

BME Matematikai Intézet

Analízis Tanszék

Lovas Attila

Határozatlansági relációk származtatása
az állapottér geometriájából

TDK dolgozat

Témavezető: Dr. Andai Attila
egyetemi docens

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1-2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

2012

Kivonat

A Heisenberg-féle határozatlansági reláció naív olvasata szerint két fizikai mennyiséget nem lehet egyszerre tetszőleges pontossággal mérni. Ennek (pontosabban a Schrödinger által élesített változatának) a matematikai megfelelője, hogy a két mennyiség kovarianciamátrixának a determinánsára adható egy alsó becslés. Ezt Robertson még 1934-ben több fizikai mennyiségre általánosította. Fél évszázaddal később már alkalmazás közelébe került Robertson-eredménye. A kvantumszámítógép fizikai megvalósíthatósága a határozatlansági relációk kutatásának egyik fő mozgatórugója lett. Az utóbbi évtizedben kiderült, hogy az egyenlőtlenségben szereplő alsó becslés nagymértékben javítható bizonyos operátormonoton függvények segítségével (Gibilisco, Imparato, Isola: A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle, 2007.). A dolgozatban a Gibilisco által adott becslésnél egy élesebb becslést adunk, továbbá megmutatjuk, hogy mind a fizikai mennyiségek kovarianciamátrixa, mind az általunk megadott alsó korlát természetes módon származtatható az állapottér geometriájából. A geometriai kapcsolat lényege abban áll, hogy az állapottéren a kvantum Fisher-információk (Riemann-metrikák) bizonyos operátormonoton függvényekkel indexelhetők, és a kovariancia mátrix determinánsa illetve az általunk adott alsó becslés az állapottér egy pontja feletti érintőtéren lévő vektorok belső szorzatával van kapcsolatban. Vagyis a határozatlansági reláció mindkét oldalán az állapottér geometriáját meghatározó Riemann-metrika szerepel, az egyenlőtlenség arra vezethető vissza, hogy különböző metrikákat tekintünk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Az állapottér geometriája	4
2.1. Az állapottér mint Riemann-sokaság	4
2.2. Operátormonoton függvények és mátrixközepek	7
2.3. Kvantum Fisher információk	9
3. XXI. századi eredmények	11
4. Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából	15
4.1. Kovarianciák és metrikák kapcsolata	15
4.2. Az általános határozatlansági reláció	20
4.3. Kevert kovarianciák	23
5. Kitekintés	25
5.1. Határozatlansági relációk asszimptotikája	25
5.2. A komplex kovariancia	25

1. Bevezetés

Werner Heisenberg azóta híressé vált határozatlansági-elvét gondolat kísérletekből és a Bohr-féle posztulátumokból származtatta 1927-ben heurisztikus meggondolások segítségével [1]. A Heisenberg-féle határozatlansági-elv eredeti formájában azt mondta ki, hogy egy részecske helyét és impulzusát egyszerre nem lehet tetszőleges pontossággal megmérni. Amennyiben Δx [m] jelöli a helymérés bizonytalanságát, Δp [$\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$] pedig az impulzus mérés bizonytalanságát, akkor

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h, \quad \text{ahol} \quad h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \quad (1.1)$$

a Planck-állandó. Meg kell jegyeznünk, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági-elv ebben a formájában csupán egy *elv* és nem tétel.

A Heisenberg határozatlansági-elvet még ugyanebben az évben E. H. Kennard és Hermann Weyl fogalmazta meg korrektül és bizonyította be [2]. A Kennard és Weyl által bizonyított változat a hely és impulzus szórásának (σ_x , illetve σ_p) szorzatára szolgáltat alsó becslést (1.2).

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

Kennard és Weyl becslését 1929-ben Robertson általánosította tetszőleges fizikai mennyiségekre [3].

A történeti áttekintést ebben a pontban rövid időre félbeszakítjuk, hogy néhány, a továbbiakban nélkülözhetetlen fogalmat definiáljunk. Ebben a dolgozatban csak olyan kvantummechanikai rendszereket vizsgálunk, melyek leírhatók véges dimenziós komplex Hilbert-terek segítségével. Ilyen rendszer például valamely nemrelativisztikus részecske spin része [4].

1.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyen $\mathcal{H}_n$ egy rögzített n -dimenziós Hilbert-tér.

1. Az $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett 1 nyomú, önadjungált, pozitív lineáris operátorokat *állapotoknak* nevezzük. Az állapotok összességét *állapot-térnek* hívjuk, ezt $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ jelöli.

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \{D \mid D \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n), D \geq 0, D = D^+, \text{Tr}(D) = 1\}$$

2. Az $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett önadjungált operátorokat *fizikai mennyiségeknek* vagy *obszervábiliseknek* nevezzük. A fizikai mennyiségek összességét jelölje $\mathcal{M}_{n,sa}$.

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \{D \mid D \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n), D = D^+\}$$

3. Az állapottér egy zárt konvex halmaz az $(\text{Lin}(\mathcal{H}_n), \mathbb{R})$ vektortérben. Ennek a halmaznak az extrémális ¹ pontjait hívjuk *tiszta állapotoknak*, a többi pontot pedig *kevert állapotoknak* nevezzük.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a fizikai mennyiségek vektorteret alkotnak a valós számtest felett. Ha D egy állapot, akkor a fizikai mennyiségek vektorterén bevezethető egy belső szorzás, melyet a

$$\mathcal{M}_{n,sa} \times \mathcal{M}_{n,sa} \ni (A, B) \mapsto \text{Tr}(DAB) \quad (1.3)$$

leképezés definiál. A szokásos módon bizonyítható, hogy az így bevezetett skaláris szorzás teljesíti a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, vagyis tetszőleges A, B fizikai mennyiségekre és minden D állapotra fennáll a következő (1.4) egyenlőtlenség.

$$\text{Tr}(DA^2)\text{Tr}(DB^2) \geq |\text{Tr}(DAB)|^2 = \text{Tr}(DAB)\text{Tr}(DBA) \quad (1.4)$$

Az A fizikai mennyiség *várható értékét* a $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapotban az

$$\mathbb{E}_D A := \text{Tr}(DA) \quad (1.5)$$

kifejezéssel definiáljuk. A valószínűségi számításból ismert kovariancia fogalmát

$$\text{„Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y\text{”}$$

szeretnénk általánosítani nemkommutatív esetre. A kovariancia operációtól elvárjuk, hogy szimmetrikus legyen. Ezt a követelményt az 1.2. definícióval bevezetett kovariancia teljesíti.

1.2. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy rögzített állapot. Az A és B fizikai mennyiségek *kovarianciáját* a D állapotban az (1.6) formula adja meg.

$$\text{Cov}_D^s(A, B) := \frac{1}{2} (\text{Tr}(DAB) + \text{Tr}(DBA)) - \text{Tr}(DA)\text{Tr}(DB) \quad (1.6)$$

Az A fizikai mennyiség *varianciáját* a D állapotban a

$$\text{Var}_D(A) := \text{Cov}_D^s(A, A) \quad (1.7)$$

formulával definiáljuk. A felső indexben szereplő s betűvel arra szeretnénk utalni, hogy a most bevezetett kovariancia szimmetrikus a változóiban. Az irodalomban a $\text{Cov}_D^s(A, B)$ kovarianciát *szimmetrizált* kovarianciának is nevezik [18].

A Robertson által 1929-ben bizonyított határozatlansági reláció ezek után a következőképpen hangzik.

¹Egy konvex halmazbeli elemet abban az esetben nevezünk *extrémálisnak*, ha nem áll elő két különböző konvex halmazbeli elem nem triviális konvex kombinációjaként.

1.3. Tétel (Robertson, 1929). Ha $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizika mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy tetszőleges állapot, akkor az A és B obszervábilisek varianciájára a következő becslés érvényes:

$$\text{Var}_D(A)\text{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(D[A, B])|^2 \quad (1.8)$$

A Robertson-féle határozatlansági relációt 1930-ban Ervin Schrödinger egy kovariancia taggal javította meg [5]. A Schrödinger-féle határozatlansági reláció az 1.3. tétel jelöléseivel felírva a következő alakot ölti:

$$\text{Var}_D(A)\text{Var}_D(B) \geq \frac{1}{4}|\text{Tr}(D[A, B])|^2 + \text{Cov}_D(A, B)^2 \quad (1.9)$$

Bizonyítás. Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot. Vezessük be az

$$A_0 := A - I \text{Tr} DA \quad (1.10)$$

$$B_0 := B - I \text{Tr} DB \quad (1.11)$$

centrált fizikai mennyiségeket. Az A_0 és B_0 obszervábilisekre felírt (1.4) Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség ekvivalens az A és B fizikai mennyiségekre felírt (1.9) egyenlőtlenséggel. **Q.E.D.**

1.4. Következmény. Az (1.9) egyenlőtlenség a D -variancia definícióját felhasználva a következő determináns-egyenlőtlenség formájában írható fel.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \text{Cov}_D^s(A, A) & \text{Cov}_D^s(A, B) \\ \text{Cov}_D^s(B, A) & \text{Cov}_D^s(B, B) \end{pmatrix} &\geq \\ &\geq \det \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \text{Tr}(D[A, A]) & -\frac{i}{2} \text{Tr}(D[A, B]) \\ -\frac{i}{2} \text{Tr}(D[B, A]) & -\frac{i}{2} \text{Tr}(D[B, B]) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Az (1.12) egyenlőtlenséget 1934-ben Robertson több fizikai mennyiség együttesére is általánosította [6]. Amennyiben $\{A_k\}_{k=1}^N$ fizikai mennyiségek véges rendszere, D pedig egy állapot érvényes a

$$\det \left([\text{Cov}_D^s(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N} \right) \geq \det \left(\left[-\frac{i}{2} \text{Tr}(D[A_k, A_l]) \right]_{k,l=1,\dots,N} \right) \quad (1.13)$$

determináns-egyenlőtlenség. A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán egy antiszimmetrikus mátrix determinánsa áll, ezért páratlan számú fizikai mennyiségre az (1.13) egyenlőtlenség jobb oldala zérus.

2. Az állapottér geometriája

Ebben a fejezetben rövid betekintést adunk az állapottér geometriájába. Ez a többszempontról is gyümölcsöző tárgyalásmód lesz segítségünkre a határozatlansági relációk kutatásában elért újabb eredmények bemutatásánál, illetve ennek segítségével segítségével fogunk geometriai értelmezést tulajdonítani a határozatlansági relációk különböző oldalain szereplő kifejezések is. Az Olvasó a fejezetben felhasznált differenciálgeometriai fogalmak jelentős részét az [7] műben találhatja meg.

2.1. Az állapottér mint Riemann-sokaság

Az előző fejezetben említettük, hogy egy elegendően nagy N természetes számra az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér egy konvex zárt halmaz az $\mathbb{R}^N$ vektortérben. A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren értelmezett belső szorzás folytonosságából adódóan az állapottér belsejét pontosan azok az állapotok alkotják, melyekhez szigorúan pozitív lineáris operátorok tartoznak, ezért ezt a halmazt $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ -al fogjuk jelölni. Az állapottér belseje egy összefüggő nyílt halmaz, melyet kizárólag kevert állapotok alkotnak.

2.1. Állítás. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ -al jelölt belseje ellátható egy közönséges sima sokaság struktúrával. Az így kapott sima sokaságot jelölje szintén $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$.

Bizonyítás. Az állapottér belsejét egyetlenegy térképpel fogjuk lefedni. A koordinátázást komplex állapotokra mutatjuk meg, a valós állapotok koordinátázása hasonlóképpen történik.

Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ egy állapot és $\{e_i\}_{i=1}^n$ a $\mathcal{H}_n$ n -dimenziós Hilbert-tér egy bázisa. A

$$\odot : \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \quad (2.1)$$

diadikus szorzás értelmezése:

$$(\forall u, v, w \in \mathcal{H}_n) \quad w \mapsto u \odot v(w) := u\langle v, w \rangle \quad (2.2)$$

Vezessük be az

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(e_k \odot e_l + e_l \odot e_k) \quad \text{és} \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(e_k \odot e_l - e_l \odot e_k) \quad (2.3)$$

$(1 \leq k < l \leq n)$ operátókat. Vegyük a következő

$$\phi : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2-1} \quad D \mapsto \phi(D) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \phi(D) := & (\text{Tr } De_1 \odot e_1, \dots, \text{Tr } De_{n-1} \odot e_{n-1}, \text{Tr } De_1 \vee e_2, \dots, \text{Tr } De_1 \vee e_n, \\ & \dots, \text{Tr } De_{n-1} \vee e_n, \text{Tr } De_1 \wedge e_2, \dots, \text{Tr } De_1 \wedge e_n, \dots, \text{Tr } De_{n-1} \wedge e_n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

leképezést. Ellenőrizhető, hogy ez egy kölcsönösen egyértelmű inverzével együtt folytonos leképezés, tehát homeomorfizmus az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ tér és $\mathbb{R}^{n^2-1}$ egy összefüggő nyílt halmaza között. **Q.E.D.**

2.2. Megjegyzés. Ha vesszük a D állapot mátrixrepresentációját, akkor a $e_i \vee e_j$ leképezések felelnek meg a D mátrix valós részének, az $e_i \wedge e_j$ leképezések pedig a képzetes résznek. Így a valós állapotok koordinátázása annyiban tér el a komplex állapotok koordinátázásától, hogy a $e_i \wedge e_j$ leképezéseket kihagyjuk. Az állapottér fenti térképezését szokás *kanonikus koordinátázásnak* is nevezni.

2.3. Definíció. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ sokaságon egy $g \in T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \vee T^*\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ (2,1)-típusú sima tenzormezőt *Riemann-metrikának* nevezünk, ha tetszőleges

$$X : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \rightarrow T\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$$

sima vektormező esetén a

$$g(X, X) : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény nemnegatív és $(\forall p \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}) \quad g(X, X)(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = 0$.

2.4. Állítás. Egy tetszőleges $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ állapot felett a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér izomorf a nulla nyomú fizikai mennyiségek $\mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ valós számtest feletti vektorterével.

Bizonyítás. Az érintőtér azon meghatározását vesszük alapul, mely az érintővektorokat a sokaságban haladó sima görbék ekvivalencia osztályaként adja meg, ahol az ekvivalencia reláció az elsőrendű érintkezés.

Legyen $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sima görbe, melyre $\gamma(0) = D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$. A Tr művelet lineáris funkcionál, ezért

$$\text{Tr } \dot{\gamma}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{Tr}(\gamma(t) - \gamma(0)) = 0 \quad (2.6)$$

teljesül, azaz $\dot{\gamma}(0) \in \mathcal{M}_{n,sa}^0$. A $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér vektorai $(D, \dot{\gamma}(0))$ alakú párokkal reprezentálhatók és minden ilyen párra igaz, hogy a második elem $\mathcal{M}_{n,sa}^0$ -beli elem, ezért rögzített $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ esetén a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtér beágyazható a $\mathcal{M}_{n,sa}^0$ vektortérbe.

Most legyen $A \in \mathcal{M}_{n,sa}^0$ tetszőleges és vegyük a $t \mapsto \gamma(t) := D + tA$ görbét. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \subseteq \mathbb{R}^{n^2-1}$ halmaz nyílt és γ folytonos, ebből következik, hogy $\exists \varepsilon > 0$, melyre a γ görbe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumra való megszorítása teljes egészében az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságban halad. A $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ leképezés lineáris, ezért sima, $\gamma(0) = D$ és $\dot{\gamma}(0) = A$. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^0$ lineáris tér tehát nemcsak beágyazható a $T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ érintőtérbe, hanem izomorf is vele. **Q.E.D.**

2.5. Következmény. Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságon adott Riemann-metrikáknak bijektíven megfeleltethetők azok a

$$K : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \times \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \times \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (D, A, B) \mapsto K_D(A, B) \quad (2.7)$$

leképezések, melyek teljesítik a következő két feltételt:

1. Tetszőleges rögzített $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ esetén a

$$K_D : \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \times \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \rightarrow \mathbb{C}$$

$(A, B) \mapsto K_D(A, B)$ leképezés skaláris szorzás.

2. Tetszőleges rögzített $A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}$ esetén a

$$K_{(\cdot)}(A, A) : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \rightarrow \mathbb{C}$$

$D \mapsto K_D(A, A)$ leképezés sima.

Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságon adott Riemann-metrikákra ezentúl kétféleképpen is gondolhatunk. Egyrészt ha az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságot absztrakt sokaságként kezeljük, akkor a Riemann-metrikákra tekinthetünk a 2.3. definíció szerinti értelemben. Másfelől pedig ha az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságra úgy tekintünk, mint mátrixokra, akkor egy Riemann-metrikára gondolhatunk úgy is, mint egy (2.7) alakú leképezésre, mely az 1. és 2. feltételeket teljesíti.

Az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sima sokaság a megadott metrikától függően többféleképpen tehető Riemann-sokasággá. Vethetjük például az (1.3) formulával megadott pontonként változó skaláris szorzás visszahúzottját, ez Riemann-metrikát definiál az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ sokaságon, de akár vethetjük az 1.2. definícióval bevezetett kovarianciát visszahúzottját is, ez is egy Riemann-metrika.

2.2. Operátormonoton függvények és mátrixközepek

A $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér egy $A \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)$ lineáris leképezéséről abban az esetben mondjuk, hogy *pozitív* ($A \geq 0$), ha az A leképezéshez asszociált kvadratikus alak pozitív szemidefinit. Ezek után tetszőleges A és B lineáris operátorokra értelmezhető egy

$$„\geq” \subset \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \times \text{Lin}(\mathcal{H}_n)$$

reláció.

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \quad (2.8)$$

Az így értelmezett relációval a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér lineáris operátorai részbenrendezett halmazt alkotnak. Vizsgálható tehát a „ $\geq$ ” reláció és az operátorokon értelmezett függvények viszonya.

2.6. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *operátormonoton*, ha

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall A, B \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B) \quad (2.9)$$

teljesül.

Egy $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ operátormonoton függvényt *szimmetrikusnak* nevezünk, ha fennáll az

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2.10)$$

egyenlőség. Egy f operátormonoton függvény *normált*, ha az $x = 1$ pontra folytonosan kiterjeszthető és $f(1) = 1$ teljesül.

A szimmetrikus, normált operátormonoton függvények összességét $\mathcal{F}_{op}$ -al jelöljük. Az $\mathcal{F}_{op}$ halmaz két fontos részhalmaza:

$$\mathcal{F}_{op}^{(r)} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\} \text{ és } \mathcal{F}_{op}^{(n)} = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\} \quad (2.11)$$

2.7. Megjegyzés. Az, hogy egy $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény operátor monoton vagy sem nincs összefüggésben azzal, hogy az f függvény „milyen gyorsan növekszik”² például az exponenciális függvény nem operátormonoton, az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény pedig igen.

²Mondjuk azt, hogy az f függvény „gyorsabban növekszik”, mint a g függvény, ha $f - g$ szigorú monoton növény.

2.8. Példa. Az alábbi függvények mindegyike szimmetrikus és normált operátormonoton függvény:

$$x \mapsto \frac{1+x}{2}, \forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad x \mapsto \frac{2x^{\frac{1+\alpha}{2}}}{1+x^{2\alpha}}, \quad x \mapsto \frac{x-1}{\log x}$$

2.9. Definíció. Jelölje $\text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-tér pozitív lineáris operátorainak halmazát. Egy $m : \text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \times \text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+ \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ folytonos függvényt *mátrixközépnek* nevezünk, ha teljesíti a következő feltételeket.

1. $m(A, A) = A$,
2. $m(A, B) = m(B, A)$,
3. $A \leq B \Rightarrow A \leq m(A, B) \leq B$,
4. $(\forall P \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)) \quad Pm(A, B)P^* \leq (PAP^*, PBP^*)$,

A mátrixközepek halmazát az $\mathcal{M}_{op}$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Az operátormonoton függvények és a mátrixközepek kapcsolata szoros, erről szól a következő tétel [8].

2.10. Tétel (Ando, Kubo). Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények halmaza ($\mathcal{F}_{op}$) és a mátrixközepek halmaza ($\mathcal{M}_{op}$) közt. Egy ilyen megfeleltetés ad meg a

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{op})(\forall A, B \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+) \quad m_f(A, B) := A^{\frac{1}{2}} f\left(A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

kifejezés.

2.11. Példa. Az $A, B \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)^+$ operátorok számtani, mértani és harmonikus közepei rendre:

$$A \nabla B := \frac{1}{2}(A + B) \quad A \# B := A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) B^{\frac{1}{2}} \quad A ! B := 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

Ando és Kubo a [8] közleményükben írták le, hogy a mátrixközepek között a számtani közép a legnagyobb és a harmonikus közép a legkisebb. Érdekességgént érdemes megemlíteni, hogy egyenlőre nem ismeretes olyan formula, mellyel három mátrix mértani közepét ki lehetne számítani.

2.3. Kvantum Fisher információk

2.12. Definíció. A $T : \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_m)$ lineáris leképezést *pozitív* leképezésnek mondjuk, ha pozitív operátor T általi képe pozitív operátor.

Egy k természetes számra az $\mathcal{A} \in \text{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \text{Lin}(\mathcal{H}_n)$ elemhez rendeljük hozzá az $[\mathcal{A}]_j^i = A_j^i \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)$ $i, j = 1, \dots, k$ blokkmátrixot. Egy

$$T : \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_m)$$

lineáris leképezést akkor nevezzük *teljesen pozitív* leképezésnek, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a

$$T^{(k)} : \text{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_k) \otimes \text{Lin}(\mathcal{H}_m) \quad A_j^i \mapsto T^{(k)}(A_j^i) = T(A_j^i) \quad (2.13)$$

leképezés pozitív leképezés.

2.13. Definíció. Egy $T : \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_m)$ leképezést *sztochasztikus leképezésnek* hívunk, ha teljesen pozitív és felcserélhető a Tr művelettel.

2.14. Definíció. Riemann sokaságok egy $\left(\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}, K^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ családját *monoton metrika családnak* nevezzük, ha tetszőleges m, n természetes számokra és minden

$$T : \text{Lin}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \text{Lin}(\mathcal{H}_m)$$

sztochasztikus leképezésre bármely $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ állapotban teljesül az

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)}) \quad K_{T(D)}^{(m)}(T(A), T(A)) \leq K_D^{(n)}(A, A) \quad (2.14)$$

egyenlőtlenség. A monoton metrika családok tagjait *kvantum Fisher információknak* hívjuk.

Az operátormonoton függvények és a monoton metrika családok között szoros kapcsolat mutatható ki, erről szól Petz osztályozási tétele [9]. Vezessük be az $L_{n,D}, R_{n,D} \in \text{Lin}(\text{Lin}(\mathcal{H}_n))$ operátorokat, melyek a $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ operátorral való bal, illetve jobb oldali kompozíciót szimbolizálják.

$$(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+})(\forall A \in \mathcal{H}_n) \quad L_{n,D}(A) := DA \quad R_{n,D}(A) := AD \quad (2.15)$$

Ezekkel a jelölésekkel a monoton metrika családok Petz-féle klasszifikációs tétele így szól.

2.15. Tétel (Petz, 1996). A monoton metrikacsaládok és a szimmetrikus operátormonoton függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ilyen bijekciót például a következő módon lehet megadni.

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{op}) \quad K^{(n),f} : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \times \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \times \mathcal{M}_{n,sa}^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (D, A, B) \mapsto K_D^{(n),f}(A, B) \quad (2.16)$$

$$K_D^{(n),f}(A, B) = \text{Tr} \left[A \circ \left(R_{n,D}^{\frac{1}{2}} f(L_{n,D} R_{n,D}^{-1}) R_{n,D}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \circ B \right] \quad (2.17)$$

Az így definiált megfeleltetés egy adott f operátormonoton függvényhez egy jól meghatározott $(K^{(n),f}, \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton metrika családot rendel és minden monoton metrikacsalád előállítható ezen a módon egy alkalmas $f \in \mathcal{F}_{op}$ operátormonoton függvény segítségével.

Az $f \in \mathcal{F}_{op}$ operátormonoton függvényhez az (2.16) formula által rendelt $K_D^{(n),f}(\cdot, \cdot)$ kvantum Fisher információ jelölésére a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ szimbólumot is alkalmazhatjuk.

2.16. Példa. Az $f(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{x} + 1)^2$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvényhez asszociált monoton metrika család tagjait *Wigner-Yanase* metrikáknak nevezzük.

Tetszőleges $\beta \in [-1, 2] \setminus \{0, 1\}$ számra szimmetrikus, normált operátormonoton függvényt határoz meg a $f_\beta(x) = \frac{\beta(1-\beta)(x-1)^2}{(x^\beta-1)(x^{1-\beta}-1)}$ hozzárendelés. Az ezen függvénycsalád tagjaihoz metrikákat *Wigner-Yanase-Dyson* metrikáknak hívják.

2.17. Megjegyzés. Jogosan vetődhet fel a kérdés, hogy az eddigi vizsgálódásaink során csupán az állapottér belsejét néztük és a tiszta állapotokról nem mondtunk semmit. Az egész $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapottér egy peremes sokaság struktúrával látható el. A tiszta állapotok az $\partial \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ perem részhalmazát alkotják. Petz monoton metrikák radiális kiterjeszthetőségéről [9] szóló tétele értelmében igaz, hogy egy $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ kvantum Fisher információ pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$, azaz $f(0) \neq 0$.

3. XXI. századi eredmények

A határozatlansági relációk kutatásának történeti áttekintése ebben a fejezetben zárul. Azokat a modern eredményeket mutatjuk be, melyek kutatásaink kiinduló pontját képezték.

Az állapottér differenciálgeometriai eszközökkel történő tanulmányozása az 1990-es évek elején vált általánosan elterjedté. Petz tétele a monoton metrika családok klasszifikációjáról fordulópontot jelentett a határozatlansági relációk kutatásában [9, 10, 11, 12]. Innentől fogva nyertek geometriai tartalmat a határozatlansági relációk jobb oldalán álló mennyiségek, bár erre a felismerésre majdnem egy évtizedet kellett várni. Az első olyan közlemény, melyben a fizikai mennyiségek kovarianciájának becslésére kvantum Fisher információkat alkalmaznak a Luo és Zhang szerzőpárhoz köthető [13].

Luo és Zhang egy a Robertson (1.13) determináns-egyenlőtlenségéhez hasonló formájú egyenlőtlenséget (3.1) sejtett meg [13] és bizonyított be speciálisan a Wigner-Yanase metrikára (lásd.: 2.16. példa) és $N = 2$ fizikai mennyiségre [14, 15].

3.1. Tétel. Legyenek $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek és $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy tetszőleges állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ pedig egy operátormonoton függvény. Ebben az esetben érvényes az alábbi egyenlőtlenség.

$$\det([\text{Cov}_D^s(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}) \geq \det\left(\left[\frac{f(0)}{2}\langle i[D, A_k], i[D, A_l] \rangle_{D,f}\right]_{k,l=1,\dots,N}\right) \quad (3.1)$$

3.2. Definíció. Legyen $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvény. Az $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek *kvantum f -kovarianciáját* egy $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapotban az alábbi kifejezés definiálja.

$$\text{Cov}_{D,f}^{as}(A, B) := \frac{f(0)}{2}\langle i[D, A], i[D, B] \rangle_{D,f} \quad (3.2)$$

A kvantum f -kovariancia kifejezés helyett a továbbiakban ahol nem szükséges az f operátormonoton függvénytől való függést kihangsúlyozni egyszerűen csak *kvantum kovarianciát* írunk. Az irodalmakban az A és B fizikai mennyiségek kvantum kovarianciáját általában $\text{Qov}_{D,f}(A, B)$ jelöli [18, 19, 20]. Az általunk használt jelöléssel azt szeretnénk kihangsúlyozni, hogy a kvantum kovariancia egy – bizonyos értelemben vett – antiszimmetrizált

kovariancia. A 4. fejezetben tisztázzuk, hogy a szimmetrizált és az antiszimmetrizált kovariancia elnevezés pontosan mit takar. Látni fogjuk, hogy a Cov^s közönséges szimmetrizált kovariancia csak egy a sokféle szimmetrizált kovariancia közül.

A 3.1 tételt Wigner-Yanase-Dyson metrikára Kosaki [16] és a Yanagi, Furuichi, Kuriyama hármas [17] bizonyította egymástól függetlenül. A 3.1 tételt általános $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvényre Gibilisco és Isola sejtette meg és írta le a [18] cikkben. A valós, $N = 3$ esetre Gibilisco, Imparato és Isola közölt bizonyítást [19], ugyanebben a közleményben szerepel az alábbi tétel bizonyítatlanul, sejtésként kimondva.

3.3. Tétel. Legyenek $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy tetszőleges állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények. Ilyen feltételek mellett igaz az, hogy ha

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \quad (3.3)$$

teljesül, akkor fennáll az

$$\det([\text{Cov}_{D,f}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}) \geq \det([\text{Cov}_{D,g}^{as}(A_k, A_l)]_{k,l=1,\dots,N}) \quad (3.4)$$

egyenlőtlenség.

Andai A. a 3.1. tételnél és Gibilisco 3.3. tételénél erősebb állításokat fogalmazott meg és bizonyított be [20]. Bizonyítás rendkívül szellemes és egyszerű, lényegében az általánosított Brunn–Minkowski egyenlőtlenséget használja fel. Andai tételeit bizonyítás nélkül közöljük, a bizonyításokat az Olvasó a [20] közleményben találhatja meg.

3.4. Tétel (Andai). Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények, melyek a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \quad (3.5)$$

feltételt kielégítik. Az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ nem azonosan zérus fizikai mennyiségek véges rendszerére definiáljuk a kovariancia és kvantum kovariancia mátrixokat a következő módon.

$$[\text{Cov}_D^s]_j^i := \text{Cov}_D^s(A_i, A_j) \quad (3.6)$$

$$[\text{Cov}_{D,f}^{as}]_j^i := \text{Cov}_{D,f}^{as}(A_i, A_j) \quad (3.7)$$

I. Ekkor igazak a következő kijelentések:

$$\det(\text{Cov}_D^s) \geq \det(\text{Cov}_{D,f}^{as}) + \det(\text{Cov}_D^s - \text{Cov}_{D,f}^{as}) + R(D, f, N) \quad (3.8)$$

$$\det(\text{Cov}_{D,f}^{as}) \geq \det(\text{Cov}_{D,g}^{as}) + \det(\text{Cov}_{D,f}^{as} - \text{Cov}_{D,g}^{as}) + R(D, f, g, N) \quad (3.9)$$

A fenti formulákban szereplő $R(D, f, N)$ és $R(D, f, g, N)$ járulékos tagokat a következő, binomiális tételre emlékeztető összefüggések adják meg.

$$R(D, f, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} [\det(\text{Cov}_{D,f}^{as})]^{\frac{k}{N}} [\text{Cov}_D^s - \text{Cov}_{D,f}^{as}]^{\frac{N-k}{k}} \quad (3.10)$$

$$R(D, f, g, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} [\text{Cov}_{D,g}^{as}]^{\frac{k}{N}} [\text{Cov}_{D,f}^{as} - \text{Cov}_{D,g}^{as}]^{\frac{N-k}{k}} \quad (3.11)$$

II. Az alábbi három kijelentés egymással ekvivalens:

- i. $\det(\text{Cov}_D^s) = \det(\text{Cov}_{D,f}^{as})$
- ii. $\det(\text{Cov}_{D,f}^{as}) = \det(\text{Cov}_{D,g}^{as})$
- iii. Az $\{A_k\}_{k=1}^N$ fizikai mennyiségek lineárisan összefüggő vektorrendszert határoznak meg az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben.

A következő tétel az előző tételt állítását adja vissza a $t = \frac{1}{2}$ paraméter választás mellett.

3.5. Tétel (Andai). Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot és $f, g \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ operátormonoton függvények, melyek a

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{f(0)}{f(x)} \geq \frac{g(0)}{g(x)} \quad (3.12)$$

feltételt kielégítik. Az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ nem azonosan zérus fizikai mennyiségek véges rendszerére a 3.4. tételben leírt módon definiáljuk a Cov_D^s kovariancia és a $\text{Cov}_{D,f}^{as}$, illetve $\text{Cov}_{D,g}^{as}$ kvantum kovariancia mátrixokat. Ekkor a $t \in [0, 1]$ paraméter minden lehetséges értékére fennáll a

$$\begin{aligned} \det(t \text{Cov}_D^s + (1 - 2t) \text{Cov}_{D,f}^{as}) &\geq (1 - t)^N \det(\text{Cov}_{D,f}^{as}) + \\ &+ t^N \det(\text{Cov}_D^s - \text{Cov}_{D,f}^{as}) + R(D, f, N, t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

és a

$$\det(t \operatorname{Cov}_{D,f}^{as} + (1-2t) \operatorname{Cov}_{D,g}^{as}) \geq (1-t)^N \det(\operatorname{Cov}_{D,g}^{as}) + t^N \det(\operatorname{Cov}_{D,f}^{as} - \operatorname{Cov}_{D,g}^{as}) + R(D, f, g, N, t) \quad (3.14)$$

egyenlőtlenség az

$$\begin{aligned} R(D, f, N, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t) \sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}_{D,f}^{as})} \right)^k \left(t \sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}_D^s - \operatorname{Cov}_{D,f}^{as})} \right)^{N-k} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} R(D, f, g, N, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t) \sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}_{D,g}^{as})} \right)^k \left(t \sqrt[N]{\det(\operatorname{Cov}_{D,f}^{as} - \operatorname{Cov}_{D,g}^{as})} \right)^{N-k} \end{aligned} \quad (3.16)$$

járulékos tagokkal.

3.6. Megjegyzés. A bemutatott tételekben a szimmetrikus normált operátormonoton függvények mindegyikéről kikötöttük, hogy a nullában nemnulla értéket vesznek fel. Ez a feltétel azért kellett, mert pontosan azokat a kvantum Fisher információkat lehet kiterjeszteni radiálisan az $\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ állapotter peremére, melyek nullában el nem tűnő szimmetrikus, normált operátormonoton függvények segítségével származtathatók (lásd.: 2.17. megjegyzés).

4. Határozatlansági relációk származtatása az állapottér geometriájából

Ezt és az ezt követő fejezetet saját eredményeink bemutatásának szenteljük. Gibilisco a [18] cikkében hívta fel a figyelmet arra, hogy (3.1) és (3.4) határozatlansági relációk különböző oldalain álló mennyiségeknek geometriai tartalma van. Ezekre a mennyiségekre úgy tekintett, mint az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben az $\{A_k\}_{k=1}^N \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ vektorokhoz asszociált térfogatra.

Pongyolán szólva a (3.1) formula jobb oldalán álló mennyiségekre gondolhatunk úgy, hogy a fizikai mennyiségeket a sűrűségoperátorral való kommutálás levetíti az állapot feletti érintőtérre, a determináns pedig a kapott érintővektorok által kifeszített térfogatot adja meg. A jobb oldalak jól illeszkednek a geometriai képbe. Nem ez a helyzet a baloldalon szereplő szimmetrizált kovarianciával, mivel első ránézésre a determináns szemléletes geometriai jelentésén kívül konkrét tartalma nincs (pl.: $N = 1$ fizikai mennyiségre). Úgy véljük, hogy a szimmetrizált kovarianciát nem párosították megfelelő geometriai interpretációval, Gibilisco sem adta meg a konkrét jelentését, csupán annyit állítottak, hogy a szimmetrikus kovariancia is térfogatként értelmezhető (lásd: a [18], 1.3 formula).

A 4.1. alfejezetben megmutatjuk, hogy a szimmetrizált kovariancia is kvantum Fisher információból származik, továbbá bevezetjük a szimmetrizált kovarianciák családját.

A 4.2. alfejezetben a határozatlansági relációkkal kapcsolatos bizonyítások kettősségéről lebbentjük le a fátylat azáltal, hogy rávilágítunk arra, hogy a kovarianciák tulajdonképpen metrikák, a határozatlansági relációk pedig a metrikák indexfüggvényei között fennálló rendezésre visszavezethető determináns-egyenlőtlenségek.

A 4.3. alfejezetben bevezetjük a kevert kovariancia fogalmát és segítségével adunk egy eddigieknél jobb alsó becslést a közönséges szimmetrikus kovarianciára.

4.1. Kovarianciák és metrikák kapcsolata

A $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ metrika –értelmezésénél fogva– invariáns a D állapot unitér transzformációival szemben, ezért mindig feltehetjük, hogy a D sűrűségoperátor mátrixa diagonális mátrix és a metrika értékeit elegendő meghatározni az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortér egy alkalmas bázisán.

4.1. Lemma. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,n}$ sajátértékekkel, az $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ vektorrendszer pedig legyen a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorokból képzett ortonormált bázis a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-téren.

Jelölje $e_k \vee e_l$ ($1 \leq k \leq n$) és $e_k \wedge e_l$ ($1 \leq k < l \leq n$) azokat az operátorokat, melyeket a 2.1. állítás bizonyítása során vezettünk be.

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(e_k \odot e_l + e_l \odot e_k) \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(e_k \odot e_l - e_l \odot e_k) \quad (4.1)$$

Nyilvánvaló, hogy ezek az operátorok együttesen az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortér egy bázisát adják ki.

Legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ az $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ függvény által generált monoton mertika. Ekkor a fenti bázisvektorok D pontbeli belső szorzatára a következő megállapítások érvényesek.

1. Ha $1 \leq i < j \leq n$ és $1 \leq k < l \leq n$, akkor

$$\begin{aligned} \langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle_{D,f} &= \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2m_f(\lambda_i, \lambda_j)} \\ \langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} &= \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2m_f(\lambda_i, \lambda_j)} \\ \langle e_i \wedge e_j, e_k \vee e_l \rangle_{D,f} &= 0 \end{aligned}$$

teljesül.

2. Ha $1 \leq i < j \leq n$ és $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\langle e_i \wedge e_j, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = \langle e_i \vee e_j, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = 0$$

teljesül.

3. Ha $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq k \leq n$, akkor

$$\langle e_i \vee e_i, e_k \vee e_k \rangle_{D,f} = \frac{\delta_{ik}}{m_f(\lambda_i, \lambda_i)}$$

teljesül.

A fenti összefüggésekben m_f az f szimmetrikus, normált operátormonoton függvényhez asszociált mátrixközeget jelöli.

Bizonyítás. A lemmát magát nem bizonyítjuk be, csak a bizonyításában kulcsfontosságú szerepet játszó ötletet osztjuk meg az Olvasóval. A bizonyítás egyébként a [21] közleményben szerepel. A Riesz–Dunford-féle ope-

rátorkalkulus értelmében ha Γ_1 és Γ_2 a D sűrűségoperátor spektrumát egyszeresen megkerülő folytonos, zárt görbe, akkor fennáll az alábbi összefüggés.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)})(\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,sa})(\forall f \in \mathcal{F}_{(op)}^{(r)})$$

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \text{Tr} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} m_f^{-1}(z_1, z_2) A(z_1 I - D)^{-1} B(z_2 I - D)^{-1} dz_1 dz_2$$
(4.2)

Q.E.D.

Innentől fogva a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-térnek mindig egy olyan $\{e_k\}_{k=1,\dots,n}$ bázisát vesszük, melyben a sűrűségoperátor mátrixa diagonális.

4.2. Tétel. Legyenek $A \in \mathcal{M}_{n,sa}$ és $B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ centrált fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,n}$ sajátértékekkel. Legyen $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ az A és B operátorok mátrixa a D operátor sajátvektorokból álló ortonormált bázisban. Ha $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ szimmetrikus, normált operátor-monoton függvény, akkor $\langle A, B \rangle_{D,f}$ kiszámítására a következő összefüggés érvényes.

$$\langle A, B \rangle_{D,f} = \sum_{k,l=1}^n A_l^k B_k^l \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)}$$
(4.3)

Bizonyítás. Az A és B operátorok kifejtett alakja $\mathcal{M}_{n,sa}$ szokásos bázisában az alábbi.

$$A = \sum_{k=1}^n A_k^k e_k \vee e_k + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Re A_l^k e_k \vee e_l + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Im A_l^k e_k \wedge e_l \quad (4.4)$$

$$B = \sum_{k=1}^n B_k^k e_k \vee e_k + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Re B_l^k e_k \vee e_l + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Im B_l^k e_k \wedge e_l \quad (4.5)$$

A metrika bilinearitását alkalmazzuk a előbbi lemmánkban kapott formulákat figyelembe véve.

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_{D,f} &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\Re(A_l^k B_l^k) + \Im(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} \frac{\Re(A_l^k B_l^k) + \Im(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Az A és B operátorok önadjungáltak, ezért igaz az alábbi.

$$\begin{aligned} A_l^k B_k^l &= \Re A_l^k \Re B_k^l - \Im A_l^k \Im B_k^l + i(\Re A_l^k \Im B_k^l + \Im A_l^k \Re B_k^l) = \\ &= \Re A_l^k \Re B_k^l + \Im A_l^k \Im B_k^l - \underbrace{i(\Re A_l^k \Im B_k^l - \Im A_l^k \Re B_k^l)}_{\text{antiszimmetrikus a } k \text{ és } l \text{ indexekben}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Az m_f függvény változóiban szimmetrikus, ezért az (4.6) formulába a

$$\Re(A_l^k B_l^k) + \Im(A_l^k B_l^k) \mapsto A_l^k B_k^l$$

helyettesítést elvégezve a formula igaz marad.

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_{D,f} &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} \frac{\Re(A_l^k B_l^k) + \Im(A_l^k B_l^k)}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k^k B_k^k}{m_f(\lambda_k, \lambda_k)} + \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} \frac{A_l^k B_k^l}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} = \sum_{k,l=1}^n A_l^k B_k^l \frac{1}{m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Q.E.D.

4.3. Következmény (Lovas). Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig egy állapot.

- I. Legyen $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Számítsuk ki az A és B fizikai mennyiségek kvantum f -kovarianciáját (*antiszimmetrizált f -kovarianciáját*) a D állapotban (4.3) formula segítségével.

Legyen A és B mátrixa $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$. A számításokban Einstein-konvenciót használunk, azaz az egy szorzaton belül előforduló azonos alsó és felső indexekre automatikusan összegzünk.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{D,f}^{as}(A, B) &= \frac{f(0)}{2} \langle i[D, A], i[D, B] \rangle_{D,f} = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} [DA - AD]_l^k [DB - BD]_k^l = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} (D_i^k A_l^i - A_i^k D_l^i) (D_j^l B_k^j - B_j^l D_k^j) = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} (A_l^i D_i^k D_j^l B_k^j - A_l^i D_i^k D_k^j B_j^l - A_i^k D_l^i D_j^l B_k^j + A_i^k D_l^i D_k^j B_j^l) = \\
&= \frac{-f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} (A_l^k B_k^l \lambda_k \lambda_l - A_l^k B_k^l (\lambda_k)^2 - A_l^k B_k^l (\lambda_l)^2 + A_l^k B_k^l \lambda_k \lambda_l) = \\
&= \frac{f(0)(\lambda_k - \lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} A_l^k B_k^l \quad (4.9)
\end{aligned}$$

II. Ha $X, Y \in \text{Lin}(\mathcal{H}_n)$ operátorok, akkor $\{X, Y\} := XY + YX$. Legyen $f \in \mathcal{F}_{op}^{(r)}$ szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Definiáljuk az A, B fizikai mennyiségek *szimmetrizált f -kovarianciáját* a D állapotban az

$$\text{Cov}_{D,f}^s(A, B) := \frac{f(0)}{2} \langle \{D, A\}, \{D, B\} \rangle_{D,f} \quad (4.10)$$

formulával. Most pedig számítsuk ki ténylegesen az A, B fizikai mennyiségek *szimmetrizált f -kovarianciáját* az (4.3) formula segítségével. Legyen A és B mátrixa $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$. A számításokban itt is az Einstein-konvenciót használjuk.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{D,f}^s(A, B) &= \frac{f(0)}{2} \langle \{D, A\}, \{D, B\} \rangle_{D,f} = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} [AD + DA]_l^k [BD + DB]_k^l = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} (A_i^k D_l^i + D_i^k A_l^i) (B_j^l D_k^j + D_j^l B_k^j) = \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \cdot \\
&\quad \cdot (A_i^k D_l^i D_k^j B_j^l + A_i^k D_l^i D_j^l B_k^j + D_i^k A_l^i B_j^l D_k^j + D_i^k A_l^i D_j^l B_k^j) = \\
&= \frac{f(0)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} (A_l^k B_k^l \lambda_l \lambda_k + A_l^k B_k^l (\lambda_l)^2 + A_l^k B_k^l (\lambda_k)^2 + A_l^k B_k^l \lambda_k \lambda_l) = \\
&= \frac{f(0)(\lambda_k + \lambda_l)^2}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} A_l^k B_k^l \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy mit ad vissza a kapott formula az

$$f = \frac{1+x}{2}$$

szimmetrikus, normált operátormonoton függvényre.

$$\text{Cov}_{D,f}^s(A, B) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l)^2}{2^{\frac{\lambda_k + \lambda_l}{2}}} A_l^k B_k^l = \sum_{k,l=1}^n \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} A_l^k B_k^l \quad (4.12)$$

Amit kaptunk az pontosan megegyezik az A és B fizikai mennyiségek közönséges szimmetrizált kovarianciájával (lásd: [20]).

4.4. Megjegyzés. Az (4.3) formulából egyébként visszakaptuk azt is, hogy a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D,f}$ metrika pontosan akkor terjeszthető ki tiszta állapotokra, ha $f(0) \neq 0$.

4.2. Az általános határozatlansági reláció

Az általunk tanulmányozott határozatlansági relációkkal kapcsolatos bizonyításokban a [20, 18, 19] két állandó motívum bukkant fel. Az egyik az, hogy bizonyítanak az alsó becsléshez felhasznált kovariancia család tagjai közt valamilyen rendezést, ami kapcsolatban áll a kovariancia család tagjait indexelő függvények közti rendezéssel, a másik pedig az, hogy belátják azt, hogy a közönséges szimmetrizált kovariancia mindig nagyobb a becsléshez használt kovarianciánál.

Az előző alfejezetből megtudhattuk, hogy a közönséges szimmetrizált kovariancia csak egy példánya a szimmetrizált f -kovarianciák népes családjának, melynek tagjai a kvantum kovarianciákhoz hasonlóan monoton metrikákból származnak.

Ebben az alfejezetben arra világítunk rá, hogy a kovariancia egyben metrika is és a határozatlansági relációk mögött – bizonyos külső formák belső szorzatai megfeleltethető – determinánsok között fennálló egyenlőtlenségek bújnak meg, melyek a metrikákat indexelő függvények közti rendezésekre vezethetők vissza.

4.5. Állítás. Legyen $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sima függvény, mely változóiban szimmetrikus, $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ pedig legyen egy állapot $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ sajátértékekkel. Az A és B operátorok mátrixai a szokásos bázisunkban legyen $[A_l^k]_{k,l=1,\dots,n}$ és $[B_k^l]_{k,l=1,\dots,n}$. Ekkor a

$$(D, A, B) \mapsto \mathfrak{Cov}_{D,g}(A, B) := \sum_{k,l=1}^n A_l^k B_k^l g(\lambda_k, \lambda_l) \quad (4.13)$$

leképezés egy Riemann-metrikát ad meg.

Bizonyítás. Triviális.

Q.E.D.

4.6. Lemma. Legyen A és B valós, szimmetrikus $n \times n$ -es pozitív definit mátrixok. Ekkor a $t \in [0, 1]$ paraméter tetszőleges értéke mellett igaz az

$$\det((1-t)A + tB)^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\det(A)^{\frac{1}{n}} + t\det(B)^{\frac{1}{n}} \quad (4.14)$$

általánosított Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A bizonyítás a [22] és a [23] cikkekben megtalálható. **Q.E.D.**

4.7. Tétel (Lovas). Legyenek $g_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $g_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ szimmetrikus függvények, melyekre

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \quad g_1(x, y) \geq g_2(x, y) \quad (4.15)$$

teljesül. Fizikai mennyiségek egy véges $\{A_k\}_{k=1, \dots, N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ rendszerére definiáljuk az alábbi mátrixot.

$$[\mathfrak{Cov}_{D,g_k}]_j^i = \mathfrak{Cov}_{D,g_k}(A_i, A_j) \quad k = 1, 2 \quad (4.16)$$

I. Ilyen feltételek mellett igaz a következő egyenlőtlenség.

$$\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + R(D, g_1, g_2, N) \quad (4.17)$$

Az $R(D, g_1, g_2, N)$ járulékos tagot a következőképpen lehet megadni.

$$R(D, g_1, g_2, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1})]^{\frac{k}{N}} [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{N-k}{N}} \quad (4.18)$$

II. Ha $(\forall x \in \mathbb{R}^+) g_1(x, x) = g_2(x, x)$, akkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek.

i. $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$

ii. Az $\{A_k\}_{k=1, \dots, N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek lineárisan összefüggő rendszert alkotnak az $\mathcal{M}_{n,sa}$ vektortérben.

Bizonyítás. Ennek a tételnek a bizonyítására használható a 3.4. tétel [20] cikkben szereplő bizonyítása, emiatt a bizonyításunk pontosan a [20] cikkben szereplő tétel bizonyítását követi.

Először megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix pozitív definit. Legyen $x \in \mathbb{C}^N$ és definiáljuk a

$$[C] := \sum_{k=1}^N x_k [A_k] \quad (4.19)$$

mátrixot.

$$\begin{aligned} \langle x, \mathfrak{Cov}_{D,g_1} x \rangle &= \sum_{K,L=1}^N \overline{x_K} x_L \mathfrak{Cov}_{D,g_1}(A_K, A_L) = \\ &= \sum_{K,L=1}^N \sum_{k,l=1}^n \overline{x_K} x_L g_1(\lambda_k, \lambda_l) [A_K]_l^k [A_L]_k^l = \\ &= \sum_{k,l=1}^n g_1(\lambda_k, \lambda_l) \left(\sum_{K=1}^N x_K [A_K]_l^k \right) \left(\sum_{L=1}^N \overline{x_L} [A_L]_k^l \right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n g_1(\lambda_k, \lambda_l) |[C]_l^k|^2 \geq 0 \quad (4.20) \end{aligned}$$

Nullát pontosan akkor kapunk, ha a fizikai mennyiségek mátrixai lineárisan összefüggnek. Ebben az esetben a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix nem pozitív definit, hanem csak pozitív szemidefinit, azaz van nulla sajátértéke, amiből következik, hogy determinánsa zérus.

Az előbbi gondolatmenet megismételhető a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}$ mátrixra is. Alkalmazva a 4.14 Brunn-Minkowski-egyenlőtlenséget $t = \frac{1}{2}$ -re felírva az alábbi kapjuk.

$$\begin{aligned} [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2} + (\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}))]^{\frac{1}{N}} &\geq \\ &\geq [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{1}{N}} + [\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})]^{\frac{1}{N}} \quad (4.21) \end{aligned}$$

Mindkét oldalt N -edik hatványra emelve kapjuk a tétel első részét. A második részhez a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1}$ mátrix pozitív definitéséről, illetve pozitív szemidefinitéséről szóló előbbi megjegyzésünket használjuk fel.

Ha az $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek mátrixai lineárisan összefüggők, akkor az imént említett megjegyzés értelmében $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = 0$ és $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) = 0$, vagyis $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$.

Ha $\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1}) = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2})$, akkor az előbb bizonyított egyenlőtlenségből

$$0 \leq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \quad (4.22)$$

következik, amit a $\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}$ mátrix pozitív szemidefinitéséből következő

$$0 \geq \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \quad (4.23)$$

egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk az alábbi.

$$0 = \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) \quad (4.24)$$

Ez pedig maga után vonja az $\{A_k\}_{k=1,\dots,N} \subseteq \mathcal{M}_{n,sa}$ fizikai mennyiségek lineáris összefüggőségét. **Q.E.D.**

4.8. Tétel (Lovas). Az előző tétel feltételei mellett az alábbi egyenlőtlenség áll fenn.

$$\begin{aligned} \det(t\mathfrak{Cov}_{D,g_1} + (1-2t)(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})) &\geq \\ &\geq (1-t)^N \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + t^N \det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2}) + R(D, g_1, g_2, N) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Az $R(D, g_1, g_2, N, t)$ járulékos tagot ebben az esetben a következőképpen lehet megadni.

$$\begin{aligned} R(D, g_1, g_2, N, t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \left((1-t) \sqrt[N]{\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1})} \right)^k \left(t \sqrt[N]{\det(\mathfrak{Cov}_{D,g_1} - \mathfrak{Cov}_{D,g_2})} \right)^{N-k} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bizonyítás. Annyi a különbség az előző tétel bizonyításához képest, hogy az (4.14) általánosított Brunn–Minkowski-egyenlőtlenséget kell felhasználni. Ez a tétel a $t = \frac{1}{2}$ paraméter választással az előző tételt adja vissza. **Q.E.D.**

4.3. Kevert kovarianciák

4.9. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(n)}$ pedig egy szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Az A és B fizikai mennyiségek *kevert f -kovarianciáját* a D állapotban a

$$\text{Cov}_{D,f}^{mix}(A, B) := -\frac{if(0)}{2} \langle [AD + iDA], [BD + iDB] \rangle_{D,f} \quad (4.27)$$

kifejezés adja meg.

A 4.3. következményben leírt számításokat követve meghatározhatjuk a kevert kovarianciát explicit módon. A számításokat nem részletezzük, csak az eredményt adjuk meg.

$$\text{Cov}_{D,f}^{mix}(A, B) := \sum_{k,l=1}^n A_l^k B_k^l \frac{f(0)(\lambda_k^2 + \lambda_l^2)}{2m_f(\lambda_k, \lambda_l)} \quad (4.28)$$

Az Olvasónak szemet szúrhat, hogy a kevert kovariancia egyszerűen csak a szimmetrizált és antiszimmetrizált kovarianciák számtani közepe s mint ilyen csupán triviális becslést ad. A becslés ereje abban áll, hogy nem az

$$f(x) = \frac{1+x}{2}$$

függvényt választjuk a kevert kovariancia indexének. A 4.7 tétel szerint akkor kapjuk közönséges szimmetrizált kovariancia alsó becslését, ha az f függvény választásánál figyelembe vesszük a

$$(\forall x, y \in [0, 1]) \quad \frac{f(0)(x^2 + y^2)}{2m_f(x, y)} \leq \frac{x + y}{2} \quad (4.29)$$

feltételt. A (4.29) feltétel az f függvényre a következőt adja.

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad \frac{1+x^2}{1+x} \leq \frac{f(x)}{f(0)} \quad (4.30)$$

Ezt a feltételt sok szimmetrikus, normált operátormonoton függvény teljesíti. Teljesíti például a Wigner-Yanase-Dyson metrikát származtatható függvény is. Nyilvánvaló, hogy adott f függvény mellett ez a kvantumkovarianciánál jobb becslést ad. Becslésünk hátrány, hogy csak a (4.3) feltételt teljesítő függvények jöhetnek szóba.

5. Kitekintés

Most, hogy a kivonatban kitűzött programunkat teljes egészében végrehajtottuk mutatunk néhány utat, amelyeken későbbi kutatásainkat szeretnénk vinni.

5.1. Határozatlansági relációk asszimptotikája

A valószínűségi számítás, melyet a véges dimenziós mátrixokkal űzünk a klasszikus valószínűségi számítástól a kommutativitás hiányában tér el. Klasszikus valószínűségi számítás esetén a határozatlansági relációk jobb oldalán semmit mondó mennyiség, azonosan nulla áll.

Az antiszimmetrizált kovariancia a kommutátorok alkalmazása miatt az állapottal nem felcserélhető részeit hagyja csak meg az argumentumában szereplő fizikai mennyiségeknek. Logikus tehát azt feltételezni, hogy az antiszimmetrizált f -kovariancia az f operátormonoton függvényben és az állapotban egyenletesen legjobb becslése a közönséges szimmetrizált kovarianciának. Hiszen az antiszimmetrizált kovariancia épp a nemkommutatív, kvantumszerű részt ragadja ki.

A határozatlansági relációk bal oldala ezzel szemben éppen a szimmetrikus részt emeli ki. A szimmetrikus rész dimenziója a tér dimenziójához képest kevésbé gyorsan nő, mint az antiszimmetrikus részé. Érdekes lenne megvizsgálni, hogy a határozatlansági relációk jobb és bal oldala alkalmas normáló faktorral osztva hogyan viszonyul egymáshoz, amint a Hilbert-tér dimenziójával a végtelenhez tartunk.

5.2. A komplex kovariancia

Ha rátekintünk a különféle (szimmetrizált, antiszimmetrizált, kevert) kovarianciákat megadó kifejezésekre, akkor természetes általánosításként adódik a következő.

5.1. Definíció. Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)}$ egy állapot, $f \in \mathcal{F}_{op}^{(n)}$ pedig egy szimmetrikus, normált operátormonoton függvény. Az A és B fizikai mennyiségek *komplex f -kovarianciáját* a D állapotban a $\theta \in [0, 2\pi]$ paraméter érték mellett a

$$\text{Cov}_{D,f}^{\mathbb{C}}(A, B) := -\frac{f(0)e^{i\theta}}{2} \langle [AD + e^{i\theta}DA], [BD + e^{i\theta}DB] \rangle_{D,f} \quad (5.1)$$

kifejezéssel definiáljuk.

A komplex kovariancia – mint ahogyan azt az elnevezés is sugallja – a megszokottól eltérően nem feltétlenül valós értékű. Felvehet komplex értéket is. Beszélhetünk tehát a komplex kovariancia fázisáról és amplitudójáról. Érdekes lenne vizsgálni, hogy a komplex kovarianciából különböző valós értékű függvények segítségével képzett valós mennyiségek milyen határozatlansági relációknak tesznek eleget. Be lehetne csempészni a θ paraméterbe is egy állapotfüggést. Intuitívan adódik a kép, hogy ez több szabadsági fokot eredményez, ezáltal javulhatnak a becsléseink.

Hivatkozások

- [1] W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198, 1927.
- [2] Kennard, E. H., Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, *Zeitschrift für Physik* **44**, 326-352, 1927.
- [3] Robertson, H. P., The uncertainty principle, *Phys. Rev.* **34**, 163-164, 1929.
- [4] L. D. Landau, E. M. *Lifsic. Elméleti fizika III. - Kvantummechanika.* Tankönyvkiadó, Budapest. ISBN 963 17 3259 2 (1978)
- [5] E. Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, *Bulgar. J. Phys.* **26**, 193-203, 2000, Translation of *Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Sect.* **19**, 296-303, 1930.
- [6] Robertson, H. P., An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation, *Phys. Rev.* **46**, 794-801, 1934.
- [7] Szenthe János, *Bevezetés a síma sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.
- [8] Kubo, F. and Ando, T., Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246(3)**, 205-224, 1979/80.
- [9] D. Petz and Cs. Sudár, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *J. Math. Phys.*, **37**, 2662-2663, 1996.
- [10] F. Hiai, D. Petz and G. Toth. Curvature in the geometry of canonical correlation. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **32**, 235-249 (1996).
- [11] D. Petz. Geometry of canonical correlation on the state space of quantum system. *J. Math. Phys.* **35**, 780-795 (1994).
- [12] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer.
- [13] S. Luo and Z. Zhang, An informational characterization of Schrödinger's uncertainty relations. *J. Statist. Phys.* **114**, 1557-1576, 2004.
- [14] S. Luo and Q. Zhang, On skew information, *IEEE Trans. Inform. Theory* **50**, 1778-1782, 2004.

- [15] S. Luo and Q. Zhang, Correction to „On skew information” . *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4432, 2005.
- [16] H. Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, *Internat. J. Math.* **16**, 629-645, 2005.
- [17] K. Yanagi, S. Furuichi and K. Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation. *IEEE Trans. Inform. Theory* **51**, 4401-4404, 2005.
- [18] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. A volume inequality for quantum Fisher information and the uncertainty principle. arXiv:math-ph/0706.0791v1, 2007.
- [19] P. Gibilisco, D. Imparato and T. Isola. Uncertainty principle and quantum Fisher information II. arXiv:math-ph/0701062v3, 2007.
- [20] Attila Andai. Uncertainty principle with quantum Fisher information. arXiv:math-ph/0707.1147v1, 2007.
- [21] P.W. Michor, D. Petz, és A. Andai, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 3(2):199-212, 2000.
- [22] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.
- [23] W. J. Firey, Some application of mean of convex bodies, *Pacific J. Math.* **14**, 53-60, 1964.