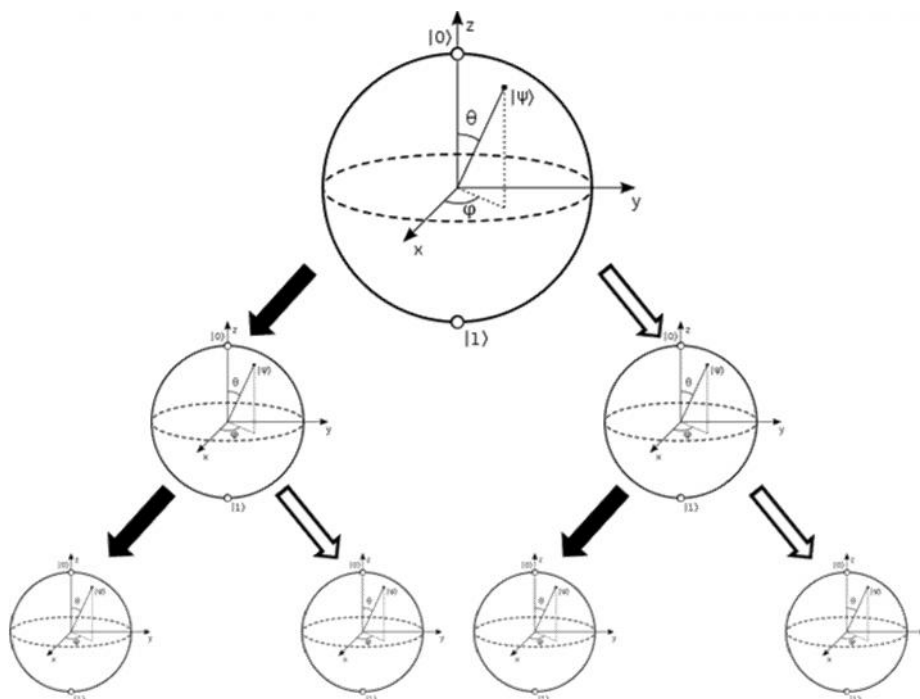
Egy másik lehetséges megközelítés, hogy a fázis reprezentálásra a színekort használjuk. Ez sok esetben azért természetesebb, mint az eddig leírt vízszintes vonalak használata, mert minden további feltételezés nélkül teljesíti a periodicitást. Ha egy pont színe reprezentálja a fázist, mérete pedig az abszolút értéket (vagy annak négyzetét), akkor ezzel a módszerrel egyetlen ponttal tudunk reprezentálni egy komplex számot. A bitértékeket a pontok elhelyezkedése jelölheti, például egy n bitből álló kvantumrendszert reprezentálhatunk egy n -dimenziós hiperkocka csúcsaira elhelyezett színezett pontokkal. Ennek az eljárásnak az előnye az, hogy három dimenzióig könnyű a mérés után kapott feltételes valószínűségeket meghatározni úgy, hogy a kocka lapjaival párhuzamos szimmetriatengelyeknek csak az egyik vagy másik oldalát nézzük. A módszer hátránya az, hogy három dimenzió felett nem könnyű átlátni hol vannak a keresett síkok, előnye, hogy nem szükséges előre tudnunk, milyen sorrendben akarjuk mérni a bitértékeket.



31. ábra Ha a qubitek fázisát színekkel, nagyságát a színes pont nagyságával jelöljük, akkor egy n qubitből álló rendszert megjeleníthetünk egy n dimenziós hiperkocka csúcsaira elhelyezett színes pontokkal. A módszer előnye, hogy a színek természetesen visszaadja a periodicitást, és a reprezentáció ugyan úgy viselkedik bármilyen sorrendben is mérjük az állapotokat.

3.10.3. Reprezentáció Bloch gömbökből alkotott fraktálokkal

Természetesen a már jól ismert, és megszokott Bloch gömböket is használhatjuk a sokbités kvantumrendszerek reprezentálására. Egy lehetőség, hogy a korábbi, fekete és fehér oldallal ellátott sávok helyett a párokba rendezett komplex számokat a jól megszokott Bloch gömbön jelenítjük meg. Azt a kapcsolatot, amit korábban az egyes qubitek között a sávrészek egymásalattisága jelenített meg, most jelölhetjük fekete és fehér nyilakkal. (Ha egy mérés 0-át ad az első biten, a fekete nyíl mentén elindulva kaphatjuk meg a többi bitből alkotott alrendszer állapotát, míg ha a mérés eredményeként 1-et kapunk, a fehér nyíl mentén haladunk tovább.) Ennek a reprezentációnak az előnye, hogy például a Hadamard operátor hatását könnyebb rajta nyomon követni, hátránya, hogy sok helyet pazarol, nem mutatja tisztán a mérési valószínűségeket, és a mérés utáni állapot ábrázolásához meg kell növelni pontok méretét.

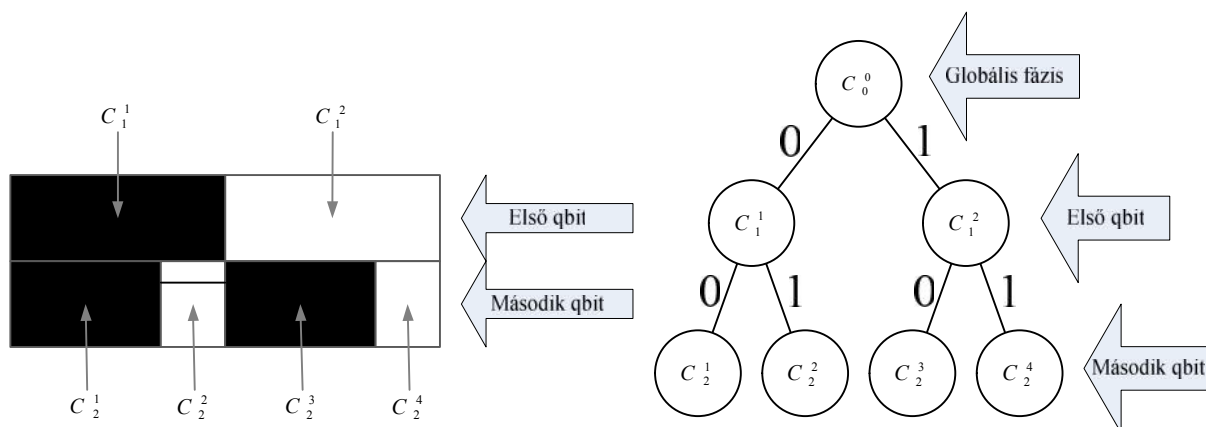


32. ábra Sok qubites rendszerek ábrázolása Bloch-gömbökből alkotott fraktálokkal.

3.10.4. Általánosítás előjeles címkézett bináris fák segítségével

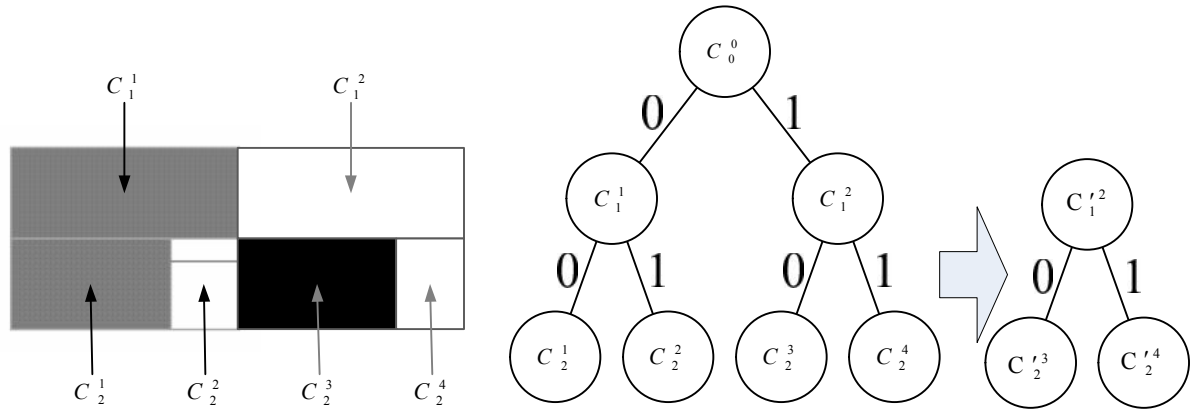
Az itt említett reprezentáción túl természetesen másokat is alkothatunk. A közös ezekben, hogy mind egy előjeles, címkézett bináris fával egyeznek meg matematikailag. A bináris fa címkéi komplex számok lesznek, a gráf éleinek előjelei pedig a 0 és 1 bitértékeket jelenítik meg.

A 3.2. fejezetben már láttuk, hogyan képes tetszőleges állapotot leírni egy sávokból alkotott fraktál. Az ott bemutatott fraktál minden egyes sávja 2^n darab komplex számot jelenít meg, ahol n a sáv sorszáma (a számozás felülről, 0-tól indul). Csak a levél elemeknek van nem 0° -os fázisuk, a gyökérelem címkéjének abszolút érték négyzete 1, a címkék abszolút értéke monoton csökken az élek mentén a gráf magasabb szintjei felé haladva, továbbá a levélelemek címkéinek abszolút érték négyzetösszege 1-et kell, hogy adjon a (24) és (26) összefüggések miatt. Megjegyzendő, hogy bár a gráfban a gyökérelem jelenítheti meg a globális fázist, addig ez a sávokra épülő reprezentációban nem jelenik meg.



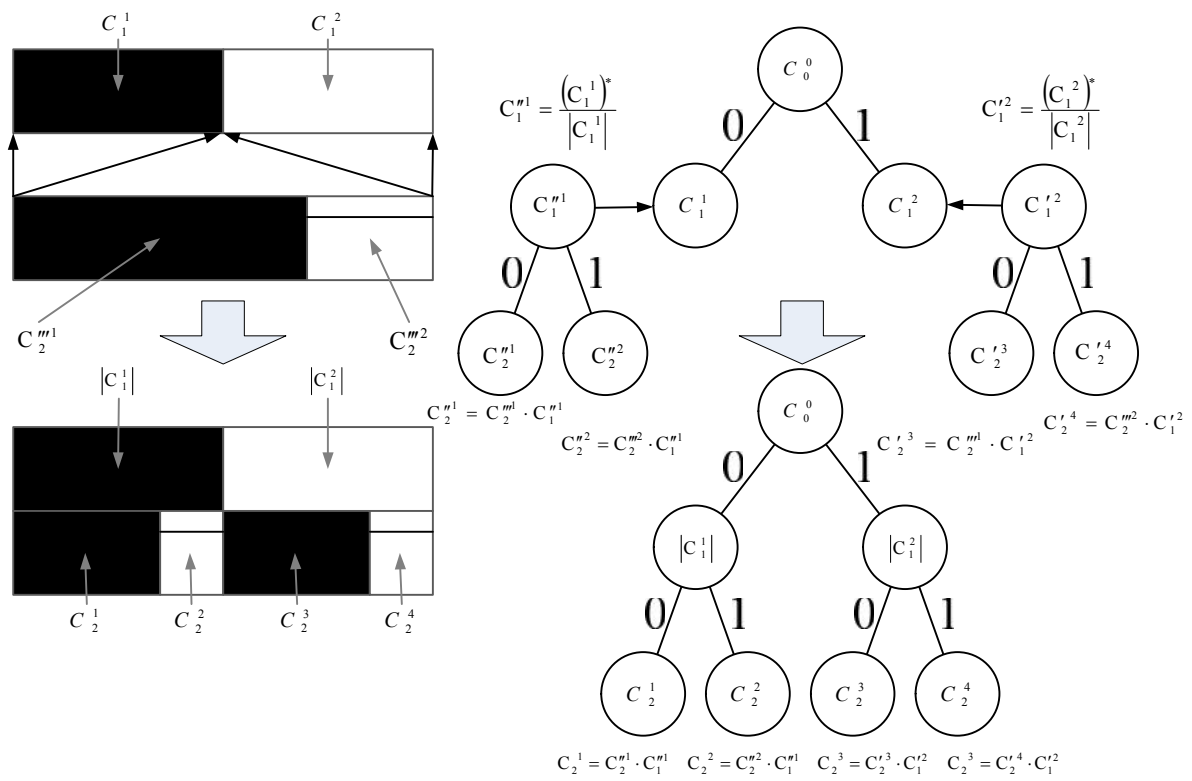
33. ábra A több qubites rendszert reprezentálhatjuk egy előjeles címkézett bináris fával, melyben csak a levélelemeknek van nem 0° -os fázisa.

A mérés utáni állapotot a bináris fa részfája fogja megadni, de ehhez a részfa címkéit le kell normálni a levélelemek abszolút érték négyzetösszegével, hogy a (26) összefüggés továbbra is teljesüljön. Mivel az információ túlnyomó többségét a levélelemek hordozzák (a sávdigramokon alapuló ábrák esetén ez a legalsó sávot jelenti), ezért sok esetben, például a 3.10.2. fejezetben említett, színezett csúcsú kockáknál, elegendő azokat megjeleníteni.



34. ábra A mérés után a rendszert reprezentáló fa egy részfára egyszerűsödik.

A 3.3. fejezetben leírt rekurzív eljárás itt annyit tesz, hogy az előző qubiteket reprezentáló rendszer levélelemeit cseréljük le úgy, hogy a hozzáadandó, három csúccsal rendelkező, egy qubitet reprezentáló fa globális fázisát a helyettesítendő levélelem fázisának konjugáltjára állítjuk be. Ezek után a levélelemet lecseréljük a háromelemű gráfra, az új gráf címkéit pedig beszorozzuk a lecserélendő csúcs címkéjével (ez felel meg a sávokon alapuló reprezentáció esetén a fázisinformáció legalsó sávba másolásának, és a szélesség előző sávrészekhez igazításának).



35. ábra A tenzorszorzat képzésre szolgáló rekurzív algoritmus egy lépése a bináris fák esetén megegyezik a levélelemek és a címkék lecserélésével.

4. Összefoglalás

Végezetül foglaljuk össze eddigi eredményeinket, és vessünk egy pillantást a továbblépési lehetőségekre is.

4.1. Eredmények

A kvantuminformáció vizuális reprezentálására szolgáló jelenlegi módszerek vagy rosszul kezelik a tetszőleges állapotokat, vagy nem alkalmasak arra, hogy sok qubitből álló rendszerek információtartalmát jelenítsük meg oly módon, hogy az könnyen átlátható legyen.

Mi itt most egy olyan módszert vázoltunk fel, mely egyszerű eszközökkel, téglalapokkal és fekete-fehér színezéssel jeleníti meg az egyes kvantumbiteket, a bitek közti összefüggéseket pedig a téglalapok rekurzív egymásmellé helyezésével, és fraktálok alkotásával hoztuk összefüggésbe. Így sok qubitből álló rendszereket reprezentálhatunk áttekinthetően.

A téglalapok szélessége a mérési valószínűséget, az egyes téglalapokon elhelyezett vízszintes vonalak magassága a fázist jelöli. Ez az elrendezés lehetővé teszi, hogy könnyen átlássuk a mérés után kapott egyes állapotok valószínűségét, és sok-qubites rendszerek esetén bepillantást nyerhetünk az egyes méréskombinációk eredménye után kialakuló feltételes valószínűségekbe is.

A rekurzív egymásmellé helyezés, és a fázisok átmásolása egyik téglalapról a másikra lehetővé teszi, hogy tenzorszorzat állapotokat is könnyedén megjelenítsünk. A folyamat megfordításával megállapíthatjuk, hogy egyes sok qubitből álló kvantumrendszerek szétválaszthatóak-e illetve, hogy hányat lehet közülük szétválasztani.

A két tulajdonság együtt lehetővé teszi, hogy felismerjük az összefonódottságot illetve annak mértékét, a fraktálok önhasonlóságát kihasználva pedig alrendszerek viselkedésébe nyerhetünk bepillantást.

Végül megmutattuk, hogy a fenti reprezentáció téglalapjai által hordozott információ matematikailag ekvivalens egy címkézett előjeles bináris fával. Ezen keresztül más reprezentációkat is lehet alkotni, melyre említés szintjén láttunk pár példát.

4.2. Továbblépési lehetőségek

A továbbiakban érdemes lehet megvizsgálni, hogyan hatnak a reprezentációra a bázistranszformációk, hogyan lehet leírni, ha nem a bázisvektoroknak megfelelő méréseket hajtunk végre, illetve pontosan hol, és miben jelenik meg a különbség az összefont és kevert állapotok között.

A művelettel kapcsolatban érdemes további, egyszerűbb módszereket keresni a Hadamard kapu leírására, érdekes lehet megvizsgálni az egyes kapuk infinitezimális generátorainak hatását, és esetleg megvizsgálni, lehet-e valami általánosítást mondani a reprezentációban egy tetszőleges kvantumkapu hatásáról.



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Híradástechnikai Tanszék

Kvantumbitek és kvantumműveletek újszerű megjelenítése fraktálokkal – Melléklet –

Készítette: Galambos Máté
E-mail: galambos@mcl.hu

Konzulensek:
Bacsárdi László, Híradástechnikai Tanszék
Dr. Imre Sándor, Híradástechnikai Tanszék

2011

5. Melléklet

5.1. Tenzorszorzat

Tegyük fel, hogy adott két vektortér, V_n n dimenziós és W_m m dimenziós. Képezzünk a $\vec{v} \in V_n$ és $\vec{w} \in W_m$ vektorokból alkotott rendezett párt, melyet a következőképpen jelölünk: $\vec{v} \otimes \vec{w}$. Ezt akkor tekintjük tenzorszorzatnak, ha a rendezett párokon értelmezett összeadás és komplex számmal való szorzás teljesíti az alábbi összefüggéseket:

$$\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_n \text{ és } \forall \vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_m \text{ esetén}$$

$$\vec{v} \otimes (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \otimes \vec{w}_1 + \vec{v} \otimes \vec{w}_2 \quad (36)$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \otimes \vec{w} = \vec{v}_1 \otimes \vec{w} + \vec{v}_2 \otimes \vec{w} \quad (37)$$

$$\forall a \in \mathbb{C} \text{ esetén}$$

$$a(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (a\vec{x}) \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes (a\vec{y}) \quad (38)$$

A fenti relációk következménye, hogy, ha $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ tetszőleges bázis V_n -ben, és $\{\vec{f}_j\}_{j=1}^m$ tetszőleges bázis W_m -ben, akkor az $\varepsilon_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$ elemek is bázist alkotnak, mely az úgynevezett $V_n \otimes W_m$ tenzorszorzat-teret feszíti ki.

5.2. Szorzat szerkesztés parabola segítségével

Ha van egy $y=x^2$ egyenletű parabolánk, és a rajta fekvő $(-a;a^2)$, $(b;b^2)$ pontokat összekötjük egy egyenessel (a és b nem-negatív számok), akkor az egyenes a $(0;a \cdot b)$ pontban fogja metszeni az y tengelyt.

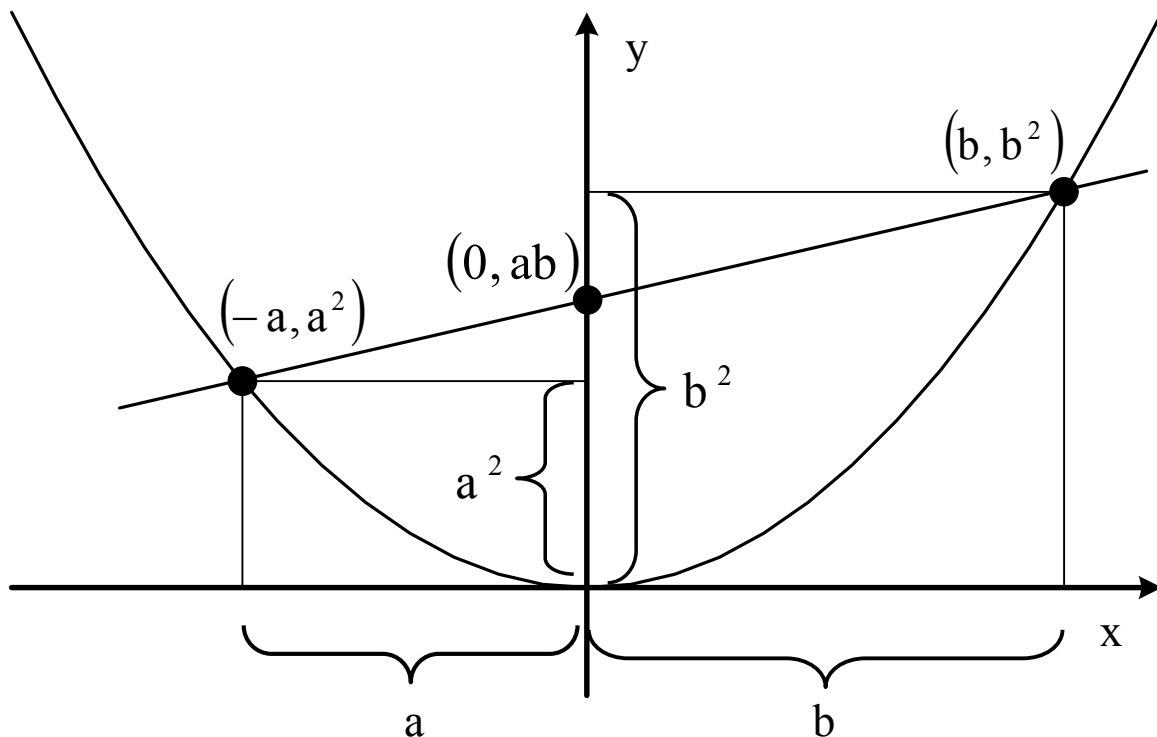
Ennek belátásához először számoljuk ki az összekötő egyenes meredekségét:

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b + a} = \frac{(b + a) \cdot (b - a)}{b + a} = b - a \quad (39)$$

A levezetés során feltesszük, hogy a és b nem egyszerre 0 (ez esetben a szorzatuk természetesen 0). Amíg az egyenes a $(-a;a^2)$ pontból az y tengelyig eljut, meredekségének a szorosával nő a magassága, vagyis a végleges érték:

$$y = a^2 + a \cdot (b - a) = ab \quad (40)$$

Tehát az egyenes y tengellyel vett metszéspontjának koordinátája valóban $(0;a \cdot b)$.



36. ábra Hosszúságok szorzata szerkeszthető egy parabola segítségével.

5.3. Bra-ket formalizmus vektorokkal

A bra-ket formalizmus absztrakt vektorait valódi oszlop és sorvektorokkal is megjeleníthetjük. Ekkor a nulla és egy értékhez, illetve egy általános ket vektorhoz tartozó komplex értékű vektorok [9]:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ahol:

$$a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (42)$$

A tenzorszorzat ekkor nem más, mint a Kronecker-szorzat [9]:

$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{1,1}V & u_{1,2}V & & \\ u_{2,1}V & u_{2,2}V & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (43)$$

A ket vektorhoz tartozó komplex bra vektor pedig a ket vektor transzponált konjugáltja [9]:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \langle\psi| = [a^* \quad b^*] \quad (44)$$

A rendszeren végrehajtott mérés mátrixa pedig, ha a detektor a bázisvektorokhoz tartozó állapotnál, illetve egy tetszőleges vektorhoz tartozó állapotban szólal meg biztosan [9]:

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} aa^* & ab^* \\ ba^* & bb^* \end{bmatrix} \quad (45)$$

Ha egy qubites rendszeren hajtunk végre mérést, akkor annak valószínűsége, hogy a rendszert egy adott $|m\rangle$ állapotban találjuk [8]:

$$P(|m\rangle) = \frac{M|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M^+M|\psi\rangle}} \quad (46)$$

Ahol M^+ az M mátrix konjugált transzponáltja.

Több qubites rendszerek esetén egy általános ket vektor [9]:

$$|\phi\rangle = c_{0\dots 00}|0\dots 00\rangle + c_{0\dots 01}|0\dots 01\rangle + \dots + c_{1\dots 11}|1\dots 11\rangle = \begin{bmatrix} c_{0\dots 00} \\ c_{0\dots 01} \\ \vdots \\ c_{1\dots 11} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Ha egy n -qubitből álló rendszer első qubitjén hajtunk végre egy mérést, akkor a mérés mátrixa [8]:

$$P_m = (|m\rangle\langle m|)_1 \otimes I_2 \otimes I_3 \otimes \dots \otimes I_n \quad (48)$$

Ahol I -k identitásmátrixok. A teljes rendszer mérés utáni állapota pedig, ha a mérés eredménye m [8]:

$$P(|m\rangle) = \frac{P_m|\phi\rangle}{\sqrt{\langle\phi|M^+M|\phi\rangle}} \quad (49)$$

Hivatkozások

- [1] Gordon E. Moore, „Cramming More Components Into Electrical Circuits”, Electronics vol. 38, No 8, (April 19, 1956)
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Transistor_Count_and_Moore%27s_Law_-_2011.svg (2011-05-13)
- [3] Lov K. Grover, „A fast quantum mechanical algorithm for database search”, arXiv:quant-ph/9605043v3 (1996-11-19)
- [4] Peter W. Shor, „Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, arXiv:quant-ph/9508027v2 (1996-01-25)
- [5] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, „Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing”, International Conference on Computers, Systems & Signal Processing, Bangalore, India (December 10-12, 1984)
- [6] Nishanth Chandran, Serge Fehr, Ran Gelles, Vipul Goyal, Rafail Ostrovsky, „Position-Based Quantum Cryptography”, arXiv:1009.2490v4 (2011-09-12)
- [7] Aram Harrow, Patrick Hayden, Debbie Leung, „Superdense coding of quantum states”, Phys. Rev. Lett. 92, 187901 (2004), arXiv:quant-ph/0307221v2 (2004-04-30)
- [8] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information” (Cambridge University Press, 2000)
- [9] S. Imre, B. Ferenc, „Quantum Computing and Communications: An Engineering Approach” (Wiley, 2005)
- [10] Anthony M. Fox, „Quantum optics: an introduction”, Oxford University Press, 2006
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg (2009-01-30)
- [12] H. Mäkelä, A. Messina, „N-qubit states as points on the Bloch sphere”, Physica Scripta T140 014054 (2010), arXiv:0910.0630v2 (2010-09-01)
- [13] D. Chruscinski, „Geometric Aspects of Quantum Mechanics and Quantum Entanglement”, Journal of Physics: Conference Series 30 (2006) 9–16
- [14] A. Lindenmayer, „Mathematical models for cellular interaction in development I. Filaments with one-sided inputs”, Journal of Theoretical Biology 18:280-289 (1968)
- [15] A. Lindenmayer, „Mathematical models for cellular interaction in development II. Simple and branching filaments with two-sided inputs”, Journal of Theoretical Biology 18:300-315 (1968)