

OTDK-DOLGOZAT

Timotity Dusán

2013

KOCKÁZAT KORLÁTOK NÉLKÜL
EGYSÉGES EGYENSÚLYI MODELLEZÉS CVAR-E(R) KÖRNYEZETBEN

RISK WITHOUT LIMITS
CVAR-E(R) BASED EQUILIBRIUM MODELLING

Timotity Dusán

Kézirat lezárva: 2012. november 27.

Tartalomjegyzék

1	BEVEZETŐ	1
2	JÓBÓL IS MEGÁRT A SOK: A HASZNOSSÁG MEGRAGADÁSA	2
2.1	A VÁRHATÓ HASZNOSSÁGI (BERNOULLI-FÉLE) MODELL	2
2.2	KILÁTÁS ELMÉLET (KAHNEMAN-TVERSKY-FÉLE HASZNOSSÁG)	5
2.3	A KÉT MODELL KOMBINÁLÁSA	13
3	ÍZLÉSEK ÉS POFONOK: AZ EGYÉNEK SZEREPE	15
3.1	A CVAR-RÓL ÁLTALÁBAN	15
3.2	AZ ALKALMAZOTT CVAR HATÉKONYSÁGI HATÁR.....	17
3.3	"JOBBA MA EGY VERÉB, MINT HOLNAP EGY TÚZOK": A POZITÍV IDŐPREFERENCIA ÉS A CVAR KAPCSOLATA 18	
3.4	AZ EGYÉNI PREFERENCIÁK LEKÉPEZÉSE CVAR SEGÍTSÉGÉVEL	20
3.5	A KOCKÁZATKEDVELŐK BEVONÁSA.....	25
4	"HA RÖVID A KARDOD, TOLDD MEG EGY TŐKEÁTTÉTELLEL": A HITELFELVÉTEL HATÁSAI	29
5	AZ ELVÁRT HOZAM KALKULÁLHATÓSÁGA ÉS ENNEK ALKALMAZHATÓSÁGA A PÉNZÜGYI SEKTORBAN	32
5.1	A BEFEKTETŐK ADATAI, MINT A MODELL PARAMÉTEREI	32
5.2	HOZAMMEGHATÁROZÁS INTÉZMÉNYI ÉS NEMZETKÖZI SZINTEN.....	33
6	ÖSSZEFOGLALVA.....	36
7	IRODALOMJEGYZÉK	38
	MELLÉKLETEK, FÜGGELÉKEK	1

1 Bevezető

Az utóbbi évtizedekben a pénzügyi közgazdaságtan területén rengeteg változás született, alapvető elméletek dőltek meg, új kihívások elé kerültek a pénzügyi közgazdászok. A technológia fejlődésével lehetővé váltak olyan elemzési és adatfeldolgozási módszerek, amelyekről az 1950-es, 60-as években még álmodni sem lehetett. Ezen módszerek olyan empirikus kutatásokhoz vezettek, amelyek a gyakorlatban is alkalmazott elméletekben óriási mértékű anomáliákat fedeztek fel. Felvetődött a kérdés, hogy vajon a tőkepiac addig hitt hatékonyságával van probléma, vagy pedig a viszonyítási alapként elfogadott egyensúlyi modellel. Mivel az előbbi nem bizonyítható az utóbbi biztossága nélkül, így egy új, sokkal jobb regresszióval rendelkező egyensúlyi modell kialakítása lett az egyik leglényegesebb cél a pénzügyi elméleteket kutatók számára.

Sajnálatos módon még ma is az 1960-as évektől terjedő egyensúlyi modellt, a Capital Asset Pricing Modelt (CAPM) használják széles körben, ennek továbbfejlesztése, pontosítása, újragondolása a kutatási témák egyik fő része. Az alábbi dolgozat központi irányvonala is e téma köré épül a következő módon:

Mivel a modern technikai eszközök lehetővé teszik, hogy a kockázat becslésére pontos eloszlásokat készítsünk minden egyes befektetési lehetőségre és portfólióra, továbbá ezen eloszlás elemzésével jóval pontosabb kockázati paraméterhez juthassunk – így például a későbbiekben definiálásra kerülő, a regresszióban a magyarázó változóként szereplő feltételes Value-at-Risk-hez (CVaR) –, a CAPM alapösszefüggését, amely szerint egy befektetés várható hozama megbecsülhető egy paraméter, a kockázat segítségével, megtartottam, a kockázat jellegét viszont másképp definiáltam modellemben.

A következő fejezetekben ehhez a kockázatértékeléshez szükséges elméleti háttérrel ismertetem csak a leglényegesebb elemeket kiemelve, így a várható hasznosság (2.1 fejezet) és a kilátás elméletet (2.2 fejezet eleje), utána ezek kombinációján keresztül az alapmodellt felállítom (2.2 fejezet vége és 2.3 fejezet). A 3. fejezetben bemutatom a felhasznált kockázati paraméterezést (3.1 fejezet), a 3.2 - 3.4 fejezetekben pedig ennek a technikának a modellbe való implementálására kerül sor. A dolgozat fő mondanivalója, a korábbi modellek irreális feltételeinek feloldása – így a kockázatkedvelők bevonása a modellbe, a tőkeáttétellel kapcsolatos valótlanságok eltörlése és az ármeghatározó, aktív szereplők elfogadása – ezek után, a 3.5, 4. és 5. fejezetekben kerül bemutatásra. A 6. fejezet végül, egy záró, konklúziókat, felhasználási lehetőségeket tartalmazó összefoglalója a dolgozatnak.

2 Jóból is megárt a sok: a hasznosság megragadása

A hasznosság, mint elvont fogalom paraméteres leírása már a korai közgazdászok elméleteiben is megjelent. Egészen 1979-ig a hasznosságot az ember összvagya alapján számított várható hasznossági modellel lehetett csak leírni. Ezen hasznosság számításához szükséges alapokat az XVIII. század elejére datálható várható hasznosság elmélet adta.

A másik lényeges hasznossági modell a pénzügyi viselkedéstan térnyerésével, az anomáliák sorozatos felfedezésével és elemzésével egy időben került napvilágra. Ezt a Kahneman-Tversky szerzőpáros kilátás elméletnek (Prospect Theory) keresztelte el.

Jelenleg e két meghatározó hasznossági modellel dolgozunk a közgazdaságtani számítások alkalmazása során. A 2.3. fejezetben ezen két, már létező modellt kombinálom egy új, egységes modellel ezzel megteremtve a regresszióhoz szükséges hasznosság definiálási keretet.

2.1 A várható hasznossági (Bernoulli-féle) modell

A várható hasznossági modell alapvetése 1738-ban Daniel Bernoulli dolgozatából került ki. Ennek alapvetése az volt, hogy "a döntéshozó az egyes kimeneteket nem matematikai (pl. "pénzbeli") értékük szerint, hanem hasznosságuk szerint súlyozva minősíti." (Andor [2011], 32. oldal) Ezen állítás szerint:

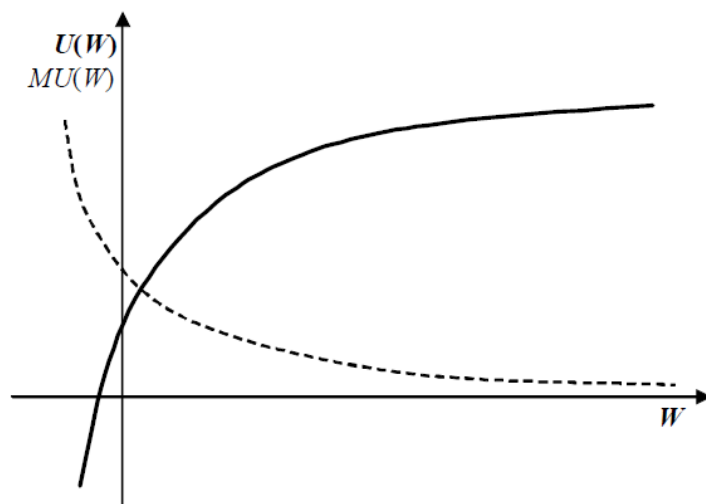
$$E(W) = \sum_i p_i w_i \rightarrow \max \quad (1)$$

helyett:

$$E[U(W)] = \sum_i p_i U_i \rightarrow \max \quad (2)$$

ahol W a vagyon, amelynek w_i változásai lehetnek p_i valószínűségekhez rendelve, U_i pedig az adott kimenet hasznossága.

A hasznosság maximalizálásának vizsgálatával azt is kimutatja a dolgozat, hogy ugyan eltérő mértékben, de minden ember érzékelt hasznossága egyre kisebb ütemben nő a vagyon növekedésével, tehát általánosnak mondható, hogy hasznossági függvény csökkenő meredekségű, vagyis érvényesül a csökkenő határhasznosság törvénye (Andor [2011], 33. oldal).



1. ábra: A várható hasznossági függvény

Forrás: Andor [2011], 34. oldal

Az ábrán $U(W)$ a vagyon összhassznosságát, $MU(W)$ a határhasznosságot, W a vagyon mennyiségét jelöli.

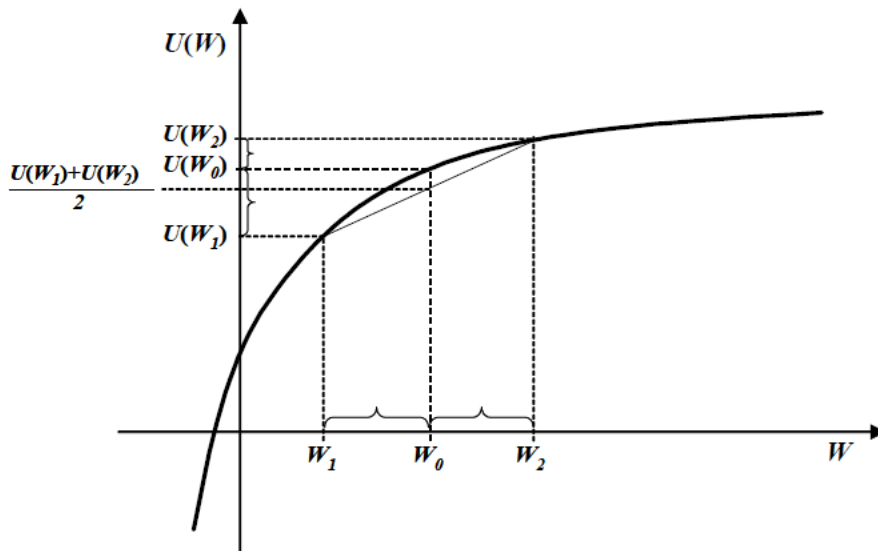
Ha kockázatos lehetőségeket tekintünk, és feltételezzük, hogy egy matematikailag fair befektetést szemlélünk (a kimenetek várható értéke a kiinduló helyzetet adja), könnyen belátható, hogy a csökkenő határhasznosság miatt eltérő a hasznosságváltozás, vagyis:

$$U(W + x) - U(W) < U(W) - U(W - x) \quad (3)$$

tehát:

$$\frac{U(W+x)+U(W-x)}{2} < U(W) \quad (4)$$

Ez azt jelenti, hogy fair eloszlás esetén a befektető el fogja kerülni ezt a lehetőséget, mert a kezdeti hasznosságánál kisebb hasznosságot tudna csak elérni vele. Az iménti szituációt a következő ábra mutatja:



2. ábra: Egy fair szituáció hatása a hasznosságra

Forrás: Andor [2011], 36. oldal

Az elmélet szerint, azt, hogy mennyivel nagyobb mértékben igényel pozitív irányú elmozdulást a befektető ahhoz, hogy legalább a kezdeti hasznosságát kapja meg, minden egyénre különböző, úgynevezett kockázatkerülési együttthatókkal tudjuk leírni.

Két féle kockázatkerülési együttthatóról beszélhetünk, abszolútról és relatívról. Előbbi azt írja le, hogy az indulóvagyontól függően a pozitív mértékű eltérésnek mennyivel szükséges, hogy nagyobb legyen (kockázati prémium) a negatív kilengésnél. Utóbbi szerint az indulóvagyon és az előbb említett kockázati prémium szorzatát érdemes vizsgálni egy adott befektetőnél, ezen szorzat értéke jelenti a relatív kockázatkerülési együttthatót.

A gyakorlatban az tapasztalható, hogy az emberek többnyire vagy konstans abszolút - vagyis az indulóvagyontól független -, vagy konstans relatív kockázatkerülési együttthatóval rendelkeznek - utóbbi esetében az abszolút kockázatkerülési együtttható az induló vagyon mértékével fordított arányban változik -. Amennyiben a vagyon kis mértékű elmozdulásával kalkulálunk, konstans $A = a \cdot W$ relatív kockázatkerülési együtttható esetében $a = A/W$ abszolút kockázatkerülési együtttható is állandónak tekinthető, így a vagyoni hatásokat itt is figyelmen kívül hagyhatjuk, és minden befektetőhöz egy konkrét A abszolút kockázatkerülési együttthatót rendelhetünk.

Akár konstans abszolút, akár konstans relatív kockázatkerülési együtthatóval rendelkező befektető hasznosságfüggvényét vizsgáljuk, levezethető¹, hogy mindkét függvény jól közelíthető a következő formulával:

$$U(F) \cong E(F) - 0,5a\sigma^2 \quad (5)$$

ahol $U(F)$ a befektetés pénzáramának hasznossága, $E(F)$ a várható értéke, " a " a kockázatkerülési együttható, σ^2 pedig a pénzáram eloszlásának varianciája.

Mivel a valóságban a $\sigma^2 - E(r)$ kombinációkat konkáv és pozitív, illetve tőkeáttételes esetben konstans és pozitív meredekségű függvénnyel lehet leírni², valamint, ha az emberek kockázatkerülők az előbb leírtak szerint, belátható, hogy egy egyszerű lineáris programozással egyértelműen meghatározható bármely befektető által optimálisnak tartott portfólió.

2.2 Kilátás elmélet (Kahneman-Tversky-féle hasznosság)

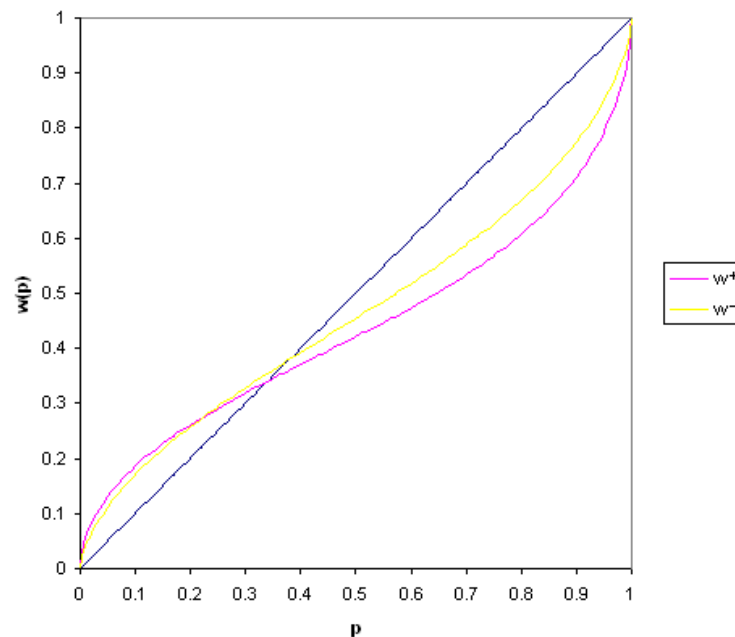
A modern portfólió-elmélet és a CAPM megjelenését követően rohamos ütemű fejlődés ment végbe az alkalmazható technológiákban, a pénzügyi módszerekben és az elméletekben. Ennek során egyre több adathoz lehetett hozzáférni, azokat különböző módon elemezni. A CAPM-et sorozatosan érték a támadások, rengeteg anomália került napvilágra, megkérdőjeleződött a tőkepiaci hatékonyság léte. A különböző pénzügyi viselkedéstani és tőkepiaci mikrostruktúrákkal foglalkozó empirikus kutatások eredményei az egyensúlyi modellekkel nem voltak magyarázhatóak. Az első olyan jelentős modell, amely ezeket az eredményeket össze tudta fogni és egy részüket megmagyarázni 1979-ben jelent meg Daniel Kahneman és Amos Tversky tollából.

Ez az elmélet arra épít, hogy a befektetők nem minden esetben cselekednek közgazdaságtanilag racionális módon, a várható hasznosság elméletével nem minden cselekedet magyarázható meg. A szerzők szerint minden befektető számára léteznek olyan döntési tényezők, amelyek szubjektív módon, különböző viselkedési mintákra motiválják őket. A döntéseikben olyan heurisztikák is szerepet játszanak, mint a reprezentativitás (a

¹ a hasznosságfüggvény Taylor-sorba fejtésével lehetséges, Dr. Andor György: Üzleti gazdaságtan, 2011, Budapest, 50. oldal

² mivel a várható értékeknek csak számtani átlagát nézzük, a varianciák esetében pedig az 1-nél kisebb korrelációk is szerepelnek csökkentő tényezőkként, a hatékony portfóliók határa ilyen lesz

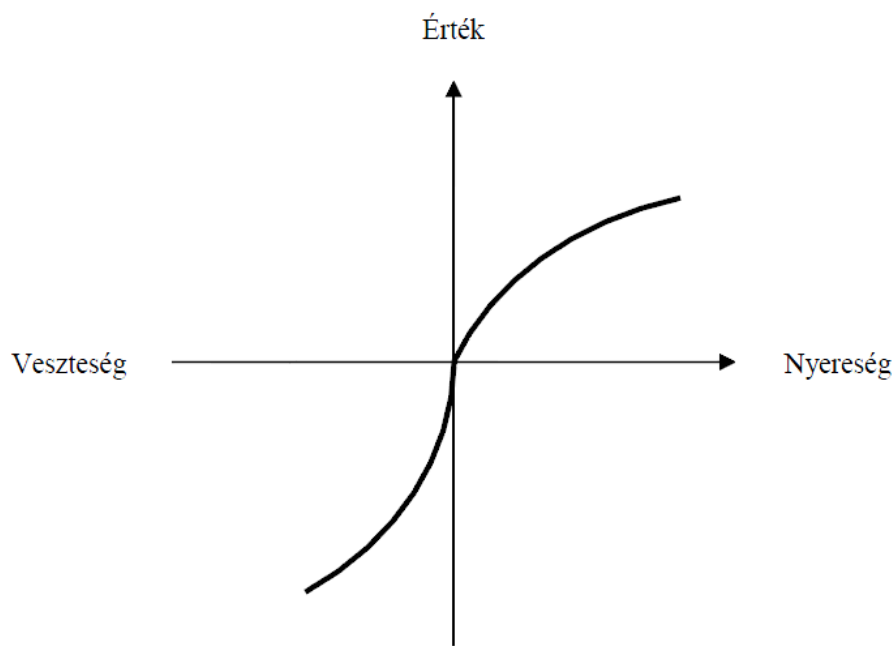
környezetünkben gyakori dolgok valószínűségének túlbecslése), a felidézés (saját tapasztalatainkra túlzottan hagyatkozunk) vagy - ami számunkra a legfontosabb lesz - a lehorgonyzás (egy referenciapontot jelöl ki a befektető, és annak paraméterei szerint torzítja az új információkat). Ezen szubjektív elemek miatt torzul a befektető megítélése a valószínűségekről, és emiatt egy új valószínűségi függvényt alakít ki a valószínűtlen dolgokat túlreagálva, a valószínűket pedig alulreagálva. Ez a jelenség mindkét irányba való elmozduláskor létrejön, azonban nyereség esetén magasabb torzítást okoz. (Molnár, 2006)



3. ábra: szubjektív valószínűség a kilátás elméletben

Forrás: <http://prospect-theory.behaviouralfinance.net/>

Ezen torzításokra és heurisztikákra alapozva Kahneman és Tversky úgy gondolta, hogy egy olyan modell, amely a hasznosságot nem az összvagyon függvényében (abszolút értelemben), hanem annak változásában (relatív értelemben) írja le, jobban követi hasznosságérzékelésünket. Modelljünkben a pozitív vagyonváltozásra létrejövő hasznosságváltozás hasonló függvénnyel írható le, mint a várható hasznosság elméletben, a függvény konkáv jellege és monoton növekedése miatt a csökkenő határhassznosság törvénye itt is érvényes. Negatív irányú elmozdulás esetében azonban a kutatások meglepő eredményeket hoztak: Hasznosságcsökkenés esetén, noha a kockázatkerülés megmarad (mivel a referenciapontban, a zérushelyen a meredekség bal oldali határértéke átlagosan 2,25-szerese a jobb oldalinak, tehát jóval nagyobb hasznosságvesztést okoz adott mértékű vagyoncsökkenés, mint ugyanakkora vagyonnövekedés), a függvény jellege negatív tartományban konvexszé válik, emiatt egy S alakú görbe jön létre.



4. ábra: Hasznosságfüggvény a kilátáselméletben

Forrás: Kahneman-Tversky (1979, p. 279.)

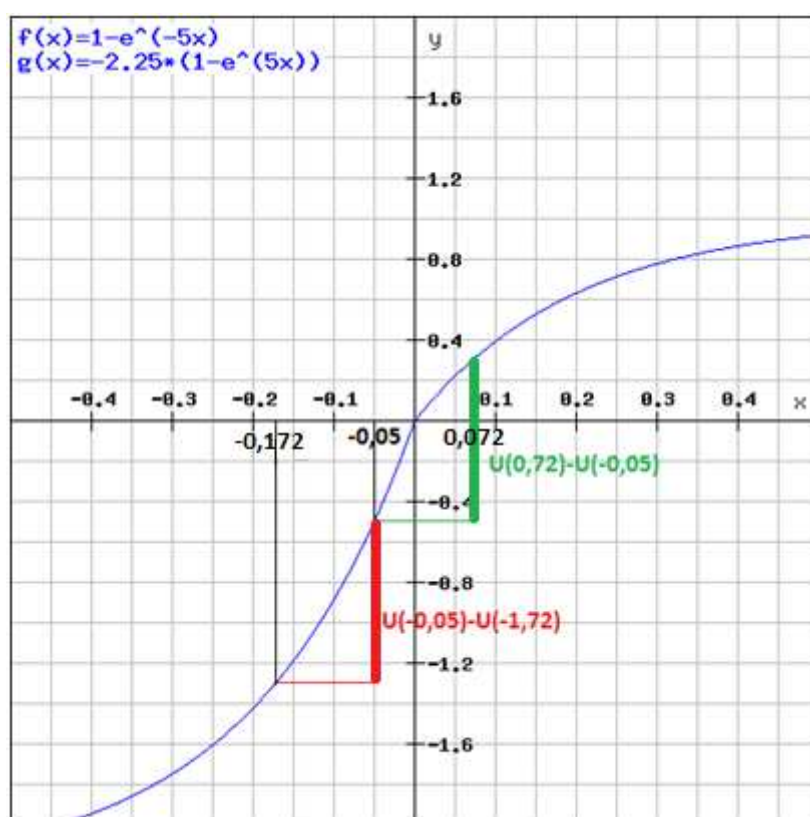
Ezen elmélet alapvetően egy periódusú döntések elemzésére készült, így lényegében minden döntésnél újból a zéruspontba kerül a befektető, azonban a gyakorlatban ez nem mindig alakul így. Modellemben – az eddigi elméletektől eltérően – számításba vettem, hogy léteznek olyan befektetők, akik valamilyen oknál fogva – legyen az lehorgonyzási hatás szerepe (konkrét referenciaérték kijelölése), az elsüllyedt költségek ismételt számbavétele vagy a beragadás jelensége ("már úgy is mindegy" vagy "ettől már csak jobb lehet" alapon kezelve a befektetést) – egy referenciapontot alakítanak ki, amelyet a következő döntés során is megtartanak, elmozdulva ezáltal hasznossági függvényükön.

A számítások eredményéül azt kaptam, hogy az iménti esetben a hasznossági függvény alakjából adódóan létezik olyan fair lehetőség, amelyben a várható érték hasznosságnövekedést eredményez, emiatt bizonyos szintig a befektető a fair eloszlás szórásának növekedésével egyre jobb hasznossági helyzetbe kerül, tehát kockázatkedvelő magatartást követ. Az iménti szituációt a következő egyenlethalmaz és ábra szemléltetik jól.

Az ábra az

$$1 - e^{-5x} + 2,25(1 - e^{5(-0,05)}) = -2,25(1 - e^{5(-0,05)}) + 2,25(1 - e^{5(-0,05-0,05-x)})$$

egyenlőség alapján, vagyis a = 5 kockázatkerülési együtthatóval és -5%-os hozam, mint veszteséget követő referenciapont használatával lett kalkulálva. Ezek alapján a pozitív, konkáv szakaszon elérhető 7,72%-os hozamig kockázatkedvelő jelenség tapasztalható.



5. ábra: Fair befektetés veszteséges helyzetből

Mivel ha $x < 0$ akkor $U(x) = -2,25U(-x)$ átlagos helyzetben, és a befektető addig maximalizálja a kockázatot (itt szórást), amíg fair eloszlás esetén kisebb nem lesz a pozitív irányú y vagyonnövekedésből eredő hasznosságnövekedés a negatív irányú vagyonszökkenésből eredő hasznosságcsökkenésnél, ezért $(x+y)$ eltérésre nézve $-x$ kiindulási pontból a hasznossági függvények különbsége negatív és pozitív irányban egyenlő nem lesz, kockázatközömbös lesz ekkor a befektető:

$$U(-x) - U(-2x - y) = U(y) - U(-x) \quad (6)$$

Ha a negatív helyhez tartozó hasznossági értéket ellentett helyén (pozitív megfelelőjeként) értelmezzük, a negatív szár 2,25-ös szorzója miatt:

$$-2,25U(x) + 2,25U(2x + y) = U(y) + 2,25U(x) \quad (7)$$

tehát:

$$U(y) = -4,5U(x) + 2,25U(2x + y) \quad (8)$$

másképpen felírva:

$$\frac{2,25[2U(x)+U(y)-U(2x+y)]}{1,25} = U(y) \quad (9)$$

ebből belátható, hogy a csökkenő határhasznosság miatt $[2U(x) + U(y) - U(2x+y)] > 0$ t, így, $U(y)$ -nak és így y -nak valóban pozitívnak kell lennie az egyenlet megoldhatósága érdekében. A pontos értékeik a hasznossági függvényből vezethetőek le.

A varianciát tekintve, definíciója és képlete alapján látható, hogy $-x$ indulási pontból $x+y$ kilengésű fair befektetést szemlélve:

$$\sigma^2 = \frac{[y-(-x)]^2 + [-2x-y-(-x)]^2}{2} = \frac{(y+x)^2 + (-x-y)^2}{2} = \frac{2(x+y)^2}{2} = (x+y)^2 \quad (10)$$

Ha a $-x$ kiindulási pontot megtartjuk, de 0 helyett $0 < c_1 < x$ várható értékű befektetést szemlélünk, a következő helyzet alakul ki: Ahhoz, hogy c_1 várható érték mellett még mindig egyenlő hasznosságváltozást okozzon egy $(-x+c_1)$ kiindulási pontra értelmezett fair eloszlás pozitív és negatív irányba való vagyonsvltózáskor, értelemszerűen csökkennie kell a varianciának is. Ennek a csökkenésnek a mértékét a hasznosságfüggvények alakjából származtathatjuk:

A pozitív és negatív irányú vagyonsvltózások miatti hasznosságváltozások egyenlőségének megtartásához szükséges, hogy c_1 növekedésére (vagy x csökkenésére) pontosan ugyanakkora hasznosságdifferencia következzen be a $(-x + c_1)$ -re értelmezett fair befektetés várható érték feletti részén, mint várható érték alatti részén, vagyis:

$$U(y - c_2) - U(-x + c_1) = U(-x + c_1) - U(-2x + 2c_1 - y + c_2) \quad (11)$$

ismét felírva a negatív konverziót pozitívrá és átrendezve az egyenletet:

$$U(y - c_2) = 2,25U(2x - 2c_1 + y - c_2) - 4,5U(x - c_1) \quad (12)$$

Az egyenletet megfigyelve belátható, hogy ha $c_1 = 0$, akkor a (8)-as egyenletnek megfelelően c_2 is 0, valamint ha $c_1 = x$, akkor

$$U(y - c_2) = 2,25U(y - c_2) \quad (13)$$

egyenlet a jobb oldali konstans szorzótényező miatt kizárólag akkor áll fent, ha mindkét oldal értéke 0, vagyis $y = c_2$.

A (12)-es egyenletet átrendezve:

$$0 = 2,25[U(2(x - c_1) + y - c_2) - 2U(x - c_1) - U(y - c_2)] + 1,25U(y - c_2) \quad (14)$$

Ezen egyenletet függvényként kezelve c_1 és c_2 között feltárható a kapcsolat. Ha hasznossági függvényként egy tipikus, a konstans kockázatkerüléshez tartozó $1 - e^{-ax}$ függvényt tekintjük, és $x = c$, $y = d$ konstansokkal, valamint $c_1 = x$ és $c_2 = y$ változókkal helyettesítünk be, az előbbi egyenlet felírható a következő alakban.

$$2.25 \left(1 - e^{-(a(2c - 2x + d - y))}\right) - 4.5 \left(1 - e^{-a(c - x)}\right) - 1 + e^{-a(d - y)} \quad (15)$$

Ennek a függvénynek x szerinti totális deriváltja:

$$\begin{aligned} & \frac{d \left(2.25 \left(1 - e^{-a(2c - 2x + d - y)} \right) - 4.5 \left(1 - e^{-a(c - x)} \right) - 1 + e^{-a(d - y)} \right)}{dx} = \\ & -2.25 e^{-a(2c + d - 2x - y)} \left(\frac{da}{dx} (-2c + d - 2x - y) - a \left(2 \frac{dc}{dx} + \frac{dd}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2 \right) \right) + \\ & 4.5 e^{-a(c - x)} \left(-(c - x) \frac{da}{dx} - a \left(\frac{dc}{dx} - 1 \right) \right) + \\ & e^{-a(d - y)} \left(-(d - y) \frac{da}{dx} - a \left(\frac{dd}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Mivel tudjuk, hogy a (14)-es egyenlet alapján a függvény értéke 0 kell, hogy maradjon bármilyen x elmozdulás esetén, ezért a derivált értéke is 0 kell, hogy legyen. A konstans tagok szerinti derivált 0, a maradó tagokból pedig kifejezhető df/dx :

$$\frac{df}{dx} = -2,25e^{-a(2c+d-2x-y)} \left(a \frac{dy}{dx} + 2a \right) + 4,5ae^{-a(c-x)} + a \frac{dy}{dx} e^{-a(d-y)} = 0 \quad (17)$$

Ebből az egyenletből pedig kifejezhető dy/dx :

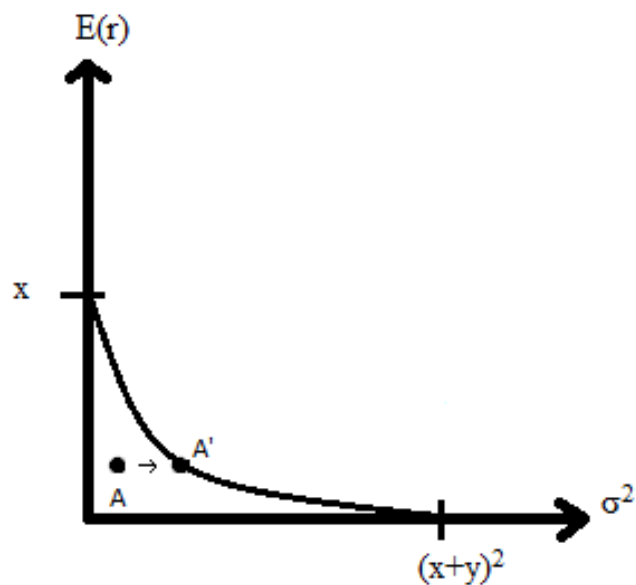
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4,5e^{-a(2c+d-2x-y)} - 4,5e^{-a(c-x)}}{e^{-a(d-y)} - 2,25e^{-a(2c+d-2x-y)}} \quad (18)$$

Mivel megállapítottuk az elején, hogy $y \leq d$ és $c \leq x$, ezért a számlálóban minden $a > 0$ érték mellett pozitív, a nevezőben negatív számot találunk. Ebből látható, hogy ha x nő, y -nak csökkennie kell a (18)-as egyenlet alapján.

Kis elmozdulások esetén belátható, hogy a konstans relatív kockázatkerülési együtthatóhoz tartozó függvények $\left(\frac{W^{1-A}}{1-A} \right)$ ha $A \neq 1$, $\lg(W)$ ha $A = 1$) esetében hasonló megállapításokra jutottunk volna, ezek elemzését ezért itt elhagyom.

Visszatérve eredeti jelölésrendszerünkhöz (x, y, c_1, c_2) tudjuk, hogy $0 < c_1 < x$ esetén lesz jellemző ez a kockázatkedvelő viselkedés, így tudjuk a két végpontot is a variancia-várható érték kombinációkból. Az átmenet függvényének alakjáról a (18)-as egyenlet szolgáltat információt.

Ekkor végponttól végpontig, $(0; x)$ variancia-várható érték kombinációtól haladva $((x+y)^2; 0)$ kombinációig a befektető maximalizálni fogja varianciáját az adott várható értékhez tartozó "optimális" választáshoz, hogy elérje a kockázatközömbös helyzetet a 6. ábrán látható módon (nem feltétlenül az ábrán látható függvény alapján). Az átmeneti függvény jellegéről a jelenség elemzéséhez elég tudnunk, hogy az szigorúan monoton csökkenő, tehát a várható érték növekedésére (c_1) a variancia folyamatosan csökken (c_2), ezt pedig beláttuk a (18)-as egyenlet elemzésével. Így például "A" befektetés helyett az ugyanazon várható értékkel rendelkező, de magasabb varianciájú "A'" befektetést választja, amely döntés az alapvető egyensúlyi modellek szerint teljesen értelmetlen volna.



6. ábra: Kockázatkedvelés a közömbös szintig

Ezen eredmények negatívuma, hogy ez a variancia - várható érték kapcsolatra építő összefüggés, bár beépíthető az ilyen típusú egyensúlyi modellekbe, csak a szimmetrikus eloszlásokhoz használható – amelyekről a jelenkori technikán és az adatokhoz való magas szintű hozzáférhetőségen keresztül megállapítható, hogy a valóságban nem léteznek –, ezért ebben a formájában alkalmazása a pénzügyi gyakorlatban erősen behatárolt. Ezt hivatott kiküszöbölni a későbbiekben bemutatott feltételes value-at-risk (CVaR) alapú modellezés, ahol már bármilyen eloszlást vizsgálhatunk ugyanezzel a jelenséggel is.

2.3 A két modell kombinálása

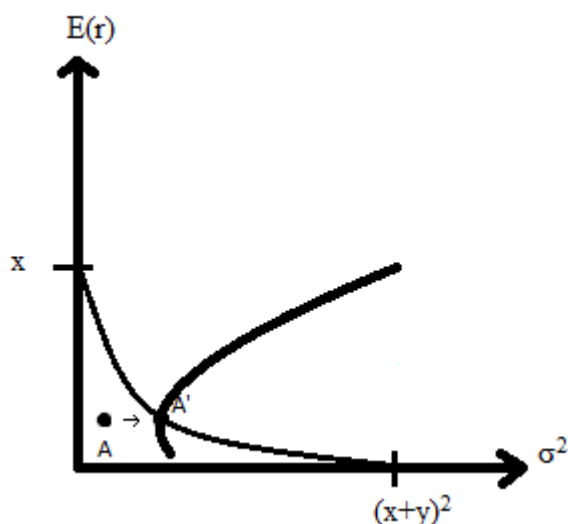
Modellünk teljes felépítéséhez szükség van egy új megközelítésre, az imént bemutatott hasznossági függvények eredményeinek kombinálására. A két bemutatott modell, bár más helyzetből indul ki, mégis sok téren hasonló tulajdonsággal rendelkezik. Az előbbi modell összhasznosságot néz, az utóbbi a hasznosságváltozást figyeli meg, azonban mindkét modell a pozitív irányú elmozdulásokra konkáv, szigorúan monoton emelkedő függvényt definiál. Logikus feltételezés lehet a tény, hogy valójában a kilátás elmélet függvénye pozitív irányban ugyanaz a függvény, mint ha a várható hasznosságot vizsgálnánk $W = 1$ adott vagyonszintről. Ez pénzügyi viselkedéstani kutatásokkal is alátámasztható (pl. Kahneman-Tversky [1979]), vagyis racionális befektetőket tekintve, akiket nem befolyásolnak torzító heurisztikák, valamint jól informáltak tekinthetők, vagy olyan egyéneket, akikre ugyan a torzító hatások érvényesek, de azok csekély mértékűek – és így nem érvényesül a lehorgonyzási hatás –, belátható, hogy az egyéni hasznosság jól vizsgálható mind a várható hasznosságra épített modellekkel, mind a kilátás elmélettel. Ezen befektetők kockázatkerülő viselkedésmódot folytatnak, leírásukra emiatt alkalmas a CAPM modellhez is alapul szolgáló Markowitz-féle Modern Portfólió Elmélet.

Ezen elmélet szerint a befektetők adott szóráshoz maximalizálni akarják a befektetés várható értékét, ehhez különböző portfóliók tartásával diverzifikálják a kockázatot. A diverzifikáció szerint a gyenge korrelációk miatt az elemszám növelésével csökken a variancia egy bizonyos szintig. Ez a szint jelenti az adott varianciához tartozó maximális várható értéket, ezt hívjuk hatékony portfóliónak. Markowitz elméletében e hatékony portfóliók halmazát hatékonysági határnak ("efficiency frontier") nevezte el. A racionális befektetők – ezen elmélet szerint – ezen a határon helyezkednek el, mert számukra a kockázat növekedése (itt varianciaként definiálva) hasznosságcsökkenést, a várható érték pedig hasznosságnövekedést jelent. A várható hasznosság mértékét definiáltuk már az előző fejezetekben, a racionális egyén ezen keresztül választja ki a számára megfelelő portfóliót.

Ha az előző fejezetben bemutatott jelenséget vizsgáljuk a két modell által épített környezetben, látható, hogy a kockázatkedvelők választása kalkulálható a modern portfólió elmélettel a következő módon:

Ez a típusú kockázatkedvelés mindig valamilyen korlátba ütközik, valamint a várható érték növekedésével csökkenő varianciához közelít (tehát negatív meredekségű a szórás-várható érték koordinátarendszerben). A határvonal, amely a kisebb varianciájú

lehetőségekhez többlethasznot ígér az adott befektetőnek, azon pontok halmazát jelöli, amelyekben a befektető kockázatközömbös, mivel a határ alatti varianciánál kockázatkedvelő, felette kockázatkerülő viselkedést folytat. Ez egyben azt is jelenti, hogy figyelmen kívül hagyja a varianciát, és ezen a határgörbén azt a portfóliót választja, amelyik a legmagasabb várható értéket adja. Mivel ez a görbe metszi az elérhető hatékony portfóliók halmazát, a legmagasabb várható értékű portfólió pontosan a két határvonal metszéspontjában lesz utóbbi definíciójából adódóan. Ezt szemlélteti a 7. ábra. Ebből az következik, hogy az eddigi egyensúlyi modellek hatékony portfólióhalmaza nem változik meg a befektetők kockázathoz való hozzáállásától, vagyis az egyensúlyi modellezésbe kockázatkedvelő befektetők is bevonhatóak a dolgozatban létrehozott modell segítségével.



7. ábra: A kockázatkedvelés implementálása

3 Ízlések és pofonok: az egyének szerepe

Vajon mi korlátozzuk be magunkat a pénzügyi piacokon kialakult "tojáshéjra" – és ezt, mint kiindulópontot, exogén módon használjuk pénzügyi döntéseinkhez –, vagy az egyes befektetők egyénileg is hozzájárulhatnak nagymértékű hozameltoláshoz, ezáltal egyénileg alakítva az elérhető hatékony portfóliók halmazát?

A kérdés mikroökonómiai környezetben is felmerül, az árelfogadó/ármeghatározó szerepeknél, ahol az egyszerűsítés kedvéért tökéletesen versenyző piacon árelfogadást feltételezünk. Pénzügyekben is logikus lehetne ezzel a feltételezéssel élni, mivel az összes piac közül a tőkepiac az, amelyik leginkább hasonlít a tökéleteshez. Az új technológiák, az információ-áramlás mennyisége és a hatalmas adatbázisok által kínált lehetőségek azonban – mint azt később látni is fogjuk – erős alapot szolgáltatnak arra, hogy a hatékony portfóliók halmazát endogén tényezőként is értelmezzük.

Először azonban – a modell könnyebb felépítése miatt – elfogadjuk, hogy léteznek portfóliók, amelyek adott kockázati szinten kialakításra kerülnek a piacon, és a lehető legmagasabb várható hozamot ígérnek. Ezeket nevezzük hatékony portfólióknak, ezekből válogathatnak a befektetők, és ezekből tehetik össze a saját preferenciájuknak megfelelő portfóliót. A preferenciák leírásához egy relatíve új kockázati megközelítést alkalmazok, amely a következő fejezetekben kerül bemutatásra.

3.1 A CVaR-ról általában

A technológiai fejlődés során a kockázat mérése használt eszközök is párhuzamosan változtak. A modern portfólió elmélet 1952-es megjelenésekor a pénzügyi kockázat mérhetőségére a variancia használata egy teljes új, áttörő technika volt, a portfóliók tartásának kalkulálható varianciája alapján a várható értéket lehetett meghatározni segítségével. Egészen a 60'-as évek közepéig a CAPM megjelenéséig ez volt a kockázat mérőszáma, ekkora került előtérbe a β , mint a piaci kockázaton felüli releváns kockázat fogalma. Ez a modell javításaival, foltozgatásaival együtt egészen a mai napig is széles körben használt, azonban előrejelző ereje a szükséges adatok kinyeréséhez képest meglehetősen csekély.

Alternatívaként már a 80'-as évek végén (az 1987-es összeomlás hatására) elkezdtek használni a Value-at-Risk mutatót. Ezzel már leírhatóak voltak olyan problémák is, amelyek

az addigi modellek alapján normál körülmények között nem igazán fordulhattak elő, a gyakorlatban mégis tapasztalhatóak voltak. A VaR mutató a derivatívák, opciók és a normáltól eltérő eloszlású pénzügyi eszközök számára új megoldást jelentett, mivel a valós eloszlásuk alapján egy adott konfidencia-intervallumhoz tartozó veszteségi szintet adott meg. Ennek hatására a kvantitatív pénzügyekben új elméletek jöttek létre, az egyik legfontosabb ilyen az ezt a dolgot is érintő feltételes (Conditional) Value-at-Risk volt 2000-ben³. A VaR számos előnye ellenére negatív tulajdonságokat is hordozott, így például a szub-additivitás és a konvexitás. A CVaR segítségével ezek kiküszöbölhetőek lettek, amely miatt ez a percentilis-alapú technika a jelenleg legpontosabb kockázatmérési módszer (Krokhmal, Palmquist, Uryasev [2002]).

A CVaR meghatározásához először szükség van a VaR definiálására is. Az α %-hoz tartozó Value-at-Risk azt mutatja meg, hogy egy befektetési lehetőség hozama $(1 - \alpha)$ %-os konfidencia intervallum mellett mekkora érték felett lesz, másképp értelmezve VaR_α hozam eloszlásának α -ik percentilise. Például:

Értelmezzük $f(x,y)$ -t a veszteség függvényként, ahol x a lehetséges portfóliók halmazából való választást jelöli, y pedig egy véletlen változót testesít meg. Annak a valószínűsége, hogy $f(x,y)$ nem lép túl egy ζ értéket (veszteséget) legyen ψ , tehát:

$$\psi(x, \zeta) = \int_{f(x,y) \leq \zeta} p(y) dy \quad (19)$$

Állandó x -et feltételezve ez az előbbi képlet egyenlő az $f(x,y)$ veszteségfüggvény ζ - hez tartozó kumulatív eloszlásfüggvényével. Az iménti függvény alapján definiálható VaR_α :

$$\zeta_\alpha(x) = \min\{\zeta \in \mathbb{R}: \psi(x, \zeta) \geq \alpha\} \quad (20)$$

vagyis x portfólió kumulatív eloszlásfüggvényén az α -t követő legkisebb hely. CVaR_α ugyanígy megfogalmazható:

$$\varphi_\alpha(x) = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \zeta_\alpha(x)} f(x,y) p(y) dy \quad (21)$$

ahol $f(x,y) \geq \zeta_\alpha(x)$ a VaR definíciója alapján $(1-\alpha)$, ezért kerül a nevezőbe ez a tag. Ezzel belátható, hogy $\text{VaR}_\alpha(x)$ a $f(x,y)$ eloszlás α -percentilise, $\text{CVaR}_\alpha(x)$ pedig az annál nagyobb

³Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2, 21–41.

veszteségek átlagos értéke, ezért $\text{CVaR}_\alpha(x) \geq \text{VaR}_\alpha(x)$ minden esetben (Rockafellar, Uryasev [2000]).

$\text{CVaR}_\alpha(x)$ minimalizálására számos módszer létezik már⁴, ezen dolgozat fő témája nem ennek bemutatása vagy a hatékonysági határgörbe (efficiency frontier) számításának leírása, hanem annak kombinálása a hasznosság megragadásával, és így az egyén optimumkeresésének paraméterezése. A következő három alfejezetben ezen módszerek általam alkalmazott változatát, ennek sajátosságait, majd az imént említett, a modellemben szerepeltetett optimumválasztást mutatom be.

3.2 Az alkalmazott CVaR hatékonysági határ

A Conditional Value-at-Risk meghatározása ebben a modellben némileg másképp zajlik, mint a megszokott módszerek esetében. A jelenleg alkalmazott rendszerek a $\text{CVaR}_\alpha(x)$ számításához használt $f(x,y)$ veszteségfüggvényt pozitív értékén veszik figyelembe – vagyis a $\text{CVaR}_\alpha(x)$ minimalizálásáról van szó –, valamint annak érdekében, hogy esetlegesen pozitív Value-at-Risk ne fordulhasson elő, és csak a negatív hozamot kelljen minimalizálni, sok $\text{CVaR}_\alpha(x)$ számításban $\max\{f(x,y), 0\}$ értékkel kalkulálnak, emiatt se $\text{VaR}_\alpha(x)$, se $\text{CVaR}_\alpha(x)$ értéke nem lehet kisebb, mint 0.

Ebben a dolgozatban én $\text{CVaR}_\alpha(x)$ -et negatívként értelmezem, tehát a veszteségfüggvény negatív hozamot ad, a várható érték alatti pozitív hozamszakaszt pedig megtartom, és nem maximalizálom 0-val, így a $\text{VaR}_\alpha(x)$ és $\text{CVaR}_\alpha(x)$ α értékétől függően akár pozitív értéket is felvehet (magas α esetén). Ennek a változtatásnak nincs hatása számítási módszerek eredményére, csupán – véleményem szerint – a $\text{CVaR}_\alpha(x)$ megfoghatóságát, reális környezetben való elhelyezését segíti. Az számítási eredmények tekintetében itt nem minimalizálásról, hanem $\text{CVaR}_\alpha(x)$ maximalizálásról van szó, amely 0 feletti értéket is felvehet. α értékét a dolgozatban 0,5-en (50%-on) fixáltam, mert az elméleti háttér bemutatására ez a legmegfelelőbb szint.

⁴ például Krokmal, Palmquist, Uryasev: Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, 2002

3.3 "Jobb ma egy veréb, mint holnap egy tüzok": a pozitív időpreferencia és a CVaR kapcsolata

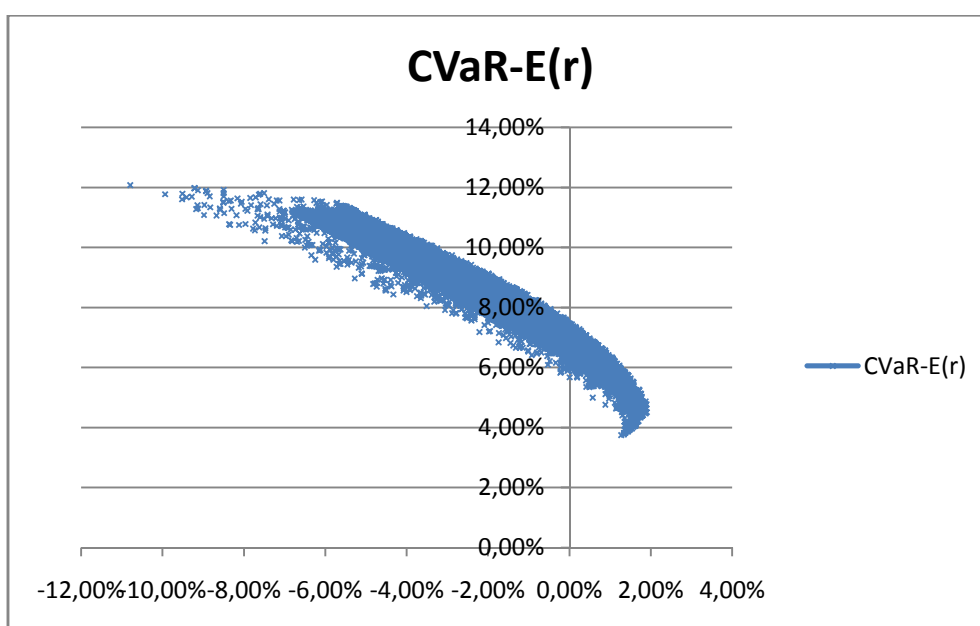
A magyar közgazdaságtani műveltség magas szintjét mutatja népszerű közmondásunk, amely már évszázadokkal ezelőtt megfogalmazta – kicsit ugyan kevésbé precíz és tudományos módon –, hogy az emberek számára valóban létezik a pozitív időpreferencia. Bár az átváltási arány nem feltétlenül ennyire kézzelfogható mindig, és az elvárt hozam kalkulálására nem az adott napi (spot tüzok ár / spot veréb ár) hányadost használjuk, mégis nyomon követhető ez a jelenség a pénzügyi befektetések területén is.

Miképp az előző fejezetben is említettem, nagy α esetén pozitív $CVaR_\alpha(x)$ -szel rendelkező befektetések is előfordulhatnak a valóságban. Ezek számítására a legtöbb módszer nem alkalmas, azon számítások, amelyek 0-ban minimalizálják (vagy maximalizálják) a $CVaR_\alpha(x)$ értékét, azok az efeletti (vagy alatti) eloszlást teljesen elhanyagolják. Ezek alapján két, a várható érték közelebbi környezetében teljesen más eloszlással rendelkező befektetést ugyanúgy kezelhetnek. Ennek kiküszöbölésére a teljes negatív kockázat mérése (50%-os α -val) jó megoldásnak tűnik, igaz ezzel a fat-tail eloszlások kevésbé érzékeltetik hatásukat $CVaR_\alpha(x)$ kiszámításakor.

A pozitív időpreferencia fontos jelenség, amelyet így számításba tudunk venni. Ennek lényege, hogy a jövőben várható hozamok akkor is pozitívak, amikor gyakorlatilag teljesen kockázatmentes befektetésekről van szó. Ez a egyének pozitív időpreferenciájának köszönhető. Ez annyit jelent, hogy az emberek számára több hasznosságot hoz egy adott fogyasztás a jelen pillanatban, mint ugyanaz a jövőben, ennek kompenzálására hozamot várnak el a jelenbeli fogyasztásról való lemondásért. Emiatt vannak olyan befektetések, amelyek $CVaR_\alpha(x)$ értéke is meghaladja a 0-át, vagyis a kockázat olyan kicsi, hogy a várható értéktől való várható negatív eltérés kisebb, mint maga a várható érték. Másképpen fogalmazva, ha negatív irányba mozdul el a befektetés, akkor annak feltételes várható értéke is pozitív, várhatóan a legrosszabb 50%-ban is pozitív hozamot tudunk realizálni. Ez lényegében a klasszikus egyensúlyi modellekben megtalálható kockázatmentes hozamnak felel meg, ez a valóságban azonban nem ténylegesen kockázatmentes, így $CVaR_\alpha(x)$ mindig kisebb, mint $E(r)$. Ezt a $CVaR-E(r)$ térképen egy 45°-os, $m = 1$ meredekségű egyenessel is szemléltethetnénk. Ez alá nem kerülhet a portfólió a $CVaR-E(r)$ síkon.

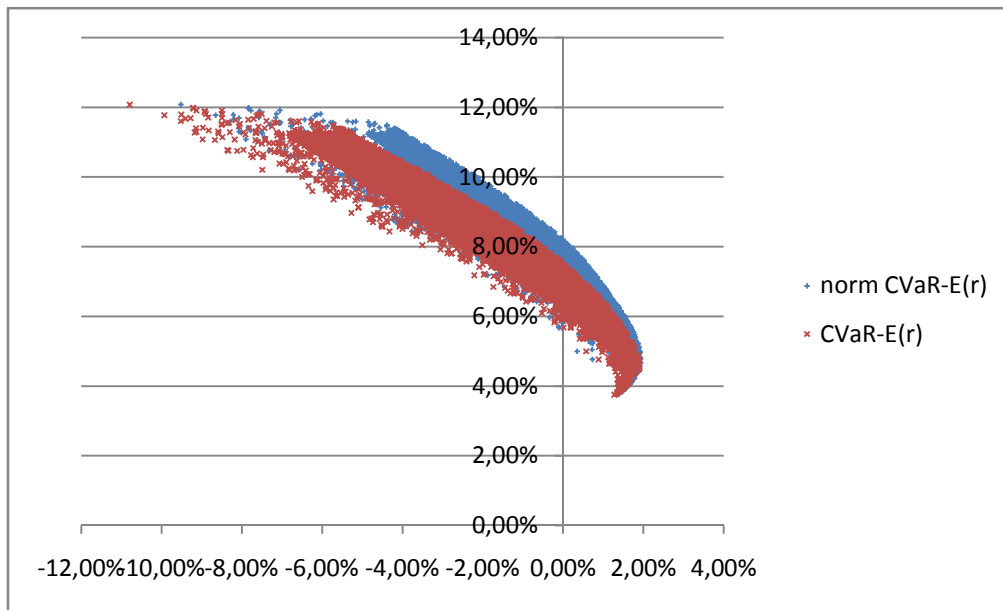
A kialakított $\{CVaR_{0,5}(x), E(r)\}$ értékpárok rendszerét jól szemlélteti a következő ábra. Az értékpárokat és a súlyozást Monte Carlo szimulációval alakítottam ki a következő

paraméterek alapján: 1928-tól 2011-ig historikus, éves hozamokat felhasználva 4 eltérő kockázatú befektetésből, a 3 hónapos T-bill, a 10 éves T-bond, az S&P 500 részvényindex és a Coca-Cola (splittel együtt számolva) értékpapírból véletlenszerűen összeállítottam 10.000 portfóliót. Minden portfólióra kiszámoltam az éves hozamokat, ezekből a 10.000 eloszláshoz vonatkozó $CVaR_{0,5}$ -et, és az átlagos éves hozamot. Ez a feltételes value-at-risk érték látható a vízszintes tengelyen, a függőlegesen pedig az átlagos éves hozam. Jól látható a varianciavárható érték hatékonysági határhoz hasonló hatékony portfólióhalmaz, amelyre ebben az esetben is jellemző a konkáv jelleg. Emiatt határozható meg a - későbbiekben bemutatásra kerülő - $CVaR$ -ra értelmezett hasznossági függvény optimuma az iménti korláttal határolva.



8. ábra: Portfólió-eloszlás $CVaR_{0,5}$ - $E(r)$ rendszerben

A normál eloszlással való összehasonlíthatóság érdekében a 9. ábrán a normál eloszlás (várható érték és szórás) alapján történő $CVaR$ kalkuláció is szerepel. Ezen az ábrán jól látható a gyakorlati eloszlások különbsége az elméletiekkel szemben. A várható érték eloszlástól függetlenül az egyes kimenetek súlyozott átlaga, $E(r) = \sum(w_i r_i)$, a $CVaR$ értéke viszont eltérő a különböző eloszlásoknál. Látható, hogy adott várható értékhez a pirossal jelzett valós eloszlás alapján mért feltételes value-at-risk kisebb, mint normál eloszlás segítségével kalkulálva.



9. ábra: Eltérés a normál eloszlástól CVaR_{0,5} - E(r) rendszerben

3.4 Az egyéni preferenciák leképezése CVaR segítségével

Az egyén kockázatkerülésének meghatározására - mint az látható volt a 2.1-es és 2.2-es fejezetekben - elég egyetlen paramétert, az egyénre jellemző "A" kockázatkerülési együtthatót tudni. Ennek segítségével kockázatkerülő és kockázatkedvelő helyzetben egyaránt (feltételezve, hogy elfogadjuk, hogy a Kahneman-Tversky hasznosságfüggvény pozitív oldalán mérhető kockázatkerülési együttható megegyezik a várható hasznossággal vizsgált együtthatóval) a befektető viselkedése leírható, számára meghatározható a hasznosságmaximalizálás és az elérhető portfóliók korlátaiból összegezzhető optimum.

Kockázatkerülő esetben a várható hasznosságból levezethető közelítő függvény alkalmazása ebben a rendszerben is használható a következő módon:

Tudjuk, hogy

$$U(F) \cong E(F) - 0,5a\sigma^2 \quad (22)$$

Ha a modell felépítéséhez először (mint közelítő eloszlást) normál eloszlást használunk, akkor levezethető a következő egyenlet⁵ a CVaR képletéből:

$$CVaR_{0,5}(x) = E(r_x) - 0,8\sigma \quad (23)$$

Ebből következik, hogy a behelyettesítés eredményeképp az hasznossági függvény közelítése átírható CVaR-E(r) rendszerbe is:

$$U = E(r_x) - \frac{0,5}{0,8^2} a [E(r_x) - CVaR_{0,5}(x)]^2 \quad (24)$$

kibontva az egyenletet:

$$U = -\frac{0,5}{0,8^2} a [E(r_x)]^2 + \frac{a+0,8^2}{0,8^2} E(r_x) CVaR_{0,5}(x) - \frac{0,5}{0,8^2} a [CVaR_{0,5}(x)]^2 \quad (25)$$

0,8²-tel felszorozva és teljes négyzetté alakítva:

$$0,8^2 U = -[\sqrt{0,5a} E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x)]^2 + [(\frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}})^2 - 0,5a] [CVaR_{0,5}(x)]^2 \quad (26)$$

Ha E(r_x)-t akarjuk kifejezni, akkor a tartalmazó tag négyzetére vonatkozó gyökvonás érdekében szükséges megvizsgálni, hogy a zárójeles tag pozitív vagy negatív-e:

$$\sqrt{0,5a} E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x) \geq 0 \quad (27)$$

E(r_x)-re rendezve a problémát, és bevezetve a szórás a könnyebb megérthetőség és az eddigi empiriák használhatósága érdekében, normál eloszlásra (ahol CVaR = E(r) - 0,8 σ) megoldva:

$$E(r_x) \geq \frac{a+0,8^2}{a} CVaR_{0,5}(x) = \frac{a+0,8^2}{a} [E(r_x) - 0,8\sigma] \quad (28)$$

⁵ a normál eloszlásnál $CVaR_{0,5} = \int^{E(r)} r \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[r-E(r)]^2}{2\sigma^2}} \right) dr$

ezt ismét $E(r_x)$ -re rendezve:

$$\frac{a+0,8^2}{a} 0,8\sigma \frac{a}{0,8^2} \geq E(r_x) \quad (29)$$

egyszerűsítve:

$$\left(\frac{a}{0,8} + 0,8\right)\sigma \geq E(r_x) \quad (30)$$

"a" értékétől függően látható, hogy mivel itt kockázatkerülésről beszélünk és $a > 0$,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a}{0,8} + 0,8\right) = 0,8 \text{ és } \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{0,8} + 0,8\right) = \infty \quad (31)$$

Szinte mindig igaz alacsony "a" (magas kockázatkedvelés) esetén, hogy $E(r_x) < 0,8\sigma_x$, magas kockázatkerülés esetén pedig az érték végtelenhez tart (tehát itt az egyenlőtlenség kimenetele triviális), ezért itt

$$\left(\frac{a}{0,8} + 0,8\right)\sigma > E(r_x) \quad (32)$$

Látható, hogy az egyenlet bal oldala a nagyobb, ezért visszaírva az alapegyenlőtlenségbe:

$$\sqrt{0,5a}E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x) > 0 \quad (33)$$

Ekkor:

$$\sqrt{0,5a}E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x) = \sqrt{\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{2a} - 0,5a\right][CVaR_{0,5}(x)]^2 - 0,8^2 U} \quad (34)$$

$E(r_x)$ -re kifejezve:

$$E(r_x) = \sqrt{\frac{\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{2a} - 0,5a\right][CVaR_{0,5}(x)]^2 - 0,8^2 U}{0,5a}} + \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}\sqrt{0,5a}}[CVaR_{0,5}(x)] \quad (35)$$

egyszerűsítve:

$$E(r_x) = \sqrt{\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{a^2} - 1\right][CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a}} + \frac{a+0,8^2}{a}[CVaR_{0,5}(x)] \quad (36)$$

A fenti függvényt deriválva megkapjuk a hasznosság meredekségét $CVaR_{0,5} - E(r)$ környezetben:

$$\frac{\partial E(r_x)}{\partial CVaR_{0,5}(x)} = \frac{0,5 \cdot 2 \left[\frac{(a+0,8^2)^2}{a^2} - 1\right] CVaR_{0,5}(x)}{\sqrt{\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{a^2} - 1\right][CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a}}} + \frac{a+0,8^2}{a} CVaR_{0,5}(x) \quad (37)$$

Mivel $\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{a^2} - 1\right] > 0$, $\frac{a+0,8^2}{a} > 0$ és $CVaR_{0,5}(x)$ a (32)-es egyenlőtlenség elfogadásából adódóan negatív, ezért $(+)\cdot(-)/(+) + (-)$, vagyis 2 negatív szám összege mindig negatív. Emiatt a hasznossági függvény meredeksége negatív ebben az esetben.

Ha mégis az a ritka eset állna fent (szinte biztos kimenetelű befektetéseknél, pl. állampapír), ahol $\left(\frac{a}{0,8} + 0,8\right) \sigma < E(r_x)$, vagyis $CVaR_{0,5}(x) > \frac{a}{0,8} \sigma$ akkor:

$$\sqrt{0,5a}E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x) > 0 \quad (38)$$

Ekkor a gyökvonás elé negatív előjel kerül:

$$\sqrt{0,5a}E(r_x) - \frac{a+0,8^2}{2\sqrt{0,5a}} CVaR_{0,5}(x) = -\sqrt{\left[\frac{(a+0,8^2)^2}{2a} - 0,5a\right][CVaR_{0,5}(x)]^2 - 0,8^2 U} \quad (39)$$

az egyszerűsítés kedvéért legyen $\frac{a+0,8^2}{a} = z > 1$, ekkor:

$$E(r_x) = \sqrt{[z^2 - 1][CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a}} + z[CVaR_{0,5}(x)] \quad (40)$$

A meredekség ekkor:

$$\frac{\partial E(r_x)}{\partial CVaR_{0,5}(x)} = - \frac{[z^2-1]CVaR_{0,5}(x)}{\sqrt{[z^2-1][CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a}}} + z[CVaR_{0,5}(x)] \quad (41)$$

Ez az egyenlet csak akkor lesz negatív, ha:

$$\frac{[z^2-1]}{\sqrt{[z^2-1][CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a}}} > z \quad (42)$$

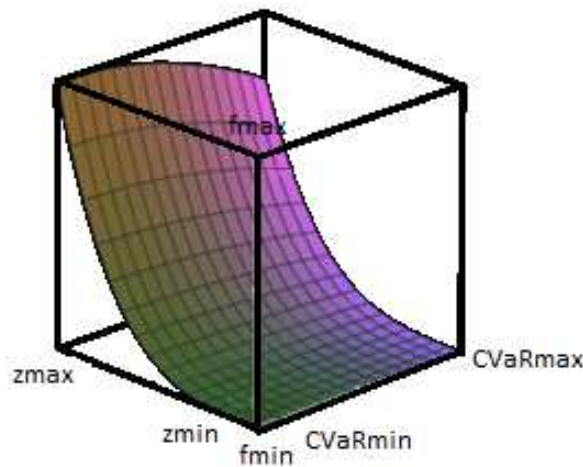
Mivel mindkét oldal pozitív, ezért felszorozhatunk és négyzetre emelhetünk, így:

$$(z^2 - 1) - z^2 \left[(z^2 - 1)[CVaR_{0,5}(x)]^2 - \frac{0,8^2 U}{0,5a} \right] > 0 \quad (43)$$

Ezt kibontva a következő negyedfokú egyenlőtlenséget kapjuk:

$$z^4 \left[1 - (CVaR_{0,5}(x))^2 \right] + z^2 \left[[CVaR_{0,5}(x)]^2 - 2 + \frac{0,8^2 U}{0,5a} \right] + 1 > 0 \quad (44)$$

Ez az egyenlőtlenség pedig szintén igaz reális értékeket behelyettesítve, ahol alacsony CVaR értékhez, nagyon magas a kockázatkerülési együttható tartozik. Ennek szemléltetésére a (44). függvény szimulációja látható a 10. ábrán ($a = 8$, $U = 0,1$ paraméterekkel), ahol a számított érték $0,016 < f(z, CVaR) < 9802,59$, tehát pozitív a függvény. Ebből belátható, hogy valós portfóliókat elképzelve bármilyen kockázatkerülő befektető esetén alkalmazható a közelítő hasznossági függvény CVaR-E(r) környezetben is.



10. ábra: $f(E(r), CVaR, a=8, U=0,1)$ függvény szimuláció pozitív CVaR esetén

3.5 A kockázatkedvelők bevonása

Mint azt említettem is a 2.2 fejezetben, a normál eloszlásra építő modellek (amelyek a gyakorlatban létrejövő diverzifikáció hatását eltúlozzák, valamint nem veszik figyelembe a rövid távú hozamok autokorrelációját) nem tudják jól leírni a kockázatkedvelés jelenségét a valóságban előforduló, fat-tail eloszlások világában. A varianciára építő elmélet a várható érték körül szimmetrikus eloszlások esetében érvényes, ennek kiküszöbölésére egy olyan paramétert szükséges bevezetni, amely az eloszlás aszimmetriájától és csúcsosságától függetlenül, azonos értékkel tud leírni egy negatív és egy pozitív elmozdulást egyaránt. Erre is megoldást jelenhet a feltételes Value-at-Risk használata 50%-os α mellett.

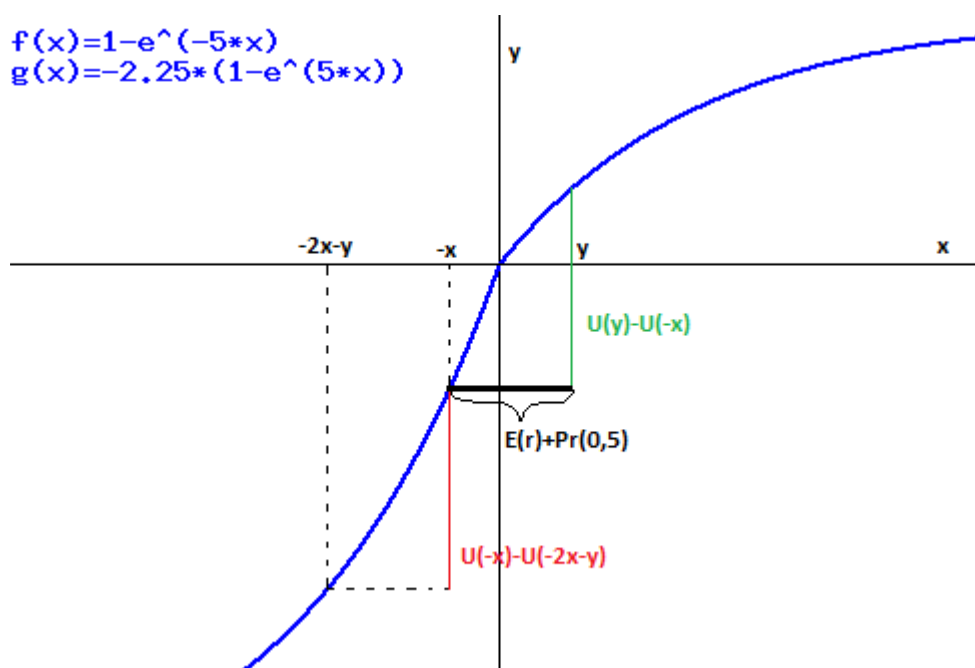
Erre a módszerre először vezessünk be egy Prospect [$Pr_\alpha(x)$] nevű változót. Ez tulajdonképpen a feltételes value-at-risk ellentétét jelenti, vagyis azt, hogy a lehetséges kimenetek legoptimistább (legtöbb hozamot biztosító) $\alpha\%$ -nak mekkora a várható értéke. Mivel:

$$\alpha CVaR_\alpha(x) + (1 - \alpha) Pr_{1-\alpha}(x) = E(r_x) \quad (45)$$

ezért Prospect értéke felírható a következőképpen is:

$$Pr_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{(1-\alpha)} [E(r_x) - \alpha CVaR_\alpha(x)] \quad (46)$$

Visszanyúlva az 5. ábrához, azt módosíthatjuk a következő módon:



11. ábra: Kockázatkedvelés Prospect_{0,5}-nél

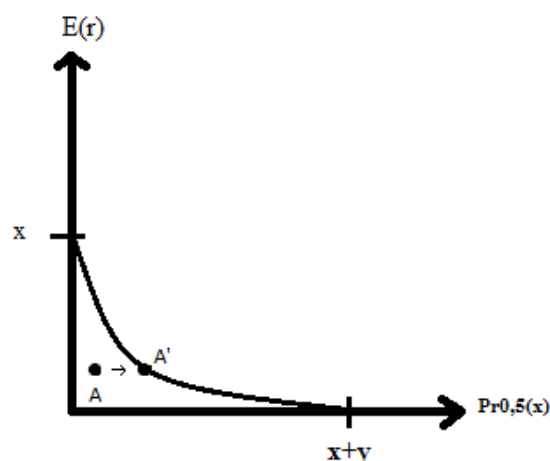
Itt a szimmetrikus eloszlás szükségességét úgy tudjuk kikerülni, hogy az 50%-os Prospect és az 50%-os feltételes value-at-risk átlaga mindig a várható érték, tehát egy fair befektetésről beszélhetünk, ha erre a két kimenetelre egyszerűsítjük az eloszlást, nem szükséges, hogy az eloszlás szimmetrikus képet mutasson, mint ahogy az a varianciával történő modellezésben alapvető feltétel volt. Ennek leírására az alapvető képlet is használható, amelyből később át lehet vezetni a megoldást a feltételes value-at-risk használatára is.

$$0,5Pr_{0,5}(x)+0,5CVaR_{0,5}(x) = E(r_x) \quad (47)$$

A 11. ábrán jól látható a hasonlóság a variancián alapuló és a Prospecten alapuló kockázatkedvelési jelenség között. Valójában annyi a különbség, hogy utóbbi esetben nyugodtan használhatunk aszimmetrikus folytonos és diszkrét eloszlásokat egyaránt, a (18)-as egyenletnek megfelelően a várható érték változására ellentétesen fog reagálni a Prospect. Az átláthatóság érdekében ismét feltüntettem a (18)-as egyenletet.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4,5e^{-a(2c+d-2x-y)}-4,5e^{-a(c-x)}}{e^{-a(d-y)}-2,25e^{-a(2c+d-2x-y)}} \quad (18)$$

Az itt szereplő $(d - y - (-c + x))$, vagyis a pozitív kimenetel várható értékének a kiindulási értéktől való távolságnak helyére $Pr_{0,5}(x)$ kerül, ezzel átkonvertálható a probléma a Prospect - $E(r)$ rendszerbe. Látható az egyenlet átrendezése nélkül is, hogy mivel c hatására y is csökken, ezért $Pr_{0,5}(x) = d + c - y - x$ -nek is csökkennie kell, mivel mindkét változó negatív hatással van rá. Emiatt egy, a kockázatkedvelő variancia-várható érték függvényhez hasonló görbe rajzolható fel ebben az esetben is, amelyet a 12. ábrán láthatunk. Ekkor a 0 várható értékhez tartozó Prospect $= y - (-x) = x + y$, az x várható értékhez tartozó Prospect pedig 0 értéket vesz fel, mint a varianciával számolt esetben. Valójában a Prospect értéke 0 alá is mehet, lényege, hogy a várható érték felett maradjon, de a valóságban ilyen befektetésekkel nem foglalkozunk. Ennek jelentősége a CVaR- $E(r)$ modellbe való átültetéskor azonban számításba veendő.

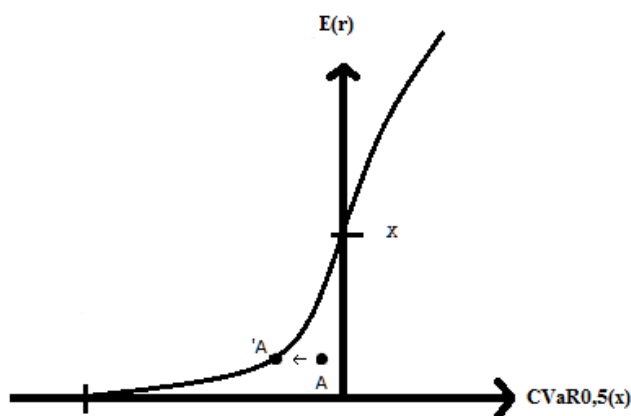


12. ábra: Kockázatkedvelés Prospect-E(r) környezetben

Mivel a modellünket nem Prospect alapra, hanem feltételes value-at-risk alapra építettük, szükség van ez iménti jelenség implementálásához a Prospect-CVaR kapcsolat meghatározására. Ehhez segítségünkre van a (46)-os egyenlet, amelyben könnyen látható, hogy egyszerű átírással megkapjuk a CVaR-E(r) környezetbe való átültetést a következő módon: $Pr_{0,5}(x) = 2E(r_x) - CVaR_{0,5}(x)$ a (46)-os egyenletből adódóan, valamint a (18)-as egyenletbe átültetve ezt (ahol $E(r) = x$ és $Pr_{0,5}(x) = d + c - y - x$):

$$3x + y - d - c = CVaR_{0,5}(x) \quad (48)$$

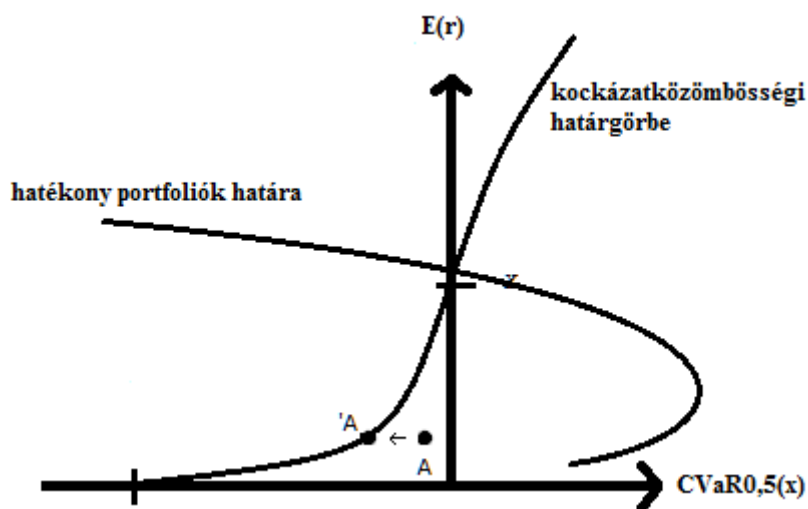
Látható, hogy mind x (a várható érték), mind y növekedése pozitív hatással van $CVaR_{0,5}(x)$ -re, ezért a következő ábra alapján implementálható a jelenség CVaR-E(r) modellünkbe:



13. ábra: Kockázatkedvelés CVaR-E(r) környezetben

Ha megfigyeljük a 13. ábrán látható jelenséget, belátható, hogy a CVaR-E(r) hatékony portfóliók határvonala itt is alkalmazható. Éppen ugyanúgy, mint az a varianciával való alkalmazáskor történt, itt is belátható a következő helyzet: amennyiben elfogadjuk, hogy ez a kockázatkedvelés létezik, akkor a (48)-as egyenlet szerint alakuló határvonalig a kockázatkedvelő befektetők maximalizálni fogják befektetésük CVaR-ját adott E(r) várható értékhez. Ezen a határvonalon kockázatközömbössé válnak a befektetők, vagyis csak E(r) alapján döntenek a befektetési döntéskor. Ennek megfelelően itt is a lehető legmagasabb várható értékkel rendelkező befektetést fogják választani a határgörbéről, amely ebben a modellben is pontosan a CVaR-E(r) rendszerben leírt portfóliók hatékonysági határával való metszéspont lesz. A leírtakat a 14. ábra szemlélteti (a 13. és 8. ábrák összegzéséből).

A feltételes value-at-riskre alapuló várható érték modell tehát ebben az esetben is működik, a kockázatkedvelés jelenségét nem kell elutasítani, ha az korlátot kap, implementálhatóvá válik, és ezáltal a modellben szereplő portfóliók hatékonysági határa nem sérül, az adott CVaR-hoz tartozó maximális (elvárt) hozam ugyanaz marad.



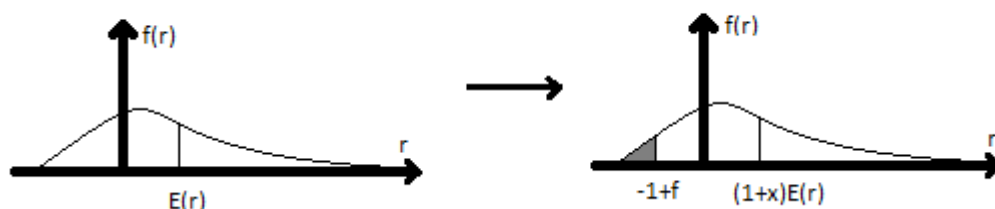
14. ábra: Kockázatközömbösség és hatékonyság egymás mellett

4 "Ha rövid a kardod, toldd meg egy tőkeáttétellel": A hitelfelvétel hatásai

Hitellel kombinált pozíció elvárt hozama is leírható a modell segítségével, azonban valós faktorokkal számolva, az eredmény teljesen eltérő a korábbi modelleknél tapasztalhatótól. A korábbi modellekkel szemben a hitelfelvétel itt nem korlátlan a tőkepiacon és nem mindenki számára ugyanolyan mértékű. A tőkeáttétel hatását reálisan figyelembe véve a következő (a korábbiaknál jóval inkább valósnak mondható) feltételezésekkel élünk:

- mindenki számára csak korlátozott mértékben áll rendelkezésre hitelfelvételi lehetőség (akár ez ténylegesen hitel formájában, akár rövid pozíció eladásaként jelenik meg), az ábrán és a képletekben ezt $(1 + x)$ értéként használom (tehát például 2:1-es tőkeáttétel esetében $x = 1$)
- minden hitelfelvételkor egy fedezeti érték kerül meghatározásra, amely a pozíció automatikus likvidálását vonja maga után, ha a portfólió értéke f százaléka csökken, ez hozammal kalkulálva $r = (-1 + f)$ fennállásakor valósul meg

Ezen tényezők miatt megállapítható, hogy a kamat költségének fejében, a hitelfelvételi lehetőségen felül a befektetők számára további előnyök jönnek létre: ilyen az a gyakorlatilag "ingyenes" biztosítás, amely a fedezeti likvidálás miatt merül fel. Ebben az esetben a befektető nem veszíthet teljes befektetett vagyonánál többet, pedig az lehetséges lenne a tiszta tőkeáttételes pozíció eloszlását tekintve. Ez a kockázatcsökkentés nem kerül többletköltségbe számára, ezzel ellentétben viszont mérsékeli a negatív hozamot, így növeli a tőkeáttételes portfólió várható értékét. Ezt szemlélteti a következő ábra, valamint az utána látható képletekkel történő leírás.



15. ábra: tőkeáttétel hatása fedezet mellett

$$E(r)_L = E(r)_P(1+x) - r_c x + p(r_Q < -1+f) CVaR_{Q,p(r_Q < -1+f)} - p(r_Q < -1+f)(-1+f) \quad (49)$$

$$E(r)_L = E(r)_P(1+x) - r_c x + p(r_Q < -1+f) \cdot (CVaR_{Q,p(r_Q < -1+f)} - VaR_{Q,p(r_Q < -1+f)}) \quad (50)$$

, ahol:

- $E(r)_L$ a tőkeáttételes L portfólió várható hozama
- $E(r)_P$ a tőkeáttétel nélküli P portfólió várható hozama
- $(1+x)$ a tőkeáttétel mértéke
- $r_c x$ a tőkeköltség és a hitelmennyiség szorzata (a tőkeáttétel költsége)
- $p(r_Q < -1+f)$ annak a valószínűsége, hogy Q tőkeáttételes, de fedezet nélküli portfólió hozama $(-1+f)$ hozamnál kisebb hozamot produkál
- $CVaR_{Q,p(r_Q < -1+f)}$ a Q portfólió p valószínűségéhez tartozó feltételes VaR-ja
- $VaR_{Q,p(r_Q < -1+f)}$ a Q portfólió p valószínűségéhez tartozó VaR-ja

Mivel $CVaR \geq VaR$ adott eloszlásra és adott valószínűségi szintre, valamint r_Q az x mértékű hitelfelvétel hatására $(1+x)$ -szeres környezetében szóródik, ezért x növekedésével a konstans határhozam helyett növekvő határhozamról beszélünk. Másképpen fogalmazva a tőkeáttétel növelésének hatására nem lineáris a $CVaR-E(r)$ tőkeáttételes portfóliókat leíró függvény, $\frac{dE(r)}{dx}$ nem állandó.

A fenti magyarázat alapján könnyen belátható, hogy létezhet olyan tőkeáttételes pozíció, ahol A és B tőkeáttétel nélküli portfóliókat tekintve, ahol $CVaR_{0,5;A} = CVaR_{0,5;B}$, valamint $E(r)_A > E(r)_B$, a fedezet miatti kockázatcsökkenés és eloszlásának alakjának különbsége miatt A és B tőkeáttétellel elérhető várható hozamai között fordított differencia van: $E(r)_{L;A} < E(r)_{L;B}$. Ez akkor fordulhat elő, ha B portfólió eloszlása jóval inkább fat-tailre hasonlít, vagyis:

$$p(r_{B(1+x)} < -1+f)(CVaR_{B(1+x),p(r_B < -1+f)} - VaR_{B(1+x),p(r_B < -1+f)}) - p(r_{A(1+x)} < -1+f)(CVaR_{A(1+x),p(r_A < -1+f)} - VaR_{A(1+x),p(r_A < -1+f)}) > [E(r)_A - E(r)_B](1+x) \quad (51)$$

Ezen elem sajátossága szintén a régebbi modellekben emlegetett diverzifikáció

Sajnos ezen környezeti paraméterek rendkívül széles skálán tudnak mozogni, azonban

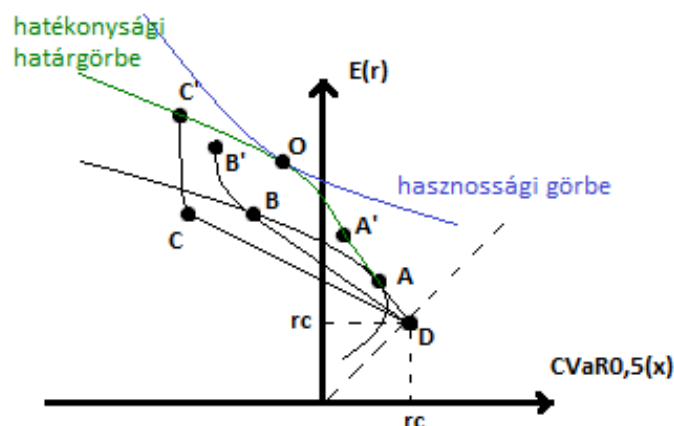
5 Az elvárt hozam kalkulálhatósága és ennek alkalmazhatósága a pénzügyi szektorban

A számítástechnika fejlődésének köszönhetően a pénzügyi szektorban alkalmazott IT rendszerek is óriási fejlődésen estek át. A régen elérhető adatbázisok helyett a mai rendszerek teljes digitalizáltságukból adódóan jelentős előnyöket hordoznak. Az egyik ilyen előny a befektetők kereskedési adataihoz való hozzáférés, amely lehetőséget biztosít szokásaik, mentalitásuk, árazási tevékenységük megismeréséhez. Ennek a lehetőségnek a bemutatott modellbe való implementálására olvasható az 5.1 és 5.2 fejezetekben.

5.1 A befektetők adatai, mint a modell paraméterei

A 3. és 4. fejezetben már említésre került, hogy a befektetők viselkedése leírható gyakorlatilag egyetlen paraméter, az "a" kockázatkerülési együttható segítségével. Ennek mérésére különböző módszerek léteznek, a kérdőíves felmérésektől (Andor [2011], 146. old.) kezdve egyéb obszervatív tesztekig. A mai technológia segítségével folyamatosan mérhető a befektetői kockázatkerülés mértéke, a kereskedési tevékenység megfigyelésén keresztül folyamatos korrekció lehetséges. Az adott viselkedésmóddal történő optimális választás eléréséhez szükségünk van "a" változón kívül még a befektetések pontos feltételes value-at-risk értékére, valamint a változó tőkeáttételi lehetőségek miatt (a 4. fejezetben leírtak alapján) az eloszlások jellegére, a tőkeáttételi korlátra és a hitelnyújtásért ellenértékként elkért kamatláb mértékére.

Ezen paraméterek segítségével meghatározható minden egyes befektető hasznossági görbéje ("a" kockázatkerülési együtthatóval) és az elérhető hatékony portfóliók halmaza (x tőkeáttételi korláttal, r_C kamatköltséggel, valamint a portfóliók CVaR-E(r) kombinációival), tehát ezekből adódóan a befektető számára optimális választás is. Az iméntiek bemutatására szolgál a 17. ábra. Látható, hogy eltérő tőkeáttételi szintekhez, illetve eltérő kamatköltséghez, teljes más kiindulási (tőkeáttétel előtti) portfóliót is választhat két különböző lehetőséggel rendelkező befektető.



17. ábra: Egyéni optimalizálás tőkeáttétel mellett

Az egyének különbözőségének egy modellben való megjelenítése a jelenlegi adatbázisokkal, információfeldolgozási és számítási kapacitások kihasználásával lehetségessé vált, erről van szó a következő fejezetben.

5.2 Hozammeghatározás intézményi és nemzetközi szinten

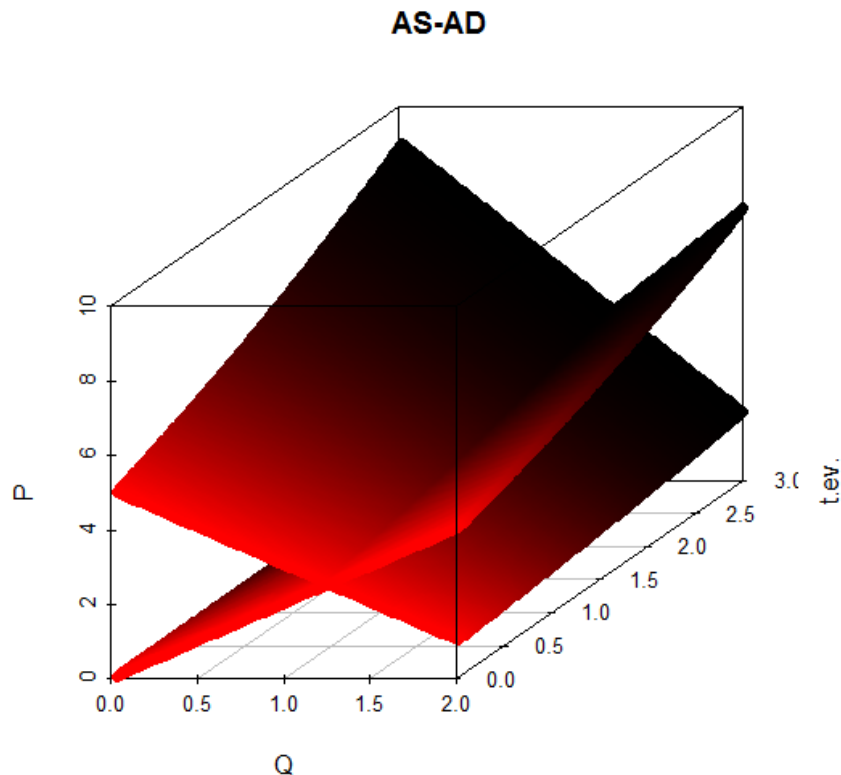
A 3. fejezet bevezetőjében felmerült kérdésként, hogy vajon a befektetők árelfogadóként vagy ármeghatározóként vannak-e jelen a piacon. A modell felépítéséhez az eddigiekben az árelfogadó szerepet vizsgáltuk meg, vagyis azt, hogy a befektető adott CVaR-E(r) kombinációk közül választhat csak. Ettől a ponttól kezdve azonban nem lehet ilyen egyszerűsítéssel vizsgálódni, mivel egyes befektetők elérhető portfólióhalmazai között óriási különbségek is lehetnek. Az egyéni befektetőket tehát, innentől önálló, ármeghatározó szereplőkként vesszük számításba.

Azon intézményeknek, amelyek hozzáférnek a befektetők kereskedési adataihoz a múltbeli választások alapján könnyen meg tudják határozni a számukra elérhető portfóliók figyelembevételével a viselkedési mintákat, így a kockázatkedvelésre való hajlamot, a kockázatkerülési együtttható mértékét, hasznossági függvényük jellegét. Valójában minden információ adott a számukra, hogy a jövőre vonatkozó CVaR-E(r) előrejelzésekkel megállapítsák minden egyes befektető optimális választását, azonban ahhoz, hogy ezeket a döntéseket összegezni lehessen, és így megállapítható legyen a befektetők összessége által a piacon kialakított maximális várható hozam adott feltételes value-at-riskhez, szükséges az adott CVaR-hoz tartozó, de különböző "maximális" várható hozamok közötti kapcsolat

feltárása. Anélkül, hogy a tőkepiaci mikrostruktúrák elméletébe belemennénk, elmondható, hogy kisebb befektetői csoportok a tőkeáttételi korlát és a hitelköltség által szegmentálva eltérő elvárt hozamokat alakítanak ki, azonban lévén, hogy a piaci kereskedésben minden terméknek egy adott árfolyama van egy pillanatban, látható, hogy ezek a hozamra vonatkozó eltérő elvárások valamilyen függvény szerint átlagolódnak, összegződnek. A dolgozatnak nem fő témája ezen összegző függvény leírása, azonban a regresszió becslése érdekében alternatívaként megemlítem, hogy ilyen függvény lehet egy értéksúlyozott elvárt hozam, vagyis az, hogy a különböző befektetők által támasztott eltérő hozamelvárásokhoz a hozzájuk tartozó befektetők vagyonát rendeljük, és ezen vagyonösszegek szerint súlyozzuk az elvárt hozamokat.

E súlyozó függvény bemutatásához a makroökonómiai aggregált keresleti és kínálati görbékből indulunk ki. Egy adott portfólióhoz tartozó piaci ár meghatározódik a jelen pillanatbeli aggregált kínálati és keresleti görbék metszéspontjaként. Mivel az adatbázisok vizsgálatával kideríthető, hogy ezen az áron ki kötött tranzakciókat, milyen mennyiségben, és az adott illetőnek mi az elvárt hozama, ezért meghatározható, hogy a jövőben milyen áron (az elvárt hozammal multiplikálva) és mekkora mennyiségben hajlandóak a befektetők ettől a pozíciótól megválni. Az aggregált kínálati görbét (AS) így ismerjük. Pénzügyi viselkedéstani kutatásokból tudjuk, hogy a befektetők hihetetlen mértékben ragaszkodnak fogyasztásuk időbeli kisimitásához, ezért reális az a feltételezés, hogy a diverzifikációjuk hatására a portfóliók pénzáramai egyenletesek. Ezen felül, ha a jövőbeli pénzáramokat stabilnak tekintjük (adott pillanatban márpedig ezek "be vannak árazva"), belátható, hogy az aggregált keresleti görbe (AD) is pontosan a befektetők elvárt hozama szerint növekszik (vagyis a diszkontált cash-flow módszerben egyre kisebb hatványkitevőre emeljük alternatívaköltséget). Az így kialakult AS-AD rendszerből tehát megállapítható a jövőre vonatkozó piaci árfolyam, így az összegzett várható hozam is.

Az iménti elméletet mutatja a 18. ábra, amely a kezdeti (t_0 -beli) AS-AD függvényeket folytonos hozam szerint növeli a t tengelyen való elmozdulás szerint. Alapvető keresleti és kínálati függvénynek szemléltetés jelleggel a $P_S = 2Q$ és $P_D = 5 - 2Q$ egyenleteket alkalmaztam, a t tengelyen pedig az eltelt évek számát jelöltem. Folytonos hozamként a szemléletesség érdekében 20%-os éves hozammal kalkuláltam, így látható az idő előrehaladtával egyre növekvő meredekségű egyensúlyi hozamszint.



18. ábra: A piaci, összegzett várható hozam meghatározódása

Megemlítendő, hogy az ilyen jellegű hozammeghatározás értelemszerűen annál pontosabb minél nagyobb adatbázist ölel fel. Ez történhet egyedi pénzügyi intézetek, kereskedési felületek klienseinek vizsgálatával, de tágabb kitekintésben állami (például az amerikai Securities and Exchange Commission felügyeletével) vagy akár nemzetközi szinteken (például az Nemzetközi Valutaalap (IMF) vagy az Európai Központi Bank (ECB) közreműködésével) való megvalósulása esetén meglehetősen pontos előrejelzést lehetne adni a világ tőkepiacainak jövőbeli árfolyamaira. Ezen nemzetközi alkalmazás jelentősége tükröződik a bázeli bizottság 2012. májusi elemzésében is (Bank for International Settlements [2012], pg. 20), amelyben a feltételes value-at-riskre való áttérést támogatja a bizottság a kockázatelemzési rendszerek esetében, valamint az 2013-ra tervezett egységes európai bankfelügyeleti rendszer is lehetőséget teremthetne a közös adatbázis alapján történő modellezésre. A nemzetközi szinten elfogadásra kerülő CVaR alapú megközelítésbe így könnyedén implementálhatóak lennének a dolgozatban leírt jelenségek.

6 Összefoglalva

A 2000-es években egyre inkább teret nyerő feltételes value-at-risk alapú modellezésnek számos előnye van a régebbi modellekkel szemben. Nem feltételezi a normalitás meglétét, hanem valós eloszlások alapján kalkulálja a kockázatot, tranzakciós költségeket is figyelembe vesz (Krokhmal, Palmquist, Uryasev, [2002]), és több periódusra vonatkoztatva is kalkulálható (Meng, Jiang, Hu, [2011]), jóval pontosabb információt szolgáltat a befektetésekről. Segítségével a pénzügy újabb területei is modellezhetőek, így például implementálhatóak a pénzügyi viselkedéstani és tőkepiaci mikrostrukturális elméletek is. A CVaR kalkuláció több, a múltban létrejött modell alapjait megmagyarázza, így például a Maslowian Portfolio Theory (De Brouwer, [2008]) vagy a Behavioral Portfolio Theory (Shefrin, Statman, [2000]) szintekre bontható kockázatkedvelését. Szintén jelentős előnye a makrofaktoros modellekkel szemben, hogy a többfaktoros, komplex rendszerekkel ellentétben egyszerűen, széles körben alkalmazható akár kisebb környezetben is, a számításokhoz szükséges adatok könnyebben létrehozhatóak. Ezért választottam ezt a módszert a dolgozatban bemutatott modell alapjául, ezáltal is csökkentve a modellezéshez használt feltételezések, korlátozások számát.

Az eddigi feltételes value-at-risken alapuló egyensúlyi modellek, noha számos – az imént említett – előnnyel jelentkeztek, még mindig alapvető feltételeik között szerepeltették a kockázatkedvelő befektetők kizárását, a korlátlan tőkeáttétel lehetőségét, valamint a befektetők árelfogadó jellegét. Ezek mind a valóságot nem reálisan leíró feltételezések, emiatt választottam célul egy reálisabb képet adó modell felépítését. Az alapvető hasznossági függvények (a várható hasznosság és a kilátás elmélet szerint) CVaR-E(r) modellbe való beépítésével a befektetők egyéni optima is meghatározhatóvá vált, így lehetséges a befektetési helyzeteknek ebben a rendszerben való elemzése. A bemutatott Kahneman-Tversky-féle kilátás elméletből levezetett kockázatkedvelés implementálása a modellbe feloldotta az első feltételt, mivel így egy modellben kezelhető kockázatkerülő és -kedvelő befektető egyaránt. A tőkeáttételi lehetőségek korlátozása a második feltételre volt hatással, így nem szükséges mindenre ugyanazt a kamatmértéket és a korlátlan hitelfelvételt alkalmazni. Az utolsó feltétel, az árelfogadó jelleg kizárólagos alkalmazása az aggregáló függvényeken keresztüli várható hozam előrejelzés eredményeként válik feleslegessé. Bár e függvénynek a pontos elemzése nem volt a dolgozat tárgya, folynak kutatások, amelyek ehhez hasonló módon próbálják meg feltárni a tőkepiaci árazódás okait mikrostrukturális

megközelítéssel (lásd pl. Biais, Glosten, Spatt [2004]), vagy pénzügyi viselkedéstani módszerekkel. Ezen elméletek inkább a rövid távú hozam meghatározására, kilengéseinek okaira koncentrálnak, hosszú távon a dolgozatban definiált hozammeghatározási módszer is megfelelő pontossággal közelíti meg a valóságot.

A dolgozatban leírt modellezési metódus tehát az egyes befektetők számára könnyen, a hozam eloszlásának görbéje alapján megadja az elvárt hozamot, valamint megfelelő infrastrukturális környezetben alkalmazva, az elektronikus kereskedési adatbázisok segítségével irreális feltételezések nélkül, gyakorlatilag korlátlanul használható az egyéni befektetők támogatására (melyik a leginkább hozzá illő portfólió?), a vállalati tőkebevonások pozicionálására (például IPO esetében milyen befektetői köröket keressen a vállalat?), vagy a tőkepiacon kialakult egységes várható hozam relatíve pontos meghatározására.

7 Irodalomjegyzék

- [1] Andor Gy. (2011): *Üzleti Gazdaságtan*
- [2] Bank for International Settlements (2012 május): *Consultative Document: Fundamental Review of the Trading Book*
- [3] Biais, B. – L. Glosten – C. Spatt (2004): *The Microstructure of Stock Markets*
- [4] De Brouwer, J.S. (2008): *Maslowian Portfolio Theory: An alternative formulation of the Behavioral Portfolio Theory*
- [5] Kahneman, D. – A. Tversky (1979): *Prospect Theory: An analysis of Decision Under Risk*, *Econometrica*, 47(2), 1979.3, p. 279.
- [6] Krokmal, P. – J. Palmquist – S. Uryasev (2002): *Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints*
- [7] Meng, Z. – M. Jiang – Q. Hu (2011): *Journal of Systems Science and Complexity*, October 2011, Volume 24, Issue 5, pp 907-918
- [8] Molnár M.A. (2006): *A magyar tőkepiac vizsgálata pénzügyi viselkedéstani módszerekkel*
- [9] Rockafellar, R.T. – S. Uryasev (2000): *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. *Journal of Risk*, 2, 21–41.
- [10] Shefrin, H.– M. Statman (1997): *Behavioral Portfolio Theory*
- [11] <http://prospect-theory.behaviouralfinance.net/> (letöltve: 2012.09.20)

Mellékletek, függelékek

1. melléklet: éves hozamok 1928-tól 2011-ig

forrás: http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/histret.html,
[2012.10.10] és <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=KO+Historical+Prices> [2012.10.10]

Year	Stocks	T,Bills	T,Bonds	Coca-cola
1928	43,81%	3,08%	0,84%	34,12%
1929	-8,30%	3,16%	4,20%	-22,01%
1930	-25,12%	4,55%	4,54%	9,16%
1931	-43,84%	2,31%	-2,56%	-26,71%
1932	-8,64%	1,07%	8,79%	-29,91%
1933	49,98%	0,96%	1,86%	28,00%
1934	-1,19%	0,32%	7,96%	68,23%
1935	46,74%	0,18%	4,47%	119,81%
1936	31,94%	0,17%	5,02%	39,44%
1937	-35,34%	0,30%	1,38%	-7,88%
1938	29,28%	0,08%	4,21%	16,01%
1939	-1,10%	0,04%	4,41%	-11,15%
1940	-10,67%	0,03%	5,40%	-10,00%
1941	-12,77%	0,08%	-2,02%	-26,24%
1942	19,17%	0,34%	2,29%	12,18%
1943	25,06%	0,38%	2,49%	29,71%
1944	19,03%	0,38%	2,58%	19,82%
1945	35,82%	0,38%	3,80%	31,99%
1946	-8,43%	0,38%	3,13%	-22,01%
1947	5,20%	0,57%	0,92%	30,00%
1948	5,70%	1,02%	1,95%	-26,24%
1949	18,30%	1,10%	4,66%	23,65%
1950	30,81%	1,17%	0,43%	-30,12%
1951	23,68%	1,48%	-0,30%	-11,64%
1952	18,15%	1,67%	2,27%	7,07%
1953	-1,21%	1,89%	4,14%	1,14%
1954	52,56%	0,96%	3,29%	2,03%
1955	32,60%	1,66%	-1,34%	10,15%

1956	7,44%	2,56%	-2,26%	-21,04%
1957	-10,46%	3,23%	6,80%	-0,51%
1958	43,72%	1,78%	-2,10%	33,16%
1959	12,06%	3,26%	-2,65%	14,94%
1960	0,34%	3,05%	11,64%	60,75%
1961	26,64%	2,27%	2,06%	28,77%
1962	-8,81%	2,78%	5,69%	-17,63%
1963	22,61%	3,11%	1,68%	35,63%
1964	16,42%	3,51%	3,73%	21,73%
1965	12,40%	3,90%	0,72%	22,20%
1966	-9,97%	4,84%	2,91%	4,51%
1967	23,80%	4,33%	-1,58%	47,43%
1968	10,81%	5,26%	3,27%	7,92%
1969	-8,24%	6,56%	-5,01%	15,03%
1970	3,56%	6,69%	16,75%	3,04%
1971	14,22%	4,54%	9,79%	43,95%
1972	18,76%	3,95%	2,82%	21,72%
1973	-14,31%	6,73%	3,66%	-14,81%
1974	-25,90%	7,78%	1,99%	-58,10%
1975	37,00%	5,99%	3,61%	55,19%
1976	23,83%	4,97%	15,98%	-3,95%
1977	-6,98%	5,13%	1,29%	-5,70%
1978	6,51%	6,93%	-0,78%	17,79%
1979	18,52%	9,94%	0,67%	-21,37%
1980	31,74%	11,22%	-2,99%	-3,26%
1981	-4,70%	14,30%	8,20%	4,12%
1982	20,42%	11,01%	32,81%	49,64%
1983	22,34%	8,45%	3,20%	2,88%
1984	6,15%	9,61%	13,73%	16,59%
1985	31,24%	7,49%	25,71%	35,47%
1986	18,49%	6,04%	24,28%	34,02%
1987	5,81%	5,72%	-4,96%	0,99%
1988	16,54%	6,45%	8,22%	17,05%

1989	31,48%	8,11%	17,69%	73,11%
1990	-3,06%	7,55%	6,24%	20,39%
1991	30,23%	5,61%	15,00%	72,58%
1992	7,49%	3,41%	9,36%	4,36%
1993	9,97%	2,98%	14,21%	6,57%
1994	1,33%	3,99%	-8,04%	15,41%
1995	37,20%	5,52%	23,48%	44,17%
1996	23,82%	5,02%	1,43%	41,75%
1997	31,86%	5,05%	9,94%	26,72%
1998	28,34%	4,73%	14,92%	0,47%
1999	20,89%	4,51%	-8,25%	-13,06%
2000	-9,03%	5,76%	16,66%	4,62%
2001	-11,85%	3,67%	5,57%	-22,63%
2002	-21,97%	1,66%	15,12%	-7,02%
2003	28,36%	1,03%	0,38%	15,76%
2004	10,74%	1,23%	4,49%	-17,95%
2005	4,83%	3,01%	2,87%	-3,19%
2006	15,61%	4,68%	1,96%	19,70%
2007	5,48%	4,64%	10,21%	27,19%
2008	-36,55%	1,59%	20,10%	-26,23%
2009	25,94%	0,14%	-11,12%	25,91%
2010	14,82%	0,13%	8,46%	15,39%
2011	2,07%	0,03%	16,04%	6,39%