

Jelige: EAU 221

FREGE MEGOLDÁSI JAVASLATÁRÓL AZ
ALKALMAZHATÓSÁGI PROBLÉMÁT ILLETŐEN

TARTALOMJEGYZÉK:

Bevezetés.....	3
1. Steiner és az alkalmazhatósági probléma.....	4
1.1. Steiner a metafizikai és a szemantikai probléma fregei megoldásáról.....	5
1.1.1. A logikai és a metafizikai problémáról.....	5
1.1.2. Frege megoldásáról.....	8
2. Frege és az alkalmazhatósági probléma.....	14
2.1. <i>Grundlagen</i>	14
2.2. A Julius Caesar-probléma.....	17
Konklúzió.....	21
BIBLIOGRÁFIA.....	22

BEVEZETÉS

A matematika alkalmazhatósági problémája igen nagy múltra tekint vissza, és végigvonult szinte az egész nyugati filozófiatörténeten. Platónról Millig a probléma mibenléte nagyjából egységes jelleget öltött; későbbi tárgyalása, beleértve annak kortárs megjelenését is, noha megőrizte a kiinduló probléma felvetését, számtalan további kérdéssel gazdagodott. Ebből adódóan már nem igazán beszélhetünk egyetlen problémáról, hanem csupán egy igen szerteágazó problémakörrel, mely számtalan megközelítésmódot foglal magában. Léven, hogy a problémakör tárgyalása csupán a 90-es években kapott új erőre,¹ egyelőre kevés olyan írás született, amely az egész kérdéskör áttekintésére törekedne. Mark Steiner a kivételek közé tartozik, és átfogó képet igyekszik elénk tárni a matematika alkalmazhatósági problémáját illetően, mégpedig a problémakört három részre - szemantikai, metafizikai és deskriptív problémára - osztva. A jelen tanulmány vizsgálati tárgya Steiner azon állításának felülbírálása, miszerint Frege a szemantikai problémára, és ezzel a metafizikaira is végleges megoldást kínált, így minden további diszkussziót feleslegessé téve.

Az említett részproblémák és Steiner álláspontjának ismertetése után Frege *Grundlagen*-jét² állítva a vizsgálódás középpontjába szeretnék érvelni Steiner felfogásának tarthatatlansága mellett. Mint látni fogjuk, noha Frege logicizmusának inkonzisztenciája nem fenyegeti Frege megoldását, egy másik, Frege matematikafilozófiáját érintő problémáról, az úgynevezett Julius Caesar-problémáról viszont már nem mondhatjuk el ugyanezt. Állításom tehát az lesz, hogy az említett probléma mind a szemantikai, mind a metafizikai probléma fregei megoldása alól kihúzza a talajt, és így azok nem tekinthetők véglegesnek.

Ezen tanulmány során nem kívánok teljeskörű áttekintést adni Frege matematikafilozófiai nézeteiről, hanem csak annyi információt szeretnék közölni, amely lehetővé teszi számunkra az említett problémák megértését és álláspontom beláthatóságát.

¹ Ennek okairól, lásd WILHOLT (2006). Wilholt amellettt érvel, hogy míg a 20. század elején az alkalmazhatósági probléma még felkapott témának számított a korai logicisták körében, addig a logikai pozitivizmus előtörésével párhuzamosan a probléma fokozatosan eltűnt a filozófiai diszkussziókból, mivel a logikai empirizmus, élén Carnappal, az alkalmazhatósági problémát teljes egészében megoldottnak tekintette.

² FREGE (1884/1999) Természetesen Frege-nek *Az aritmetika alapjairól* c. művéről van szó, amelyet a másodlagos szakirodalom csak *Grundlagen*-ként szokott említeni az eredeti német címnek (Die Grundlagen der Arithmetik) megfelelően.

1. STEINER ÉS AZ ALKALMAZHATÓSÁGI PROBLÉMA

Az alkalmazhatósági probléma számos vonatkozással bír, mivel az, hogy milyen álláspontot képviselünk akár a matematikai állítások szükségszerűségét és a prioritását illetően, akár a matematikai tárgyak ontológiai státuszának vonatkozásában, stb., befolyással lesz arra, hogy miként is fogunk vélekedni az alkalmazhatósági probléma megoldásának tekintetében. Mindemellett a probléma tárgyalásmódjának sokszínűsége nem csupán abból fakad, hogy az egyes válaszoknak milyen metafizikai, episztemológiai vagy szemantikai, stb. előfeltevései vagy következményei vannak, hanem abból is, hogy egyáltalán mit értünk alkalmazhatóság alatt és hogy miként is közelítjük meg magát a problémát. Közelíthetünk egyrészt a matematika felől és feltehetjük a kérdést, hogy milyennek kell lennie a matematikának, vagy miképpen kell felfognunk a matematikát ahhoz, hogy az alkalmazható legyen akár a tudományokban, akár a hétköznapi életünk során, vagy hogy mi teszi érvényessé az alkalmazott matematikai következtetéseinket. Másrészt közelíthetünk a tudományok, és leginkább a fizika felől, és többek között olyan kérdéseket feszegethetünk, mint hogy miként lehetséges, hogy némely tudományos elmélet meg sem fogalmazható a matematika segítségével, és hogy ezek a matematikai megfogalmazások gyakran olyan, még fel nem tárt fizikai tényeket, összefüggéseket jeleznek előre és vezetnek új elméletekhez, amelyek pusztán fizikai alapokon megjósolhatatlannak bizonyultak volna. Érthető módon, míg a fizikusokat inkább ez utóbbi kérdések foglalkoztatják, és sokan közülük bámulattal adóznak a matematika és a fizika homomorfizmusa előtt, addig a filozófusok inkább a matematikát állítják a középpontba, és minden tőlük telhetőt megtesznek azért, hogy mindenféle misztikusságot távol tartsanak és felszámoljanak a matematika fizikára való alkalmazhatóságának magyarázata során. Steiner álláspontja szerint a filozófusok és a fizikusok szándékaik ellenére gyakran elbeszélnek egymás mellett, és mindez pontosan az eltérő megközelítésmódoknak köszönhető, amely mögött pedig az alkalmazhatóság fogalmának különböző használatai állnak.³

Mindezt figyelembe véve, Steiner szerint az alkalmazhatósági problémát az alábbi részproblémákra érdemes osztanunk:

- A *szemantikai* vagy más néven *logikai probléma* azt boncolgatja, hogy mi biztosítja a kevert, azaz nem tisztán matematikai következtetéseink érvényességét, vagyis az olyan

³ STEINER (1998) 13-15.o.

következtetéseink érvényességét, amelyek alkalmazott és tiszta matematikai állításokat is tartalmaznak.

- A *metafizikai probléma* abban a kérdésben áll, hogy hogyan lehetnek a matematikai igazságok bármely módon is relevánsak az empirikus világra nézve, adva a matematika birodalma és az empirikus világ között húzódó ontológiai rést.
- Végül a *deskriptív probléma* arra irányul, hogy miként lehetséges, hogy a matematika nyelve oly sikeresen alkalmazható fizikai elméletek leírására és előrejelzésére.⁴

Mivel vizsgálódásunk középpontjában a szemantikai és a metafizikai probléma, illetve Frege ezekre adott válasza áll, így a következő szakaszban részletesebben is bemutatom az említett problémákat, valamint Steiner álláspontját a fregei megoldást illetően.

1.1 STEINER A METAFIZIKAI ÉS A SZEMANTIKAI PROBLÉMA FREGEI MEGOLDÁSÁRÓL

Ahogy azt Steiner megjegyzi az alkalmazhatósági problémával kapcsolatban, a 19. században a modern logika kialakulásával és a matematika logicista megalapozására tett kísérletekkel a matematika alkalmazhatóságának magyarázata új szempontokkal bővült. Frege logicizmusa, mint látni fogjuk, az alkalmazhatóság újszerű kérdésfeltevését és megközelítését tette lehetővé, amely elsősorban a szemantikai probléma megfogalmazásában, valamint a szemantikai és metafizikai problémára adott válaszában mutatkozik meg.⁵

1.1.1 A LOGIKAI ÉS A METAFIZIKAI PROBLÉMÁRÓL

Ahhoz, hogy tetten érhessük az alkalmazhatóságnak ezt az imént említett vonását, tehát egy olyan következtetést kell szemügyre vennünk, amelyben mind tiszta matematikai állítások, mind pedig kevert, vagyis alkalmazott matematikai állítások szerepelnek.

Vegyük a következő példát:

⁴STEINER (1998) 16-26.o. Maga Steiner, könyvében a deskriptív probléma megoldását célozza meg. Ennek kritikai összefoglalóját nyújtja COLYVAN (2001), aki rámutat, hogy mind az antirealista (Field) mind a realista (Quine) számára ugyanúgy felmerül a deskriptív probléma.

⁵ STEINER (2005) 641.o. A logicizmus álláspontja szerint az aritmetika logikai alapokra helyezhető és helyezendő, vagyis minden aritmetikai állítást és fogalmat pusztán logika eszközökkel igazolhatunk, és így az aritmetika a logika részét képezi. Kiváló áttekintését nyújtja a logicizmusnak Horsten (2012)

- P1 $7+5=12$
- P2 Hét alma van az asztalon.
- P3 Öt körte van az asztalon.
- P4 Egyik alma sem körte.
- P5 Csak almák és körték vannak az asztalon.
- P6 Az almák és a körték gyümölcsök.

K Tizenkét gyümölcs van az asztalon.⁶

Steiner az alábbi megjegyzéseket fűzi a példához:

"A következő kérdés merül fel: a tiszta matematikai proposíciónak, ami láthatóan 'természetes számokról' szól, mi köze van a gyümölcsökhöz? Ennek a kérdésnek két aspektusa van, egy logikai és egy metafizikai. A metafizikai kérdés abból a matematikai tárgyak és empirikus tárgyak közötti ontológiai részből fakad, amire már Platón felfigyelt: hogyan lehetnek a matematikai tárgyra vonatkozó igazságok bármely módon is relevánsak az empirikus világot illetően?

A logikai kérdés abból a különbségből fakad, ami a 'hét' és az 'öt' számnevek melléknévi és főnévi használata között áll fenn. Ez a kétértelműség olyan félreérthetőséghez vezet, ami a következtetésünk logikai érvényességének aláásával fenyeget. Természetesen ez a két kérdés összefügg."⁷

A fentihez hasonló következtetésekkel mind a hétköznapi, mind pedig a tudományos életben gyakran találkozhatunk, és számtalanszor meggyőződhattunk már sikerességükről. Ahhoz azonban, hogy a matematika alkalmazhatóságának eme sikerességét megmagyarázhassuk, mindkét problémára megoldást kell találnunk, úgyhogy hasznos lesz alaposabban is kifejtenünk őket.

Ami a logikai vagy máshol szemantikainak nevezett problémát illeti, mint láthatjuk, P1 egy tiszta matematikai állítás és kizárólag számneveket, illetve egy azonossági relációt tartalmaz, vagyis csak és kizárólag matematikai kifejezéseket foglal magában. Ellenben P2, P3 és K kevert matematikai állítások, amelyek ebből adódóan mind matematikai, mind nem-matematikai elemeket magukban foglalnak, vagyis tartalmaznak számneveket, valamint (jelen esetben) többek között gyümölcsök neveit is.

A problémát az okozza, hogy a számnevek látszólag más-más funkciót töltenek be a tiszta, illetve a kevert állításokban. A ' $7+5=12$ ' tiszta állításban a '7' egy matematikai tárgy nevéként

⁶ A példát egy apróbb módosítással Steinertől vettem – lásd STEINER (1998) 16.o. Természetesen a hétköznapi életben a következtetéseink nem ilyen formát öltenek, például P4 nem gyakran fogalmazódna meg bennünk, hiszen evidenciának tekintjük, azonban lévén, hogy logikai problémáról is van szó, a formai pontosság nélkülözhetetlen.

⁷ STEINER (2005) 642.o.

jelenik meg, vagyis mint tulajdonnév, mint a hetes szám neve. Ezzel szemben például a 'hét alma van az asztalon' kevert állításban a 'hét' kifejezés az alma predikátumaként szerepel, vagyis az almákról állít valamit, mégpedig azt, hogy hét van belőlük. Tehát ugyanaz a kifejezés, jelesül a 'hét', a különböző premisszákból különböző értelemben szerepel. És persze ugyanez elmondható az 5-ről és a 12-ről is. Ezen különbségekből fakadóan pedig logikai formáját tekintve a következtetést érvénytelennek kellene tekintenünk, hiszen a konklúzió nem következhet a premisszákból, amennyiben nincs kapcsolat P1 és a többi premissza között.

Mindamellettnagyon jól tudjuk, hogy a fenti következtetés érvényes. Tehát a filozófiai problémánk jelen esetben abban áll, hogy találnunk kell egy olyan interpretációt, amely mellett a következtetés érvényes.

Logikai értelemben, a kérdésfeltevés természetesen előrejelzi annak megoldását: fel kell számolnunk a tiszta és a kevert matematikai állításokban előforduló számnevek közötti különbséget azok logikai kategóriáit illetően, és egy egységes logikai, illetve szemantikai magyarázattal kell előállnunk. Logikai szempontból tehát választanunk kell aközött, hogy a számneveket individuumnevekként, vagy predikátumokként fogjuk-e fel. Frege az előbbit választotta, de erről majd később.

Ami a metafizikai problémát illeti, ez az a probléma, mely már Platóntól kezdve jelen volt a filozófiatörténetben. Tehát míg a szemantikai probléma valóban csak a 19. században merülhetett fel, addig a metafizikai probléma, annak klasszikus kérdésfeltevésével már a kezdetektől jelen volt a filozófiában.

A matematika alkalmazhatósági problémája annak klasszikus megfogalmazásában a következőképpen foglalható össze. Egyrészt adott a körülöttünk levő világ, azaz a Természet a benne található konkrét fizikai tárgyakkal és ok-okozati viszonyokkal, a maga állandó változásaival együtt. Ezt a világot leginkább tapasztalati úton ismerjük meg és tényeit kontingens, olykor-olykor revideált igazságokkal írjuk le. Másrészt, ha fogalmazhatok így, adott számunkra a 'matematika birodalma', a matematika tárgyai, amelyeket jellemzően absztraktnak tekintünk (tehát téren és időn kívüli tárgyakként, amelyek nem vesznek részt oksági kapcsolatokban). Ezen birodalmat nem tapasztalati, hanem a priori módon ismerjük meg, és igazságait általában szükségszerűeknek, örökérvényűeknek tekintjük. Ez egy nyilvánvalóan elnagyolt kép, de talán jól érzékelteti azon általános meggyőződésünket (vagy legalábbis a többségünkét), miszerint a matematika tárgyainak természete különbözik a fizikai világ tárgyainak természetétől.

Mindamellett viszont azt tapasztaljuk, hogy a matematika ítéletei nagyon is sikeresen alkalmazhatóak a természet tényeire vonatkozóan. Ebből következően adódik a feltételezés, hogy kell lennie valamiféle kapcsolatnak, amely összeköti ezt a két nagyon különböző világot, és amely biztosítja a matematika empirikus világra való alkalmazhatóságát. A metafizikai probléma így tehát abban áll, hogy miként is tudunk koherens módon számot adni erről a kapcsolatról. Más szavakkal: adva a fizikai és a matematikai közötti ontológiai rést, a matematika igazságai miképpen lehetnek relevánsak az empirikus világra nézve.⁸

Mint láthatjuk, a szemantikai probléma merőben eltér az alkalmazhatósági probléma klasszikus tárgyalásától, hiszen egyáltalán nem a matematikai és a fizikai régió különbségéből fakad: a gyümölcsös példánkhoz hasonló következtetéseket ugyanúgy akár absztrakt tárgyakra vonatkozóan is felírhatnánk, például ha egy egyenlet gyökei vagy az érvényes arisztotelészi szillogizmusokat akarnánk összeszámolni. Így a klasszikustól eltérően a szemantikai probléma megoldása nem a matematikának a természetre való alkalmazhatóságáról akar állítani valamit, hanem a matematika általánosságban vett alkalmazhatóságáról, tehát tekintet nélkül arra, hogy mire is alkalmazzuk azt. Ha ez utóbbit sikeresen magyarázzuk, akkor természetesen az empirikus világra való alkalmazhatóság magyarázata is adva lesz számunkra – ezt Fregénél is megfigyelhetjük majd, aki szintén általánosságban tárgyalja az alkalmazhatóságot és a szemantikai problémára adott válaszával egyben a metafizikai problémára is válaszol.

1.1.2 FREGE MEGOLDÁSÁRÓL

Ebben a szakaszban Frege megoldását csak nagyvonalakban fogom felvázolni, ahogy azt maga Steiner is teszi, és majd csak a dolgozatom második felében fogom azt részletesebben is kifejteni, jóvátéve az erre a szakaszra jellemző tömörség okozta magyarázatbeli hiányosságokat.

⁸A probléma megoldására alapvetően két stratégia kínálkozik: vagy elismerjük az említett kapcsolat fennállását és ezzel együtt az alkalmazhatósági probléma létjogosultságát, és valóban magyarázattal kívánunk szolgálni az említett kapcsolatot illetően, vagy eleve tagadjuk a probléma fennállását. Az első stratégiát követte többek között Platon, Descartes és Kant, a másodikat Berkeley és Mill. Lásd STEINER (2005) 625-627.o. Mint láthatjuk, én azzal az előfeltevéssel vázoltam fel a problémát, hogy az említett ontológiai rés valóban fennáll, és a két régió közötti kapcsolat magyarázatra szorul.

A szemantikai problémát maga Frege vetette fel, és ha hihetünk Steinernek, ő is oldotta meg. A metafizikai probléma ellenben nem kerül explicit módon tárgyalásra Frege által, de az előbbire nyújtott megoldása erre is válaszul szolgál.

A szemantikai probléma fregei megoldásának lényege abban áll, hogy a számneveknek egységes értelmezését nyújtja: azok mind tiszta, mind kevert matematikai állításokban ugyanúgy individuumnevekként fognak szerepelni, és magukra a számokra, mint absztrakt tárgyakra, osztályokra referálnak. Így amikor azt mondjuk, hogy 'hat alma van az asztalon', akkor ezzel azt fejezzük ki, hogy 'az asztalon levő almák száma [van] hat'. Ezzel tulajdonképpen egy azonossági állítást teszünk, és mivel a számokat Frege szerint fogalmakhoz rendeljük hozzá, így minden kevert állítás felírható az ' $NxFx=n$ ' formában, ami azt jelenti, hogy az F fogalomhoz tartozó N számosság azonos n-nel. Tehát nem fizikai tárgyról/tárgyakról, hanem magáról az F fogalomról állítunk valamit, így a számtulajdonítási predikátumok másodrendű predikátumok lesznek. (Például az 'azonos 6-tal' másodrendű fogalmat/predikátumot állítjuk az 'asztalon levő gyümölcsök' elsőrendű fogalmáról.) Az 'n'-re továbbra is igaz lesz, hogy nem predikátum, hanem csupán része az ' $=$ ' n' predikátumnak és egy tárgyat nevez meg, mégpedig azt az osztályt, amelynek elemeit az adott számosságú fogalmak alkotják. Steiner interpretálásában így a következő tétel segítségével írhatjuk fel következtetésünket:

$$\forall F \forall G (NxFx = n \ \& \ NxGx = m \ \& \ \sim \exists x (Fx \ \& \ Gx) \rightarrow Nx(Fx \ \& \ Gx) = n + m)$$

Szavakkal kifejezve: Minden F-re és G-re, (ha az F-hez tartozó szám = n, és a G-hez tartozó szám = m, és nincs olyan x, ami F és G, akkor az (F és G)-hez tartozó szám = n + m). Mindezek után már nincs más dolgunk, mint F és G helyére behelyettesíteni a következtetésben szereplő fogalmakat, és máris érvényes a következtetésünk.⁹ Ezzel a szemantikai probléma megoldásra került. A metafizikai probléma megoldását pedig az a fregei nézet szolgáltatja, miszerint a matematikai entitások nem közvetlenül a fizikai világhoz, hanem csupán fogalmakhoz kapcsolódnak, fogalmak alá pedig empirikus és nem-empirikus tárgyak is eshetnek.

Steiner szavaival:

"Most már levonhatjuk a következtetést, hogy Frege teljes egészében megoldotta az alkalmazhatóság szemantikai és metafizikai problémáját. (...) a szemantikai probléma megoldása során Fregének egyetlen matematikai és nem-matematikai tárgyak közötti, metafizikailag gyanús relációt sem kellett posztulálnia. A matematikai tárgyak csak más matematikai tárgyakkal, valamint fogalmakkal állnak kapcsolatban. Az, hogy a fizikai

⁹ STEINER (1998) 17-18.o.

tárgyak fogalmak alá eshetnek és halmazok elemei lehetnek, csak azok számára probléma, akik nem hisznek a halmazok vagy fogalmak létezésében. Talán anélkül, hogy egyáltalán szándékában állt volna, Frege megoldotta az alkalmazhatóság metafizikai problémáját és feleslegessé tette 'AZ' alkalmazhatósági probléma kortárs diszkusszióit."¹⁰

Ugyanez a nyomatékos hangnem jelenik meg a következő sorokban is:

"Noha a kortárs irodalom alapján, a matematikai alkalmazhatóságot érintő legfőbb problémák azok, amelyeket 'metafizikai' problémáknak nevezhetünk (...) annak oka, hogy nem foglalkozom ezekkel a 'problémákkal' nagyon egyszerű: Frege megoldotta őket. Mindamellet, hogy Frege soha nem tette szóvá megoldását, az megjelenik a *Grundlagen*-ben. Amennyiben mégis megtette volna, úgy felesleges diszkusszióval töltött évek sokaságától kímélte volna meg a filozófiai közösséget."¹¹

Steiner tehát igen mély meggyőződéssel állítja, hogy Frege több mint száz évvel ezelőtt már megoldotta ezeket a problémákat, és azt is hozzáfűzi, hogy ha egyesek úgy tesznek, mintha ez nem így lenne, az azzal magyarázható, hogy nem fordítanak kellő figyelmet arra, hogy az alkalmazhatóság mely fogalmával is dolgoznak éppen. Az én álláspontom szerint természetesen ennek más okai vannak, mégpedig az, hogy Frege valójában nem oldotta meg végérvényesen a fenti problémákat - remélem dolgozatom következő részében sikerül majd mindezt megmutatnom.

Egyvalamiben azonban biztosan egyet kell értenünk Steinerrel, mégpedig abban, hogy Frege logikai rendszerének inkonzisztenciája nem érvényteleníti Frege megoldását. Mint ismeretes, Frege logicista programja kudarcba fulladt, mivel többek között egy olyan axiómára épített, amely mindamellet, hogy nem tekinthető logikainak, inkonzisztensnek is bizonyult. Ez az úgynevezett V. alaptörvény, amit Frege *Az aritmetika alaptörvényeiben (Grundgesetze)*¹² fogalmaz meg, és amelynek tarthatatlanságára Russell mutatott rá. Így Steiner megcáfolásához kézenfekvő lenne azt állítani, hogy Frege megoldásai azért nem tekinthetők véglegesnek, mert logicizmusa kudarcba fulladt. Ez azonban nem állja meg a helyét. Egyrészt, ahogy Steiner is említi, Boolos kimutatta, hogy a *Grundlagen* programja konzisztens másodrendű logikát alkot – ez az, amit Boolos FA-nak hív (Frege Arithmetic).¹³ Másrészt Frege elmélete a természetes számokról, valamint matematikafilozófiájának jelentős része megfogalmazható a 'fogalmak terjedelmére' való hivatkozás nélkül is, amely fogalom az V. axióma kimondására vezette őt. Harmadrészt a *Grundgesetze* formális nyelvén az alkalmazhatósági probléma meg sem fogalmazható, így

¹⁰ STEINER (1998) 23.o.

¹¹ STEINER ua., 19.o.

¹² FREGE (1893/2000) Az eredeti német cím: *Grundgesetze der Arithmetik*.

¹³ BOOLOS (1987)

amire leginkább támaszkodhatunk és támaszkodnunk kell, az változatlanul a *Grundlagen*, amely Frege aritmetikafilozófiájának logikai és filozófiai alapjait tárja elénk - ennek természetes nyelvi kontextusa az, amiben az alkalmazhatóság egyáltalán tárgyalásra kerülhet.

Mivel a *Grundlagen* Frege korai művei közé tartozik, felmerülhet bennünk a kérdés, hogy Frege későbbi írásai mennyiben módosítottak a *Grundlagen* aritmetikafilozófiáján és így valóban érdemes-e azt vizsgálat tárgyává tennünk. Ezzel kapcsolatban Dummett nyugtathat meg minket, aki részletes kifejtését adja annak, hogy Frege aritmetikafilozófiája, munkássága során milyen változásokon esett át. Összességében azt láthatjuk, hogy a természetes számok elméletének logikai konstrukciója ugyanaz maradt a *Grundgesetzeben* is, csak sokkal részletesebben kifejtve. Ugyanígy a 'Jelentés és jelölés'¹⁴ tanulságai sem mondanak ellent a *Grundlagenben* foglaltaknak, hanem sokkal inkább pontosítják és kiegészítik azokat, úgy ahogy azt Frege a 'Függvény és fogalom' vagy a 'Fogalom és tárgy' című írásában is teszi.¹⁵ Dummett konklúziója tehát az, hogy a *Grundlagen*et, mint olyat tarthatjuk számon, amely Frege érett aritmetikafilozófiájának hiteles képét nyújtja, nem pedig csupán munkásságának egy már felülírt szakaszát.¹⁶

Amiben szintén egyet kell értenünk Steinerrel (és Dummettel is), az az, hogy Frege megoldása számos előnnyel bír, és elkerüli mind a Mill-féle empirizmussal, mind a standard matematikai platonizmussal járó problémákat.¹⁷ Maga Frege is platonista álláspontot képvisel, úgyhogy mielőtt belekezdünk Frege kritikai tárgyalásába, érdemes áttekinteni elméletének erőit is, szembeállítva azt az említett két állásponttal.

Dummett Steinernél sokkal érzékletesebben fejezi ki az alkalmazhatósági problémával járó nehézségeket. 1. Ha túl szorosra fűzzük a kapcsolatot a matematika birodalma és az empirikus világ között, akkor noha a matematikai és a fizikai közelsége miatt az alkalmazhatóság könnyedén biztosítható lesz, nagy eséllyel búcsút mondhatunk a matematikai igazságok szükségszerűségének. 2. Ellenben ha túlságosan nagy távolságot feltételezünk a két régió között, túlságosan elszigeteljük őket egymástól akkor a matematikai igazságok szükségszerű jellege nem fog ugyan sérülni, de nem fogunk tudni kapcsolódási pontot találni a két régió között.¹⁸

¹⁴ FREGE (1892/2000)

¹⁵ FREGE (1891/2000) és FREGE (1892/2000a)

¹⁶ DUMMETT (1991) 1-9.o.

¹⁷ STEINER (2005) 642-643.o. A platonizmus részletes áttekintését nyújtja LINNEBO (2011)

¹⁸ DUMMETT (1993) 430.o.

Az első klasszikus esete a Mill-féle empirizmus, a másodiké pedig a platonizmus, ugyanis egyikük sem tud eleget tenni azon követelményeknek, amelyeket elvárnánk az alkalmazhatósági probléma megoldásától: hogy megőrizzük a matematikai igazságok szükségserűségét, illetve hogy széleskörű alkalmazhatóságot biztosítsunk.¹⁹

Mill álláspontja igen egyedi: az aritmetikát is empirikus tudománynak tartotta, annak tételeit pedig érzéki megfigyeléseken alapuló induktív általánosítások eredményének. Például a hármas szám definíciója szerint tárgyak egy bizonyos kapcsolatában áll, amelyek egy adott érzéki benyomást okoznak bennünk (például látunk három kavicsot). Az alkalmazhatóság így már eleve adva lesz a definíciókban, de többek között nehezen tudunk majd mit kezdeni a 0-val és a nagy számokkal, hiszen nehézkes lenne ezeket bármely fizikai ténynek is megfeleltetni. A következmények egyértelműek: lemondhatunk a matematikai igazságok szükségserűségéről, és az alkalmazhatóság egy jelentős területéről, ugyanis csak a fizikai tárgyakra való alkalmazhatóságot fogjuk tudni magyarázni. Továbbá az aritmetika jelentős részét is ellehetetleníti az elmélet, hiszen csak arról tud mondani valamit, ami érzékileg megfigyelhető.²⁰

A platonizmus ezzel szemben azt állítja, hogy a matematika tárgyai az empirikus valóságon túli absztrakt, elmefüggetlen, objektív entitások. Ezeket az intuíció képessége által ragadhatjuk meg, ami párhuzamba állítható a fizikai tárgyak érzékelésének képességével, így a matematika tárgyait ugyanúgy felfedezzük, nem pedig feltaláljuk.²¹ Ezzel kapcsolatban rögtön két kérdés is adódik. Ha a matematika különálló birodalmat képez, akkor 1. hogyan szerezhethetünk tudást róla? 2. miképpen magyarázhatjuk a matematika fizikára való alkalmazhatóságát? Az intuíció képessége, ami az 1. probléma áthidalására hivatott, nem nyújthat számunkra kielégítő magyarázatot, ugyanis teljes egészében figyelmen kívül hagyja a matematika és a fizika között fennálló módszertani különbségeket, különös tekintettel a bizonyítás módjára.²² Ebben a felfogásban a 2. kérdésre szintén nem adhatunk megfelelő választ, hiszen amennyiben a matematika tárgyai absztrakt entitások és nem vesznek részt

¹⁹ Ez az, amit Pincock *Dummett-dilemmájának* nevez, ugyanis nehéz olyan megoldást találni a matematika alkalmazhatósági problémájára, mely mindkét követelménynek eleget tesz. Lásd PINCOCK (2004) 141-142.o.

²⁰ Frege hosszas és csipős kritikáját nyújtja a milli "kavics- és mézeskalács-aritmetikának". Lásd FREGE (1884/1999) 28-42.o.

²¹ Ez a Gödel-féle platonizmus álláspontja, ami a platonizmus legkidolgozottabb változata.

²² Egyrészt ha komolyan vesszük az analógiát az érzékelés és az intuíció között, arra jutunk, hogy előfordulhatnak olyan matematikai tények, amelyek semmilyen olyan más ismeretünkből nem levezethetőek, aminek tudatában vagyunk. Másrészt a matematikában nincs olyasmi, mint 'következtetés a legjobb magyarázatra' – egy matematikai tétel igazolásánál, szemben a fizikaival nem a következményeket teszteljük le, hanem megnézzük, hogy azokból az igazságokból, amelyekkel már rendelkezünk, levezethető-e az adott tétel. Harmadrészt míg a fizikában megvan a lehetőségünk arra, hogy újabb és újabb finomításokat hajtsunk végre a megfigyelési eszközeinken mintegy kibővíve az érzékelésünk határait, addig az intuíció képességének fejlesztése nem igazán áll módunkban; és még sorolhatnánk. Lásd DUMMETT (1993) 431.o.

oksági relációkban, világos hogy nem állhatnak kapcsolatban az oksági törvények által meghatározott fizikai világgal. Így noha a matematikai igazságok szükségszerű jellege biztosított, a bizonyítás módja, valamint a matematika alkalmazhatósága magyarázat nélkül marad.

A matematika tehát nem az empirikus, és nem is az empirikuson túli valóságról szól. De akkor miről? Ahogy azt Dummett írja, Frege válasza briliáns. Eszerint...

"(...) a matematika nem szól különösképpen semmiről: inkább komplex deduktív érvek szisztematikus felépítésében áll. A deduktív gondolkodás viszonylag gyenge premisszákból kiindulva és a nyilvánvalótól távol álló utakat járva képes gyakran meglepő következmények sokaságának felfedezésére. A matematikában az ilyen utak feltárára kerülnek, és a következményeik deriválásának eszközei propozíciók formájában megőrzésre kerülnek a jövő számára. A matematikai tételek ebben a felfogásban deduktív alprogramokat testesítenek meg, amelyeket ha egyszer felfedeztünk, azok ismételten felhasználhatóak a legkülönbözőbb kontextusokban."²³

Frege logicista platonizmusa tehát nem csak, hogy megőrzi a matematikai igazságok szükségszerű jellegét, hanem azok logikai megalapozásáról is gondoskodik, és ezzel megfelelő képet ad a matematika és más tudományok közötti különbségekről az ismeretszerzés, a bizonyítás módját és az ismeretek valószínűségi fokát illetően. Ebben a felfogásban az aritmetika a geometriától is elkülönül. Míg ez utóbbi állításai szintetikus *a priori*ak, addig az aritmetika analitikus *a priori* állításokkal dolgozik, vagyis állításokkal, amelyek levezethetők olyan általános logikai törvényekből, amelyek maguk nem szorulnak bizonyításra. A számok törvényei és a gondolkodás törvényei így a legbensőbb kapcsolatban állnak egymással, hiszen az aritmetika mindenre vonatkozik, ami elgondolható.²⁴ Ezzel a matematika széleskörű alkalmazhatósága magyarázatra lel. Továbbá mivel a matematika kijelentései ugyanúgy állítások, tehát igazak vagy hamisak, így érthetővé válik, hogy a matematikusok miért érdekeltek abban, hogy állításaik igazságértékeit alkalmazásuktól függetlenül is meghatározzák, valamint így az alkalmazott matematikai állítások tartalmáról és igazságértékéről is számot tudunk adni, bármire is alkalmazzuk őket.²⁵

²³ DUMMETT (1993) 431.o.

²⁴ FREGE (1884/1999) 39.o. Frege szerint sokat köszönhetünk Kantnak az analitikus és szintetikus ítéletek megkülönböztetése miatt, noha míg Kant szerint az aritmetika, csakúgy mint a geometria, szintetikus a priori ítéleteket fejez ki, addig Frege szerint az aritmetika törvényei analitikusak, következésképp a prioriak. Ezzel kapcsolatban megjegyzendő, hogy Fregét egyáltalán nem az ítéletek tartalma, vagy a tartalom megalkotásának módja érdekli, amikor újradefiniálja a kanti distinkciókat, hanem az ítéletek igazolásának módja. Az ő meghatározásában a szintetikus a priori ítéletek olyan, egy speciális tudományhoz tartozó (vagyis nem logikai) általános törvények alapján bizonyíthatóak, amelyek maguk nem szorulnak bizonyításra. FREGE ua. 23.o.

²⁵ DUMMETT uo. Frege így egy nagyon egyedi keverékét teremtette meg a logicizmusnak és a platonizmusnak. Ahogy azt Dummett megfogalmazza, a logicizmus nem természetes szövetségese a platonizmusnak, mivel a

2. FREGE ÉS AZ ALKALMAZHATÓSÁGI PROBLÉMA

A továbbiakban először is ki szeretnék térni a *Grundlagen* azon állításaira, melyek Frege megoldásának alapjául szolgálnak, valamint részletesebb áttekintését szeretném nyújtani a Julius Caesar-problémának, amely miatt - állításom szerint - Frege megoldása nem tekinthető végérvényesnek.

2.1 GRUNDLAGEN

A *Grundlagen* - továbbiakban *Gl* a másodlagos szakirodalomnak megfelelően – egyik fő kérdését a 62.§-ban olvashatjuk:

"Hogyan lehet hát adott számunkra egy szám, ha se képzetünk, se szemléletünk nem lehet róla? A szavak a mondatok összefüggésében jelentenek valamit. Feladatunk tehát az, hogy meghatározzuk az olyan mondatok értelmét, melyekben számnév fordul elő."

Mivel Frege az aritmetika szigorú, logikai alapokra való helyezését tűzte ki céljául, így a *Gl* első harmadát annak megmutatására szentelte, hogy az aritmetika nem lehet sem tapasztalati, sem szemléleti megalapozottságú. A számok tehát nem lehetnek külső dolgok tulajdonságai (lásd Frege Mill-kritikáját), viszont szubjektívak sem lehetnek, tehát nem azonosíthatjuk őket mentális képekkel, folyamatokkal és megalapozásukat sem építhetjük ezekre (ez egyben Frege Kant-kritikájának és anti-pszichologizmusának fő mondanivalója).²⁶ Amikor számot rendelünk valamihez, azt nem egy külső dologhoz és nem is valami mentálishoz rendeljük hozzá, hanem fogalmakhoz. A számneveket tartalmazó kijelentések így igazából fogalmakról állítanak valamit. Például az előttem levő fákra ugyanúgy mondhatom, hogy 'egy facsoport' és azt is, hogy 'öt fa'. Amennyiben a számokat tárgyaknak tulajdonítanánk, azt láthatnánk, hogy ugyanazon tárgyakhoz különböző számokat rendelhetünk hozzá. A facsoport-fogalom, illetve a fa-fogalom esetében viszont nem szembesülünk ezzel a problémával, és így a számtulajdonítások ugyanúgy kizárják egymást, mint ahogy azt más azonos típusba eső predikátumoknál is megfigyelhetjük (mint ahogy nem állíthatjuk valamiről egyszerre azt,

logika legáltalánosabb felfogása szerint nem léteznek logikai tárgyak: Frege bűvészmutatványa volt, hogy a számelmélet és az elemzések vonatkozásában a platonizmust logicizmussal kombinálta. DUMMETT (1991) 301.o.

²⁶ Szemlélet alatt természetesen a kanti szemlélet-fogalmat kell értenünk, de mint az kimutatható, Frege két különböző értelemben is használja a szót, hol valamiféle szubjektív belső képet, hol bizonyításra nem szoruló azonnali belátást értve rajta (Kant szerint a számformulák ugyanis nem bizonyíthatóak). Erről a kettős szemléletfelfogásról, illetve arról, hogy Frege érvei mennyiben állják meg a helyüket a kanti szemléletfelfogást figyelembe véve, lásd JOHN (2008)

hogy mozgásban van és nyugalomban van). Mindez pedig igen előnyös a számok alkalmazhatóságára nézve. Ahogy Frege megfogalmazza:

"Ezek után a szám széles alkalmazhatósága is magyarázatra lel. Valóban rejtélyes, hogyan lehetne ugyanazt kimondani belső és külső jelenségekről, térbeli és időbeli dolgokról, de ugyanúgy téren és időn kívüliekről is. De végülis a szám megadásánál ez egyáltalán nem is történik meg. Csak ama fogalmaknak tulajdonítunk számokat, melyek alá aztán a belsőt és a külsőt, térbelit és az időbelit, a téren és időn kívülit hozzuk." (Gl 48.§)

Fontos megjegyezni, hogy fogalom és tárgy megkülönböztetése jelen esetben grammatikai/szintaktikai alapokon történik. A fogalom mindig predikatív, ellenben egy tárgynév soha nem léphet fel fogalomként, viszont fogalom részét képezheti! Frege szavaival:

"Fogalom számomra az, ami egyedi megítélhető tartalmak lehetséges állítmánya, tárgy az ilyen lehetséges alanya. Ha az '*a távcső tengelyének iránya egyenlő a Föld tengelyének irányával*' mondatban '*a távcső tengelyének irányát*' alannak tekintjük, akkor az állítmány az, hogy '*egyenlő a Föld tengelyének irányával*'. Ez fogalom. A Föld tengelyének iránya azonban az állítmánynak csak egy része; önmagában véve tárgy, mivel alannya is tehető." (Gl 103. lábjegyzet)

A fentiek értelmében, amikor azt mondjuk, hogy az 'F fogalomhoz az n szám tartozik', az 'n szám', mint tárgy az 'n szám tartozik hozzá' fogalom részét képezi – éppen ezért nem mondhatjuk, hogy a szám egy fogalom tulajdonsága lenne, hanem csupán azt, hogy egy része annak. Az 'n szám tartozik hozzá' másodrendű fogalmat pedig elsőrendű fogalomhoz rendeljük hozzá, például 'az asztalon levő gyümölcsök' fogalmához, vagy 'ezen egyenlet gyökei' fogalmához.²⁷

Ez azonban még nem elégséges annak meghatározásához, hogy mit is fejeznek ki a számneveket tartalmazó mondatok (mondatok, mivel a kontextus-elv értelmében a szavak jelentése mindig csak a mondatok kontextusában adott). Ahhoz, hogy meghatározhassuk ezen mondatok értelmét, először is meg kell határoznunk az újrafelismerést kifejező mondatokat, amely által bármely két számneveket tartalmazó mondatról el tudjuk dönteni, hogy vajon

²⁷ Amikor viszont azt mondjuk, hogy '*a Vénusz a Hajnalszallag*', akkor igazából azonosságot állítunk (azt, hogy a két individuumnév ugyanazt a tárgyat jelöli ki), és az azonosság természetesen minden esetben megfordítható. Ellenben ha a kapcsolat alany és állítmány között egy tárgynak a fogalom alá való esését fejezi ki, például '*a Vénusz bolygó*' mondatban, akkor nem megfordítható a kapcsolat, hiszen ezzel azt fejezzük ki, hogy a Vénusz, mint tárgy, a '*bolygó*' fogalma alá esik. A distinkcióval kapcsolatban eddig elhangzottakról lásd FREGE (1892/2000a) 100-105.o., illetve Gl 72-80.o. A 'Fogalom és tárgy' c. írásában Benno Kerry *Grundlagennel* kapcsolatban tett kritikáira válaszolva Frege részletesebben is vizsgálja a kettő közötti különbséget, immár jelentés és jelöllet megkülönböztetését is belefoglalva. Kerry azt kifogásolja, hogy tárgy és fogalom megkülönböztetése igen csak relatív, és lehet valami egyszerre tárgy és fogalom is, például '*a ló-fogalom*' tárgyként léphet fel. Frege felfogásában azonban '*a ló-fogalom*' egy tárgy neve, nem pedig fogalom. Lásd FREGE (1892/2000a) 104-105.o.

ugyanazt a számot jelölik-e ki. Frege szavaival: "Ha az a jellel tárgyat kell jelölnünk, akkor kell, hogy legyen olyan ismertetőjelünk is, amely minden esetben eldönti, hogy *b* ugyanaz-e, mint a (...) Azután, hogy hozzájutottunk egy ilyen eszközhöz arra, hogy megragadjunk és azonosként újra felismerjünk egy számot, megtehetjük, hogy egy számnevet adunk neki tulajdonnévként". (Gl 62.§) Frege ehhez az úgynevezett Hume-elvet hívja segítségül: 'az *F* fogalomhoz tartozó szám ugyanaz, mint a *G* fogalomhoz tartozó szám, ha az *F* és *G* alá eső tárgyak egy az egyhez megfeleltethetőségűek, vagyis kölcsönösen egyértelmű hozzárendelhetőség áll fenn közöttük'.

Ezzel a definícióval kapcsolatban azonban komoly problémába ütközik: nem mondja meg, hogy mi is egy szám - ezzel el is érkeztünk a Julius Caesar-problémához, amit majd a következő szakaszban fogok részletesebben kifejteni. Most csak annyit, hogy a probléma elnevezése abból a kérdésből fakad, hogy a definíció alapján nem tudjuk eldönteni, hogy Julius Caesar szám-e. Frege ennek okán módosít a definíción, és bevezeti a fogalom terjedelmét: "az *F* fogalomhoz tartozó számosság az 'egyenlő számosságú az *F* fogalommal' fogalom terjedelme". (Gl 68.§) Ezzel már a számok logikai alapokon való definíciója is lehetővé vált (például a nulla az 'önmagával nem azonos' fogalom terjedelmével azonos szám). Így módosítva a Hume-elvet azt kapjuk, hogy 'az *F*-hez tartozó szám azonos a *G*-hez tartozó számmal, akkor és csak akkor, ha az *F* és *G* terjedelme között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés tehető'.

Ezzel Frege megoldottnak tekintette a problémát. Így elmondhatjuk, hogy a számnevek osztályokat jelölnek ki, mégpedig azon fogalmak osztályait, amelyek alá adott számosságú tárgy esik. Ez az osztály adja meg az adott számfogalom terjedelmét. Például a 'hét' számnév egy olyan halmazt jelöl, mely elemként tartalmaz minden hét elemű halmazt – ez adja a hét fogalmának terjedelmét.

Mindezzel a matematika alkalmazhatóságáról teljeskörű magyarázatot kapunk. A számok meghatározása már eleve magában foglalja azok alkalmazásának lehetőségeit, és azáltal, hogy a számtulajdonítási fogalmak pusztán fogalmakhoz kapcsolódnak és hogy fogalmak alá mindenféle tárgy eshet, a metafizikai problémáról számot is adtunk, a számok egységes tárgyként való értelmezésével pedig a szemantikai/logikai problémát is megoldottuk.

Mint korábban utaltunk rá, az úgynevezett V. axiómával kapcsolatos Russell-paradoxon, mely a fogalmak terjedelmével kapcsolatban is ugyanúgy megfogalmazható, nem érinti az alkalmazhatósági probléma megoldását. (Boolos volt az, aki kimutatta ugyanis, hogy *Gl*-ben a fogalmak terjedelmére való hivatkozás helyettesíthető a Hume-elvre való hivatkozással.) Azonban állításom az, hogy a Julius Caesar problémáról mindez nem mondható el. A

következő szakaszban a problémát érintő fregei szövegrészek felhasználásával az alkalmazhatósági probléma és a Julius Caesar-probléma közötti összefüggésekre rámutatva szeretnék érvelni állításom tarthatósága mellett.

2.2. A JULIUS CAESAR-PROBLÉMA

A Julius Caesar-probléma a *Gl*-ben kétszer is előkerül. Először az 56.§-ban, miután az előző paragrafusban Frege megkísérli a 0 és az 1, valamint a számok egymásra következésének definícióját:

"(...) Hasonlóképpen mondhatnánk azt is: egy F fogalomhoz az 1 szám tartozik, ha nem érvényes általánosan, bármely a -ra az a tétel, hogy a nem esik F alá, viszont az

" a F alá esik" és " b F alá esik"

tételekből általánosan következik, hogy a és b ugyanaz.

Még az van hátra, hogy általánosan meghatározzuk az átmenetet egy számról a rákövetkezőre. A következő megfogalmazást próbálhatjuk ki: az F fogalomhoz az $(n+1)$ szám tartozik, ha létezik olyan a tárgy, amely F alá esik és olyan, hogy az " F alá esik, de nem a " fogalomhoz az n szám tartozik.

56.§ Ezek a meghatározások olyan magától értetődően kínálóznak eddigi eredményeink alapján, hogy ki kell fejtenünk, miért nem tekinthetjük őket kielégítőnek.

Leginkább az utolsó definíció ébreszthet kételyt, lévén, hogy szigorúan véve "az F fogalomhoz az n szám tartozik" kifejezés értelme éppolyan ismeretlen számunkra, mint azé, hogy "az F fogalomhoz az $(n+1)$ szám tartozik". Azt ugyan ennek és az utolsó definíciónak a segítségével meg tudjuk mondani, hogy mit jelent

"az F fogalomhoz az $1+1$ szám tartozik",

azután, ezt felhasználva, meg tudjuk adni annak a kifejezésnek az értelmét, hogy

"az F fogalomhoz az $1+1+1$ szám tartozik"

stb.; de – hogy kirívó példát adjunk – *azt definíciónk alapján soha nem fogjuk tudni eldönteni, hogy egy fogalomhoz a Julius Caesar szám tartozik-e, hogy Galliának ez az ismert hódítója szám-e, avagy nem. Meghatározási kísérletünk alapján azt sem tudjuk bizonyítani, hogy ha az F fogalomhoz az ' a ' szám tartozik, és ugyancsak a ' b ' szám, akkor fenn kell, hogy álljon $a=b$. Ezért nem volna igazolható az a kifejezés, hogy "azon szám, mely az F fogalomhoz tartozik", következésképp általában lehetetlen volna igazolni számok közötti egyenlőségeket, mivel egyáltalán nem tudnánk megragadni egy meghatározott számot. Csupán látszat, hogy amit meghatároztunk, az a 0 és az 1; valójában csak a*

"hozzá tartozik a 0 szám"

"hozzá tartozik a 1 szám"

szófordulatok értelmét adtuk meg; de az nem megengedett, hogy ezeken belül 0-t és az 1-et mint önálló, újra felismerhető tárgyat különböztessük meg." (*Gl* 55-56.§) [kiemelés tőlem]

A Julius Caesar-probléma tehát a számok individuációjának problémája. Mivel Frege a számokat, mint önálló tárgyakat akarja meghatározni, így meg kell tudni mondania, hogy a számnevek mire is referálnak. Ha nem tudjuk megmondani, hogy mi egy szám, és hogy hogyan különítsük el más dolgoktól, akkor azt sem fogjuk tudni megmondani, hogy egy szám azonos-e Julius Caesarral, vagy hogy a kettő azonos-e hárommal – így az egyenlőségek logikai alapokon történő igazolása lehetetlen, továbbá a számneveket tartalmazó mondatok

értelmét sem tudjuk megadni, mert nem fogjuk tudni, hogy mi az a számosság, amit bennük újra felismerhetünk.

Frege a probléma megoldását először a 62-63.§-ban nyújtja, amikor is bevezeti a már említett Hume-elvet: 'az F fogalomhoz tartozó szám ugyanaz, mint a G fogalomhoz tartozó szám, ha az F és G alá eső tárgyak között kölcsönös egyértelmű hozzárendelhetőség áll fenn'. Frege a Hume-elvben egy olyan eszközt lát, amely alkalmas arra, hogy megadja a számok egyenlőségének általános ismertetőjegyét, továbbá arra is, hogy általa megragadjunk, és azonosként újra felismerjünk egy számot. Azonban hamar csalódnia kell, és már a 66.§-ban más megfogalmazásban ugyan, de újra szembetaláljuk magunkat a Julius Caesar-problémával. Itt Frege az "a iránya megegyezik b irányával" példát használja az 'F fogalomhoz tartozó szám azonos a G fogalomhoz tartozó számmal' megfelelőjeként, és a következőkre jut:

"(...) ez az eszköz [a Hume-elv] nem minden esetben kielégítő. Azt például nem tudjuk segítségével eldönteni, hogy Anglia ugyanaz-e, mint a Föld tengelyének iránya. Bocsánat ezért az értelmetlennek látszó példáért! Természetesen senki nem fogja összetéveszteni Angliát a Föld tengelyének irányával; de ez nem a mi meghatározásunk érdeme. (...) Hiányzik az irány fogalma; hiszen ha ezzel rendelkezniénk, akkor leszögezhetnénk, hogy ha q nem irány, úgy mondatunkat tagadni kell; ha q irány, akkor az előbbi meghatározás dönt."

Tehát a Hume-elv sem mondja meg nekünk, hogy mi is egy szám. Természetesen ez olyasmi, amit mindannyian tudunk, de mivel Frege az aritmetika logikai megalapozását tűzte ki célul, nem támaszkodhat semmiféle előzetes tudásra, és ennek tudatában helyesen állapítja meg a Hume-elvnek, mint implicit definíciónak, a számok azonossági kritériumként való használhatatlanságát. A történet innentől ismerős: Frege explicit definíciót vezet be és kijelenti, hogy 'az F fogalomhoz tartozó számosság az 'egyenlő számosságú az F fogalommal' fogalom terjedelme'. A Hume-elv terjedelmekkel való megfogalmazása viszont, mint később az V. alaptörvénnyel kapcsolatban kiderül, nem nyújthat szilárd alapokat a számosság meghatározására. A Julius Caesar-probléma tehát megoldatlan marad.

Így nem maradt más hátra, mint hogy szemügyre vegyük, hogy az említett probléma érinti-e a szemantikai és a metafizikai probléma megoldását.

Először is tisztáznunk kell, hogy a Julius Caesar probléma, csakúgy mint az alkalmazhatósági probléma, csak és kizárólag a *Grundlagen* nyelvezetén fogalmazható meg, hiszen a *Grundgesetze* formális nyelve vagy akár általában a tiszta aritmetika nyelve egyáltalán nem

teszi lehetővé a Julius Caesar-ra való referálást. Tehát kérdésfeltevésünk csak a *Gl* keretein belül lehetséges.

Demopoulos és Clark következő sorai a témában nem igazán biztatóak Steiner álláspontjára nézve:

"A tiszta aritmetika esetében a Julius Caesar-probléma nem vethető fel, mivel a tiszta aritmetika nyelvezetében nincsenek benne olyan szinguláris terminusok, mint *a*. De amint a nyelvet kiterjesztjük úgy, hogy empirikus szinguláris terminusokat is magában foglaljon, ahogy az az alkalmazott aritmetika esetében lenne, a Hume-elv többé már nem alapozza meg a számbeli egyenlőségek értelmét, és a Julius Caesar probléma már nem hagyható figyelmen kívül. (...) a nehézség abban áll, hogy minden olyan nyelv, amelyen az aritmetika alkalmazhatósági problémája értelmesen felvethető, olyan nyelv, amelyben a Julius Caesar problémával szintén szembe kell nézni. És ez utóbbi az, ami úgy tűnik, kifogott Fregén."²⁸

Ez persze még nem kell, hogy Steiner kedvét szegje, hiszen az idézet csak annyit állít, hogy mindkét probléma csak és kizárólag természetes nyelvi közegben fogalmazható meg, de azt nem mondja ki, hogy az utóbbi probléma meg nem oldása hatálytalanítja az alkalmazhatóság megfelelő magyarázatát. Steinert úgy tudjuk megcáfolni, ha rámutatunk a két probléma közötti összefüggésekre. Ehhez pedig a fentiek értelmében elegendő rámutatnunk a Hume-elvnek az alkalmazhatóság magyarázatában betöltött központi szerepére.

A szemantikai/logikai probléma esetében ez egyértelmű, hiszen az arra épül, hogy a számokat, mint tárgyakat fogjuk fel, akár kevert, akár tiszta matematikai állításokban fordulnak is elő a számnevek. Ahogy már említettük, a Hume-elv hivatott a számbeli egyenlőségek értelmének megalapozására, arra hogy megragadjunk, és azonosként újra felismerjünk egy számot. Ahogy Frege mondja, "az egyenlőségek sokoldalú és jelentős alkalmazhatósága jóval inkább azon nyugszik, hogy fel tudunk valamit újra ismerni, habár különböző módokon adott". (*Gl* 67.§) Enélkül még az 'F fogalomhoz tartozó szám' értelmét sem tudnánk megragadni (*Gl* 56.§), mivel nem tudnánk megállapítani, hogy melyik is az a szám. Ezek alapján pedig egyértelmű, hogy az 1.1.1.-ben felvázolt gyümölcsös következtetést sem tudnánk értelmezni vagy kielégítően megalapozni.

Itt azonban meg kell említenünk egy esetleges zavarforrást. Steiner a kevert és tiszta állításokat is tartalmazó következtetések logika érvényességével kapcsolatos kérdést hol logikai, hol szemantikai problémának nevezi, és mint láthattuk, a probléma megoldását is formalizálva vázolta fel. Azonban ezen a ponton újra fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy amennyiben a szemantikai/logikai problémát az alkalmazhatósági probléma egy eseteként

²⁸ DEMOPULOS–CLARK (2005) 137-138.o.

akarjuk számon tartani, akkor félrevezető a 'logikai probléma' elnevezés és a formális nyelv használata, hiszen ez az a nyelv, amelyben a probléma meg sem fogalmazható. Biztosak lehetünk benne, hogy az a mód, ahogy Frege formalizálná a következtetést, érvényes eredményre vezetne, még akkor is, ha a logikája mögött meghúzódó filozófiai elgondolások problémákba ütköznek. Ebből a szempontból tehát a 'szemantikai probléma' elnevezés véleményem szerint találóbb, még akkor is, ha az alkalmazhatóság deduktív funkciójára helyezzük a hangsúlyt. A kérdést tehát nem úgy kellene megfogalmazni, hogy hogyan is biztosítsuk az adott következtetés érvényességét, hanem hogy milyen értelmezését kell adnunk az alkalmazott matematikai állításoknak ahhoz, hogy kevert kontextusú következtetésekben premisszaként szerepeltethessük őket.

Ami a metafizikai problémát illeti, kézenfekvő lenne azt állítanunk, hogy mivel a szemantikai probléma megoldása szolgáltatta a metafizikai probléma megoldását is, így mivel az előbbit nem tekintjük megoldottnak, az utóbbit sem tekinthetjük annak. Tulajdonképpen így is áll a helyzet. A számok absztrakt, objektív entitások, és ha semmilyen módon nem tudjuk megragadni őket, ha nem tudunk számot adni a referenciájukról, akkor legfeljebb annyit állíthatunk róluk, hogy vannak – ez azonban nem sok mindent magyarázna. Ahogy azt Dummett megfogalmazza, tipikus ellenérv az absztrakt tárgyakkal szemben, hogy mivel nincs oksági erejük, nem magyaráznak semmit, ez azonban egyáltalán nem így van. Vegyük Frege (és egyben Dummett) példáját, az Egyenlítőt, ami szintén absztrakt, objektív tárgy, mégis van magyarázóereje. Persze *csak akkor* érthetjük meg, hogy mi a referenciája, ha értjük azokat a mondatokat, amelyek magukban foglalják azt, és csak ha megadtuk ezen mondatok igazságfeltételeit, tudjuk elmagyarázni, hogy mi is az a tárgy.²⁹ És mint láthatjuk, a Julius Caesar probléma lehetetlenné teszi, hogy utat találjunk a számokhoz, hiszen lehetetlenné teszi, hogy megmondjuk, hogy egy adott fogalomhoz mely számosság tartozik, mivel az egyenlőségek meghatározottsága nélkül, még csak meg sem tudjuk érteni az ilyen típusú állításokat. Megértés nélkül pedig a referenciájukat sem tudjuk kijelölni. Így összességében levonhatjuk a konklúziót, hogy Frege megoldása – szemben a Steiner által írottakkal – nem jelenti a szemantikai és a metafizikai probléma végső megoldását.³⁰

²⁹ DUMMETT (1993) 434.o. Ahogy azt Dummett is megjegyzi, Frege és Russell számára is a fő problémát a matematikai tárgyak referenciája okozta.

³⁰ Végh amellett érvel, hogy a számok megragadására a Hume-elv az általunk elérhető legjobb eszköz. Erre utal többek között az is, hogy a Julius Caesar-probléma megoldási kísérletei sorra kudarcba fulladtak. Ha pedig nem tudjuk a számokat közvetlen módon megragadni, akkor valamilyen szemléletben kell, hogy adottak legyenek. Végh nem foglal állást az ügyben, hogy miféle szemléletről is van szó. VÉGH (2005) 337.o. Frege ellenben egyértelműen foglalt állást: életének utolsó éveiben visszatért ahhoz az állásponthoz, amit annak idején a *Grundlagenben* elvetett, tudniillik, hogy az aritmetika nem alapulhat pusztán a logikán, hanem mindamellett, hogy igazságai a priori igazságok, tiszta téri vagy idői szemléletben kell alapulniuk. Fregének azonban már nem

KONKLÚZIÓ

Mint láthattuk, noha Steiner igen erős meggyőződéssel állítja, hogy Frege-nek a matematikai alkalmazhatóság szemantikai és metafizika problémára nyújtott megoldása végérvényesnek tekinthető, a Julius Caesar-probléma alkalmazhatósági problémával való összefüggéseinek fényében mindez nem csak hogy kétségbevonható, hanem meg is cáfolható.

A *Grundlagen* prózai nyelvezete, amelyen az alkalmazhatóság kérdése felvetődik, a Julius Caesar-problémával való szembenézést is megköveteli, és a fentiek fényében most már kijelenthetjük, hogy amennyiben ez utóbbi problémára nem tudunk kielégítő válasszal szolgálni, úgy magyarázatunk az aritmetika alkalmazhatóságát illetően szintén nem mondható teljesnek. Ha esetleg be is bizonyosodna, hogy a Hume-elv a számunkra elérhető legjobb eszköz a számok megragadására, az sem jelentene kiutat Frege számára, hiszen a számok pusztán logikai alapokon történő megragadása továbbra is lehetetlen lenne. És mivel a *Grundlagen* középpontjában nem az alkalmazhatóság, hanem a logicizmus áll, így ha esetleg Frege már jóval korábban lemondott volna az aritmetika logikai megalapozásáról, az a szemantikai és metafizikai probléma teljesen más felépítésű magyarázatát implikálta volna.

Összességében tehát azt mondhatjuk, hogy Steiner tévedett az említett fregei megoldások végérvényességét illetően, és így továbbra is nyitott az alkalmazhatósági probléma metafizikai és szemantikai jellegű diszkussziója.

állt módjában kifejezni álláspontját, és így nem tudhatjuk biztosan, hogy vajon a Hume-elvvel kapcsolatos problémák vezették-e el ehhez a szemléletváltáshoz.

BIBLIOGRÁFIA

BOOLOS, George (1987): The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. In: Thomson, J. Jarvis: On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright. MIT Press, Cambridge (Mass.) 3-20

COLYVAN, Mark (2001): The Miracle of Applied Mathematics. *Synthese*, 127 (3), 265-277

DEMOPOULOS, William – CLARK, Peter (2005): The Logicism of Frege, Dedekind and Russell. In: Shapiro, Stewart (szerk.): The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press, Oxford, 129-165

DUMMETT, Michael (1991) Frege. Philosophy of Mathematics. Duckworth, London

DUMMETT, Michael (1993): 'What is mathematics about?' In: Dummett, Michael (szerk.) The Seas of Language, Oxford University Press, Oxford, 429-445

FREGE, Gottlob (1884/1999): Az aritmetika alapjai. Áron Kiadó, Budapest

FREGE, Gottlob (1891/2000): Függvény és fogalom. In: Ruzsa Imre (szerk.) Gottlob Frege. Logika, szemantika, matematika. Gondolat Kiadó, 74-99

FREGE, Gottlob (1892/2000): Jelentés és jelölet. In: Ruzsa Imre (szerk.) Gottlob Frege. Logika, szemantika, matematika. Gondolat Kiadó, 118-147

FREGE, Gottlob (1892/2000a): Fogalom és tárgy. In: Ruzsa Imre (szerk.) Gottlob Frege. Logika, szemantika, matematika. Gondolat Kiadó, 100-117

FREGE, Gottlob (1893/2000): Az aritmetika alaptörvényei, I. kötet. In: Ruzsa Imre (szerk.) Gottlob Frege. Logika, szemantika, matematika. Gondolat Kiadó, 148-178

HORSTEN, Leon (2012): Philosophy of Mathematics. In: Edward N. Zalta (szerk.): The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2012 Edition). URL = <http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/>

JOHN Éva (2008): Az ezerszög kalandjai. Egy gyakori félreértés Kant szemléletfogalmával kapcsolatban. *Világosság* 2008/2, 15-26

LINNEBO, Oystein (2011): Platonism in the Philosophy of Mathematics. In: Edward N. Zalta (szerk.): The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition). URL = <http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/>

PINCOCK, Christopher (2004): A new perspective on the Problem of Applying Mathematics. *Philosophia Mathematica* Vol.12. 135-161

STEINER, Mark (1998): The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, London

STEINER, Mark (2005): Mathematics – Application and Applicability. In: Shapiro, Stewart (szerk.): The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press, Oxford, 625-650

VÉGH László (2005): Frege és a Julius Caesar-probléma. *Kellék* 27-28, 315-337

WILHOLT, Torsten (2006): Lost on the Way from Frege to Carnap: How the Philosophy of Science Forgot the Applicability Problem. *Grazer philosophische studien* 73(1), 69-82