



**XXXI. Országos Tudományos
Diákköri Konferencia
2013**

**Dobkeverő szimulációja és vizsgálata
diszkrét elem módszerrel**

Készítette: Sass Ádám, vegyészmérnök, III. évfolyam

Témavezető: Dr. Ulbert Zsolt, egyetemi docens

Pannon Egyetem, Mérnöki Kar, Folyamatmérnöki Intézeti Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. Irodalmi áttekintés	2
2.1. Szilárd szemcsék fizikai tulajdonságai	2
2.2. Szilárd anyagok keverése	2
2.2.1. Szemcsés anyagok keverési tulajdonságai	3
2.2.2. Keveredési állapot jellemzése	3
2.2.3. A keverési folyamat karakterisztikus görbéje	6
2.2.4. Szilárd anyagokat keverő berendezések	7
2.3. Szemcsehalmazok áramlásának leírása	8
3. Alkalmazott módszerek, modellek	9
3.1. Diszkrét elem módszer	9
3.2. A mozgást leíró mechanikai egyenletek	9
3.3. A részecskék ütközési modellje	10
3.3.1. Normál irányú erők számítása	12
3.3.2. Tangenciális erők számítása	14
3.3.3. Súrlódási erő számítása	17
3.4. A szimulált dobkeverő paraméterei	17
3.5. Szemcsehalmaz homogenitásának vizsgálata	19
4. Szimulációs vizsgálatok, eredmények és értékelésük	21
4.1. Keveredés vizsgálata a fordulatszám függvényében	23
4.2. Keveredés vizsgálata a részecskék közötti súrlódási tényező függvényében	24
4.3. Keveredés vizsgálata a részecské és a fal közötti súrlódási té- nyező függvényében	25
5. Összefoglalás	27
6. Jelölésjegyzék	28
7. Irodalomjegyzék	30
8. Köszönetnyilvánítás	32

1. Bevezető

Az élelmiszeripari, vegyipari és gyógyszeripari technológiákban számos szemcsetechnológiai művelet (aprítás, keverés stb.) fordul elő. Ezek a műveletek energiaigényesek, optimális végrehajtással, például az optimális keveredési idő megválasztásával jelentős költségek takaríthatók meg. Szilárd szemcsék keverését végző berendezések tervezését támogató eszközök azonban nem érhetők el a piacon. Az ilyen berendezésekben végzett fizikai mérések nehézségek, mivel a mérő berendezés jelentősen befolyásolhatja a szemcsetömeg áramlási tulajdonságait. Ezért ilyen esetekben a számítógépes szimuláció jelentősen segítheti az áramlási folyamatok megismerését és megértését valamint hozzájárulhat a berendezésben lejátszódó folyamatok optimalizálásához és a megfelelő üzemeltetési paraméterek meghatározásához.

A hagyományos populációs mérlegegyenletek alkalmazásán kívül az áramló szemcsés rendszerek egy újszerű modellezését biztosítja a diszkrét elem módszer, amely a diszkrét részecskék mozgásának és kölcsönhatásainak leírásán alapul. A szemcsehalmozok áramlásának diszkrét elem szimulációjában a szilárd szemcsehalmoz minden szemcséjének az egyedi mozgása meghatározásra kerül. Az alkalmazott módszer figyelembe veszi a szemcsék egymás közötti ütközéseit továbbá a keverő berendezés belső falával és a keverőelemmel való ütközéseket is. A dolgozat célja a diszkrét elem módszer alapjainak bemutatása és egy gyakorlati problémán való alkalmazása. A dolgozatban bemutatásra kerülnek az elemi részecskék mozgását és kölcsönhatását (ütközések) leíró egyenletek. Az egyenletek implementációja egy számítógépes programon keresztül valósul meg.

Az elkészített számítógépes program felhasználásával végzett szimulációs vizsgálatok célja egy dobkeverő berendezésben a szilárd részecskék áramlásának és keveredésének vizsgálata különböző műveleti paraméterek mellett, továbbá az eredmények vizualizációja. A szimulációs vizsgálatok során a részecskék keveredési sebességét vizsgáltam a keverő fordulatszáma, a részecskék közötti súrlódási tényező, illetve a részecske-fal közötti súrlódási tényező függvényében.

2. Irodalmi áttekintés

2.1. Szilárd szemcsék fizikai tulajdonságai

A szemcsék fizikai tulajdonságai jelentősen befolyásolják a keverésük lehetőségét, nehézségét.

Legfontosabb fizikai jellemzők [1] :

1. *Szemcseméret eloszlás.* A szemcsék méretbeli eltérésének eloszlása.
2. *Sűrűség,* adott szemcsére, tömeg/térfogat.
3. *Szemcsealak.* Szinte bármilyen alakú szemcse előfordulhat.
4. *Felületi jellemzők.* Pl.: fajlagos felület, elektrosztatikus feltöltődési hajlam.
5. *Folyási jellemzők.* Az adott anyag, vízszintes felületre öntve az anyagi minőségétől függően folyik szét, mely során egy „lejtő” alakul ki. Ennek a vízszintessel bezárt szögét nevezik rézsűszögnek. A rézsűszög és a folyási képesség mérhető jellemzők. Minél nagyobb a folyási képesség, annál kisebb a kialakuló rézsűszög.
6. *Apríthatóság.* Nem jó, ha a keverés során az anyag kisebb részekre szétesik.
7. *Agglomerációs állapot, összetapadás.* Megmutatja hogy, a részecskék egymástól külön, vagy összetapadva vannak jelen.
8. *Hőmérsékleti korlátok.* Előfordulhat, hogy a művelet során hő keletkezik, ami hatással lehet a szemcse minőségére.

2.2. Szilárd anyagok keverése

A keverés egy alpművelet, amikor két vagy több (egymástól eltérő tulajdonságú) anyagot kényszerített áramlással egyesítünk azért, hogy az egyes alkotórészek eloszlása a meghatározott legkisebb térfogatelemekben kívánt keverési aránynak feleljen meg, valamint a halmaz állapotjelzői (pl.hőmérséklet) homogének legyenek. [2] Ezen kívül diszperz rendszerek létrehozására is alkalmazhatjuk, amikor is úgy akarunk elosztatni egy kisebb mennyiségű részecskehalmazt egy nagyobbban, hogy a kevertisége ne, vagy legalább is ne

jelentősen változzon meg. Hasznos a keverés, ha hőátvitel és/vagy anyagátvitel megvalósítása a cél. A keverést szinte minden technológiában alkalmazzák. Nem csak fluid fázisok, hanem szilárd anyagok keverése is gyakori művelet.

A keverés művelettani szempontból lehet szakaszos vagy folyamatos. A szakaszos keverő berendezéseket betöltik, a két komponenst teljes számában egyszerre, vagy készíthetnek úgynevezett előkeveréket is. A töltés után elkezdik a keverést, a kívánt homogenitás elérése után leállítják a keverőt, majd kiürítik azt. Ekkor a berendezés kihasználtsága nem maximális, hiszen a töltés és az ürítés is lefoglalja a műveleti egységet, a tartózkodási idő nagyobb a keverési időnél. Folyamatos technológia esetén a komponensek betöltése és a keverék elvétele állandó. Az átlagos tartózkodási idő megegyezik a keverési idővel, mire végig ér a berendezésen egy adott térfogatnyi szemcsehalmaz, eléri a kívánt kevertséget.

2.2.1. Szemcsés anyagok keverési tulajdonságai

Szilárd szemcsés anyagok keveredésében három fő mechanizmust különböztetünk meg: konvekció, diffúzió és nyírás.[3]

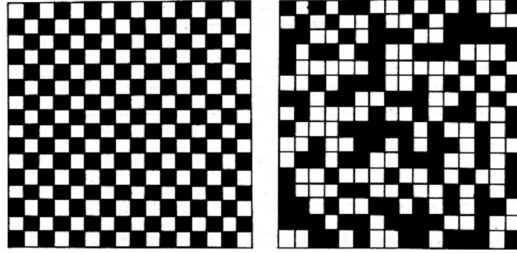
- I. *Konvektív keverés:* A részecskék mozgását a környezetével, a keverőedénnyel, a keverőtérben lévő mozgó vagy statikus keverő elemekkel való kölcsönhatás határozza meg. A makroszkópikus keveredést, a részecskék konvektív árama okozza.
- II. *Nyíró keverés:* A keverő falával, a mozgó és a statikus keverőelemekkel való ütközéskor eltérő sebességű részecskék és rétegek keletkezhetnek. Ezek között fellépő momentumátadásnak köszönhetően nyíró keverés alakul ki. A nyíró keverés hatása mikroszinten jelentős.
- III. *Diffúziós keverés:* A részecskék véletlenszerű mozgásakor jön létre a diffúziós keverés. Ez a keveredési sebesség jóval kisebb, mint a konvektív keverés esetén. Leginkább mikroszkópikus homogenizálásra alkalmas.

2.2.2. Keveredési állapot jellemzése

A keveredési állapot jellemzésére a matematikai statisztika módszereit alkalmazzuk. [4, 5] Megkülönböztetünk tökéletes és sztochasztikus keveréket. (1. ábra) Tökéletesen kevertnek akkor tekintjük a keveréket, ha egy adott komponens aránya a vizsgált térfogatelemben, megegyezik a teljes térfogatban

lévő arányával. Tökéletes keverék csak elméletben hozható létre.

A valóságban sztochasztikus keverékek valósíthatók meg. A keveréket akkor nevezhetjük sztochasztikusnak, ha bármely részecskéje azonos valószínűséggel foglalja el helyét a keverékben.



1. ábra. Tökéletes és sztochasztikus keverék

A keverék összetételének elemzésére két kifejezést használnak, a szórásnégyzetet és a szórást. A szórásnégyzet, amely a matematikai statisztikában is használatos, a keveréssel foglalkozó szakirodalom varianciának nevezi. Az elméleti varianciát σ^2 -tel, a gyakorlati szórásnégyzetet s^2 -tel jelölik.

A variancia meghatározására szolgáló egyenlet:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_c)^2}{N} \quad (1)$$

ahol:

- N a vizsgált térfogatrészek száma
- x_i a vizsgált komponens részaránya az i -edik térfogatrészben
- x_c a vizsgált komponens részaránya a teljes térfogatban

Szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \quad (2)$$

ahol $\bar{x}$ a vizsgált komponens arányának átlagos értéke az N darab térfogatrészben, amelyet a következőképp számítunk:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (3)$$

A másik használt kifejezés a szórás. Jelölése σ és s . A számításhoz használt összefüggések a (4),(5) egyenletek.

$$\sigma = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_c)^2}{N} \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$s = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \right]^{1/2} \quad (5)$$

A variancia és a szórás a minták nagyságától és számától függ. Több minta vizsgálatával jobban közelíthetjük a valós kevertség értékét. A vizsgálandó térfogategységek nagyságát a teljes részecskehalmaz nagysága adja meg.

A kiindulási állapotban, amikor az egyes térfogatrészekben csak az egyik komponens található meg, a szórás a (6) egyenlettel számítható. [15]

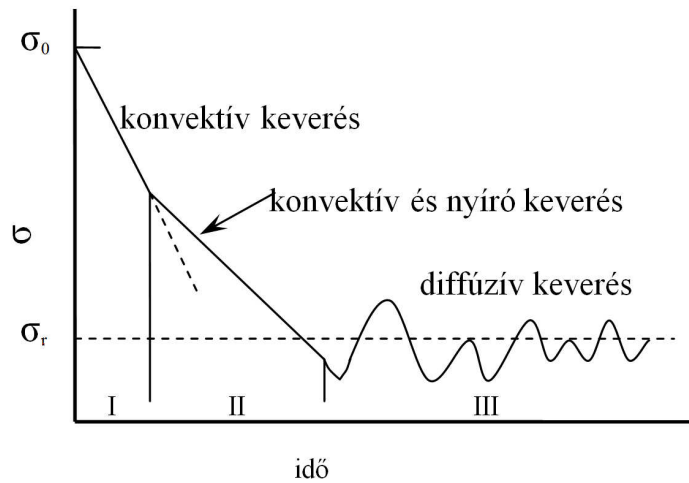
$$\sigma_0 = [\bar{x}_c(1 - \bar{x}_c)]^{1/2} \quad (6)$$

A keverés során kialakul egy végső, teljes kevertség, a (7) egyenlet szerint.

$$\sigma_r = \left[\frac{\bar{x}_c(1 - \bar{x}_c)}{n} \right]^{1/2} \quad (7)$$

ahol

n részecskék átlagos száma a térfogatrészekben
 $\bar{x}_c$ a színezett részecskék a teljes térfogatban



2. ábra. Keverés karakterisztikus görbéje

2.2.3. A keverési folyamat karakterisztikus görbéje

A keverési folyamatok során mind, a 2.2.1. fejezetben említett, három típusú keveredés fellép. [3] A keverési folyamatok jellemezhetők egy karakterisztikus görbével (2. ábra), ami a keveredés mértékét mutatja az idő függvényében. A karakterisztikus görbe a 2.2.2. fejezetben leírtak alapján készíthető el.

A görbék egyedi keverőkben egyedi alakokat vesznek fel, ezért jól használhatók a keveredési folyamatok vizsgálatára, értékelésére. A keveredési folyamat már említett három szakasza a karakterisztikus görbén jól megfigyelhető. Az első szakaszban a konvekció, a másodikban a konvekció és a nyíró, a harmadikban pedig a diffúz keverés a meghatározó. A diffúziós szakaszban elért keveredési fok már véglegesnek tekinthető, mégpedig a (7) egyenlet szerinti érték.

A keverési folyamat első szakaszában a szórás értéke egyenes arányosságban csökken az idő múlásával. A keverési folyamat sebessége ezen egyenes meredekségének abszolút értékével megadható. Definíciós egyenlete:

$$v_k = \left| \frac{\sigma/\sigma_0}{t} \right| \quad (8)$$

ahol

v_k a keveredés sebessége, 1/s

$\frac{\sigma}{\sigma_0}$ a keveredés mértéke
 t idő, s

2.2.4. Szilárd anyagokat keverő berendezések

Keverők csoportosítása működési elv szerint:

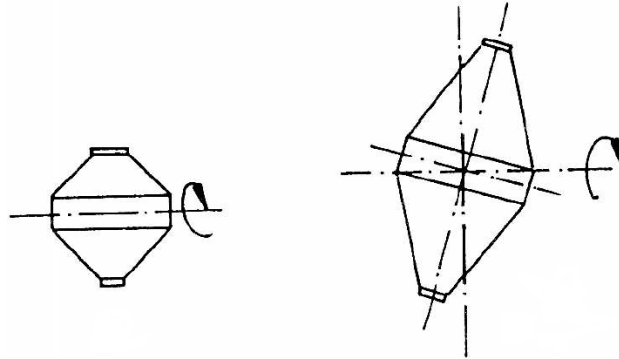
- *Diffúz keverők:* Az elmozduló rétegek a keverés során új rétegekkel találkoznak.
- *Diffúz keverők belső rétegcserével:* A rétegek mozgását a keverőtérben elhelyezett belső mechanikus elemek irányítják.
- *Gravitációs keverők:* Külső anyagmozgás a gravitációs erővel szemben.
- *Mechanikus úton létesített térfogatcserével működő keverők:* A keverőelemek által létrehozott térfogatcserének és rétegmozgásnak köszönhetően megy végbe a keveredés.
- *Pseudofluid ágyas keverők:* Intenzív részecskecsere mechanikus úton létrehozott örvénylő ágyban.
- *Fluidágyas keverők:* Fluidizált közegben részecskecsere mechanikus keverőelemekkel.

A keverőüzemekben legtöbbször használt keverő berendezések főképp mechanikus úton létrehozott belső rétegcserével, nyíró mechanizmussal keverik össze a szemcsés anyagokat.[2]

Szilárd anyagok homogenizálása általában "száraz" eljárás, egyes esetekben előfordul folyadékok hozzákeverése is. Ekkor jól használható a viszkózus folyadékok keverésénél is alkalmazott szalagos vagy csigás keverők.

A legegyszerűbb szerkezetűek a forgótartályos vagy dobkeverők. Ezek összetapadásra nem hajlamos, jól ömleszthető anyagok keverésére alkalmasak. A szemcserétegek a dobbal együtt mozognak, majd gravitációs hatásra leválnak a felületéről, lecsúsznak, legördülnek, eközben keverednek össze a rétegek. A dobkeverőket 40-65%-ig lehet megtölteni. Kis fordulatszámokon üzemelnek. A keverési időtartam változó, lehet perc, vagy óra nagyságrendű is.

Jól keverhető száraz anyagoknál a kettős kúpos keverőket alkalmazzák. Ezeknek több forgási tengelyük is lehet, akár egyidőben is. (3. ábra)



3. ábra. Kettős kúpos dobkeverő

2.3. Szemcsehalmozok áramlásának leírása

A szilárd szemcsés áramló rendszerek matematikai modellezésében két szemléletmód használatos. Az Euler-féle, illetve a Lagrange-féle megközelítés.

Az Euler-féle modellek a részecskéket tartalmazó szilárd- és gázfázist folytonosnak tekintik. [6] A fázisokra felírt mérlegegyenletek a térfogatátlagot változókon alapulnak. A módszer hátránya, hogy a modellek megoldásával a szilárd fázist alkotó szemcsék egyedi tulajdonságairól semmilyen információt nem ad.

Ezzel szemben a Lagrange-féle megközelítésben minden részecske pillanatnyi állapotát, mozgását ismerjük. [?] A szilárd részecskék mozgásának számítása a Newtoni mozgásegyenleteken és a részecskék közötti ütközéseket leíró modellen alapul. Az Euler-módszerrel szemben, ezek a modellek a szilárd részecsehalmoz mozgásának egy sokkal részletesebb leírását biztosítják. A hátránya, hogy nagy a számítási igénye, így a részecskeszám nagyfokú növelésével csökken az alkalmazhatósága.

3. Alkalmazott módszerek, modellek

3.1. Diszkrét elem módszer

A mérnöki gyakorlatban gyakran találkozunk olyan problémákkal, melyek során diszkrét felépítésű anyagok, anyag halmazok viselkedését kell előre jeleznünk. [7, 12] Ilyenek például a szemcsehalmazok viselkedése keverés során. Az ilyen problémák szimulációs vizsgálatára alakult ki, az 1970-es évek közepétől kezdve, a diszkrét elem módszer. A diszkrét elem módszer a Lagrange-féle megközelítést alkalmazza. A részecskéket külön elemenként kezeli és figyelembe veszi a köztük létrejövő kölcsönhatásokat. A számítógépek fejlődésének köszönhetően az 1990-es években váltak elterjedtté a mérnöki tudományok terén.

3.2. A mozgást leíró mechanikai egyenletek

A részecskék mozgását fel lehet bontani egyenes vonalú haladó és forgó mozgássá. Az egyenes vonalú haladó mozgást a gravitáció, valamint a részecskék között létrejövő kölcsönhatások befolyásolják, azaz az ütközések a részecskék között és a környezettel, jelen esetben a keverő berendezéssel. A forgó mozgást pedig csak az ütközések befolyásolják. A részecskék mozgását leíró Newtoni mozgástörvények:

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{j=q_i} (\mathbf{f}_{cn,ij} + \mathbf{f}_{ct,ij}) + m_i \mathbf{g} \quad (9)$$

$$I \dot{\omega}_i = \sum_{j=1}^{j=q_i} \mathbf{T}_{ij} = \sum_{j=1}^{j=q_i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ct,ij}) \quad (10)$$

ahol

m_i	az i részecske tömege
$\mathbf{a}_i$	az i részecske gyorsulása
$\mathbf{r}_i$	az ütközési pont és az i részecske középpontjának távolsága
q_i	az i részecskével ütköző részecske száma
$\mathbf{g}$	az i részecskére ható gravitációs gyorsulás
I	az i részecskére ható tehetetlenségi nyomaték
$\dot{\omega}_i$	az i részecske szöggyorsulása

- $\mathbf{f}_{cn,ij}$ az i és j részecske között létrejövő ütközési erő normál irányú komponense
 $\mathbf{f}_{ct,ij}$ az i és j részecske között létrejövő ütközési erő tangenciális irányú komponense
 $\mathbf{T}_{ij}$ az i és j részecske között az ütközési pontban fellépő forgatónyomaték

A részecske gyorsulása és szöggyorsulása után kiszámolhatjuk a szögsebességet (ω_i), sebességet ($\mathbf{v}_{p,i}$) és pozíciót ($\mathbf{p}_i$), az alábbi egyenletek numerikus megoldásával.

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \dot{\omega}_i \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{p,i}}{dt} = \mathbf{a}_i \quad (12)$$

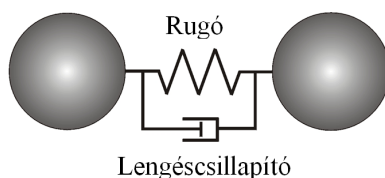
$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{v}_{p,i} \quad (13)$$

3.3. A részecskék ütközési modellje

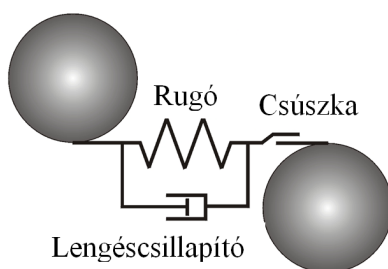
A részecske másik részecskével és fallal való ütközése, a részecske fizikai tulajdonságaitól függ pl. rugalmasság, felületi súrlódási tényező. [7, 12, 13] Az ütközés rugalmas vagy rugalmatlan. Esetünkben az ütközési modell rugalmas részecskéket feltételez.

A részecskék ütközésekor normális és tangenciális irányú erők keletkeznek, ezek hatnak a részecske mozgására. A modellben a két erő számítását külön végezzük. A normál irányú erők az egyenes vonalú mozgásra hatnak, a tangenciális irányú erők pedig a forgó mozgásra vannak hatással.

Az ütközési modellben az ütközés folyamatát párhuzamosan működő mechanikai elemekkel írjuk le, a részecskék között egy rugó, egy lengéscsillapító és egy csúszka elemet képzelünk el. A rugó elem modellezi a rugalmas ütközést, a lengéscsillapító biztosítja az ütközés folyamán fellépő deformációs energiaveszteségek figyelembevételét, míg a csúszka elem a részecskék közötti súrlódást írja le. A mechanikai elemek a jellemző paramétereiken keresztül befolyásolják az ütközési erőket, mint a rugó k rugóállandója, a lengéscsillapító η csillapítási tényezője és a csúszka μ súrlódási tényezője. A csúszka elemet csak tangenciális irányban (5. ábra), a rugót és lengéscsillapítót normális irányban is értelmezzük (4. ábra).



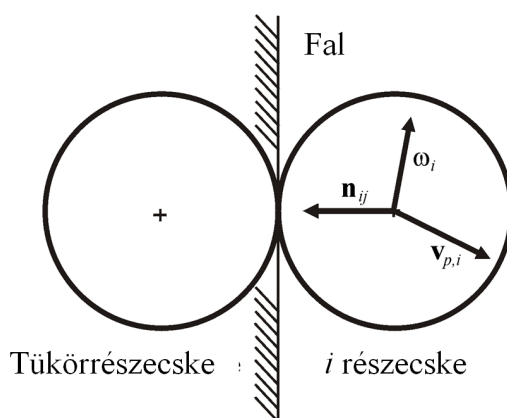
4. ábra. Normál irányú ütközés modell



5. ábra. Tangenciális irányú ütközés modell

A részecske-fal ütközéseket részecske-részecske ütközésre vezetjük vissza, mely a 6. ábrán látható.

A falon kívülre a részecskével szemben egy tükörrészecskét helyezünk el, úgy hogy a középpontjának távolsága a faltól éppen a sugara legyen. A két részecskét összekötő $\mathbf{n}_{ij}$ normálvektor a felület normáljával párhuzamos. A tükörrészecske sebessége és szögsebessége egyaránt zérus, kivétel ha a fal mozgást végez, ekkor a részecske-fal ütközés teljesen analóg a részecske-részecske ütközéssel.



6. ábra. Részecske-fal ütközés

3.3.1. Normál irányú erők számítása

Rugalmas ütközést feltételezve a két részecske ütközésekor összenyomódik, deformálódik, majd visszanyeri eredeti alakját és ellentétes irányba kezdenek el mozogni. A modell a részecskék alakját állandónak tekinti, így az ütközési pontban egy átfedés alakul ki (7.(a) ábra), a középpontok közti távolság kisebb lesz mint a sugaraik összege.

$$\mathbf{r}_i = \frac{R_i}{R_i + R_j} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \quad (14)$$

ahol:

R_i és R_j az i és j részecske sugara
 $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ az i és j részecske pozíciója

Az ütközési pontban definiálható egy $\delta_{n,ij}$ átfedés, a következőképpen:

$$\delta_{n,ij} = \frac{d_i + d_j}{2} - |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j| \quad (15)$$

ahol:

d_i és d_j az i és j részecske átmérője
 $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ az i és j részecske pozíciója

Az i részecskére ható rugóerő:

$$\mathbf{f}_{cn,r,ij} = -k_n \delta_{n,ij} \mathbf{n}_{ij} \quad (16)$$

ahol:

k_n rugóállandó
 $\delta_{n,ij}$ normál irányú átfedés i és j részecske között
 $\mathbf{n}_{ij}$ i és j részecske középpontjai közötti normálvektor, i -ből j -be mutat

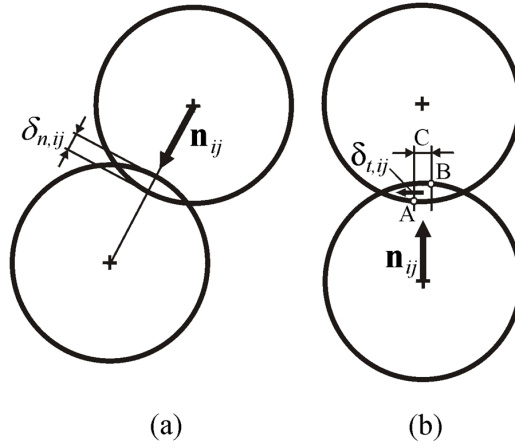
Az ütközés során kinetikus energia veszteség lép fel. A veszteség nagysága a restitúciós tényezővel (e) jellemezhető. Értéke 0 és 1 közötti szám, 1 akkor

ha nincs veszteség. A restitúciós tényezőt felhasználva meghatározhatjuk az ütközéskor fellépő csillapítási tényezőt.

$$\eta = -2\sqrt{mk} \frac{\ln e}{\sqrt{\pi + (\ln e)^2}} \quad (17)$$

ahol:

m a részecske tömege
 k rugóállandó
 e restitúciós tényező



7. ábra. Normál irányú átfedés (a), tangenciális irányú átfedés (b)

Az ütközéskor fellépő csillapítás az anyagi minőségen, a restitúciós tényezőn kívül a részecskék sebességétől is függ. A csillapítási erőt meghatározhatjuk ha ismerjük részecskék relatív sebességét (18) és a csillapítási tényezőt. (17)

$$\mathbf{v}_{r,ij} = \mathbf{v}_{p,i} - \mathbf{v}_{p,j} \quad (18)$$

ahol:

$\mathbf{v}_{r,ij}$ i és j részecske relatív sebessége
 $\mathbf{v}_{p,i}$ és $\mathbf{v}_{p,j}$ i és j részecske sebessége

A csillapítási erő:

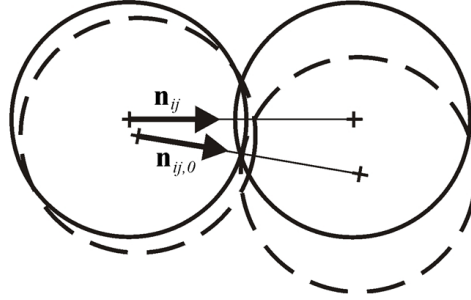
$$\mathbf{f}_{cn,cs,ij} = -\eta_n (\mathbf{v}_{r,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \quad (19)$$

Ezek után könnyen számolható az ütközés által kifejtett normál irányú erőhatás, ami a csillapítási és a rugóerő összege.

$$\mathbf{f}_{cn,ij} = (-k_n \delta_{n,ij} - \eta_n \mathbf{v}_{r,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \quad (20)$$

3.3.2. Tangenciális erők számítása

A tangenciális erő számításakor is átfedéssel számolunk, de itt az átfedést már egy vektorral adjuk meg $\delta_{t,ij}$. A 7.(b) ábrán látható módon az ütközés első pillanatában A és B pont a tér egyazon pontja, de a mozgás során ez megváltozik. A kezdeti két pont C távolságra kerül egymástól. C a tangenciális vektor hosszával egyenlő. Az átfedés vektor nagysága és iránya is folyamatosan változik, az ütközési pontok relatív sebességkülönbsége, azaz a csúszási sebesség hatására. Hasonlóképpen változik $\mathbf{n}_{ij}$ normálvektor is, hiszen a forgó ütközéskor fellépő erő nemcsak elforgatja A és B pontot, hanem a normál irányú komponense, kis mértékben, de létrehoz normál irányú haladó mozgást is. A 8. ábrán látható az $\mathbf{n}_{ij}$ megváltozása.



8. ábra. Részecskék normál irányú elmozdulása tangenciális ütközésnél

Az átfedés vektort minden számítási lépésben újra kell számolni. Először az átfedés vektort átszámoljuk az $\mathbf{n}_{ij}$ normálvektor új értékének megfelelően, majd ezt korrigáljuk a pillanatnyi relatív csúszási sebességgel. Ez alapján az átfedés vektor számítása:

$$\delta_{t,ij}(t + \Delta t) = E(\mathbf{h}, \phi) \delta_{t,ij,0}(t) + \mathbf{v}_{rs,ij} \Delta t \quad (21)$$

ahol:

Δt időléptetés

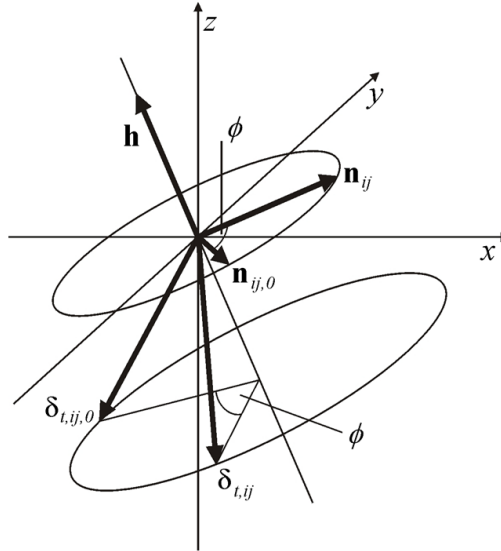
$\delta_{t,ij,0}(t)$ átfedés vektor értéke t időpillanatban

$\mathbf{v}_{rs,ij}$ részecskék közötti relatív csúszási sebesség
 $E(\mathbf{h}, \phi)$ transzformációs mátrix

Az $E(\mathbf{h}, \phi)$ transzformációs mátrix számításához először meg kell határozni a $\mathbf{h}$ vektor és ϕ szög értékét. Ezeket a $\mathbf{n}_{ij}$ normálvektor t és $t + \Delta t$ időben felvett értékeiből számolhatjuk. (22) egyenlettel $\mathbf{h}$ -t, (23) egyenlettel ϕ -t adhatjuk meg.

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{n}_{ij,0}}{|\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{n}_{ij,0}|} \quad (22)$$

$$\phi = \arcsin |\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{n}_{ij,0}| \quad (23)$$



9. ábra. Tangenciális átfedés vektor térbeli transzformációja

Ezek után a 9. ábrán látható vektortranszformáció mátrixa megadható:

$$E(\mathbf{h}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi + h_x^2(1 - \cos \phi) & h_x h_y(1 - \cos \phi) - h_z \sin \phi & h_z h_x(1 - \cos \phi) + h_y \sin \phi \\ h_x h_y(1 - \cos \phi) - h_z \sin \phi & \cos \phi + h_y^2(1 - \cos \phi) & h_y h_z(1 - \cos \phi) - h_x \sin \phi \\ h_z h_x(1 - \cos \phi) - h_y \sin \phi & h_y h_z(1 - \cos \phi) + h_x \sin \phi & \cos \phi + h_z^2(1 - \cos \phi) \end{bmatrix}$$

A csúszási sebesség az ütközési pontok relatív kerületi sebességétől és a részecskék relatív sebességének tangenciális komponensétől függ.

A részecskék relatív sebessége, normál irányú ütközéshez hasonlóan (18):

$$\mathbf{v}_{r,ij} = \mathbf{v}_{p,i} - \mathbf{v}_{p,j} \quad (24)$$

Tangenciális komponense:

$$\mathbf{v}_{rt,ij} = \mathbf{v}_{r,ij} - (\mathbf{v}_{r,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \quad (25)$$

Az ütközési pillanatában létrejövő kerületi sebesség:

$$\mathbf{v}_{c,i} = (|\mathbf{r}_i| \omega_i) \times \mathbf{n}_{ij} \quad (26)$$

ahol:

$\mathbf{v}_{c,i}$ i részecske kerületi sebessége
 ω_i i részecske szögsebessége

Ezután megadható a relatív csúszási sebesség ($\mathbf{v}_{rs,ij}$):

$$\mathbf{v}_{rs,ij} = (\mathbf{v}_{c,i} + \mathbf{v}_{c,j}) + \mathbf{v}_{rt,ij} \quad (27)$$

Ezek után a (21) egyenlet szerint, már számolható a tangenciális átfedés vektor.

A tangenciális rugóerőt az átfedés vektorból számolhatjuk ki.

$$\mathbf{f}_{ct,r,ij} = -k_t \delta_{t,ij} \quad (28)$$

ahol:

k_t a rugóállandó tangenciális irányban

A normál irányú ütközéshez hasonlóan a csillapítási erőt is ki kell számítani, ebben az esetben a relatív csúszási sebesség alkalmazásával:

$$\mathbf{f}_{ct,cs,ij} = -\eta_t \mathbf{v}_{rs,ij} \quad (29)$$

η_t a csillapítási tényező tangenciális ütközéskor

A csillapítási és a rugóerő összege a teljes tangenciális irányban ható erő:

$$\mathbf{f}_{ct,ij} = -k_t \delta_{t,ij} - \eta_t \mathbf{v}_{rs,ij} \quad (30)$$

3.3.3. Súrlódási erő számítása

Két részecske ütközésekor a felületek mozgása tangenciális irányú súrlódási erőt hoz létre, mely a mozgás irányával ellentétes irányú. A súrlódás nagyságának alakulását az ütközés során a Coulomb súrlódási törvénnyel írjuk le. Minden számítási ciklusban összehasonlítjuk a tangenciális erő nagyságát a $\mu|\mathbf{f}_{cn,ij}|$ értékével, ha a tangenciális erő nagyobb, a két felület között súrlódás lép fel. A tangenciális erőt korrigáljuk:

$$\mathbf{f}_{ct,ij} = \mu|\mathbf{f}_{cn,ij}|\mathbf{t}_{ij} \quad (31)$$

ahol:

μ i és j részecske közötti súrlódási tényező
 $\mathbf{t}_{ij}$ normálvektor, az átfedésből számolva:

$$\mathbf{t}_{ij} = \frac{\delta_{t,ij}}{|\delta_{t,ij}|} \quad (32)$$

A $\delta'_{t,ij}$ átfedés vektort is újra kell számolni:

$$\delta'_{t,ij} = \frac{\mu|\mathbf{f}_{cn,ij}|\mathbf{t}_{ij}}{k_t} \quad (33)$$

3.4. A szimulált dobkeverő paraméterei

A dolgozat célja egy szimulációs tanulmány elkészítése, a fentebb leírt diszkrét elem módszert használok egy dobkeverőben lezajló keverési folyamat vizsgálatára.

A szimulációban vizsgált dobkeverő berendezés egy, a 2.2 fejezet 3. ábrán látható kettős kúpos dobkeverőhöz hasonló berendezés. A keverő berendezés szakaszos üzemű keverést végez. A palást átmérőjére merőleges forgási tengely körül, ami a készülék közepén halad át. A keverés előtt a keverendő anyagok a keverőtérbe kerülnek és csak a művelet végeztével kerülnek ki onnan, közben a berendezésben anyag ki- és beáramlás nincs.

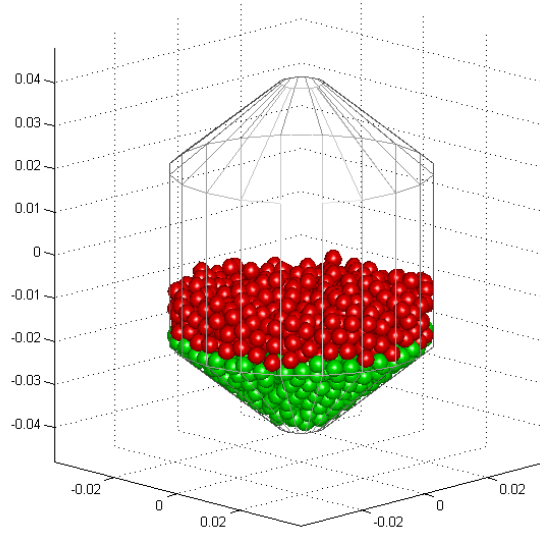
A szimulációhoz szükséges, a modellekben felhasznált paraméterek az 1. táblázatban láthatók. Lehetőség van a részecskék közötti és a részecske-fal közötti ütközéskor, ezen paramétereknek eltérő értéket adni. A paramétereket

külön értelmezzük normál és tangenciális irányban is, ami szintén eltérő lehet.

A 10. ábrán látható a vizsgált keverő sémája, méretekkel, valamint a betöltött részecskehalmoz. A dobkeverő szimulációjának első lépésében a kezdeti részecske pozíciók megadása szükséges. Ezeknek a kezdeti értékeknek a megadásához is egy szimuláció szükséges, melyben ugyanolyan keverőben, de az egyik kúpos részt eltávolítva, egy előre definiált térbeli pozícióból, csupán a gravitációs erő segítségével, "beejtjük" a részecskéket, amelyek leülepednek és megadják a kezdeti pozíciókat. A részecskéket a kialakult pozíciójuk szerint, 50-50 % arányban eltérő színűre színeztem, ez alapján lehet majd a szemcsék eloszlásának homogenitását, a keveredést meghatározni.

Készülék:		
Palást átmérő		0.06 <i>m</i>
Kúp fedlap átmérő		0.01 <i>m</i>
Készülék magassága		0.08 <i>m</i>
Palást magassága		0.04 <i>m</i>
Súrlódási tényező	(μ_w)	0.3
Rugóállandó normál irányban	(k_w)	800 <i>N/m</i> ²
Rugóállandó tangenciális irányban	($k_{t,w}$)	200 <i>N/m</i> ²
Részecskék:		
Átmérő	(<i>d</i>)	0.002 <i>m</i>
Sűrűség	(ρ)	1190 <i>kg/m</i> ³
Restitúciós koeficiens	(<i>e</i>)	0.6
Súrlódási tényező	(μ)	0.3
Rugóállandó normál irányban	(<i>k</i>)	800 <i>N/m</i> ²
Rugóállandó tangenciális irányban	(k_t)	200 <i>N/m</i> ²

1. táblázat. A szimulációhoz szükséges paraméterek



10. ábra. A szimulációban vizsgált keverőberendezés a kezdeti részecske pozíciókkal

3.5. Szemcsehalmaz homogenitásának vizsgálata

A szemcsehalmaz homogenitásának vizsgálatához a keverőberendezés különböző pontjain kell megvizsgálni a színezett szemcsék arányát. Ehhez a keverő berendezést, jó közelítéssel, azonos méretű térfogatrészekre kell felbontani. Jelen esetben úgy vizsgáltam a kevertséget, hogy a berendezést csak a magassága feléig osztottam fel, 8 db vízszintes rétegre. Az alsó kúpos részt 4 vízszintes rétegre osztottam fel. A legalsó legkeskenyebb részben 1 db térfogatrészt, a következő rétegekben pedig 3, 6 és 10 db közel egyenlő térfogatrészt definiáltam. A palást rész rétegeiben 13 térfogatrészt jelöltem ki, így a definiált térfogatrészek összes száma 72. A szimuláció során a kevertség vizsgálata nem minden időlépésnél, hanem csak a keverő minden félfordulatánál, a keverő függőleges állapotában történik. Ekkor a részecskék többsége ebben a térfogatrészben tartózkodik. A hiba amit az okozhat, hogy néhány részecske ezen kívül helyezkedik el, elhanyagolható. A kevertség mértéke a térfogatrészekben kialakuló zöldre színezett részecskék arányától függ.

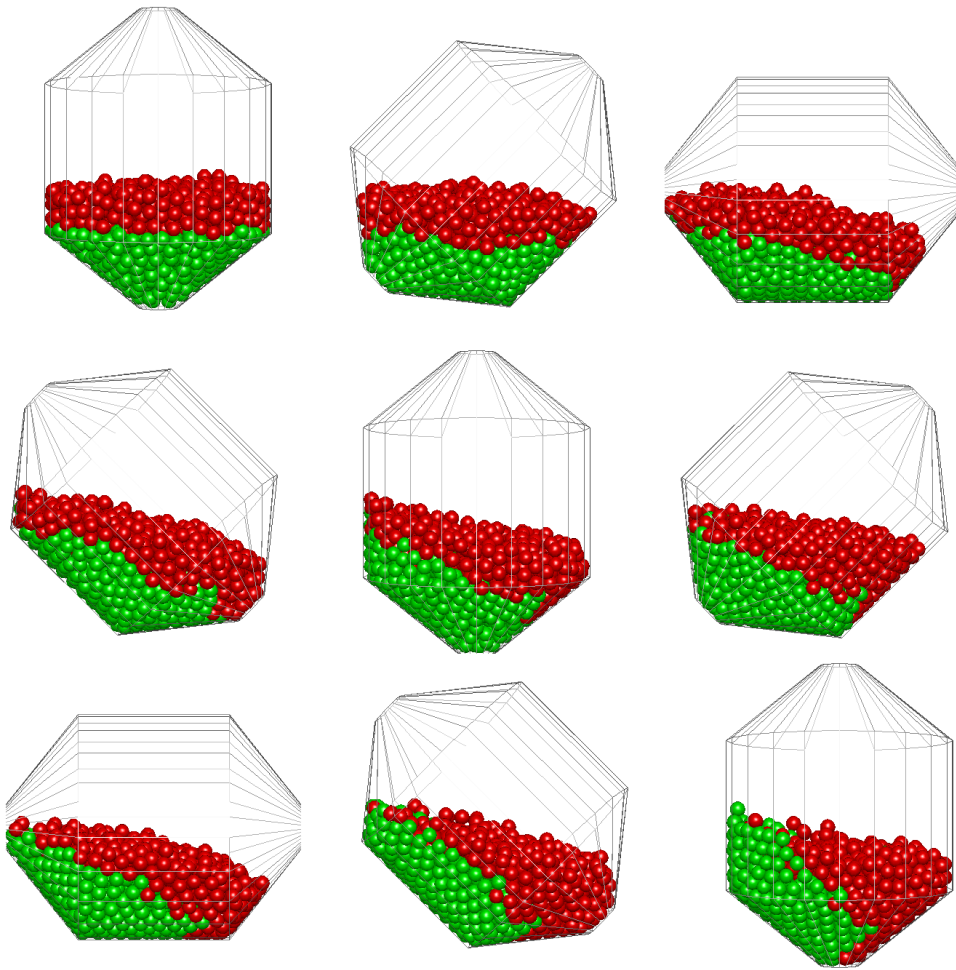
A 2.2.2. részben már ismertetett (4) egyenletet használtam a színezett részecske arányok szórásának kiszámításához, (6) egyenlettel megadható a kezdeti szórás értéke, a (7) egyenlettel pedig a végső kevertség. Esetünkben $n = 13$ és $x_c = 0.505$, így $\sigma_0 = 0.5$ és $\sigma_r = 0.27$. A σ_0 értéke számolás nélkül is ismerhető, hiszen a vizsgálat elején a két keverendő komponens részecske számát egyenlőnek adtam meg.

A kapott szórás értékeket leosztottam a szórás $t=0$ időpontbeli értékével, σ_0 -al. Ezen értékek az idő függvényében a keverési folyamat karakterisztikus görbét adják meg. A keverési görbe első szakaszának meredekségének abszolút értékével jellemezhető a keveredés sebessége.

A meredekség megállapítására a lineáris regressziót használtam, amely során a görbe kijelölt pontjaira egyenest illesztettem. Elsőként az első három pont figyelembevételével alkalmaztam lineáris regressziót, majd másodszor az első négy pont figyelembevételével és így tovább. A legjobb korrelációs tényezővel rendelkező egyenesből számoltam a keveredési sebességet. A lineáris regressziót a MATLAB környezetben írt program segítségével oldottam meg.

4. Szimulációs vizsgálatok, eredmények és értékelésük

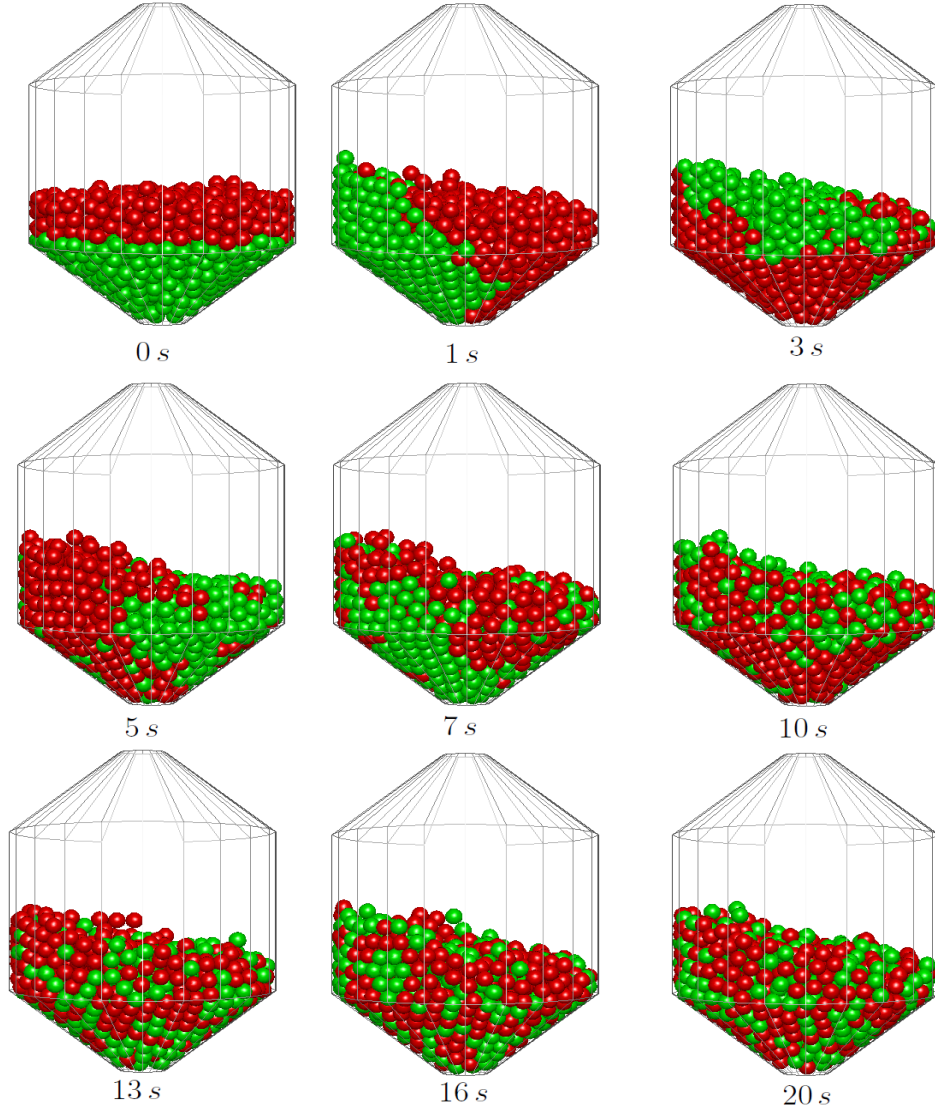
A részecskék mozgását meghatározó programot C programozási nyelven készítettem, az eredmények vizualizációjához a MATLAB környezetét használtam. A szimulációk során a keveredési sebességet vizsgáltam a fordulatszám, a részecske-részecske ütközés súrlódási tényezője, valamint a részecske-fal ütközés súrlódási tényezője függvényében.



11. ábra. A keverőberendezés egy teljes körbefordulása, $f = 1\frac{1}{8}$ fordulatszámnál

A 11. ábrán a keverés egy teljes fordulata látható 1/8-ad fordulatonként,

$f = 1\frac{1}{s}$ -os fordulatszám mellett. A bal felső kép a kiindulási pozíció.

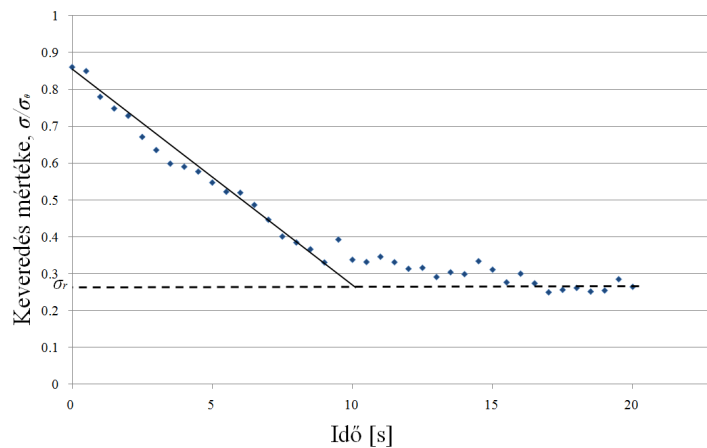


12. ábra. Keveredés alakulása az időben $f = 1\frac{1}{s}$ fordulatszám mellett

A 12. ábrán a keveredés mértéke látható $f = 1\frac{1}{s}$ -os fordulatszám mellett a szimuláció különböző időpontjaiban. A keverési művelet első szakaszában a keveredettség szemmel is jól látható különbségeket mutat. A továbbiakban a keveredés lelassul, majd egy adott kevertségi szint körül állandósul. Ez, a már 3.5. részben említett kevertségi határértéknek megfelelő kevertségi szint. Az utolsó három ábrán szemmel már nem látható jelentős változás, ez a keveredési folyamat befejeződését jelzi.

Az $f = 1\frac{1}{s}$ fordulatszám mellett lefutott szimulációs adatokból elkészítettem a keverési folyamat karakterisztikus görbáját. A félfordulatonként számított szórás értékeket, a 3.5. fejezetben említettek szerint, elosztottam a nulladik időpillanatban számolt szórás értékkel és ezt ábrázoltam az idő függvényében.

A 13. ábrán látható keverési görbén két szakasz figyelhető meg. Az egyik egy csökkenő, meredek szakasz, melynek meredekségével jellemezhető a keveredési sebesség. Ez jelzi azt, hogy javul a keverék homogenitása. Ezután egy adott érték körül áll meg, itt már nem történik változás a keverék minőségében. A töréspont az optimális keverési időhöz tartozó pont. Ezt átlépve hiába keverjük tovább a rendszert, számottevő javulást nem tudunk elérni. Ezen optimális pont ismeretében jelentős energiát és pénzt takaríthatunk meg a valós keverési alkalmazásoknál.

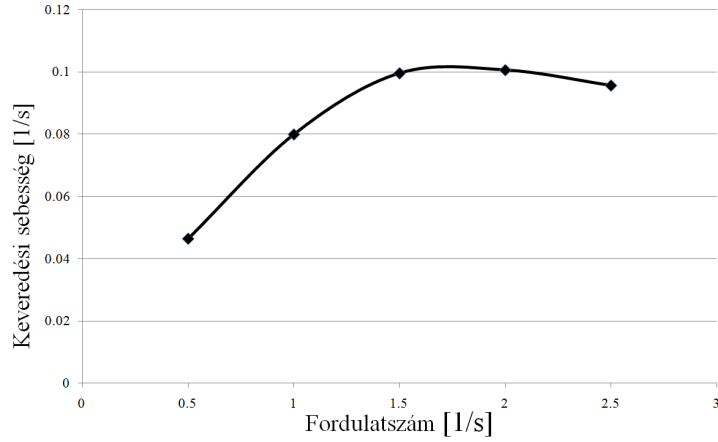


13. ábra. Keverési görbe

4.1. Keveredés vizsgálata a fordulatszám függvényében

Ebben a részben a keveredési sebességet vizsgáltam a keverő fordulatszámának függvényében. Ahhoz hogy a keveredést a fordulatszám függvényében tudjuk vizsgálni szükséges tudnunk, hogy mi az a kritikus fordulatszám ami felett a keverőben lévő részecskék a falhoz tapadnak és a keverési folyamat nem hatékony.

Ehhez a keverőberendezésünk átmérőjére van szükségünk, még hozzá a forgásirányra merőleges metszet szerinti átmérőre. Mivel a berendezés nem kör



14. ábra. Keveredési sebesség a fordulatszám függvényében

alakú, ezt egy átlagos átmérővel közelítettem $\bar{D} = 0.07m$. A (34) egyenlettel megadható a kritikus fordulatszám. [2]

$$f_{kr} \cong \frac{42.3}{\sqrt{\bar{D}}} = 2.66 \frac{1}{s} \quad (34)$$

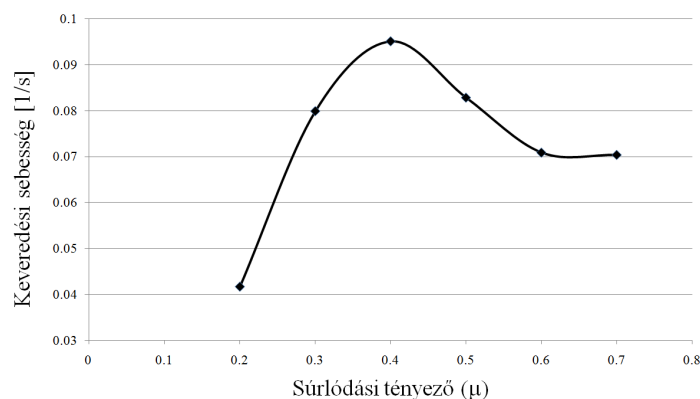
Ezért a keveredés fordulatszám függését $0.5 - 2.5 \frac{1}{s}$ fordulatszám tartományban vizsgáltam.

A 14. ábrán jól látszik, hogy a $f = 1.5 \frac{1}{s}$ fordulatszám körüli értékig, gyakorlatilag egyenes arányosságban nő a keveredési sebesség, a fordulatszámmal. Ez a tendencia azonban nem folytatódik a további fordulatszám növeléssel. A görbe egy maximumot, majd újra csökkenő tendenciát mutat. Ennek az az oka, hogy a centrifugális erő hatására, a szemcsék a berendezés falára tapadnak és nem valósul meg az intenzív rétegcseré. A kezdeti kis keveredés pedig azzal magyarázható, hogy a részecskék a berendezés forgásakor legurolnak a keverő falán, így az egész szemcsehalmaz gyakorlatilag egy tömbben elmozdul. A rétegcseré ekkor sem valósul meg.

4.2. Keveredés vizsgálata a részecskék közötti súrlódási tényező függvényében

Fontos paraméter a részecske-részecske ütközéskor a részecskék között fellépő súrlódási tényező. Ebben a részben ennek a keveredési sebességre kifejtett

hatását vizsgáltam (15. ábra). A vizsgálatához a fordulatszám és a részecske-fal közötti súrlódási együtthatót konstans értéken tartottam. Esetemben $f = 1 \frac{1}{s}$, $\mu_w = 0.3$ volt.



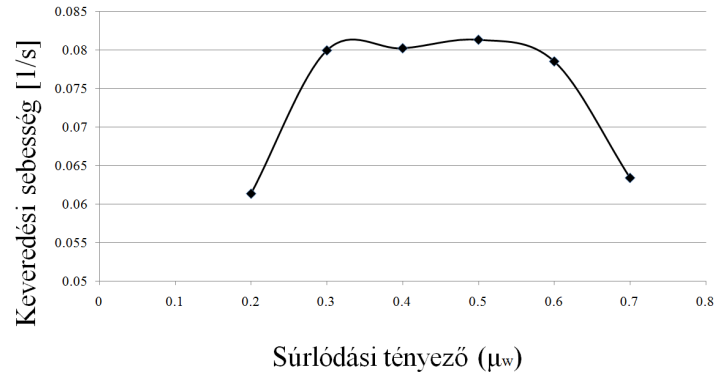
15. ábra. Keveredési sebesség a részecskék közötti súrlódási tényező függvényében

Kis súrlódási tényező esetében nagyon kicsi a keveredési sebesség. A részecskék nem fejtenek ki jelentős hatást egymásra, elcsúsznak, elgördülnek egymáson, nem keverednek. Nagy súrlódási tényező alkalmazásakor azonban az látszik, hogy a szemcsék túlságosan nagy kölcsönhatást fejtenek ki egymásra, tapadnak egymáshoz, ezért lassú a keveredés. A görbe alapján egyértelműen elmondható, hogy a berendezés a görbe maximumához, vagy a köré tartozó súrlódási együtthatójú részecskék keverésére alkalmas a leginkább. A kidolgozott modell alkalmas lehet megfelelő dobok tervezésére, a halmaz tulajdonságainak ismeretében.

4.3. Keveredés vizsgálata a részecské és a fal közötti súrlódási tényező függvényében

Nemcsak a részecskék közötti, hanem a részecske és a fal közötti súrlódási együttható is hatással van a keverési folyamatokra. Bár a modellben tükör-részecskével való ütközésként van megoldva a fallal való ütközés, de ebben az esetben más súrlódási együttható vesszünk figyelembe, mint a részecske-részecske ütközések esetében. Ez megfelel annak, hogy a valóságban is eltérő felszínnel rendelkeznek a részecskék és a berendezések falai. A részecske-fal súrlódási tényező vizsgálatához a fordulatszámot és a részecskék közötti

súrlódási tényezőt állandó értéken tartottam. Esetemben $f = 1\frac{1}{s}$, $\mu = 0.3$ volt.



16. ábra. Keveredési sebesség a részecske-fal közötti súrlódási tényező függvényében

A 16. ábrán látható eredmények hasonlóképpen magyarázhatóak, mint a részecskék közötti együttható vizsgálata esetén. Kis súrlódási tényező esetén nem tapadnak a részecskék a falhoz. Hiába mozdul a fal, nem képes a gravitációval ellentétesen, nagymértékben elmozdítani a részecskéket. A részecskék elgördülnek a falon.

A görbén egy konstans közeli érték alakul ki. Ebben a tartományban elég nagy a súrlódási együttható ahhoz, hogy rétegcseré, keveredés történjen, ekkor már eléggé tapadnak a részecskék a falhoz. Ha még nagyobb a súrlódási együttható, ismét csökken a keveredés sebessége, mert ekkor már túlságosan tapadnak a részecskék a berendezés falához. A kialakuló lapos rész, ún. "plató", a keverőben alkalmazható részecske-fal súrlódási együttható tartománya.

5. Összefoglalás

A jelen dolgozatban szereplő szimulációs tanulmány célja a diszkrét elem módszer megismerésén túl annak alkalmazása volt egy egyszerű dobkeverő berendezésben lezajló keveredési folyamat leírására. Ehhez egy szimulációs programot készítettem, amely a bemutatott modell egyenletei alapján számolja a vizsgált berendezésben lévő részecskék mozgását. A szimulációs eredmények vizualizálásához a MATLAB környezetet használtam.

A felvázolt feladat nem egy ipari méretű probléma megoldása. A jövőbeli cél a szimuláció méreteinek, mindenek előtt a részecske szám és a keverő berendezés méretének növelése. További célként a berendezés geometriájának vizsgálatát és a berendezésbe épített statikus keverőelemek alkalmazását tűztem ki.

Egy bizonyos részecskeszám felett a diszkrét elem szimulációnak komoly számítási igénye van. A modell és a módszer fejlesztésének egyik lehetősége, hogy párhuzamos programozással, több magos processzorok alkalmazásával a számítási sebesség csökkenthető és párhuzamosan a részecske számot növelni lehet. Párhuzamos programozás során a sok részecske szám miatt szükséges ciklusok, illetve vektor műveletek számítási lépéseit szét lehet osztani több processzor között. Így időben jóval gyorsabb a szimuláció. Erre lehetőséget ad a Folyamatmérnöki Intézeti Tanszéken rendelkezésre álló NVIDIA TESLA 446 magos GPU kártya. A fentiekén kívül a modell validálása is a megoldandó feladatok közé tartozik.

A keveredés minőségének vizsgálata során három fő paraméter hatását vizsgáltam: a keverő fordulatszáma, a fal és részecske közötti súrlódási tényező és a részecskék közötti súrlódás tényező. A kevertség minősítésére vagy jellemzésére a részecskék pozíciója által megadott gyakorlati szórást használtam.

A fordulatszám hatásának vizsgálatával megállapítottam, hogy a keverő fordulatszámának függvényében a kevertség egy maximumot mutat. A részecskék közötti súrlódás együttható egy keskenyebb, míg a fal és részecskék közötti súrlódási tényező egy szélesebb intervallumú alkalmazhatóságot mutat. A kapott eredmények megegyeznek a keverési folyamat elméleti ismereteivel. Elmondható, hogy a diszkrét elem módszer jól alkalmazható szilárd szemcsés anyagok keverésének leírására.

6. Jelölésjegyzék

a	részecske gyorsulás, m/s^2
d	részecske átmérő m
f	erő, N
g	gravitációs gyorsulás, m/s^2
h,n,t	egységvektorok
p	részecske pozíció, m
v_p	részecske sebessége, m/s
$\bar{v}_p$	átlagos részecske sebesség, m/s
v_k	keveredés sebessége, $1/s$
I	tehetetlenségi nyomaték, $kg\ m^2$
V	térfogat, m^3
ΔV	térfogatrész, m^3
m	részecske tömege, kg
t	idő, s
Δt	időlépték, s
R	részecske sugár, m
k	rugó állandó, N/m
e	restitúciós koeficiens
f	fordulatszám, $\frac{1}{s}$

Görög betűk

μ	súrlódási együttható
ϕ	vektor térbeli transzformáció szöge
δ	átfedés két ütköző részecske között, m
η	csillapítási tényező, kg/s
σ	szórás
ρ	sűrűség, kg/m^3
ω	szögsebesség, rad/s
$\dot{\omega}$	szöggyorsulás, rad/s^2

Indexek

0	súrlódási együttható
x, y, z	geometriai tér koordinátái
cn	normál irányú ütközés
ct	tangenciális irányú ütközés
n	normál irányú komponens

t	tangenciális irányú komponens
p	részecske
r	relatív
rt	relatív tangenciális
rs	relatív csúszási
w	készülék falára vonatkoztatott
k	keveredés

7. Irodalomjegyzék

- [1] John H. Perry (1969). Vegyészmérnökök kézikönyve (II. kötet), Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1859-1873.
- [2] Fonyó Zsolt, Fábry György (2004). Vegyipari művelettani alapismeretek, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 213-297
- [3] K. Gotoh, H. Masuda, K. Higashitani (1997). Powder Technology Handbook, Marcel Dekker Inc., New York, 616-618
- [4] Fejes Gábor (1970). Ipari Keverőberendezések, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 152-158.
- [5] Tarján Iván (2003). Keverés, Miskolci Egyetemi Kiadó, 285-290
- [6] Gidaspow, D. (1994). Multiphase flow and fluidization, New York: Academic Press
- [7] Cundall, P. A. , Strack, O. D. L. (1979). *Géotechnique* 29, NO. 1, 47-65
- [8] Y. Mugurama, T. Tanaka, S. Kawatake, Y. Tsuji (1997). Discrete particle simulation of a rotary vessel mixer with baffles, Powder Technology, 261-266
- [9] K. Yamane, T. Sato, T. Tanaka, Y. Tsuji , (1995). Computer simulation of tablet motion in coating drum, *Pharmaceutical Research*, Vol. 12, No. 9, 1264-1286.
- [10] Hoomans, B.P.B., Kuipers, J.A.M., Briels, W.J., van Swaaij, W.P.M. (1996). Discrete particle simulation of bubble and slug formation in a two-dimensional gas-fluidized bed: A hard sphere approach. *Chem. Eng. Sci.*, 51(1), 99-118
- [11] Kaneko, Y., Shiojima, T., Horio, M. (1999). DEM simulation of fluidized beds for gas-phase olefin polymerization. *Chem. Eng. Sci.*, 54, 5809-5821
- [12] Tsuji, Y., Kawaguchi, T., Tanaka, T. (1993). Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed. Powder Technology, 77, 79-87

- [13] Kawaguchi, T., Tanaka, T., Tsuji, Y. (1998). Numerical simulation of two-dimensional fluidized beds using the discrete element method (comparison between the two- and three-dimensional models). *Powder Technology*, 96, 129-138
- [14] Kawaguchi, T., Sakamoto, M., Tanaka, T., Tsuji Y. (2000). Quasi three-dimensional numerical simulation of spouted beds in cylinder. *Powder Technology*, 109, 3-12
- [15] P.M.C. Lacey (1954). *J. Appl. Chem.*, 4, p. 257

8. Köszönetnyilvánítás

Jelen publikáció a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0025 azonosítójú projekt támogatásával valósult meg.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Ulbert Zsoltnak a rengeteg segítségéért és sok hasznos tanácsáért.