



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TARTÓSZERKEZETEK MECHANIKÁJA TANSZÉK

ÁBRAHÁM ZOLTÁN

ÉPÍTŐMÉRNÖK HALLGATÓ (B. SC.)

FOTOELASZTIKUS ANYAGÚ GERENDÁK FESZÜLTSÉGEI ÉS ALAKVÁLTOZÁSAI

TDK DOLGOZAT

KONZULENS:

DR. KÁROLYI GYÖRGY

EGYETEMI TANÁR

Absztrakt

Egyes nematikus folyadékkristály-elasztomerek, ún. fotoelasztomerek fény hatására megváltoztatják szerkezetüket és alakváltozást szenvednek. Mivel az anyagba behatoló fény intenzitása exponenciálisan csökken a behatolás mélységével, az eloszlása sem lesz lineáris. Emiatt külpontosan terhelt gerendáknál két feszültségmentes tengely is keletkezhet a keresztmetszetben. Kiegészítve M. Warner és L. Mahadevan munkáját [1], levezetem a külpontos nyomóerővel terhelt fotoelasztikus anyagból készült szimmetrikus keresztmetszetű gerendák statikus viselkedését fény hatására. Szisztematikusan feltérképezem a feszültségmentes tengely helyzetét, majd analitikus és numerikus eredményt mutatok a feszültségmentes tengelyek számának és helyének paraméterfüggésére. Bemutatom a görbült fotoelasztikus gerenda egyensúlyi alakját.

[1]: M. Warner, L. Mahadevan, *Photo-induced deformations of beams, plates and films*, Phys. Rev. Lett. **92**, 134302 (2004).

Certain nematic liquid crystal elastomers, called photoelastomers, change their structure and deform when exposed to light. The distribution of light intensity is not linear, rather, absorbed light in the material decreases exponentially with depth. As a consequence, two stress free axes may develop when the beam, beside light, has excentric normal load. I supplement previous studies [1] by investigating the static behavior of excentrically loaded photoelastics beams of symmetric cross-section under light. I systematically find the position of the stress free axes, then show analytical and numerical results of how the number and location of the stress free axes depend on the parameters. The equilibrium shape of the curved photoelastics beam is also presented.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani **Dr. Károlyi György** konzulensemnek, hogy lehetőséget biztosított munkám sikeres elvégzéséhez és a dolgozat megírásához. Köszönöm segítőkész támogatását és munkám alapos és kritikus szemrevételezését.

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS.....	4
1.1. Folyadékkristályok.....	4
1.2. A folyadékkristály elasztomerek termoelasztikus viselkedése	8
1.3. A folyadékkristály elasztomerek fotoelasztikus viselkedése	9
2. A FOTOELASZTIKUS LCE MECHANIKAI EGYENLETEI	13
2.1. Anyagi egyenlet	13
2.2. Geometriai egyenlet	13
2.3. Egyensúlyi egyenletek	15
2.4. Egyenletek egyesítése	15
3. A FESZÜLTSEGMENTES TENGELEK SZÁMA ÉS HELYZETE	17
3.1. A zérushelyeket megadó egyenlet dimenziótlanítása	17
3.2. Zérushelyek paraméterfüggése.....	18
3.2.1. <i>Semleges tengely vizsgálata analitikus módszerrel</i>	<i>19</i>
3.2.2. <i>Semleges tengelyek vizsgálata numerikus módszerrel</i>	<i>22</i>
4. A GERENDA GÖRBÜLETÉNEK EGYENLETE	23
4.1. Dimenziótlanítás	23
4.2. A κ dimenziótlan görbület számítása.....	23
4.3. A görbületi egyenlet analízise	23
5. A FESZÜLTSEGMENTES TENGELEK FÜGGVÉNYÉNEK ÁBRÁZOLÁSA	26
5.1. Terheletlen állapot.....	26
5.2. Központosan terhelt állapot.....	27
5.3. Külponos normálerővel terhelt állapot.....	27
6. A GERENDA RUGALMAS VONALÁNAK EGYENLETE	31
6.1. Statikai váz meghatározása	31
6.2. Mechanikai egyenletek.....	31
6.3. Differenciálegyenlet megoldása.....	32
7. PÉLDA BEMUTATÁSA.....	34
8. KONKLÚZIÓ.....	37
9. IRODALOMJEGYZÉK.....	38

1. Bevezetés

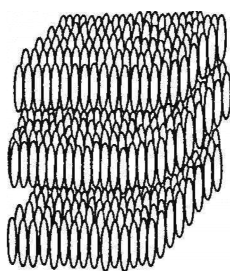
1.1. Folyadékkristályok

Napjainkban a folyadékkristály állapotú anyagokat különböző területeken egyre szélesebb körben alkalmazzák. A folyadékkristályok előnyös tulajdonsága abban rejlik, hogy szövetszerkezetük külső hatásokkal befolyásolható. Így a belőlük készült eszközök szilárdsági és geometriai tulajdonságai, bizonyos határokon belül, mesterséges módon a kívánt értékre beállíthatóak. Az elektromos- és villamosiparban, a távközléstechnikában, a vegyiparban, a gyógyászatban, a jármű-, és gépiparban, a légitömegszállításban, az űrtechnikában és még számos szakterületen egyaránt alkalmazzák őket [1,2].

A folyadékkristályok nem szokványos anyagok. Ahogy a nevük is mutatja, átmenetet képeznek a folyadékok és a szilárd anyagok között. A molekuláik hosszúságak, rúdszerűek, melyek orientáltsága mind egy irányba mutat. Ezt az állapotot egy meghatározott hőmérséklettartományban tartják meg, ilyenkor a szövetszerkezetük makroszkopikus méretekben folyékony, de mikroszkóp alatt vizsgálva a szilárd testekhez hasonló rendezettséget mutat.

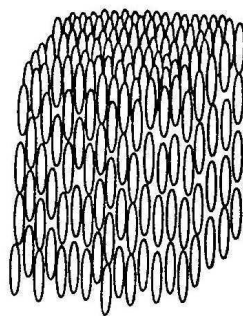
A folyadékkristályokat a szerkezetük alapján három nagy csoportra lehet osztani [3]:

Szmektikus folyadékkristályok: a vastag, szivar alakú molekulák szorosan, egymással párhuzamosan, a molekulatengelyre merőleges síkú, mononukleáris rétegekben helyezkednek el, szorosan egymás mellett (1.1.1. ábra).



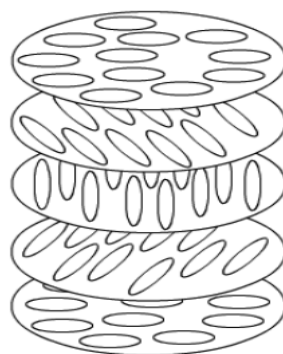
1.1.1. ábra. Szmektikus folyadékkristály szerkezete [3]

Nematikus folyadékkristályok: szerkezetük kevésbé rendezett, molekuláik fonálszerű sorokat alkotnak, melyek molekuláris tengelyei egymással párhuzamosak (1.1.2. ábra). Ez a szerkezeti felépítés jól szemléltethető egy doboz fogvájójával, ahol a fogvájók a tengelyük irányában képesek elmozdulni, vagy a hossztengelyük körül elfordulni, de a doboz miatt a hossztengelyek végig párhuzamosak maradnak.



1.1.2. ábra. Nematikus folyadékkristályok szerkezete [3]

Koleszterisztikus folyadékkristályok: réteges felépítésű szerkezet, ahol a molekuláris tengelyek párhuzamosak egymással. Az egyes keskeny rétegekben elhelyezkedő molekulák tengelyei az egyes síkokban nem tetszőleges irányban helyezkednek el, hanem csak a szomszédos sík által meghatározottan (1.1.3. ábra).



1.1.3. ábra. Koleszterikus folyadékkristályok szerkezete

(forrás: http://fizikaweb.uni-pannon.hu/fizika_content/Oktatas/Bev_kem_kut_lab/folyadekkristalyok.pdf)

Míg szokásos anyagoknál jól meghatározott olvadáspont van a szilárd és a folyékony halmazállapot között, addig a folyadékkristályos anyagok olyan hőmérsékleti tartománnyal rendelkeznek a két fázis között, amelyben megmutatkozik az anyagnak a kettős szerkezete. A hőmérsékleti tartomány egyik végpontján, az úgynevezett C-N (crystalline-nematic) pontban van a szilárd és a folyadékkristály állapot határa, a másik végpontján, az N-L (nematic-liquid) pontban van a folyadékkristály és folyékony állapot határa. A folyadékkristály a C-N pontnál folyékony halmazállapotúvá válik a szó köznapi értelmében, de a molekulái részben megtartják eredeti rendezett szerkezetüket [3]. A C-N pontot üvegesedési hőmérsékletnek is szokták nevezni [3].

A továbbiakban a nematikus folyadékkristályokkal foglalkozunk. Ezen anyagokat például a folyadékkristályos kijelzőknél (liquid crystal display, LCD) alkalmazzák. Ezeknek a működési elve lényegében abból áll, hogy a vékony rétegben keltett elektromos tér létrehozásával befolyásolni tudják a molekulák irányultságát, s ez által beállítható a réteg fényáteresztő képessége [3].

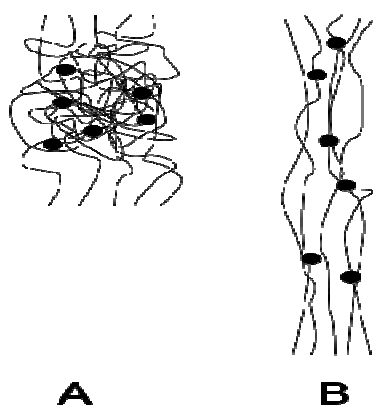
A műanyag eszközök gyártásában a folyadékkristályos anyagot folyadékkristály polimerként (liquid crystal polymer, LCP) szokták alkalmazni. Ezek olyan ismétlődő egységekből, monomerekből állnak, melyeket kémiai kötések kapcsolnak össze.

Bizonyos LCP-k, más polimerekhez hasonlóan, hagyományos fröccsöntő extrúziós, koextrúziós, fúvásos stb. eljárásokkal dolgozhatók fel [1,4]. A folyékony és szilárd fázis közötti halmazállapotú ömledéket nyíró vagy nyújtó hatásnak teszik ki, így a merev makromolekulák maguktól szálakká vagy rostokká rendeződnek, melyek az ömledék lehűlésekor megmerevednek, így sajátos molekulaszervezet alakul ki szilárd állapotban. Különösképpen a merev, pálca alakú LCP-k, összehasonlítva a hagyományos polimerekkel, sokkal kedvezőbb mechanikai tulajdonságokkal bírnak, különösen az anyag orientációjának irányában. Az elérhető előnyös tulajdonságok: sorjamentes minőség fröccsöntésnél, nagy szakítószilárdság és nagy rugalmassági modulus, nagy ütőszilárdság, kis hőtágulási együttható, kis vízfelvétel, jó hőöregedési teljesítmény, kivételes pontosság, méretstabilitás, kis zsugorodás, kitűnő kúszás-állóság stb. [1,2]. LCP-eket használnak elektromos és elektronikai alkatrészekhez, száloptikai összekötő elemek, távközléstechnikai készülékek, vegyipari feldolgozó berendezések, gépipari és űrtechnikai eszközök gyártásához. Bizonyos LCP-k a gyógyászati alkalmazásokban helyettesíthetik a rozsdamentes acélt, ellenállnak a gamma-sugárzásnak, valamint a legtöbb sterilizálási eljárásnak. Sebészeti eszközök, fogászati eszközök, steril tálcák és berendezések, gyógyszeradagoló- és diagnosztikai rendszerek esetében egyaránt kiválóan alkalmazhatóak [1,2].

Az eddig említett általános LCP-k esetében a fázisátmeneti hőmérséklettartományban kialakítják a kedvező szövetszerkezetet, majd az ömledéket lehűtik az üvegesedési hőmérséklet alá, tehát a felhasználási hőmérsékletén szilárd állapotban van. A folyadékkristály polimerek egy különleges csoportját alkotják a folyadékkristály-elasztomerek (liquid crystal elastomer, LCE). Ezeknek az anyagoknak az üzemi, illetve használati hőmérsékleti tartománya, az üvegesedési hőmérséklet felett helyezkedik el, tehát

az anyag már nem szilárd, de alul marad az N-L határtól, tehát az anyag még nem viselkedik teljes mértékben folyadékként sem. Az LCE-k ilyenkor a felhasználás hőmérsékletén *gumirugalmas* fizikai állapotban vannak [5].

A gumirugalmas állapot olyan anyagszerkezetet jelent, amely viszonylag kis erővel is nagymértékben deformálható, és rugalmas, tehát a deformáló erő megszűnte után (csekély maradó deformációtól eltekintve) ismét felveszi eredeti alakját, akár a sokadik deformációs ciklusban is [6].



1.1.4. ábra. (A) terheletlen elasztomer szövetszerkezete, (B) ugyanaz az anyagszövet terhelés alatt. Ha a terhelést megszüntetjük, a szerkezet visszatér az A állapotba. A fekete pontok a keresztkötéseket jelölik [6]

A gumirugalmas anyag makromolekuláit, a nematikus folyadékkristály-láncokat első megközelítésben képzelhetjük fonalaknak, amelyeket egy-egy csepp ragasztóval (keresztkötések) helyenként összeragasztunk. Ha egy fonalszálat megpróbálunk kihúzni úgy, hogy a többi szálat lefogjuk, csak annyira fogjuk tudni kihúzni, amennyire a fonalszálak kiegyenesedés közben elmozdulnak egymáshoz képest. Ha elengedjük, akkor visszaugrik eredeti (ráncos) állapotába. Azonban a gumi (illetve az LCE) sokkal jobban deformálódik, mint az összeragasztott fonalak. Ennek az az oka, hogy a modell nem elég pontos, a makromolekulák igazából sokkal kevésbé párhuzamosak, mint a fonalak. A makromolekulák két keresztkötés között hatalmas kanyarokat írnak le a tér minden irányában. A terheletlen LCE esetén a folyadékkristály-láncok egyáltalán nem rendezettek, nem egységes orientáltságúak és a tengelyeik nem párhuzamosak egymással, tehát még nem alakult ki a nematikus izotrópia, ahogy azt a 1.1.4. ábra szemlélteti. A szálak orientálódása csak külső teher, vagy deformáció hatására következik be, pl. húzás,

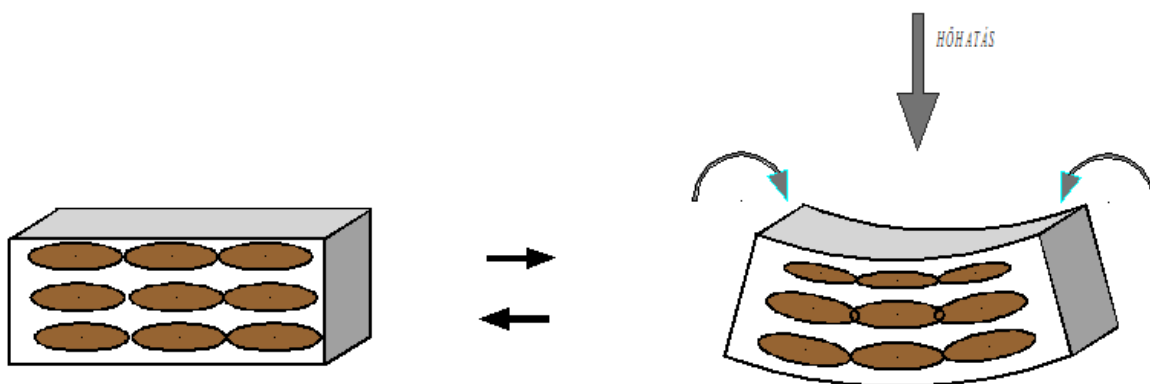
csavarás, hajlítás (az LCE esetén szóba jöhet még külső mágneses, vagy elektromos tér hatása is, stb).

Az LCE-ket szokás intelligens anyagoknak nevezni [7], amelyek képesek mágneses, elektromos vagy optikai behatást mechanikai energiává alakítani és viszont. Az ilyen különleges fizikai tulajdonságokat használják ki például a jelátalakító egységekben [7,8]. Ezek olyan különleges eszközök, amelyekben feszültség, fény, mágneses vagy elektromos tér, vagy hőmérséklet hatására méret-, illetve alakváltozás következik be, miközben egy működő rendszer kinetikai láncának részét képezik. Legelterjedtebb az alkalmazásuk például rugalmas kijelzőknél, különleges membránoknál, piezoelemek és pirodetektoroknál [7]. Orvosi és biológiai alkalmazások terén is ígéretes lehetőségeket jelentenek implantátumok, például szemlencse vagy műizom esetében [7].

1.2. A folyadékkristály elasztomerek termoelasztikus viselkedése

Mint már említettük, a folyadékkristályok üzemi hőmérséklete a szilárd és a folyékony fázishoz tartozó hőmérsékleti határok között helyezkedik el, tehát az LCE átmeneti állapotban van a két fázis között. Ilyenkor az anyagszerkezetet folyadékkristály molekulák, ún. mezogének alkotják, amelyek nematikusán kapcsolódnak egymáshoz, tehát olyan fonálszerű sorokat tartalmaznak, amelyek tengelyei párhuzamosak egymással (1.1.2. ábra).

Ha a test hőmérsékletét addig növeljük, amíg a izotróp nematikus kötések felszakadnak, a mezogének elveszítik párhuzamosságukat és rendezettségüket. Ilyenkor maga a molekula is deformálódik: a rendezetlenség következtében kontrakció jön létre, amely annál nagyobb mértékű, minél magasabb a hőmérséklet.



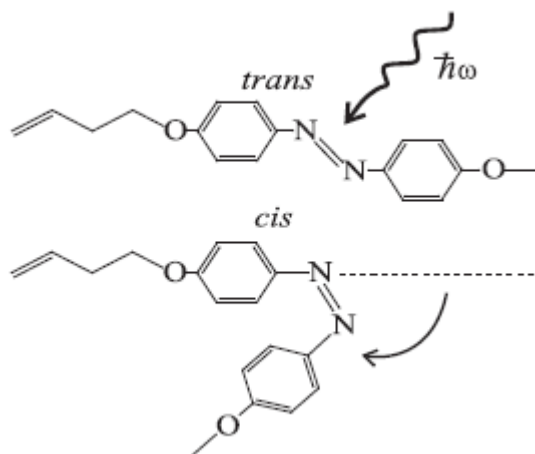
1.2.1. ábra. Bal oldalon a gerenda terheletlen helyzete, jobb oldalon a hőhatással terhelt állapot

Ha egy rúd vagy lemez alakú LCE testet egyenlőtlen hőmérsékletnövekménynek teszünk ki, akkor a test meggörbül. Ha például a felső réteg felől kezdjük el melegíteni, akkor először a legfelsőbb réteg (molekula sor), tehát a közvetlenül melegített felület fog átalakulni a kontrakciós állapotba. Közben az alsóbb mezogén elemek, amelyek még nematikus rendszerben vannak, összébb préselődnek egymáshoz, megtartva az eredeti orientáltságukat (1.2.1. ábra).

A gumirugalmas állapotú LCE akár 400%-os deformációra is képes [10]. Ez a tulajdonság rendkívüli, speciális alkalmazásokra nyújt lehetőséget (lásd. 1.1. fejezet).

1.3. A folyadékkristály elasztomerek fotoelasztikus viselkedése

A folyadékkristály elasztomerek, mint például az azobenzolok [12], fény hatására akár rendkívül erős deformációra is képesek. Foton becsapódás hatására az anyag fotoizomerizálható csoportjának rúdszerű mezogénekből álló struktúrája eltorzul. Az 1.3.1. ábrán, felül látható az úgynevezett *trans* állapot, ahol az N=N kötés még egyensúlyban van. A mezogén láncok ilyenkor egyenesek, merevek és folytonos részét képezik a nematikus rendszernek. A *cis* állapot (1.3.1. ábra, alul) egy olyan fotonbecsapódás által előidézett metastabil helyzet, ahol az N=N kötés mentén a molekulák erősen meghajlanak és elhagyják rúdszerű struktúrájukat. A *cis* állapot, a termikus hatáshoz hasonlóan, kontrakcióhoz vezet [12].



1.3.1. ábra. Azobenzol molekuláris alakja fény ($\hbar\omega$) hatására bekövetkező *trans-cis* izomeráció következtében [12]

Minden szövetszerkezettel rendelkező anyag jellemezhető bizonyos mértékű abszorpciós tulajdonsággal. Azt a jelenséget nevezik abszorpciónak, amelyben egy anyag a rajta áthaladó sugárzás egy részét elnyeli, azaz a sugárzás elnyelődik az anyagban, vagy azon áthaladva csökkent mértékű intenzitással halad tovább [11].

A fény-, úgymint általában az elektromágneses sugárzások abszorpciója a hullámhossztól és az abszorbeáló anyagtól függ. Ha a sugárzás valamely anyag x vastagságú rétegén halad át, akkor az $I(0)$ kezdeti intenzitás $I(x)$ értékre csökken [11]:

$$I(x) = I(0)e^{-\frac{x}{d}},$$

ahol d a lassítási hossz, azaz az a hossz, amelyen az intenzitás a kezdeti érték e^{-1} -szeresére csökken, azaz az anyagban körülbelül 63%-os abszorpció következik be.

Az abszorpció során az elnyelt sugárzás energiáját az elnyelő közeg veszi át, rendszerint hőenergia formájában, de a közeg atom-, illetve atommagstruktúrájára is gerjesztő hatással lehet.

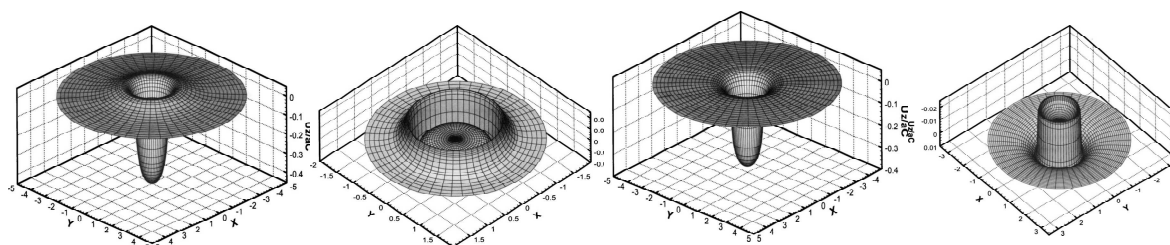
Ha az LCE anyagú testet UV fénysugárzásnak tesszük ki, az abszorpció során az anyag által elnyelt energia olyan változást okoz a molekuláris struktúrában, amely, hasonlóan a termikus stimulációhoz, kontrakcióhoz vezet. A kontrakció lineáris arányosságban van az intenzitással [10], tehát:

$$\varepsilon^r(x) = -Ce^{-\frac{x}{d}}$$

ahol $\varepsilon^r(x)$ a sugárzásból származó alakváltozás, C pedig (az állandónak feltételezett külső hőmérséklettől függő [10]) konstans paraméter, amely a besugárzott felületen keletkező $\varepsilon^r(0) = -C$ alakváltozást adja meg [10].

Eddigi kutatások során már számos kísérletet tettek az LCE anyagú testek fény hatására történő rugalmas alakváltozásának, azaz *fotoelasztikus deformációjának* vizsgálatára [13]. A próbatesteknek különböző a viselkedése a fényforrás hatósugarának és az anyag fényelnyelő képességének függvényében. Alapvetően kétfajta deformáció a jellemző: az egyik, amikor a sugárzó fény lassítási hossza nagyságrendekkel nagyobb a próbatest vastagságánál, ilyenkor az optikai intenzitás nagyjából állandó a hártyaszerű test vastagsága mentén; a másik eset, amikor a réteg vastagsága lényegesen nagyobb, tulajdonképpen egy effektív félteret képezve, és ilyenkor a fény optikai intenzitása

exponenciálisan elnyelődik, a fent említett abszorpciós jelenség formájában. Numerikus számítással kimutatták, hogy a felületi deformáció erősen függ a megvilágított felület sugarának és a réteg vastagságának arányától. Az 1.3.2. ábra a jellemző felületek változatait mutatja térbeli ábrázolással [9].

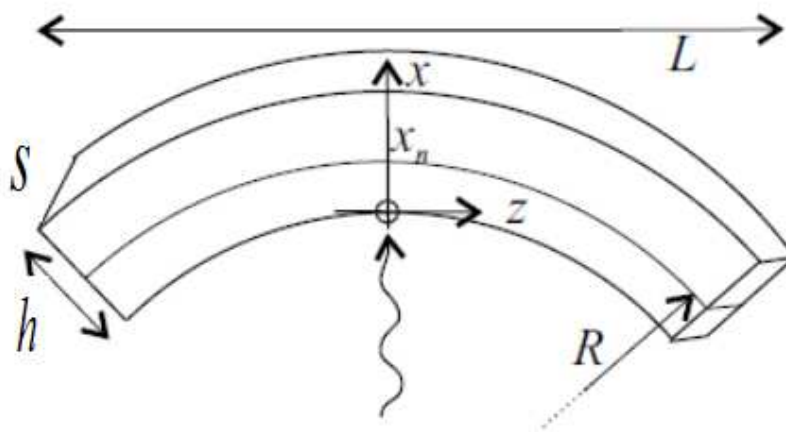


1.3.2. ábra

1. kép: vékony rétegű test közepes hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
2. kép: vékony rétegű test nagy hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
3. kép: vastag rétegű test közepes hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
4. kép: vastag rétegű test nagy hatósugárral megvilágított felület térbeli deformációja [9]

Dolgozatomban a hossz tengelye mentén állandó intenzitású fénysugárzással terhelt LCE anyagú gerenda viselkedését vizsgálom, továbbfejlesztve Warner és Mahadevan korábbi eredményeit [10]. Megvizsgálom, hogy milyen alakváltozások és feszültségek keletkeznek a téglalap keresztmetszetű gerendában az alulról jövő megvilágítás hatására, ha eközben a függőleges szimmetria síkban ható külpontos normálerő is hat rá.

Tekintsünk egy L hosszúságú gerendát, melynek a szélességét s -sel, a magasságát h -val jelöljük! A gerenda pontjainak definiálásához vegyünk fel egy koordináta-rendszert az egyik keresztmetszetben! Az x koordináta jelölje az anyagi pont magassági, az y a szélességi, a z pedig a gerenda tengelymenti helyzetét (1.3.3. ábra)!

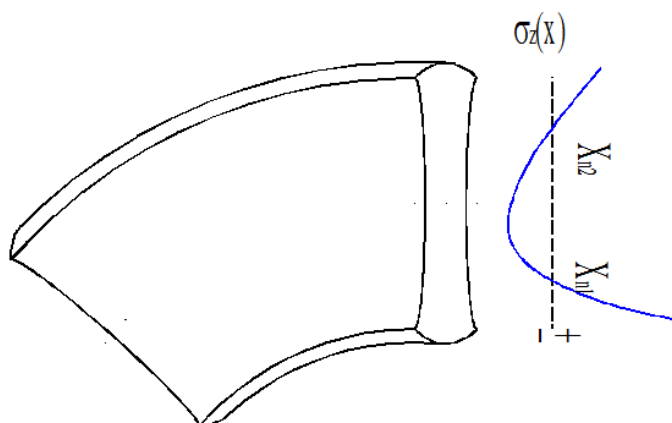


1.3.3. ábra. A görbült gerenda geometriai paraméterei

A gerendára a z tengely mentén egy N nagyságú, külpontos, normálirányú teher működik, amelynek az x tengelyen elfoglalt pozícióját az X_m paraméter jelöli.

Amennyiben a lassítási hossz lényegesen nagyobb a gerenda h magassági kiterjedésénél ($d \gg h$), az alakváltozás a fénysugár irányába eső x tengely mentén kvázi-lineáris. Amikor meggömbül a gerenda, a semleges tengely, tehát ahol az alakváltozás zérus, hozzávetőlegesen a magasság felében lesz, $\varepsilon\left(\frac{h}{2}\right) \approx 0$.

Ha azonban a lassítási hosszánál lényegesen nagyobb a magassági kiterjedés ($h \gg d$), az alakváltozás eloszlása már nem közelíthető lineárisan. Az alakváltozás ilyenkor két lényegesen elkülönülő részből tevődik össze: a sugározatlan hajlított gerenda lineáris alakváltozás-eloszlásából és a sugárzásból adódó exponenciális alakváltozás-függvényből. Feltételezve, hogy a keresztmetszet végső soron sík marad, a keletkező feszültségek eredője a magasság mentén két helyen is zérus lehet: két feszültségmentes tengely alakulhat ki („feszültségi semleges tengely”), lásd 1.3.4. ábra. Ebben az esetben húzó feszültség jön létre a $x \in [0, X_{n1}]$ régióban, annak ellenére, hogy a fotokontrakció nagy. A két zérushely között nyomás, a második feszültségmentes tengely, X_{n2} után pedig ismét húzás alakul ki [10].



1.3.4. ábra A deformált alak és a keresztmetszet feszültségei, a húzófeszültség pozitív értelmű, a nyomó negatív, az X_{n1} és X_{n2} a feszültségmentes tengelyek helyét jelölik

Munkám célja annak feltérképezése, hogy a paraméterek terében hol és mennyi feszültségi zérushely alakul ki a deformáció során. Ebből a célból, az eddigi kutatásokat kiegészítve, megvizsgáljuk a terhelő nyomaték hatását, feltérképezzük a viselkedés paraméterfüggését, továbbá megvizsgáljuk a görbült rúd közelítő alakját.

2. A fotoelasztikus LCE mechanikai egyenletei

Ebben a fejezetben egy LCE anyagú gerenda deformációját vizsgálom, amelyet alulról, az $x = 0$ oldal felől, hossz mentén konstans intenzitással sugárzó fényhatásnak teszünk ki és a végkeresztmetszetben külpontos normálerővel terheljük. Cél a deformáció során a keresztmetszetben kialakuló feszültségmentes tengely(ek) helyzetének meghatározása.

2.1. Anyagi egyenlet

A gerenda anyagát tekintve lineárisan rugalmas modellt követ, tehát a feszültségből származó alakváltozás a következő anyagi egyenletet elégíti ki:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z^b, \quad (1.)$$

ahol a σ_z a feszültséget, ε_z^b a feszültségből származó alakváltozást, E pedig a rugalmassági modulust jelöli.

2.2. Geometriai egyenlet

A gerenda alakváltozása két részből tevődik össze: a fényből származó $\varepsilon_z^r(x)$ alakváltozásból, illetve a deformáció folytán a hajlításból származó $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozásból. A külpontos normálerő a szimmetriasíkon hat és a fényteher is szimmetrikus erre a síkra, ezért az alakváltozások csak x -től függenek.

A teljes alakváltozás:

$$\varepsilon_z(x) = \varepsilon_z^r(x) + \varepsilon_z^b(x). \quad (2)$$

Jelöljük X_n -nel azt az x értéket, amelynél a feszültség értéke zérus:

$$\sigma_z(X_n) = 0. \quad (3)$$

Ez (1.) segítségével azt eredményezi, hogy

$$\varepsilon_z^b(X_n) = 0, \quad (4.)$$

tehát ha csak a feszültségekből származna alakváltozás, $x = X_n$ helyben lenne a semleges tengely.

Az előző fejezetben már említett, fénysugárzásból származó alakváltozás a következő:

$$\varepsilon_z^r(x) = -C e^{-\frac{x}{d}}. \quad (5.)$$

Az igazi semleges tengely helyét, tehát ahol az alakváltozás zérus, jelöljük $\overline{X_n}$ -nel! Ha a fény a teljes alsó oldalt éri, akkor kialakul egy állandó $\frac{1}{R}$, ahol R az $\overline{X_n}$ helyeken áthaladó vonal görbületi sugara [10]. Teljesül:

$$\varepsilon_z(x) = \frac{(x - \overline{X_n})}{R}, \quad (6.)$$

és $x = X_n$ helyettesítéssel

$$\varepsilon_z(X_n) = \frac{(X_n - \overline{X_n})}{R}. \quad (7.)$$

Kifejezve a (6.) és (7.) egyenletből az $\frac{\overline{X_n}}{R}$ -t, kapjuk, hogy

$$\frac{x - X_n}{R} + \varepsilon_z(X_n) = \varepsilon_z(x). \quad (8.)$$

Az (2.) egyenlet alapján

$$\varepsilon_z(X_n) = \varepsilon_z^r(X_n) + \varepsilon_z^b(X_n), \quad (9.)$$

ez a (4.) és az (5.) egyenlőség figyelembevételével

$$\varepsilon_z(X_n) = -C e^{-\frac{X_n}{d}} + 0 \quad (10.)$$

alakba írható. Ez beírva a (8.) egyenletbe

$$\frac{x - X_n}{R} - C e^{-\frac{X_n}{d}} = \varepsilon_z(x), \quad (11.)$$

ahol $\varepsilon_z(x)$ az (2.) és (5.) alapján

$$\varepsilon_z(x) = -C e^{-\frac{x}{d}} + \varepsilon_z^b(x). \quad (12.)$$

Ebből a két egyenletből a geometriai egyenletet a következő alakban kapjuk:

$$\varepsilon_z^b(x) = C \left(e^{-\frac{x}{d}} - e^{-\frac{x_n}{d}} \right) + \frac{x - x_n}{R}. \quad (13.)$$

2.3. Egyensúlyi egyenletek

A gerenda egy keresztmetszetében a normálerő és a nyomatéki egyensúlyt kifejező egyensúlyi egyenletek a következők:

$$s \int_0^h \sigma_z(x) dx = N, \quad (14.)$$

$$s \int_0^h \sigma_z(x) x dx = X_m N. \quad (15.)$$

2.4. Egyenletek egyesítése

A (14.) jelű egyensúlyi egyenlet kifejtése (1.) és (13.) alapján:

$$Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x}{d}} - C e^{-\frac{x_n}{d}} + \frac{x}{R} - \frac{x_n}{R} \right) dx = N,$$

$$Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x}{d}} + \frac{x}{R} \right) dx - Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x_n}{d}} + \frac{x_n}{R} \right) dx = N.$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{N}{Es} + C h e^{-\frac{x_n}{d}} + C d \left(e^{-\frac{h}{d}} - 1 \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{2} - X_n h \right). \quad (16.)$$

A (15.) jelű egyensúlyi egyenlet kifejtése, (1.) és (13.) segítségével:

$$Es \int_0^h \left(Cxe^{-\frac{x}{d}} - Cxe^{-\frac{X_n}{d}} + \frac{x^2}{R} - \frac{X_n x}{R} \right) dx = X_m N.$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{X_m N}{Es} + C \frac{h^2}{2} e^{-\frac{X_n}{d}} + Cd^2 \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(1 + \frac{h}{d} \right) - 1 \right] = \frac{1}{R} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{X_n h^2}{2} \right).$$

(17.)

Most a (16.) és a (17.) egyenletekben X_n és R a két ismeretlen.

Először ahhoz, hogy kifejezhessük az X_n -t, osszuk el a (16.) egyenletet a (17.)-mal, hogy kiessen az ismeretlen R :

$$\frac{\frac{N}{Es} + Che^{-\frac{X_n}{d}} + Cd \left(e^{-\frac{h}{d}} - 1 \right)}{\frac{X_m N}{Es} + C \frac{h^2}{2} e^{-\frac{X_n}{d}} + Cd^2 \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(1 + \frac{h}{d} \right) - 1 \right]} = \frac{\frac{h^2}{2} - X_n h}{\frac{h^3}{3} - \frac{X_n h^2}{2}} = \frac{3h - 6X_n}{2h^2 - 3X_n h}$$

$$\frac{N}{Es} [2h^2 - 3X_n h - 3hX_m + 6X_n X_m] + Ce^{-\frac{X_n}{d}} \frac{h^3}{2} + Cd[6X_n d + 3X_n h - h^2 - 3hd]e^{-\frac{h}{d}} + Cd[3hd + 3X_n h - 2h^2 - 6X_n d] = 0.$$

(18.)

Az így kialakult egyenletben csak egy ismeretlen van, a feszültségmentes tengely X_n helye. Ebből a nemlineáris egyenletből megkapjuk, hogy adott paraméter esetén hol és hány darab zérushely alakul ki a deformáció során. A következő fejezetekben ennek az egyenletnek a vizsgálatát végezzük el. Ezt követően a 4. fejezetben a másik változó, az R görbületi sugár kerül kifejezésre.

3. A feszültségmentes tengelyek száma és helyzete

Az előző fejezetben meghatároztuk a semleges tengely helyére vonatkozó (18.) egyenletet. Jelöljük a bal oldali kifejezést $f(X_n)$ -nel:

$$f(X_n) = \frac{N}{E_s} [2h^2 - 3X_n h - 3hX_m + 6X_n X_m] + C e^{-\frac{X_n}{d}} \frac{h^3}{2} + Cd[6X_n d + 3X_n h - h^2 - 3hd]e^{-\frac{h}{d}} + Cd[3hd + 3X_n h - 2h^2 - 6X_n d] \quad (19.)$$

Az $f(X_n)$ függvény zérushelyei adják meg a keresett X_n értékeket. Ebben a fejezetben ennek a függvénynek a vizsgálatát végezzük el, abból a szempontból, hogy az adott paraméterek mellett hol és hány darab zérushely található.

3.1. A zérushelyeket megadó egyenlet dimenziótlantítása

Érdemes (19.)-et dimenziótlan alakban is felírni, hogy láthatóvá váljon, hogy a paraméterek milyen kombinációi írják le a viselkedés lényegét. Bevezetve az $Y_n = \frac{X_n}{d}$ új, dimenziótlan változót, (19.) a következő alakban írható:

$$f(X_n) = g(Y_n) = Q + PY_n + e^{-Y_n}, \quad (20.)$$

ahol:

$$Q = \frac{\frac{N}{E_s d} \left(2 \frac{h^2}{d^2} - 3 \frac{h X_m}{d} \right) + C \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(-\frac{h^2}{d^2} - 3 \right) + 3 \frac{h}{d} - 2 \frac{h^2}{d^2} \right]}{\frac{C h^3}{2 d^3}},$$

$$P = \frac{\frac{N}{E_s d} \left(-3 \frac{h}{d} + 6 \frac{X_m}{d} \right) + C \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(6 + 3 \frac{h}{d} \right) + 3 \frac{h}{d} - 6 \right]}{\frac{C h^3}{2 d^3}} \quad (21.)$$

dimenziótlan paraméterek.

Vezessük be a következő dimenziótlan paramétereket is:

$$n = \frac{N}{EsdC},$$

$$w = \frac{h}{d},$$

$$m = \frac{x_m}{h}.$$

(22.)

Egyszerűsítve a Q és P paramétereket, a következő összefüggéseket kapjuk a dimenziótlanított paraméterek között:

$$Q(n, w, m) = \frac{n(2w^2 - 3mw^2) + [e^{-w}(-w^2 - 3w) + 3w - 2w^2]}{\frac{w^3}{2}},$$

(23.)

$$P(n, w, m) = \frac{n(-3w + 6mw) + [e^{-w}(6 + 3w) + 3w - 6]}{\frac{w^3}{2}}.$$

(24.)

A továbbiakban a feszültségmentes tengely elhelyezkedését ezeknek a dimenziótlan paramétereknek a függvényében vizsgáljuk.

3.2. A zérushelyek paraméterfüggése

Keressük a (20.) függvény zérusértékeit, azaz a következő egyenletet akarjuk megoldani:

$$0 = Q + PY_n + e^{-Y_n}$$

(25.)

A megoldásokat két módszerrel vizsgáljuk; először analitikus módszerrel meghatározzuk, hogy mely tartományon hány darab megoldás létezik, majd numerikus vizsgálattal meghatározzuk azok értékét.

3.2.1. Feszültségmentes tengely vizsgálata analitikus módszerrel

A $g(Y_n)$ függvény első deriváltja a meredekség:

$$\frac{dg(Y_n)}{dY_n} = -e^{-Y_n} + P, \quad (26.)$$

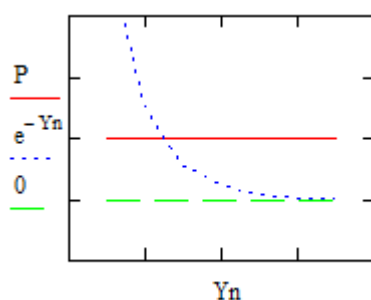
második deriváltja a görbület:

$$\frac{d^2g(Y_n)}{dY_n^2} = e^{-Y_n}. \quad (27.)$$

Mivel a görbület pozitív minden Y_n -re, így nincs inflexiós pontja (20.)-nek. Emiatt az első derivált szigorúan monoton növekvő. Így a $g(Y_n)$ függvénynek legfeljebb 1 minimum pontja van, tehát zérushelye maximum 2 lehet, tehát legfeljebb két feszültségmentes tengely létezhet.

Vegyük a $g(Y_n)$ függvény minimumát, tehát (26.) zérushelyét:

$$e^{-Y_n} = P. \quad (28.)$$



3.2.1.1. ábra A (28.) egyenlet megoldása

Az 3.2.1.1. ábrán a P és az e^{-Y_n} függvény metszéspontja adja az eredeti $g(Y_n)$ függvény minimumhelyét. Jól látható, hogy az e^{-Y_n} alulról korlátos, tehát a P érték előjele határozza meg, hogy a $g(Y_n)$ függvénynek van-e minimumpontja.

Két esetet különböztetünk meg:

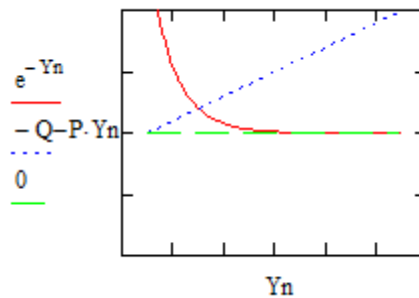
- első eset: $P \leq 0$.

Ekkor a $g(Y_n)$ függvénynek nincs minimumpontja, a 3.2.1.1. ábrán nincs metszéspont. Ekkor $g(Y_n)$ -nek 0, vagy 1 zérushelye lehet. Vizsgáljuk meg, hogy hol alakulhat ki 1 zérushely!

(20.)-et átrendezve:

$$e^{-Y_n} = -Q - PY_n \quad (29.)$$

A 3.2.1.2. ábrán jól látható, hogy mindig van metszéspont, ha a $P < 0$. Mindig pontosan egy megoldás van.



3.2.1.2. ábra. (29.) egyenlet ábrázolása

Vizsgáljuk meg a $P = 0$ esetet! Ilyenkor leegyszerűsödik az egyenlet:

$$e^{-Y_n} = -Q. \quad (30.)$$

Ha $Q < 0$, akkor mindig 1 megoldás van,

ha $Q \geq 0$, akkor nincs megoldás.

- második eset: $P > 0$

Ekkor a $g(Y_n)$ függvénynek 1 minimumpontja van. Ez azt jelenti, hogy 0, 1, vagy 2 zérushely lehetséges. Vizsgáljuk meg, hogy mely tartományon mennyi a megoldások száma!

Tudjuk, hogy $g(Y_n)$ függvény grafikonja egy olyan konvex görbe, amely egyetlen minimumponttal rendelkezik. Ebből kifolyólag a minimumpont helyzetének ismeretében meg lehet határozni a zérushelyek számát.

A derivált függvény zérusértékéből, azaz a (28.) egyenletből a minimumhely:

$$Y_n = -\ln(P) \quad (31.)$$

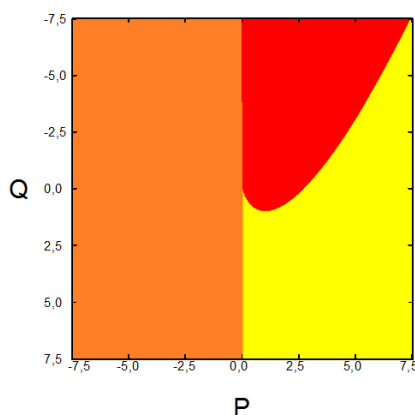
Ez behelyettesítve az eredeti függvénybe:

$$g(Y_n)_{min} = P(1 - \ln(P)) + Q. \quad (32.)$$

A $g(Y_n)_{min}$ előjelének ismeretében három eset különböztethető meg:

- o Ha $P(1 - \ln(P)) + Q > 0$ akkor nincs zérushely.
- o Ha $P(1 - \ln(P)) + Q = 0$ akkor pontosan 1 zérushely van.
- o Ha $P(1 - \ln(P)) + Q < 0$ akkor biztosan 2 zérushely található.

Összegzésként a 3.2.1.3. ábra színkódolással mutatja a semleges tengelyek számát a P és Q paraméterek függvényében.

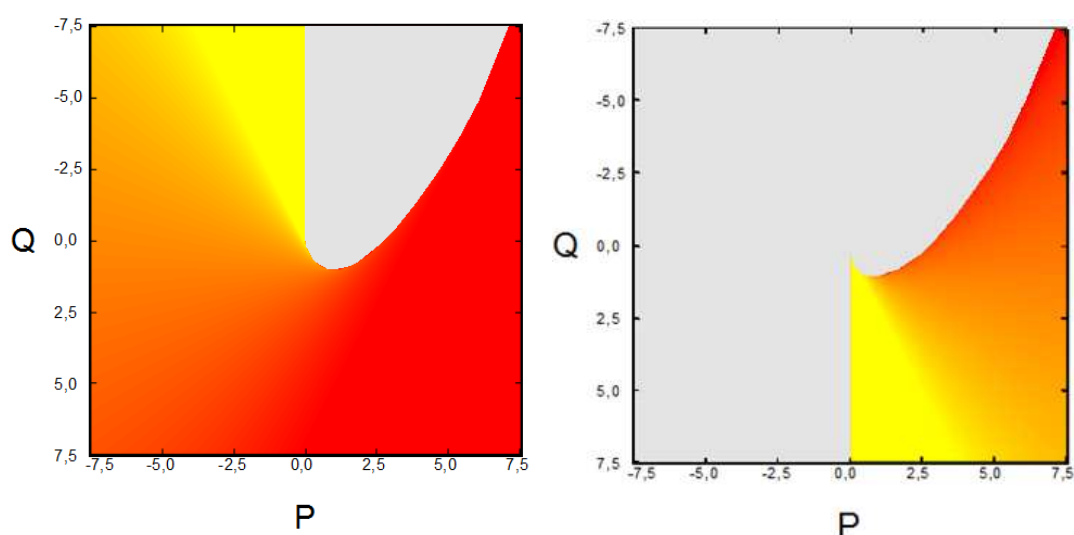


3.2.1.3. ábra. A semleges tengely száma szerinti tartományok. Jelölések: citromsárga=2, narancssárga=1, piros=0 semleges tengely található a keresztmetszetben

3.2.2. Semleges tengelyek vizsgálata numerikus módszerrel

A *MathCad 14* szoftver segítségével numerikusan is meghatároztuk a különféle P és Q paraméterértékek esetében a semleges tengely(ek) helyzetét. A 3.2.2.1. ábra a $P, Q \in [-7,5; 7,5]$ tartományban mutatja az eredményeket. Ezt a vizsgált tartományt 600×600 pontra bontva, az egyes pontokban kiszámítottam a semleges tengelyek számát és helyzetét (lásd. 1. melléklet).

Az algoritmus lényege, hogy sorra veszi a különböző P és Q paramétereket, minden egyes ciklusban újra definiálja a (20.) semleges tengely függvényét, majd a manuálisan megadott intervallumban megkeresi a függvény zérushelyét. Amennyiben a semleges tengelyt nem találja, tudatja azt is, hogy ott nincs.



3.2.2.1. ábra Az első (bal oldali ábra) és a második semleges (jobb oldali ábra) tengely helyének ábrázolása színkódolással. A citromsárgától a piros tartományig skálázva jelennek meg a semleges tengelyek helyei az legalacsonyabbtól ($Y_n = -3,524$) a legmagasabb értékekig ($Y_n = 300$). A szürke tartomány azt jelenti, hogy ott nem található semleges tengely.

4. A gerenda görbületének egyenlete

4.1. Dimenziótlansítás

A 2.2.4. fejezetben a gerenda mechanikai egyenleteiből levezetett (16.) és (17.) egyenleteket illetően megállapítottuk, hogy a két egyenlethez két ismeretlen paraméter tartozik: X_n és R . Akkor az X_n került kifejezésre, az R -t kiejtve. Ebben a fejezetben az R -t fogjuk kifejezni, pontosabban a görbületi sugarat magába foglaló görbület dimenziótlans alakját.

Első lépésként dimenziótlansítsuk az egyenleteket, ehhez először bevezetjük a 3. fejezetben ismertetett (22.) dimenziótlans paramétereket, és az R és az X_n helyett a dimenziótlans $\kappa = \frac{h}{R \cdot C}$ és $Y_n = \frac{X_n}{d}$ változókat.

A dimenziótlans paraméterek behelyettesítésével (16.)-ból kapjuk:

$$n = \frac{1}{2}\kappa w - Y_n \kappa - w e^{-Y_n} - e^{-w} + 1, \quad (33.)$$

(17.)-ből pedig:

$$m \cdot n = \frac{1}{3}\kappa w - \frac{Y_n}{2}\kappa - e^{-w}(w^{-1} + 1) + w^{-1} - \frac{w}{2}e^{-Y_n}. \quad (34.)$$

4.2. A κ dimenziótlans görbület számítása

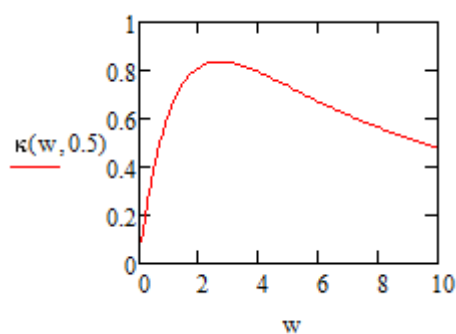
Fejezzük ki (33.)-ből e^{-Y_n} -t, majd helyettesítsük be a (34.) egyenletbe! Az Y_n ekkor kiesik, így kifejezhető a κ relatív görbület:

$$\kappa = 6w^{-1}n(2m - 1) - 6w^{-1}(2w^{-1} - 1) + 6w^{-1}(2w^{-1} + 1)e^{-w}. \quad (35.)$$

4.3. A görbületi egyenlet analízise

Vizsgáljuk meg (35.) egyenletet! Két részre különíthető el ez a kifejezés. Az egyik az erőteher helyétől és nagyságától függő, a másik csak a fényteher intenzitásától függő tagból áll.

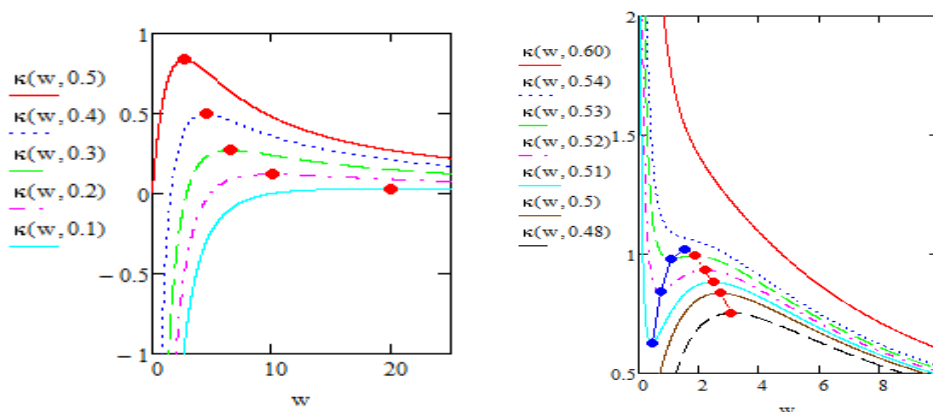
Központos terhelésnél ($m = 0,5$) az első tag kiesik, tehát megállapítható, hogy ebben az esetben a görbület független az erő nagyságától és csak a sugárzás behatolási mélysége befolyásolja. A központos terhelés esetén a κ dimenziótlan görbület alakulását a 4.3.1. ábra szemlélteti.



4.3.1. ábra. A dimenziótlan görbület központos teher esetén ($m=0.5$) w függvényében

A központosan terhelt rúd maximális görbülete $w = 2,688$ -nél van, ahol a görbület értéke: $\kappa = 0,836$.

Külpontos terhelés esetén a gerenda végkeresztmetszeteiben koncentrált nyomatékot alkalmazunk. Az egyszerűség kedvéért ez a nyomaték most egységnyi normálirányú húzóerőből ($n = 1$), és annak a magasság középpontjától mért erőkarjából álljon. A 4.3.2. ábra a $\kappa(w)$ függvény különböző m külpontossághoz tartozó alakulását mutatja be.



4.3.2. ábra. A különböző külpontossághoz tartozó görbületek alakulása w és $n = 1$ normálteher külpontosságának függvényében (A κ második változója az m paraméter). A jobboldali ábra az $m = 0.5$ érték alatti, míg a baloldali ábrán az efölötti külpontosságú terhelést szemlélteti. A piros pontsor a lokális maximumértékeket, míg a kék pontsor a lokális minimumértékeket jelöli

A 4.3.2. baloldali ábra a fényterhelés felőli húzott nyomatéki terhelés esetét mutatja. Ilyenkor a függvények maximum pontja, a nyomaték növelésének (külpontosság növelésének) hatására, exponenciálisan közelíthető, szigorúan monoton csökkenő görbét ír le.

A 4.3.2. jobboldali ábrán a fényterhelés felőli nyomott terhelést mutatjuk be. Viszonylag kis nyomaték (viszonylag kis külpontosság) esetén a lokális maximumpont mellett megjelenik egy lokális minimumpont. A külpontosság fokozatos növelésével a lokális maximum és lokális minimumpontok alkotta görbék fokozatosan közelednek egymáshoz, majd egy bizonyos nyomatékhoz tartozó pontban összeérnek (ez a pont $n = 1$ esetén $m = 0.533$ külpontossághoz tartozó inflexiós pont). Ennél nagyobb nyomatéki terhelés (külpontosság, vagy normálerő) esetén már megállapítható, hogy a behatolási mélység fokozatos növelésével a deformált gerenda görbülete szigorú monoton csökken.

5. A semleges tengelyek függvényének ábrázolása

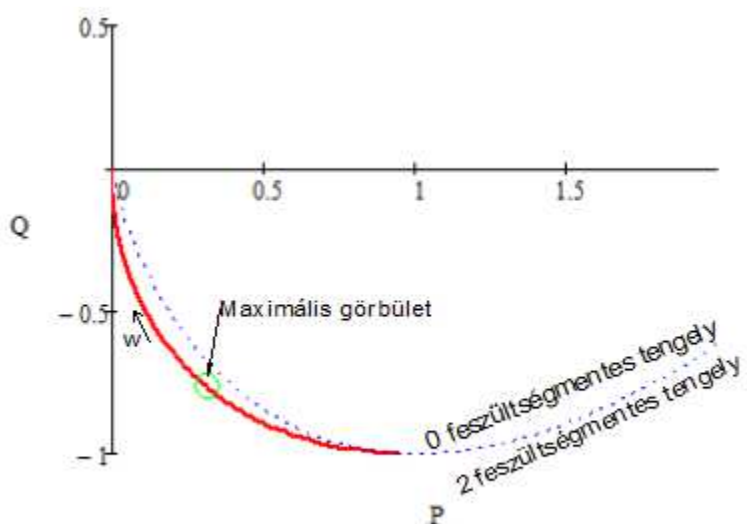
Gyakorlati alkalmazásokban a fotoelasztikus gerenda pontosan megtervezett deformációit elsősorban a sugárzó fény intenzitásának változtatásával kívánjuk befolyásolni. Ahhoz, hogy pontosan ismerjük az egyes fényintenzitások mellett a gerenda viselkedését, szükséges a w behatolási mélység függvényében is meghatározni a keresztmetszetekben kialakuló semleges tengelyek számát és helyzetét.

A 3. fejezetben bemutattuk a semleges tengelyek számának és helyének P és Q paraméterfüggését.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a különböző (relatív fényintenzitást jellemző) w behatolási mélységektől függő görbék hogyan helyezkednek el és hogyan változnak a vizsgált tartományokon.

5.1. Terheletlen állapot

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor nem működtetünk normálterhelést a gerendára. Ilyenkor a P és Q paraméter kizárólag a w behatolási mélységtől függ. Ezek függvényeit a 5.1.1. ábra szemlélteti, amelyen leolvasható, hogy a, kizárólag fényhatásnak kitett, *terheletlen gerenda mindig két darab feszültségmentes tengelyt tartalmaz.*



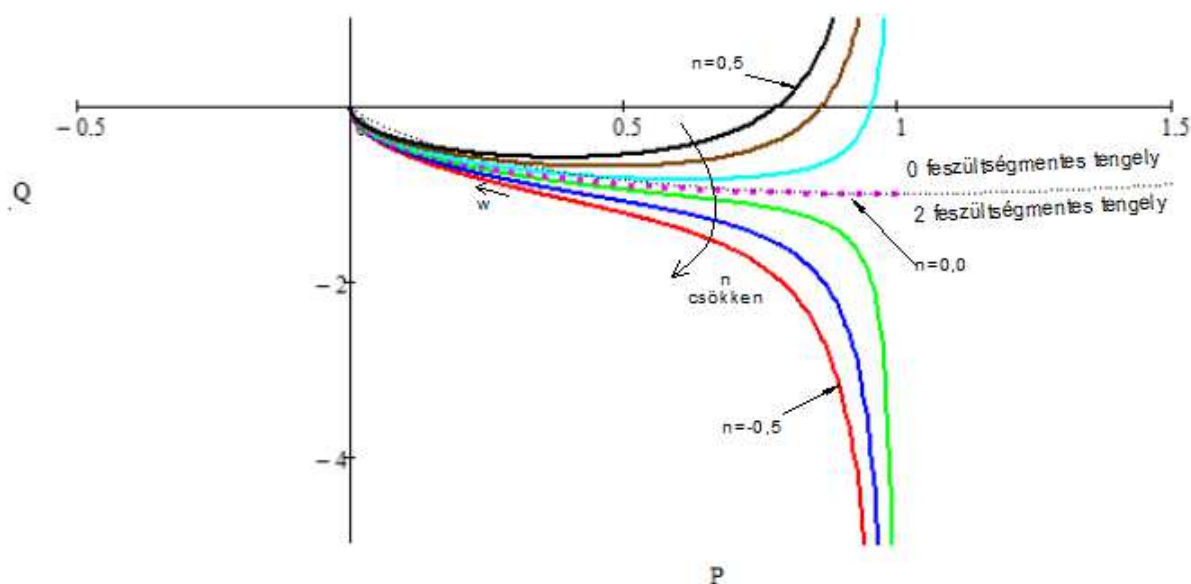
5.1.1. ábra. A terheletlen gerenda feszültségmentes tengelyeit leíró görbe, a w függvényében (piros).

A 4.3. fejezetben megállapítottuk, hogy a görbület a gerenda terheletlen állapotában kizárólag a relatív fényintenzitástól függ. A központosan terhelt rúd maximális görbülete $w = 2,689$ -nél van, ahol a görbület értéke: $\kappa = 0,836$.

Mindebből kifolyólag, ahogy az 5.1.1. ábrán is látható, a *maximális görbület* a két *feszültségmentes tengelyt* tartalmazó tartományon található, a (0,311;-0,765) pontban.

5.2. Központosan terhelt állapot

A központosan terhelt gerenda w behatolási mélységtől függő viselkedését az 5.2.1. ábra szemlélteti, ahol a normálteher fokozatos csökkentését is figyelemmel kísérhetjük.



5.2.1. ábra Központosan terhelt állapot görbéinek változása a terhelő erő fokozatos módosítása során

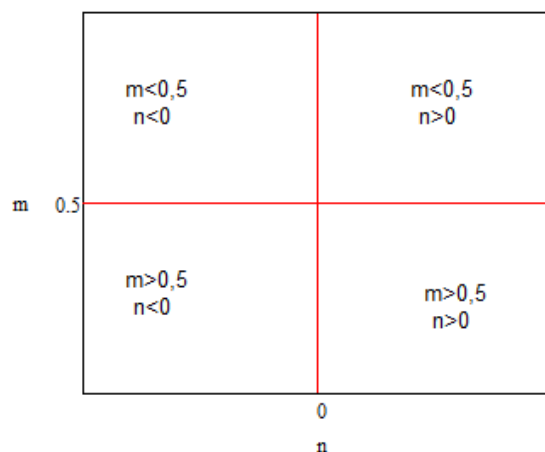
Ha a gerendára központos nyomóerőt alkalmazunk, akkor a deformáció görbéje a terheletlen állapot görbéje alatt fog elhelyezkedni, ezáltal a gerenda minden w behatolási mélység esetén 2 darab feszültségmentes tengelyt fog tartalmazni.

Amennyiben központos húzóerőt alkalmazunk, úgy a deformáció görbéje a terheletlen állapot görbéje fölött fog elhelyezkedni. Ezek a görbék bizonyos w érték alatt nem rendelkeznek feszültségmentes tengellyel, afelett (az origó környezetében) viszont két darabbal is (5.2.1. ábra).

5.3. Külponstos normálerővel terhelt állapot

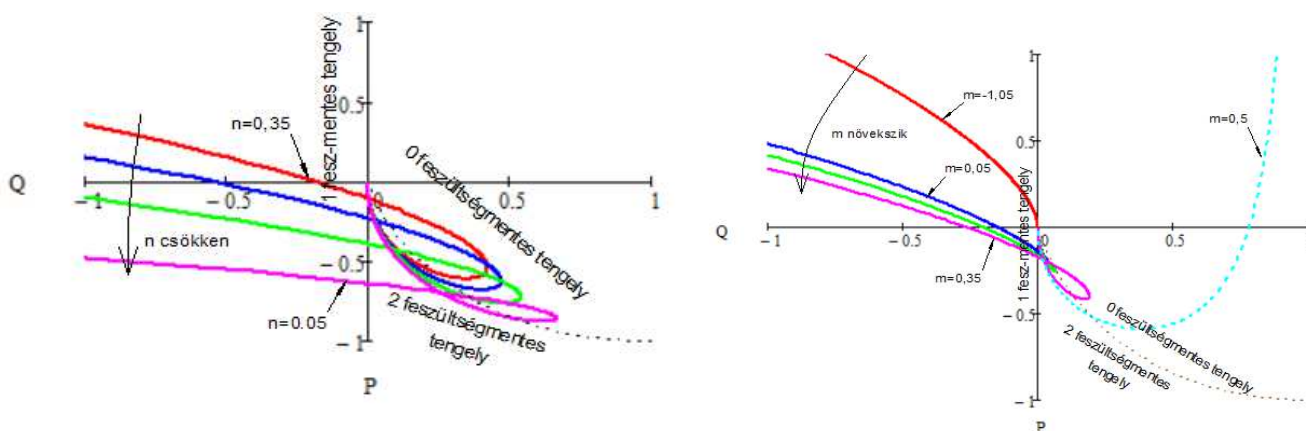
Vezessük be a normálteher valamilyen mértékű külponstosságát! Ekkor két paraméter fogja a w -tól függő görbét befolyásolni: m erőteher helyét, n az erőteher relatív nagyságát adja meg. A két paraméter viszonyát az 5.3.1. ábrán mutatjuk be. Az ábrán a vízszintes

tengelyen levő pontok a központosan terhelt eseteket ábrázolják ($m = 0,5$), a függőleges tengelyen lévő pontok, pedig a terheletlen állapotot mutatják ($n = 0$). Ezeket az eseteket a fentiekben már megvizsgáltuk. A továbbiakban tehát már csak a tengelyek által határolt, négy tartomány vizsgálata szükséges.



5.3.1. *ábra* Az erőteher nagysága (n) és a külpontosság (m) kombinációit bemutató grafikon

1. *tartomány:* $m < 0,5$ és $n > 0$



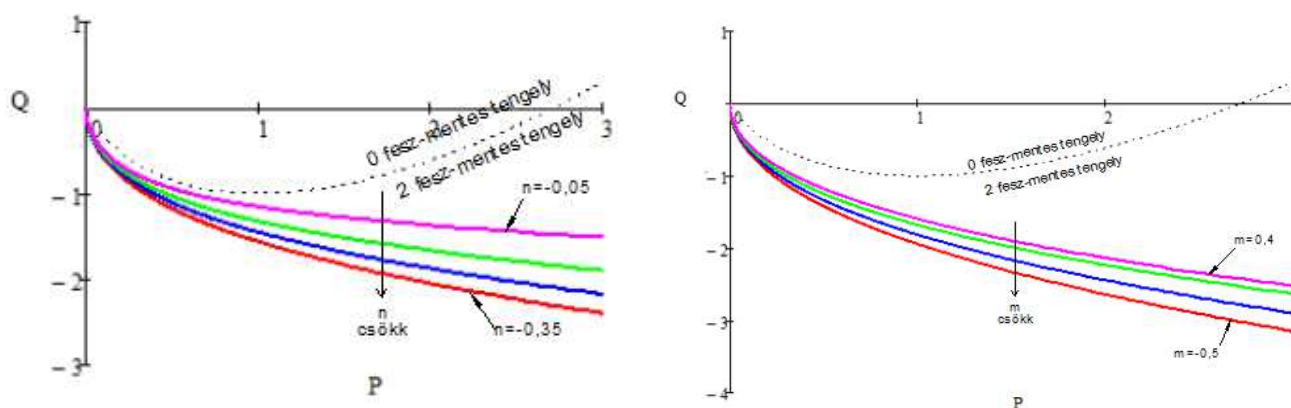
5.3.2. *ábra* Az első tartomány görbéi. Bal oldalon a húzóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos csökkentésének hatása figyelhető meg

Megállapítható, hogy amikor a fotoelasztikus gerendát a keresztmetszet középpontja alatt, normálirányú húzóerővel terheljük, akkor a feszültségmentes tengelyek száma leginkább a normálteher külpontosságától függ, mintsem annak nagyságától. Az 5.3.2. *ábrán* látható módon, kis külpontosság esetében (pl: $m = 0,35$) kialakul egy feszültségmentes tengely nélküli tartomány (ez látható a *baloldali ábrán* is), közepesen nagy értékű külpontossághoz (pl: $m = 0,05$) már nem tartozik ilyen feszültségmentes tengely nélküli tartomány, tehát a

gerenda mindig rendelkezik legalább 1 darab feszültségmentes tengellyel (*jobb oldali ábra*), illetve nagy külpontosság esetén (pl: $m = -1,05$) a gerenda mindig pontosan 1 darab feszültségmentes tengellyel rendelkezik (*jobb oldali ábra*).

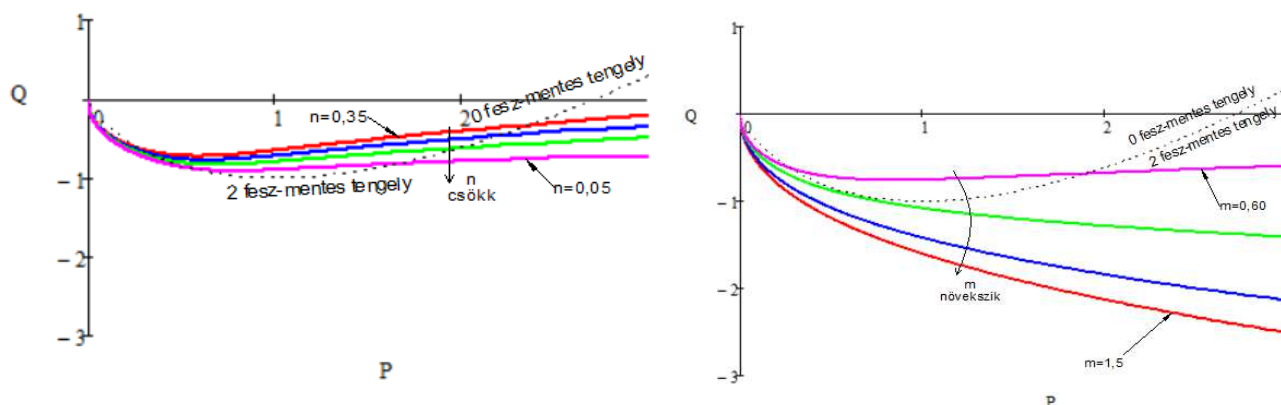
2. tartomány: $m < 0,5$ és $n < 0$

Az 1. esettel ellentétes nyomaték alakul ki a szerkezetben, mivel itt nyomóerőt alkalmazunk. Ebben az esetben a deformáció során mindig 2 darab feszültségmentes tengely alakul ki a keresztmetszetben (5.2.3. ábra).



5.3.3. ábra A 2. tartomány görbéi. Bal oldalon a nyomóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos növelésének hatása figyelhető meg

3. tartomány: $m > 0,5$ és $n > 0$



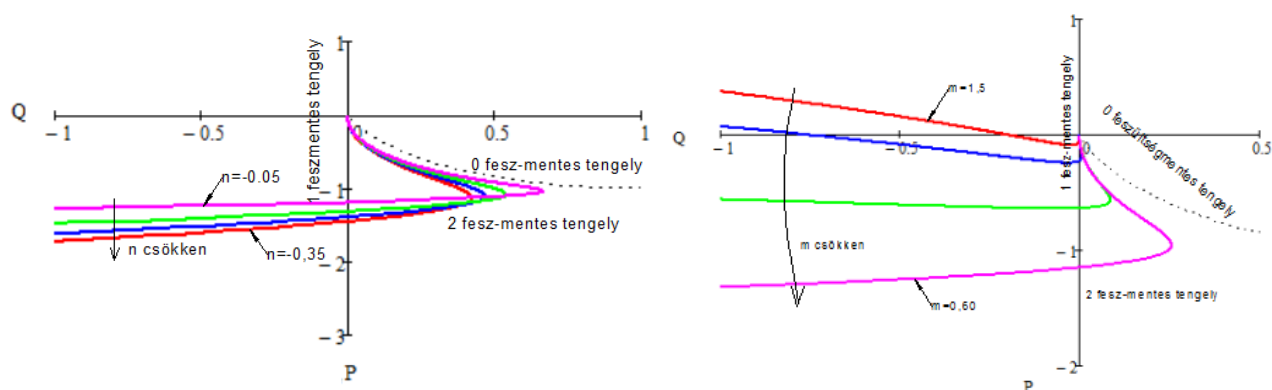
5.3.4. ábra A harmadik tartomány görbéi. Bal oldalon a húzóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos növelésének hatása figyelhető meg

Az m növelésével (a külpontosság folyamatos növelésével), illetve a n folyamatos növelésével hasonló jellemzők érvényesek, mint a 2. tartománynál. Ennek az az oka, hogy

míg ott a középvonal alatti nyomásnak, itt a középvonal feletti húzásnak tettük ki a testet, amely hasonló jellegű hajlítást eredményez. Megállapítható továbbá, hogy a feszültségmentes tengelyek száma leginkább a normálteher külpontosságától függ, mintsem annak nagyságától. Az 5.3.4. ábrán látható módon, kis külpontosság esetében (pl: $m = 0.60$) kialakul egy feszültségmentes tengely nélküli tartomány (ez látható a *baloldali ábrán* is), a nagyobb értékű külpontossághoz (pl: $m = 1,5$) már nem tartozik ilyen feszültségmentes tengely nélküli tartomány, tehát a gerenda mindig pontosan 2 darab feszültségmentes tengellyel rendelkezik (*jobb oldali ábra*).

4. tartomány: $m > 0,5$ és $n < 0$

Az m növelésével (a külpontosság folyamatos növelésével), illetve a n folyamatos csökkentésével a hasonló jellegű hajlítás alakul ki mint az 1. tartományon. Ebben az esetben viszont mindig kialakul, a w növelésével, először 1 majd 2 darab feszültségmentes tengely a szerkezetben.



5.2.5. ábra A 4. tartomány görbéi. Bal oldalon a nyomóerő növelésének, jobb oldalon a külpontosság fokozatos csökkentésének hatása figyelhető meg

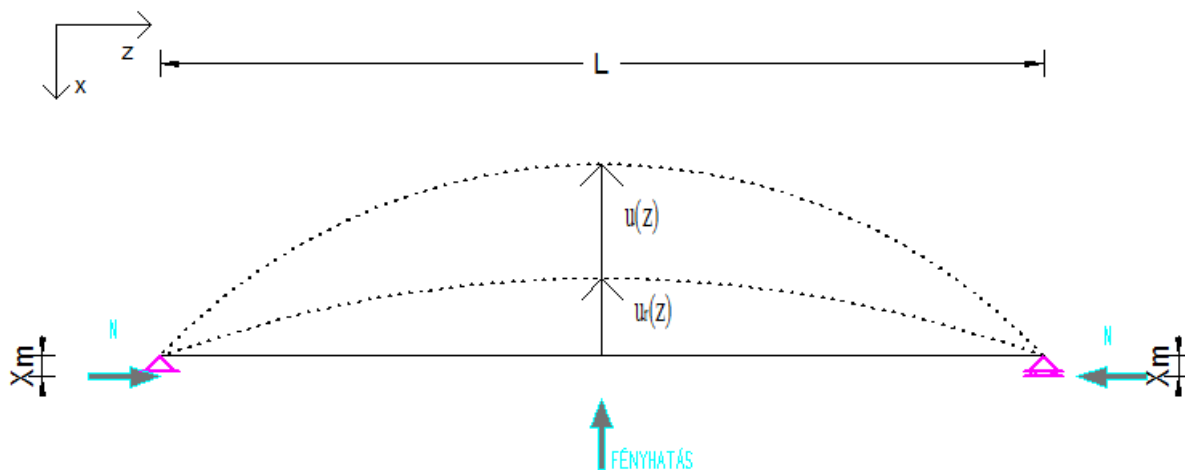
6. A gerenda rugalmas vonalának egyenlete

Dolgozatunkban eddig a csak a gerenda keresztmetszetének viselkedésével foglalkoztunk. Ebben a fejezetben a gerenda fény, illetve nyomatéki teher hatására történő lehajlásának egyenletét határozzuk meg.

6.1. Statikai váz meghatározása

Ugyanúgy, mint a keresztmetszet alakváltozásainál, a lehajlásnál is kétféle alakváltozásról beszélhetünk: $u_r(z)$ fényből adódó alakváltozásról és $u(z)$ rugalmas alakváltozásból, melyet a teher idéz elő.

Az egyszerű peremfeltételek kedvéért a statikai vázat kéttámaszú tartóként vettük fel (6.1.1. ábra).



6.1.1. ábra Gerenda statikai váza és a rá ható terhek

6.2. Mechanikai egyenletek

A fényből adódó $u_r(z)$ alakváltozást kezeljük úgy, mint egy kezdeti alakváltozást.

A z keresztmetszetre felírható *mechanikai egyenletek*:

$$M_y(z) = N \left(u_r(z) + u(z) + X_m - \frac{h}{2} \right), \quad (36.)$$

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = - \frac{M_y(z)}{EI_y}, \quad (37.)$$

$$u_r(z) = \iint \kappa_r dzdz = \kappa_r \frac{z^2}{2} - \frac{\kappa_r L}{2} z, \quad (38.)$$

ahol N a terhelő normálerő, X_m a teher központossága, h a keresztmetszet magassága, E a rugalmassági modulus, I_y a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, κ_r pedig a fény által előidézett görbület (κ -ból számított $\frac{1}{R}$ érték a (35.) egyenletből, $n = 0$ esetén) és kihasználtuk, hogy a gerenda végein csuklós a megtámasztás (6.1.1. ábra).

A három differenciálegyenlet összevonása:

$$\frac{N}{EI_y} u(z) + \frac{N}{EI_y} \left(\kappa_r \frac{z^2}{2} - \frac{\kappa_r L}{2} z + X_m - \frac{h}{2} \right) + \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = 0 \quad (39.)$$

Egyszerűsítsünk a $k = \sqrt{\frac{N}{EI_y}}$ paraméter bevezetésével.

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + k^2 u(z) = -k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + X_m - \frac{h}{2} \right) \quad (40.)$$

6.3. Differenciálegyenlet megoldása

Homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + k^2 u(z) = 0.$$

Megoldása:

$$Y_{hom, \acute{a}lt} = c_1 \cos(kz) + c_2 \sin(kz). \quad (41.)$$

Partikuláris megoldás:

$$Y_{ip} = -\frac{\kappa_r}{2} z^2 + \frac{\kappa_r L}{2} z + \frac{\kappa_r}{k^2} - X_m + \frac{h}{2}, \quad (42.)$$

A differenciálegyenlet megoldása

$$u(z) = c_1 \cos(kz) + c_2 \sin(kz) - \frac{\kappa_r}{2} z^2 + \frac{\kappa_r L}{2} z + \frac{\kappa_r}{k^2} - X_m + \frac{h}{2} \quad (43.)$$

A peremfeltételek a következők:

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\rightarrow c_1 = -\frac{\kappa_r}{k^2} + X_m - \frac{h}{2} \\ u(L) = 0 &\rightarrow c_2 = \frac{\left(\frac{\kappa_r}{k^2} + \frac{h}{2} - X_m\right) (\cos(kL) - 1)}{\sin(kL)} \end{aligned} \quad (44.)$$

Így a differenciálegyenlet megoldása a következő:

$$u(z) = \left(\frac{\kappa_r}{k^2} + \frac{h}{2} - X_m\right) \left(1 - \cos(kz) + \frac{\cos(kL) - 1}{\sin(kL)} \sin(kz)\right) + \frac{\kappa_r}{2} z(L - z). \quad (45.)$$

7. Példa bemutatása

Példa:

A gerenda geometriai paraméterei a következők:

hossz: $L = 20mm$,

szélesség: $s = 1mm$,

magasság: $h = 2mm$.

A testet alulról terhelje egy a hossz mentén konstans $d = 0,4mm$ lassítási hosszal jellemzett fényhatás, továbbá legyen külpontos nyomóerővel terhelt a keresztmetszet alsó élében.

$Xm = 0mm$,

$N = 10^{-10}N$.

Az anyag rugalmassági modulusa: $E = 0,14 MPa$ [14].

Az anyagra, illetve a sugárzásra jellemző alakváltozási paraméter: $C = 1\%$.

Dimenziótlan paraméterek meghatározása 3.1. fejezet alapján:

$$n = 1,786 \times 10^{-7},$$

$$w = 5,$$

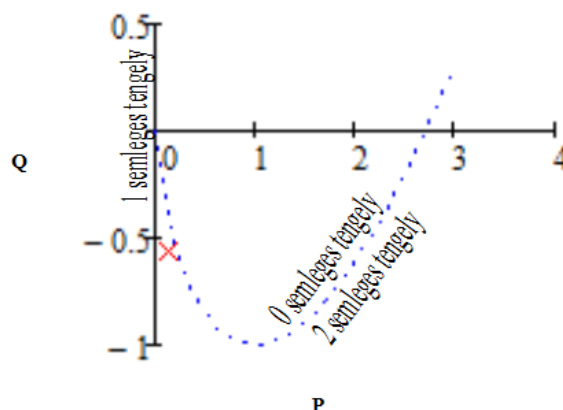
$$m = 0.$$

Semleges tengely(ek) számának és helye(i)nek meghatározása 3. fejezet alapján:

$$P = 0,1463,$$

$$Q = -0,5643.$$

A grafikonon való elhelyezkedést a 7.1. ábra mutatja. Leolvasható hogy a testnek 2 darab semleges tengelye van.



7.1. ábra. A Q-P grafikon. Az x-szel jelölt pont mutatja a test helyzetét

Numerikusan megadható a két semleges tengely konkrét helyzete:

$$Y_{n1} = 1,058,$$

ami konkrétan: $X_{n1} = 0,4231 \text{ mm}$.

$$Y_{n2} = 2,999,$$

ami konkrétan: $X_{n2} = 1,200 \text{ mm}$.

Görbület meghatározása 4.2. fejezet alapján:

$$\kappa = 0,7313.$$

Görbületi sugár $\kappa = \frac{h}{R \cdot C}$ alapján:

$$R = 0.2735 \text{ m}.$$

A deformáció során a keresztmetszetben kialakuló $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozási függvény 2.2.2. fejezet alapján:

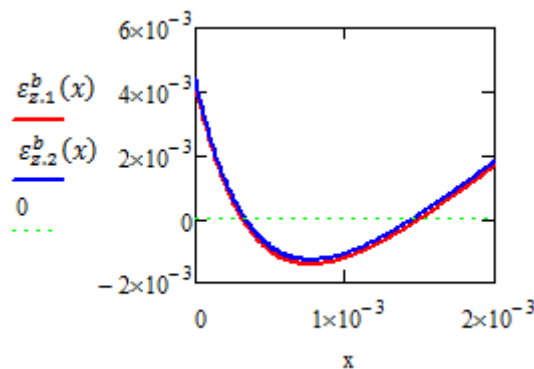
X_{n1} -ből:

$$\varepsilon_{z,1}^b(x) = 0,01 \left(e^{-\frac{x}{0,0004}} - e^{-\frac{0,0004231}{0,0004}} \right) + \frac{x-0,0004231}{0,2735},$$

X_{n2} -ből:

$$\varepsilon_{z,2}^b(x) = 0,01 \left(e^{-\frac{x}{0,0004}} - e^{-\frac{0,001200}{0,0004}} \right) + \frac{x-0,001200}{0,2735}.$$

Mivel a (18.) semleges tengelyek egyenletének mindkét semleges tengely megoldása, ezért mindkét $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozás egyenlet ugyanazt a görbét adja. Így a 7.2. ábrán a két feszültségből származó alakváltozás görbe (a kerekítés miatt csak hozzávetőlegesen) fedi egymást.



7.2. ábra. A keresztmetszet normál irányú alakváltozása

A gerenda rugalmas vonalának meghatározása 6.3. fejezet alapján

$$I_y = \frac{0,001 \times 0,002^3}{12} = 6,667 \times 10^{-13} \text{ m}^4,$$

$$k = \sqrt{\frac{10^{-11}}{1,4 \times 10^5 \times 6,667 \times 10^{-13}}} = 0.03273 \text{ m}^{-1},$$

Csak fényteherből származó relatív görbület:

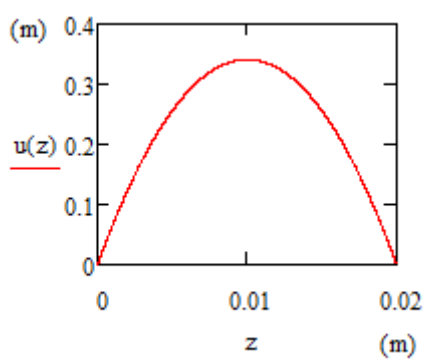
$$\kappa_0 = -6w^{-1}(2w^{-1} - 1) + 6w^{-1}(2w^{-1} + 1)e^{-w} = 0,7313m^{-1}.$$

Tényleges, csak a fényteherből származó görbület:

$$\kappa_r = \kappa_0 \frac{c}{h} = 3,657 m^{-1}.$$

A lehajlás egyenlete, m dimenzióban:

$$u(z) = -3412,8 \times \cos(0,01035 \times z) - 1,117 \times \sin(0,03273 \times z) - 3412,8 \times z \times (z - 0,020) + 3412,8.$$



7.3. ábra. A gerenda lehajlása

8. Konklúzió

A munkánk során téglalap keresztmetszetű folyadékkristály elasztomer anyagú gerenda fény hatására történő alakváltozását vizsgáltuk, külpontos, a szimmetriatengelyen működő terheléssel kiegészítve a jelenséget.

A tanulmány egy szakirodalmi áttekintéssel nyit, amely átfogó ismereteket nyújt a folyadékkristály állapotú anyagok szerkezeti felépítésével, és viselkedésével kapcsolatban, illetve felhasználási technológiák és alkalmazási szakterületek széles skáláját ismerteti. A bevezető végén megfogalmaztuk a tanulmány alapját képező jelenség lényegi felépítését és definiáltuk az alapvető geometriai paramétereket. Mechanikai egyenletek segítségével meghatároztuk a keletkező semleges tengelyek helyét leíró egyenletet, majd elvégeztük annak analízisét. A vizsgálat során megállapítottuk, hogy bizonyos paraméterértékek esetén a gerenda keresztmetszetében két semleges tengely is található.

A paraméterek összevonása és grafikonba rendezése után lehatároltuk a semleges tengelyek száma szerinti tartományokat analitikus módszerrel, majd numerikus módszerrel meghatároztuk a semleges tengelyek helyét.

E grafikonon kimutattuk, hogy a fény intenzitásának függvényében milyen görbék mentén mozdul el a rendszer állapota. Tanulmányoztuk egy-egy paraméter fokozatos módosításával a görbék változásának jellegét, illetve a feszültségmentes tengelyek száma szerinti tartományokhoz képesti elhelyezkedését.

Szintén mechanikai egyenletekből meghatároztuk a deformált gerenda görbületét. Megállapítottuk, hogy a görbület központosan terhelt állapotban nem függ az erőteher értékétől. Megvizsgáltuk továbbá a görbület külpontos erőteher által előidézett viselkedését.

A munkánk végén a gerenda lehajlása került meghatározásra, ahol a fény által előidézett alakváltozást kezdeti alakváltozásként vettük figyelembe.

Végül számpéldával mutattuk be a kapott összefüggések alkalmazását.

9. Hivatkozások:

1. <http://www.ticona.hu/hu/home/portfolio/vectra.htm>
2. http://www.ticona.com/products/zenite_lcp
3. <http://www.agt.bme.hu/szakm/szg/monitor/elemek/LCD.htm>
4. http://www.nordenia.hu/article,navsub_id-lang,25-hu.html
5. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Elasztomer>
6. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumi>
7. V. Vargha, *Folyadékkristály elasztomerek (Liquid crystal elastomers) Kutatási jelentés. OTKA, (2007)*
8. J. Naciri, A. Srinivasan, Jeon Hong, N Nikolov, P Keller; B R Ratna: *Nematic elastomer fiber actuator. Macromolecules, 22, 8499-8505 (2003)*
9. Z. Y. Wei and L. H. He, *Surface topography and its transition of nematic elastomers due to photoinduced deformation J. Chem. Phys. 124, 064708 (2006)*
10. M. Warner, L. Mahadevan, *Photo-induced deformations of beams, plates and films, Phys. Rev. Lett. 92, 134302 (2004).*
11. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Abszorpció_\(fizika\)](http://hu.wikipedia.org/wiki/Abszorpció_(fizika))
12. J. Cviklinski, A. R. Tajbakhsh, E. M. Terentjev, *UV isomerisation in nematic elastomers as a route to photo-mechanical transducer, Eur. Phys. J. E 9, 427 (2002).*
13. M. Warner, E. M. Terentjev, *Liquid Crystal Elastomer, Clarendon press, Oxford, (2006)*
14. M. L. Dunn, *Photomechanics of mono- and polydomain liquid crystal elastomer films, J. Appl. Phys. 102, 013506 (2007).*