

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET
SZTOCHASZTIKA TANSZÉK

Szekvenciális változásészlelés INAR(p) modellekben általános
utódeloszlás esetén

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Írta: Nedényi Fanni
Alkalmazott matematikus MSc hallgató

Témavezető: Dr. Szűcs Gábor
Egyetemi adjunktus
Sztochasztika Tanszék

SZEGED, 2012

1. Bevezetés

Legyen p pozitív egész paraméter, valamint legyenek $X_{-p+1}, \dots, X_0$ determinisztikus nemnegatív egész értékű kezdeti értékek. Defináljuk az $\{X_k, k \geq 1\}$ folyamatot, legyen

$$X_k = \sum_{i=1}^{X_{k-1}} \xi_1(k, i) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} \xi_p(k, i) + \varepsilon(k), \quad (1)$$

ahol minden $n \in \mathbb{N}$ és $1 \leq \ell \leq p$ esetén $\xi_\ell(k, 1), \xi_\ell(k, 2), \dots$ független és azonos eloszlású nemnegatív egész értékű változók sorozata, valamint $\varepsilon(k)$ nemnegatív egész értékű véletlen változó úgy, hogy ezek a sorozatok egymástól is függetlenek.

Tekintsük a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézist, mely szerint $\xi_\ell(1, 1), \xi_\ell(2, 1), \dots$ azonos eloszlásúak tetszőleges $1 \leq \ell \leq p$ esetén, valamint $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots$ szintén azonos eloszlásúak. Az $\text{INAR}(p)$ folyamatok nemnegatív egész értékűek, ezen tulajdonságuk alapján széles körben alkalmazhatóak modellezésre, például populációdinamikában, valamint egyedek, események megszámlálásakor. A folyamat definíciója alapján megengedjük, hogy az utóeloszlások, valamint az innovációk eloszlása időben megváltozzon, tehát lehet a modell időben inhomogén. Azonban ezek megváltozása olyan zavarra utalhat, amelyet fontos észlelni. Így a dolgozatban ezen változások detektálására adunk eljárásokat.

Csörgő és Horváth [2] könyvükben a független véletlen változókból álló sorozatok vizsgálatával foglalkoztak. Változásészlelésre regressziós modellek, $\text{AR}(p)$ és $\text{INAR}(p)$ folyamatok esetén is születtek már eljárások. Horváth és társai [6] cikkben regressziós modellek paramétereinek változását detektáló eljárást definiálnak. A dolgozat fő tételének bizonyításának fontos lépései megjelennek ezen cikkben, azonban a bizonyítás menete jelentősen eltér a cikkben leírtaktól. Kirch és társai [8] cikkükben a regressziós modellek változásának észlelésével foglalkoztak, később pedig általános elágazó folyamatokat is vizsgáltak [4].

T. Szabó Tamás [12] dolgozatában $\text{INAR}(p)$ folyamatok változásészleléséről ír, melynek eredményeiből Pap Gyulával közös [10] cikkük megjelenés előtt áll. Az $\text{INAR}(p)$ folyamatokat azonban általában, valamint a [12] dolgozatban is rögzített, Bernoulli típusú utóeloszlással definiálják, így az ezekre adott módszerek alkalmazása nem túl hatékony az általunk definiált modell változásának észlelésére. Ennek fő oka, hogy Bernoulli típusú utóeloszlás esetén az eloszlások megváltozása ekvivalens a várható értékek megváltozásával, azonban ha az utóeloszlás általános, akkor előfordulhat, hogy bár az eloszlások megváltoznak, de azok várható értéke állandó marad. Ekkor ezek az eljárások nem mutatják ki a változást.

Az általunk bevezetett eljárások alapja, hogy veszünk egy $m \in \mathbb{N}$ hosszú tanulómintát, mely során teljesül a nullhipotézis, azaz nem változnak sem az utóeloszlások, sem az innováció eloszlása. Az $X_1, \dots, X_m$ tanulóminta alapján a feltételes legkisebb négyzetek (CLS) módszerével adunk becsléseket a paraméterekre. Ezen becslések alapján olyan próbastatisztikákat tudunk felírni, melyeknek a nullhipotézis mellett ismert a határeloszlása, így próbákat konstruálhatunk a változások észlelésére.

A gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából sokszor előnyösebb on-line, azaz szekvenciális próbákat végrehajtani, hiszen sok esetben fontos a változás gyors észlelése, illetve a mintavételezés igen költséges lehet. Így szekvenciális eljárásokat alkalmazunk, ami azt jelenti, hogy minden lépésben újabb mintaelemet veszünk, és a próbastatisztika, valamint a kritikus értékek alapján döntünk, hogy elvetjük-e a nullhipotézist. Amennyiben elvetjük, akkor az eljárás véget ér, ellenkező esetben újabb mintavétellel folytatódik.

Így amennyiben a nullhipotézis nem kerül elvetésre, akkor végtelen sokszor kell megismételni a mintavételt és a próbastatisztika vizsgálatát. Az ilyen eljárásokat nevezzük nyílt végűnek. Gyakorlati alkalmazásoknál, szimulációknál ez nehézséget okoz, hiszen legfeljebb véges sok lépést tudunk elvégezni, illetve sok esetben csak korlátozott számú mintavételre van lehetőség. Horváth és társai [6] cikkükben rámutatnak arra, hogy amennyiben a mintaméret elég nagy a tanulóminta elemszámához képest, akkor a nyílt végű eljárás megfelelően működik. Azonban nem egyértelmű, hogy mekkora mintaméretre van ehhez szükség. A [6] cikkben szereplő (Table 2.) táblázatban regressziós modellen végzett nyílt végű eljárások empirikus elsőfajú hibáit láthatjuk különböző mintaméret esetén. Az értékek azt mutatják, hogy még akkor sem éri el az elvetések aránya a megadott elsőfajú hibát, ha a mintaméret a tanulóminta 9-szerese.

Azonban ha megfelelően változtatjuk a próbastatisztikát, akkor olyan zárt végű eljárásokat kaphatunk, melyek véget érnek véges sok lépés után akkor is, ha addig nem vetjük el a nullhipotézist.

2. Fő eredmények

Tegyük fel, hogy teljesül a nullhipotézis. Legyen ξ_ℓ azonos eloszlású a $\xi_\ell(1,1)$ változóval, $1 \leq \ell \leq p$, valamint ε azonos eloszlású $\varepsilon(1)$ -gyel.

Legyen

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} X_k \\ X_{k-1} \\ \vdots \\ X_{k-p+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ X_{k-1} \\ \vdots \\ X_{k-p+1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A későbbiekben megmutatjuk, hogy ezek ergodikus Markov-láncok.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\boldsymbol{\mu} := \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \\ \mu_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\xi_1) \\ \vdots \\ E(\xi_p) \\ E(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_2 := \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_{2,\varepsilon} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} D^2(\xi_1) \\ \vdots \\ D^2(\xi_p) \\ D^2(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_3 := \begin{bmatrix} E(\xi_1 - \mu_1)^3 \\ \vdots \\ E(\xi_p - \mu_p)^3 \\ E(\varepsilon - \mu_\varepsilon)^3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_4 := \begin{bmatrix} E(\xi_1 - \mu_1)^4 \\ \vdots \\ E(\xi_p - \mu_p)^4 \\ E(\varepsilon - \mu_\varepsilon)^4 \end{bmatrix}$$

Legyenek ezeknek a vektoroknak az m elemű tanulóminta alapján a paraméterbecslései rendre $\hat{\boldsymbol{\mu}}_m, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2,m}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{3,m}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{4,m}$. Ezekre a becslésekre az 5.2. Tételben adunk explicit formulát. Vezessük be a

$$g_\gamma(m, k) := m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma, \quad h_{\gamma,T}(m, k) := g_\gamma(m, k) \left(\frac{T}{T+1}\right)^{1/2-\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2} \quad (3)$$

függvényeket, ahol $T > 0$ tetszőleges, rögzített. Legyen

$$M_k := X_k - E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad N_k := M_k^2 - E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

2.1. Megjegyzés. A dolgozat további részeiben $\|\cdot\|$ legyen az a norma, mely minden determinisztikus, illetve véletlen vektorhoz, mátrixhoz hozzárendeli komponensei abszolútértékének

összegét. Továbbá $\|\cdot\|_1$ legyen az a norma, szintén minden determinisztikus és véletlen vektoron, mátrixon értelmezve, mely ezekhez komponenseik abszolútértékeinek összegének várható értékét rendeli. Tehát a $\|\cdot\|_1$ normát úgy kapjuk, hogy vesszük a $\|\cdot\|$ norma várható értékét.

2.2. Megjegyzés. Legyenek $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, valamint $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ tetszőleges sorozatok. Landau jelöléseivel élve $a_n = o(b_n)$, $n \rightarrow \infty$, amennyiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

illetve $a_n = O(b_n)$, ha

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Vezessünk be hasonló jelöléseket véletlen változókra is. Tekintsük az $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$, valamint a $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változókból álló sorozatokat. Legyen $\eta_n = o_P(\zeta_n)$, $n \rightarrow \infty$, amennyiben

$$\frac{\eta_n}{\zeta_n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

valamint $\eta_n = O_P(\zeta_n)$, ha az

$$\left\{ \frac{\eta_n}{\zeta_n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

sorozat sztochasztikusan korlátos, azaz

$$\forall \delta > 0 \quad \exists L > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: P\left(\left|\frac{\eta_n}{\zeta_n}\right| > L\right) < \delta.$$

2.1. Az egydimenziós modell

Az 5.2. Tételben megmutatjuk, hogy az M_k változó CLS becslése m hosszú tanulóminta alapján

$$\widehat{M}_{k,m} := X_k - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbb{Y}_{k-1} = X_k - \left[\sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1}^T \right] \left[\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right]^{-1} \mathbb{Y}_{k-1}.$$

Vezessük be a $\hat{J}_m = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j}{m}$ becslést, ekkor teljesülnek a következő eloszlásbeli konvergenciák.

2.3. Tétel. Legyen $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat. Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, valamint $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, továbbá $E(\xi_1(1,1)^4), \dots, E(\xi_p(1,1)^4) < \infty$, akkor teljesülnek a következők.

(i)

$$\sup_{k \geq 1} \frac{|\hat{J}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m}|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

valamint

(ii)

$$\max_{1 \leq k \leq Tm} \frac{|\hat{J}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m}|}{h_{\gamma,T}(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

tetszőleges $T > 0$, valamint $m, k \in \mathbb{N}$ esetén.

Ezen eloszlásbeli konvergenciák alapján megadhatunk olyan próbastatisztikákat, melyek határeloszlása ismert, így meg tudjuk határozni a próbához szükséges kritikus értékeket. A nyílt végű próbát az első, míg a zárt végűt a második konvergencia alapján határozzuk meg.

2.4. Következmény. Legyen $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ értékre teljesül, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} \right|}{g_\gamma(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

valamint

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} \right|}{h_{\gamma,T}(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

ahol $T > 0$ rögzített.

Így ha ismerjük a $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat esetén

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}$$

eloszlását, akkor tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ mellett meg tudjuk határozni a próbához szükséges c_α kritikus értékeket, melyre teljesül, hogy

$$P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma} \leq c_\alpha \right) = \alpha.$$

A továbbiakban a 2.4. Következmény alapján definiált próbákat egydimenziós próbáknak nevezzük.

A szimulációk is alátámasztják, hogy a fenti eljárások nem detektálják azokat a változásokat, amelyek során a várható értékek állandóak maradnak. Így a továbbiakban olyan próbákat vezetünk be, melyek az utódeloszlások és az innováció szórásainak megváltozását is észlelik.

2.2. A kétdimenziós modell

Az 5.2. Tételben megmutatjuk, hogy az N_k változó CLS becslése

$$\widehat{N}_{k,m} := \widehat{M}_{k,m}^2 - \widehat{\sigma}_{2,m}^T \mathbb{Y}_{k-1} = \widehat{M}_{k,m} - \left[\sum_{i=1}^m \widehat{M}_{k,m}^2 \mathbb{Y}_{i-1}^T \right] \left[\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right]^{-1} \mathbb{Y}_{k-1}.$$

A következő tétel az

$$\left\{ \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix}, i \in \mathbb{N} \right\}$$

véletlen vektorokból álló sorozat megfelelő függvényének eloszlásbeli konvergenciájára vonatkozik. Legyen

$$\widehat{I}_m := \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{2,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j}{m} & \widehat{\sigma}_{3,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j}{m} \\ \widehat{\sigma}_{3,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j}{m} & 2\widehat{\sigma}_{2,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j \mathbb{Y}_j^T}{m} \widehat{\sigma}_{2,m} + (\widehat{\sigma}_{4,m}^T - 3\widehat{\sigma}_{2,m}^{(2)}) \frac{\sum_{j=1}^m \mathbb{Y}_j}{m} \end{bmatrix}.$$

2.5. Tétel. Amennyiben $\{\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}, t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat és $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tetszőleges mátrix, akkor teljesül, hogy

(i)

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D \mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

valamint

(ii)

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{h_{\gamma,T}(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D \mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Ezen tétel egyértelmű következményeit tartalmazza a következő állítás.

2.6. Következmény. Vezessük be a következő jelöléseket, legyen

$$\hat{I}_m^{-1/2} := \begin{bmatrix} \hat{I}_m^{-1/2}(1,1) & \hat{I}_m^{-1/2}(1,2) \\ \hat{I}_m^{-1/2}(2,1) & \hat{I}_m^{-1/2}(2,2) \end{bmatrix},$$

valamint $\{\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}, t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat. Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, valamint $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, továbbá $E(\xi_1(1,1)^8), \dots, E(\xi_p(1,1)^8) < \infty$, akkor

(i)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \left(\hat{I}_m^{-1/2}(1,1) \widehat{M}_{i,m} + \hat{I}_m^{-1/2}(1,2) \widehat{N}_{i,m} \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_1(t)|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

valamint

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \left(\hat{I}_m^{-1/2}(2,1) \widehat{M}_{i,m} + \hat{I}_m^{-1/2}(2,2) \widehat{N}_{i,m} \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_2(t)|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.

(ii) Továbbá tetszőleges $T \in \mathbb{N}$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{h_{\gamma,T}(m, k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left| \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \hat{I}_m^{-1/2}(1,1) \widehat{M}_{i,m} + \hat{I}_m^{-1/2}(1,2) \widehat{N}_{i,m} \right) \right|}{h_{\gamma,T}(m,k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_1(t)|}{t^\gamma} \leq c \right),$$

valamint

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left| \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \hat{I}_m^{-1/2}(2,1) \widehat{M}_{i,m} + \hat{I}_m^{-1/2}(2,2) \widehat{N}_{i,m} \right) \right|}{h_{\gamma,T}(m,k)} \leq c \right) = P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_2(t)|}{t^\gamma} \leq c \right).$$

Az (i) pont formulái valóban adódnak a 2.5. Tétel (i) pontjából, rendre

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

választásokkal. Az (ii) pont formulái hasonlóan adódnak a 2.5. Tétel (ii) pontjából.

Az egydimenziós modellhez hasonlóan tudunk próbákat konstruálni a változások észlelésére, azonban ehhez meg kell határoznunk a kritikus értékeket. Mivel $\{\mathcal{W}(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}, t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat, ezért $\alpha \in \mathbb{N}$ esetén a c_α kritikus értékek a

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_1(t)|}{t^\gamma}, \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_2(t)|}{t^\gamma}$$

véletlen változókra meghatározhatóak, a [6] cikk (Table 1.) táblázata ezeket tartalmazza γ és α függvényében. Azonban a

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}$$

véletlen változóhoz tartozó kritikus értékek nem ismertek, így a próbákat a komponensek abszolútértékeire vonatkozó konvergenciák alapján határozzuk meg.

Mivel a határeloszlások, azaz

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_1(t)|}{t^\gamma}, \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W_2(t)|}{t^\gamma}$$

függetlenek, ezért megjelenő a próbastatisztikák aszimptotikusan függetlenek. Alkalmazzuk az ezen próbastatisztikák alapján meghatározott próbákat együtt, mindkettőt α^* szignifikancia szint mellett. Pontosán akkor fogadjuk el a nullhipotézist, ha azt mindkét próba elfogadja, így az aszimptotikus függetlenség miatt az elfogadás valószínűsége tart az $(1 - \alpha^*)^2$ értékhez. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a teszt szignifikancia szintje α , akkor olyan α^* értéket keresünk, melyre $(1 - \alpha) = (1 - \alpha^*)^2$, tehát az α^* értéket válasszuk $1 - (1 - \alpha)^{1/2}$ -nek.

A szimulációk alapján ez a próba valóban detektálja azokat a változásokat is, melyek során a várható értékek állandóak.

A továbbiakban a 2.6. Következmény alapján definiált próbákat kétdimenziós próbáknak nevezzük.

3. Szimuláció

Annak érdekében, hogy a bevezetett próbák elsőfajú hibáját, valamint erejét megvizsgáljuk, szimulációkat végeztünk. Azért, hogy a modell egyszerűbb legyen, $p = 1$ esetben vizsgáltuk, tehát a vizsgált folyamat INAR(1) a szimulációk során. Minden teszt során először $m=500$ elemszámú tanulómintát generáltunk, mely alapján meghatározhatóak a paraméterek CLS becslései az 5.2. Tétel szerint. Rögzítettük a $\gamma = 1/4$ paramétert, az $\alpha = 0,05$ szignifikancia szintet, valamint az innováció eloszlását, mely legyen *Poisson*(1). A folyamatot az $X_0 = 0$ kezdeti állapotból indítottuk. A tanulóminta után legfeljebb mT mintaelemet generáltunk, ahol T a futtatások során az 1, 2, 4 értékeket vette fel.

Korábban több próbát is bevezettünk, a 2.4. Következmény alapján felírtat nevezzük egydimenziósnek, melynek nyílt és zárt végű típusát is vizsgáltuk. A 2.6. Következmény alapján olyan próbát határoztunk meg, mely során a két komponensre külön-külön végezzük el a megfelelő teszteket a módosított kritikus értékekkel, majd pontosan akkor döntünk a nullhipotézis elvetése mellett, ha legalább az egyik próba elveti azt. Ez a próba azonban nem viselkedett megfelelően, ugyanis a nem túl nagy mintaméret miatt a komponensek erősen korreláltak voltak, annak ellenére, hogy tudjuk, aszimptotikusan függetlenek. Így a továbbiakban a két tesztet külön alkalmazzuk az eredeti α szignifikancia szinthez tartozó kritikus értékek mellett. Ezen próbákat nevezzük a kétdimenziós próba megfelelő komponenseinek. A következő táblázat eredményeinket foglalja össze abba az esetben, amikor a nullhipotézis teljesül, azaz az eloszlások változatlanok. Láthatjuk a nyílt, illetve a zárt végű próbák adott, állandó utóeloszlás és T érték melletti empirikus elsőfajú hibáját.

A táblázat első felében a nyílt, a második felében pedig a zárt próbákhoz tartozó értékek szerepelnek. Minden mezőben fentről lefelé haladva először az egydimenziós próbához, majd a kétdimenziós próba első komponenséhez, végül a második komponenséhez tartozó empirikus elsőfajú hiba szerepel. Megfigyelhetjük, hogy a második komponenshez tartozó empirikus elsőfajú hibák túl nagy értékek, ennek oka az lehet, hogy a komponensben a magasabb momentumok becslései jelennek meg, amelyek nem konvergálnak elegendően gyorsan. Azt is láthatjuk, hogy az esetek többségében a zárt végű próba jobb eredményt ad a nyílt végűnél, főképp kis T esetén.

	T=1	T=2	T=4	T=1	T=2	T=4
Bern(.2)	0,010	0,020	0,030	0,030	0,040	0,043
	0,013	0,023	0,013	0,033	0,043	0,016
	0,050	0,050	0,073	0,070	0,070	0,080
Bern(.5)	0,023	0,036	0,033	0,043	0,060	0,050
	0,020	0,023	0,023	0,036	0,046	0,040
	0,040	0,040	0,063	0,056	0,063	0,083
Bern(.8)	0,023	0,063	0,053	0,030	0,076	0,060
	0,023	0,060	0,050	0,033	0,083	0,060
	0,030	0,016	0,066	0,050	0,033	0,086
Poi(.2)	0,016	0,033	0,040	0,046	0,040	0,046
	0,010	0,023	0,023	0,060	0,040	0,030
	0,060	0,080	0,093	0,073	0,090	0,106
Poi(.5)	0,006	0,023	0,050	0,016	0,050	0,060
	0,000	0,026	0,023	0,013	0,043	0,050
	0,066	0,076	0,106	0,080	0,093	0,123
Poi(.8)	0,046	0,090	0,073	0,080	0,116	0,090
	0,036	0,070	0,070	0,073	0,090	0,086
	0,036	0,120	0,086	0,066	0,150	0,096

A következő táblázatban összefoglaljuk eredményeinket egy egyszerű alternatív hipotézis mellett, amikor az utódeloszlás a minta felénél megváltozik. Mivel a zárt végű próba jobban teljesít, ezért csak az ehhez tartozó empirikus elsőfajú hibát jelenítjük meg, a korábbihoz hasonló elrendezésben. A kezdeti utódeloszlás a táblázat bal oldalán, a minta második felében szereplő utódeloszlás pedig felül található.

	Poi(.2)			Poi(.5)			Poi(.8)		
	T=1	T=2	T=4	T=1	T=2	T=4	T=1	T=2	T=4
Bern(.2)	0,020	0,043	0,053	0,913	0,976	0,993	1,000	1,000	1,000
	0,020	0,050	0,046	0,613	0,810	0,876	0,830	0,853	0,886
	0,070	0,086	0,120	0,843	0,933	0,963	1,000	1,000	1,000
Bern(.5)	0,416	0,676	0,813	0,046	0,050	0,050	1,000	1,000	1,000
	0,560	0,823	0,903	0,046	0,046	0,036	0,970	0,993	1,000
	0,106	0,143	0,166	0,393	0,390	0,490	1,000	1,000	1,000
Bern(.8)	0,986	1,000	1,000	0,893	0,973	0,996	0,126	0,136	0,120
	0,933	1,000	1,000	0,946	1,000	1,000	0,146	0,180	0,210
	0,833	0,920	0,953	0,900	0,963	0,996	1,000	1,000	1,000

Jól látható, hogy amikor a változás során a várható érték állandó marad, akkor a kétdimenziós próbák, illetve elsősorban annak második komponensének eredményei jobbak. Utóbbiak esetén annál magasabb az elvetési arány, tehát annál erősebb a próba, minél jobban megváltozik az utódeloszlás szórása.

4. Ergodicitás

A bevezetett folyamat a nullhipotézis mellett p -lépéses Markov lánc, melyre

$$X_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{X_{k-i}} \xi_i(k, j) + \varepsilon(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

alakban írható fel, ahol minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $\{\xi_i(k, j)\}_{k,j \in \mathbb{N}}$ azonos eloszlású, μ_i várható értékű nemnegatív egész értékű véletlen változók, valamint $\{\varepsilon(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ szintén nemnegatív egész értékűek, azonos eloszlásúak, μ_ε várható értékkel, ahol ezek a változók egymástól függetlenek. A folyamatokat megkülönböztetjük $\mu_1 + \dots + \mu_p$ értéke alapján. Az $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ INAR(p) folyamat

- stabil (szubkritikus), amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$,
- kritikus, ha $\mu_1 + \dots + \mu_p = 1$,
- szuperkritikus, ha $\mu_1 + \dots + \mu_p > 1$.

A dolgozatban a stabil esetet vizsgáljuk.

Legyen $q := \max\{r = 1, \dots, p : \mu_r > 0\}$, valamint

$$\mathbb{X}_n^{(r)} = \begin{bmatrix} X_n \\ \vdots \\ X_{n-r+1} \end{bmatrix}, \quad r \geq q.$$

Tekintsük az $\{\mathbb{X}_n^{(q)}, n \in \mathbb{N}\}$ folyamatot, mely 1-lépéses Markov-lánc. Vezessük be az

$$A_q := [E(\xi_1(1,1)), \dots, E(\xi_q(1,1))] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{q-1} & \mu_q \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

mátrixot, ahol

$$\xi_1(k, j) = \begin{bmatrix} \xi_1(k, j) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2(k, j) = \begin{bmatrix} \xi_2(k, j) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \xi_p(k, j) = \begin{bmatrix} \xi_p(k, j) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A folyamat szintén stabil, hiszen $\mu_1 + \dots + \mu_q = \mu_1 + \dots + \mu_q + \mu_{q+1} + \dots + \mu_p < 1$, továbbá az is teljesül, hogy $\mu_q > 0$. Legyen $d = \text{lko}\{i = 1, \dots, p : \mu_i > 0\} = \text{lko}\{i = 1, \dots, q : \mu_i > 0\}$. A következő tétel, Barczy és Pap eredménye ([1], Proposition 2.2) az A_q mátrix spektrálsugarára vonatkozik.

4.1. Tétel. *Legyen A_q a (4) formulában definiált mátrix, ahol $\mu_q > 0$.*

(i) *Amennyiben $d = 1$, akkor az A_q mátrix primitív.*

(ii)

$$\varrho(A_q) \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases} \iff \mu_1 + \dots + \mu_q \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}$$

Így a stabil esetben, mivel a $\mu_q > 0$ feltétel teljesül, továbbá $\mu_1 + \dots + \mu_q < 1$, ezért a tétel értelmében $\varrho(A_q) < 1$.

Az alábbi tétel Quine [11], valamint Kaplan [7] eredménye

4.2. Tétel. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, ha az A_q mátrix primitív, $\varrho(A_q) < 1$, valamint $E(\varepsilon) > 0$, akkor léteznek olyan $\{\pi_j, j \in \mathbb{N}\}$ valószínűségek, melyekre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \pi_j = 1.$$

4.3. Állítás. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_q < 1$, valamint $E(\varepsilon) < \infty$ akkor az $\{\mathbb{X}_n^{(q)}, n \in \mathbb{N}\}$ Markov-lánc ergodikus abban az értelemben, hogy létezik pontosan egy aperiodikus és pozitív rekurrens kommunikációs osztálya, melyet a folyamat 1 valószínűséggel véges sok lépésben elér.*

Bizonyítás. Amennyiben $d = 1$, akkor a 4.1. Tétel értelmében A_q primitív és $\varrho(A_q) < 1$. Így a 4.2. Tétel alapján léteznek minden $\underline{j}$ állapot esetén $\pi_{\underline{j}}$ limesz-valószínűségek. Ebből következik, hogy létezik az egyértelmű π invariáns eloszlás. Így a Markov-láncnak létezik pontosan egy pozitív rekurrens osztálya és az invariáns eloszlás erre az osztályra van koncentrálna.

Amennyiben $d > 1$, akkor $\mu_q > 0$ miatt $\kappa := q/d$ egész szám. Ekkor a folyamat definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-d}} \xi_d(n, i) + \sum_{i=1}^{X_{n-2d}} \xi_{2d}(n, i) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{n-q}} \xi_q(n, i),$$

hiszen $n - \kappa d = n - dq/d = n - q$. Legyen

$$\mathbb{X}_n^{(q, \lambda)} = \begin{bmatrix} X_{nd+\lambda} \\ \vdots \\ X_{(n-\kappa+1)d+\lambda} \end{bmatrix},$$

ahol $\lambda = 0, \dots, \kappa - 1$, valamint $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\{\mathbb{X}_n^{(q, \lambda)}, n \in \mathbb{N}\}$ egy κ lépéses Markov-lánc minden $\lambda = 0, \dots, \kappa - 1$ esetén. Továbbá ezek a folyamatok egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak, így ezen folyamatokra külön-külön a bizonyítás eddigi részét alkalmazva azt kapjuk, hogy léteznek limesz-valószínűségek. Az azonos eloszlás miatt ezen folyamatok limesz-valószínűségei megegyeznek, így az eredeti folyamatnak is ezek a limesz-valószínűségei. Ezzel beláttuk, hogy az eredeti $\{\mathbb{X}_n^{(q)}, n \in \mathbb{N}\}$ folyamatnak is léteznek a limesz-valószínűségei.

Megmutattuk, hogy a $\{\mathbb{X}_n^{(q)}, n \in \mathbb{N}\}$ Markov-láncnak pontosan egy pozitív rekurrens osztálya van, az invariáns eloszlás erre az osztályra van koncentrálna. Jelölje ezt az osztályt $\mathcal{C}$. Lássuk be, hogy a folyamat ezt az osztályt 1 valószínűséggel véges sok lépésben eléri. A limesz valószínűségek létezéséből következik, hogy $P(\mathbb{X}_n^{(q)} = \underline{j}) \rightarrow \pi_{\underline{j}}$ tetszőleges $\underline{j}$ állapot esetén, amennyiben $n \rightarrow \infty$. Ekkor

$$P(\mathbb{X}_n^{(q)} \in \mathcal{C}) = \sum_{\underline{j} \in \mathcal{C}} P(\mathbb{X}_n^{(q)} = \underline{j}) \rightarrow \sum_{\underline{j} \in \mathcal{C}} \pi_{\underline{j}} = 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ebból kapjuk, hogy

$$P(\text{a folyamat eléri a } \mathcal{C} \text{ osztályt}) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_n^{(q)} \in \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{X}_n^{(q)} \in \mathcal{C}) = 1.$$

A továbbiakban mutassuk meg, hogy a $\mathcal{C}$ osztály aperiodikus. Ehhez ezen tulajdonságot elegendő valamely $\mathcal{C}$ -beli állapotra megmutatni. Legyen $\ell = \min\{i \in \mathbb{N}_+ : P(\varepsilon = i) > 0\}$, valamint $\underline{\ell}^T = [\ell, \dots, \ell]$. Amennyiben $\underline{j} \in \mathcal{C}$ tetszőleges, akkor

$$P(\mathbb{X}_{n+q}^{(q)} = \underline{\ell} | \mathbb{X}_n^{(q)} = \underline{j}) > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

hiszen tetszőleges állapotból kiindulva pozitív valószínűséggel következik be az, hogy q lépésen keresztül minden utóeloszlás 0, valamint minden innováció értéke a minimális ℓ . Így $\underline{\ell}$ tetszőleges $\mathcal{C}$ -beli állapotból elérhető, ami azt jelenti, hogy $\underline{\ell} \in \mathcal{C}$, tehát $\underline{\ell}$ pozitív rekurrens. A korábbi gondolatmenethez hasonlóan annak a valószínűsége, hogy egy lépésben minden utóeloszlás 0 és az innováció értéke ℓ pozitív, így

$$P(\mathbb{X}_{n+1}^{(q)} = \underline{\ell} | \mathbb{X}_n^{(q)} = \underline{\ell}) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Így megmutattuk, hogy az $\underline{\ell}$ állapot, és így, tehát a $\mathcal{C}$ osztály is aperiodikus. Ezzel a tételt bizonyítottuk. $\square$

4.4. Tétel. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$, valamint $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, akkor az $\{\mathbb{X}_n^{(r)}, n \in \mathbb{N}\}$ folyamat tetszőleges $r \geq q$ esetén ergodikus abban az értelemben, hogy létezik pontosan egy pozitív rekurrens osztálya, melyet a folyamat 1 valószínűséggel tetszőleges kezdeti állapotból kiindulva véges sok lépésben elér.*

Bizonyítás. Mutassuk meg teljes indukcióval, hogy léteznek a limesz valószínűségek, azaz minden $r \geq q$ és $\underline{i}, \underline{j}$ állapotok esetén léteznek olyan $\pi_{\underline{j}}^{(r)}$ valószínűségek, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{X}_n^{(r)} = \underline{j} | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}) = \pi_{\underline{j}}^{(r)}, \quad \sum_{\underline{j}} \pi_{\underline{j}}^{(r)} = 1.$$

Az ergodicitás bizonyítása az előző állítás bizonyításában látott módon történik. A 4.3. Állítás alapján $r = q$ esetén az állítás teljesül. Mutassuk meg, hogy amennyiben a tétel az $r \geq q$ értékre teljesül, akkor $r + 1$ -re is.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\underline{j} := \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_{r+1} \end{bmatrix}, \quad \underline{j}' := \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_r \end{bmatrix}, \quad \underline{j}'' := \begin{bmatrix} j_2 \\ \vdots \\ j_{r+1} \end{bmatrix}, \quad \underline{i} := \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{r+1} \end{bmatrix}, \quad \underline{i}' := \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}, \quad \underline{i}'' := \begin{bmatrix} i_2 \\ \vdots \\ i_{r+1} \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X}_n^{(r+1)} = \underline{j} | \mathbb{X}_0^{(r+1)} = \underline{i}) &= P(\mathbb{X}_n^{(r)} = \underline{j}', \mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}', \mathbb{X}_{-1}^{(r)} = \underline{i}'') \\ &= P(\mathbb{X}_n^{(r)} = \underline{j}' | \mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'', \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}', \mathbb{X}_{-1}^{(r)} = \underline{i}'') P(\mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}', \mathbb{X}_{-1}^{(r)} = \underline{i}'') \\ &= P(\mathbb{X}_n^{(r)} = \underline{j}' | \mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'') P(\mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}') \\ &= P(\mathbb{X}_1^{(r)} = \underline{j}' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{j}'') P(\mathbb{X}_{n-1}^{(r)} = \underline{j}'' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{i}') \\ &\rightarrow P(\mathbb{X}_1^{(r)} = \underline{j}' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{j}'') \pi_{\underline{j}''}^{(r)} := \pi_{\underline{j}}^{(r+1)} \pi_{\underline{j}''}^{(r)}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Az utóbbi lépéseknél felhasználtuk, hogy a folyamat időhomogén, valamint alkalmaztuk, hogy léteznek a limesz valószínűségek. Vegyük észre, hogy a határérték $\underline{i}$ -től független.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}_0^{(r)} \sim \pi^{(r)}$. Ekkor

$$\sum_{\underline{j} \in \mathbb{Z}^{r+1}} \pi_{\underline{j}}^{(r+1)} = \sum_{\underline{j}', \underline{j}'' \in \mathbb{Z}^r} P\left(\mathbb{X}_1^{(r)} = \underline{j}' | \mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{j}''\right) P(\mathbb{X}_0^{(r)} = \underline{j}'') = \sum_{\underline{j}' \in \mathbb{Z}^r} P\left(\mathbb{X}_1^{(r)} = \underline{j}'\right) = 1.$$

Ezzel megmutattuk, hogy léteznek a limesz valószínűségek. Innentől a korábbi bizonyítás megismételhető. $\square$

Vezessük be minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{V}_n^T = [X_n, \dots, X_{n-p}, 1]$ jelölést.

4.5. Következmény. *Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, valamint $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < 1$, akkor az $\{\mathbb{Y}_n, n \in \mathbb{N}\}$ és a $\{\mathbb{V}_n, n \in \mathbb{N}\}$ Markov-láncok ergodikusak a korábban bevezetett értelemben. Így léteznek az $\tilde{\mathbb{Y}}, \tilde{\mathbb{V}}$ egyértelmű invariáns eloszlású véletlen vektorok.*

4.6. Megjegyzés. Barczy és Pap ([1], Appendix) cikke alapján a valószínűségi generátorfüggvények alkalmazásával meghatározhatóak az invariáns eloszlások momentumai. Azt kapjuk, hogy amennyiben az utódeloszlásoknak és a bevándorlásnak végesek a k . momentumai, akkor $\tilde{\mathbb{V}}$ minden komponensének véges a k . momentuma. Ebből következik, hogy $E(\mathbb{V}^{\oplus k}) < \infty$, ahol $\mathbb{V}^{\oplus k}$ jelöli a $\mathbb{V}$ vektor k -adik tenzorhatványát. Így az ergodicitás miatt adódik, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{V}_{i-1}^{\oplus k}}{n} \rightarrow E(\tilde{\mathbb{V}}^{\oplus k}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Így a legfeljebb k tényezős szorzatokra is teljesülnek a konvergenciák. Speciálisan

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{Y}_{i+1}}{n} \rightarrow E(\tilde{\mathbb{Y}}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

valamint ha $E(\xi_1^2), \dots, E(\xi_p^2), E(\varepsilon^2) < \infty$, akkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T}{n} \rightarrow E(\tilde{\mathbb{Y}} \tilde{\mathbb{Y}}^T), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

5. Paraméterbecslés

A fejezetben a paraméterekre fogunk becsléseket adni. A következő lemmában előkészületeket teszünk a paraméterbecslések bevezetéséhez.

5.1. Feltételes várható értékek

5.1. Lemma. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(i) \quad E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{k-1}.$$

$$(ii) \quad E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbb{Y}_{k-1},$$

$$(iii) \quad E(M_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{\sigma}_3^T \mathbb{Y}_{k-1},$$

$$(iv) \quad E(M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}) = 3\sigma_2^T \mathbb{Y}_{k-1} \mathbb{Y}_{k-1}^T \sigma_2 + \left(\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)} \right) \mathbb{Y}_{k-1},$$

ahol $\sigma_2^{(2)}$ legyen a σ_2 vektor elemeinek négyzetét tartalmazó vektor, azaz

$$\sigma_2^{(2)} := [(D^2(\xi_1))^2, \dots, (D^2(\xi_p))^2, (D^2(\varepsilon))^2]^T.$$

(v)

$$E(M_k^6 | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathcal{P}_3(\mathbb{X}_{k-1}), \quad E(M_k^8 | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathcal{P}_4(\mathbb{X}_{k-1}),$$

ahol $\mathcal{P}_3(\mathbb{X}_{k-1})$ a legfeljebb hatodik centrális momentumok harmadfokú polinomja,
 $\mathcal{P}_4(\mathbb{X}_{k-1})$ pedig a legfeljebb nyolcadik centrális momentumok negyedfokú polinomja.

Bizonyítás. (i) Felhasználva a folyamat definícióját, valamint azt, hogy az utóeloszlás változók és az innovációk függetlenek egymástól, illetve az $\mathcal{F}_{k-1}$ σ -algebrától, mely σ -algebrára $X_{k-1}, \dots, X_{k-p}$ mérhetőek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= E \left(\sum_{i=1}^{X_{k-1}} \xi_1(k, i) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} \xi_p(k, i) + \varepsilon(k) \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{X_{k-1}} E(\xi_1(k, i) | \mathcal{F}_{k-1}) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} E(\xi_p(k, i) | \mathcal{F}_{k-1}) + E(\varepsilon(k) | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \mu_1 X_{k-1} + \dots + \mu_p X_{k-p} + \mu_\varepsilon = \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{k-1}. \end{aligned}$$

(ii) Az (i) rész felhasználásával, M_k definíciója szerint

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{i=1}^{X_{k-1}} \xi_1(k, i) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} \xi_p(k, i) + \varepsilon(k) - (\mu_1 X_{k-1} + \dots + \mu_p X_{k-p} + \mu_\varepsilon) \\ &= \sum_{i=1}^{X_{k-1}} (\xi_1(k, i) - \mu_1) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} (\xi_p(k, i) - \mu_p) + (\varepsilon(k) - \mu_\varepsilon), \end{aligned}$$

így

$$E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = E \left[\left[\sum_{i=1}^{X_{k-1}} (\xi_1(k, i) - \mu_1) + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} (\xi_p(k, i) - \mu_p) + \varepsilon(k) - \mu_\varepsilon \right]^2 \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right].$$

A változók függetlensége miatt a centrált változók is függetlenek, így a négyzetre emeléskor keletkező tagok közül csak azok várható értéke nem 0, melyek valamely centrált változó négyzeteként állnak elő. A feltétel itt is elhagyható, ezért

$$E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{X_{k-1}} E(\xi_1(k, i) - \mu_1)^2 + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} E(\xi_p(k, i) - \mu_p)^2 + E(\varepsilon(k) - \mu_\varepsilon)^2 = \sigma_2^T \mathbb{Y}_{k-1}.$$

(iii) A bizonyítás az (ii) bizonyításával analóg, hiszen a harmadik hatvány esetén is csak a harmadik hatványok várható értéke nem 0. Ez abból adódik, hogy amennyiben nem harmadik

hatványról van szó, akkor szerepel a szorzatban elsőfokú tényező, mely a többitől független, így 0 várható értéke kiemelhető. Ezért

$$E(M_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{X_{k-1}} E(\xi_1(k, i) - \mu_1)^3 + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} E(\xi_p(k, i) - \mu_1)^3 + E(\varepsilon(k) - \mu_\varepsilon)^3 = \sigma_3^T \mathbf{Y}_{k-1}.$$

(iv) A negyedik hatvány esetén is 0 lesz azoknak a szorzatoknak a várható értéke, melyekben valamelyik centrált változó első fokon szerepel. Azonban itt már a negyedik hatványok mellett megjelennek olyan szorzatok is, amelyek két másodfokú tényező szorzataként állnak elő.

Az $E(M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1})$ feltételes várható érték négy tag összegeként áll elő. Először is megjelennek a negyedfokú tagok várható értékei, azaz

$$\sum_{i=1}^{X_{k-1}} E(\xi_1(k, i) - \mu_1)^4 + \dots + \sum_{i=1}^{X_{k-p}} E(\xi_p(k, i) - \mu_p)^4 + E(\varepsilon(k) - \mu_\varepsilon)^4 = \sigma_4^T \mathbf{Y}_{k-1}.$$

Harmadfokú tagok nem lehetnek, hiszen ekkor a negyedik tényező első fokon szerepelne, de emiatt a várható érték 0.

Továbbá szerepelhetnek olyan szorzatok, melyek két másodfokú tényező szorzataként állnak elő. Lehetnek olyan tagok, amelyek ugyanazon generáció két különböző egyedét tartalmazzák, mindkettő négyzetét. Ezek várható értékeinek összege

$$\sum_{i=1}^p \binom{4}{2} \binom{X_{k-i}}{2} (D^2(\xi_i))^2 = 3 \sum_{i=1}^p X_{k-i} (X_{k-i} - 1) (D^2(\xi_i))^2,$$

hiszen a lehetséges egyedek közül $\binom{X_{k-i}}{2}$ -féleképp választhatunk ki kettőt.

Amennyiben a két tényező különböző generációból származik, vagy az egyik az innováció, akkor a hatványozáskor hatszor jelenik meg, hiszen $\binom{4}{2}$ -féleképp választhatjuk ki. Mivel a következő összegzésben az (i, j) indexpár mellett (j, i) is szerepel, így mindent kétszer számolunk meg, ezen tagok várható értékeinek összege

$$\begin{aligned} & 6 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^p X_{k-i} X_{k-j} D^2(\xi_i) D^2(\xi_j) + 6 \sum_{i=1}^p X_{k-i} D^2(\xi_i) D^2(\varepsilon) \\ &= 3 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^p X_{k-i} X_{k-j} D^2(\xi_i) D^2(\xi_j) + 6 \sum_{i=1}^p X_{k-i} D^2(\xi_i) D^2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi két tag összevonható, összegük

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{i, j=1}^p X_{k-i} X_{k-j} D^2(\xi_i) D^2(\xi_j) + 6 \sum_{i=1}^p X_{k-i} D^2(\xi_i) D^2(\varepsilon) - 3 \sum_{i=1}^p X_{k-i} (D^2(\xi_i))^2 \\ &= 3\sigma_2^T \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{Y}_{k-1}^T \sigma_2 - 3\sigma_2^{(2)} \mathbf{Y}_{k-1}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

(v) A feltételes várható értékből szintén eltűnnek azok a tagok, melyek elsőfokúak, és a függetlenség miatt a megjelenő tagok együtthatóiban a különböző momentumok szorzatai szerepelnek.

Az, hogy a polinomok fokszáma nem lehet nagyobb, mint a tételben megadott érték, egyszerű következménye annak, hogy elsőfokú tagok nem szerepelhetnek a szorzatokban. $\square$

5.2. Paraméterbecslések

A dolgozatban szükség lesz a változók várható értékeinek, illetve felsőbb momentumainak becsléseire. Így ebben a fejezetben ezen momentumok becsléseit adjuk meg a feltételes legkisebb négyzetek (CLS) módszere alapján, mely eljárást Klimko és Nelson vezetett be [9] cikkükben.

Minimalizáljuk a $\boldsymbol{\mu}^T$ paraméter szerint az

$$\mathcal{Q}_m^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m M_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1})^2$$

négyzetösszeget az m hosszú tanulóminta alapján. Véve a $\boldsymbol{\mu}$ paraméter elemei szerint a deriváltakat a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{Q}_m^{(1)} / \partial \mu_1 &= \sum_{i=1}^m (X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1}) X_{i-1} = 0 \\ &\vdots \\ \partial \mathcal{Q}_m^{(1)} / \partial \mu_p &= \sum_{i=1}^m (X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1}) X_{i-p} = 0, \\ \partial \mathcal{Q}_m^{(1)} / \partial \mu_\varepsilon &= \sum_{i=1}^m (X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1}) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

melyet rövidebben

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{Q}_m^{(1)} = \sum_{i=1}^m (X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1}) \mathbb{Y}_{i-1} = 0$$

alakban írhatunk. Legyen az egyenletrendszer megoldása, azaz a minimum helye $\hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T$. Az előző formula alapján

$$\sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1} = \sum_{i=1}^m (\boldsymbol{\mu}_m^T \mathbb{Y}_{i-1}) \mathbb{Y}_{i-1} = \sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} (\boldsymbol{\mu}_m^T \mathbb{Y}_{i-1}) = \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right) \boldsymbol{\mu}_m,$$

amiből

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_m = \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1}$$

formula adódik.

Minimalizáljuk $\boldsymbol{\sigma}_2^T$ szerint a

$$\mathcal{Q}_m^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m N_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_i^2 - \boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbb{Y}_{i-1})^2.$$

összeget, ahol az átalakítás az 5.1. Lemma alapján végeztük. Ekkor deriválással a korábbiakhoz hasonlóan a

$$\nabla_{\boldsymbol{\sigma}_2} \mathcal{Q}_m^{(2)} = \sum_{i=1}^m (M_i^2 - \boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbb{Y}_{i-1}) \mathbb{Y}_{i-1} = 0 \tag{8}$$

egyenlethez jutunk. A minimalizálást a σ_2 paraméterben szeretnénk végrehajtani, de az összegben M_i is ismeretlen. Így mielőtt minimalizálnánk, először helyettesítsük M_i -t a korábban kiszámolt $\widehat{M}_{i,m}$ CLS-bebecslésével.

Így a

$$\sum_{i=1}^m \left(\widehat{M}_{i,m}^2 - \hat{\sigma}_{2,m}^T \mathbb{Y}_{i-1} \right) \mathbb{Y}_{i-1} = 0$$

egyenletből $\hat{\sigma}_{2,m}^T$ becslése kifejezhető.

A σ_3^T paraméter becsléséhez alkalmazzunk CLS becslést az m hosszú tanulóminta alapján, minimalizáljuk a

$$\mathcal{Q}_m^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_i^3 - E(M_i^3 | \mathcal{F}_{i-1}))^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_i^3 - \sigma_3^T \mathbb{Y}_{i-1})^2$$

négyzetösszeget a korábban látott módon.

A σ_4^T paraméter CLS becsléséhez az m hosszú tanulóminta alapján minimalizáljuk a

$$\mathcal{Q}_m^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_i^4 - E(M_i^4 | \mathcal{F}_{i-1}))^2$$

négyzetösszeget. Az 5.1. Lemma (iii) pontja alapján

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_m^{(4)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (M_i^4 - E(M_i^4 | \mathcal{F}_{i-1}))^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(M_i^4 - 3\sigma_2^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)}) \mathbb{Y}_{i-1} \right)^2 \\ &=: \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (C_{i-1} + \sigma_4^T \mathbb{Y}_{i-1})^2, \end{aligned}$$

ahol $C_{i-1} := M_i^4 - 3\sigma_2^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \sigma_2$ jelöli az összeg azon részét, ahol a már becsült paraméterek szerepelnek. Cseréljük ki ezeket a paramétereket a becslésükkel, legyen az így kapott becslés $C_{i-1,m}$ -re $\widehat{C}_{i-1}$. Keressük a minimum helyét $\hat{\sigma}_{4,m}^T$ alakban, keressük a

$$\nabla_{\sigma_4} \mathcal{Q}_m^{(4)} = \sum_{i=1}^m (\widehat{C}_{i-1,m} - \hat{\sigma}_{4,m}^T \mathbb{Y}_{i-1}) \mathbb{Y}_{i-1} := 0.$$

egyenlet megoldását.

Ezen becslések bevezetésével igazoltuk a következő tételt.

5.2. Tétel. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett adhatunk feltételes legkisebb négyzetek módszerével (CLS) becsléseket a paraméterekre, valamint az M_k és N_k martingál-különbségekre. A becslések az $m \in \mathbb{N}$ méretű tanulóminta alapján a következők:*

- (i) $\hat{\mu}_m^T = [\sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1}^T] [\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T]^{-1}$, így
 $\widehat{M}_{k,m} := X_k - \hat{\mu}_m^T \mathbb{Y}_{k-1} = X_k - [\sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1}^T] [\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T]^{-1} \mathbb{Y}_{k-1}.$
- (ii) $\hat{\sigma}_{2,m}^T := [\sum_{i=1}^m \widehat{M}_{i,m}^2 \mathbb{Y}_{i-1}^T] [\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T]^{-1}$, így
 $\widehat{N}_{k,m} := \widehat{M}_{k,m}^2 - \hat{\sigma}_{2,m}^T \mathbb{Y}_{k-1} = \widehat{M}_{k,m}^2 - [\sum_{i=1}^m \widehat{M}_{i,m}^2 \mathbb{Y}_{i-1}^T] [\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T]^{-1} \mathbb{Y}_{k-1}.$

$$(iii) \hat{\sigma}_{3,m}^T := \left[\sum_{i=1}^m \widehat{M}_{i,m}^3 \mathbb{Y}_{i-1}^T \right] \left[\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right]^{-1}.$$

$$(iv) \hat{\sigma}_{4,m}^T := \left[\sum_{i=1}^m \hat{C}_{i-1,m} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right] \left[\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right]^{-1}, \text{ ahol}$$

$$\hat{C}_{i-1,m} := \widehat{M}_{i,m}^4 - 3\hat{\sigma}_{2,m}^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \hat{\sigma}_{2,m} + 3\hat{\sigma}_{2,m}^{(2)} \mathbb{Y}_{i-1}.$$

A következő állítás könnyen igazolható a becslések tulajdonságai alapján.

5.3. Állítás. (i) Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis és $\mu_\varepsilon > 0$, továbbá vagy valamely $q \in \{1, 2, \dots, p\}$ esetén $\mu_q > 0$, vagy $\sigma_{2,\varepsilon} > 0$, akkor az $\{\mathbb{Y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra teljesül, hogy

$$P \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \text{ invertálható} \right) \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

(ii) A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$, valamint $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, akkor az 5.2. Tételben megadott becslések erősen konzisztensek, tehát teljesülnek a következők:

$$\sqrt{m}(\hat{\mu}_m - \mu) = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$\sqrt{m}(\hat{\sigma}_{2,m} - \sigma_2) = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$\sqrt{m}(\hat{\sigma}_{4,m} - \sigma_4) = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Az (i) állítás Pap és Szabó ([10], C.1. Lemma) eredménye.

Az állítás (ii). pontja bizonyítható a martingálókra vonatkozó centrális határeloszlás tételével, valamint Klimko és Nelson [9] cikkének 2.2. Tétele alapján.

6. Bizonyítások

A dolgozat fő tételeinek bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára és ennek következményére.

6.1. Lemma. Legyen S topológikus tér, $\mathcal{S}$ a generált σ -algebra, valamint $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ valószínűségi mértékek feszes családja. Továbbá legyen az $\{f_n: S \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ abszolút korlátos és folytonos függvények sorozata olyan, hogy minden $x \in S$ esetén $f_n(x) \rightarrow 0$, amennyiben $n \rightarrow \infty$. A sorozat abszolút korlátosságán azt értjük, hogy létezik olyan $A \geq 0$ konstans, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in S$ esetén $|f_n(x)| \leq A$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n(x) P_n(dx) = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. A mértékcsalád feszségéből következik, hogy minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan K_δ kompakt halmaz, melyre

$$\sup_{n \geq 1} P_n(x \notin K_\delta) < \delta.$$

Amennyiben $K_{\delta/(2A)}$ az $\delta/(2A)$ -hoz tartozó kompakt halmaz, akkor

$$\left| \int_{x \notin K_{\delta/(2A)}} f_n(x) P_n(dx) \right| \leq A P_n(x \notin K_{\delta/(2A)}) < A\delta/(2A) = \delta/2.$$

Használjuk fel, hogy a $K_{\delta/(2A)}$ kompakt halmazon a korlátos, folytonos, és pontonként konvergens függvényt sorozat egyenletesen is konvergens, azaz létezik olyan $N_{\delta/2}$ küszöbszám, melyre minden $n > N_{\delta/2}$ és minden $x \in K_{\delta/(2A)}$ esetén $|f_n(x)| < \delta/2$. Ezért minden $n > N_{\delta/2}$ mellett

$$\int_{x \in K_{\delta/(2A)}} f_n(x) P_n(dx) \leq \frac{\delta}{2} P_n(x \in K_{\delta/(2A)}) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Így azt kapjuk, hogy minden $n > N_{\delta/2}$ esetén

$$\begin{aligned} \int_S f_n(x) P_n(dx) &= \int_{x \notin K_{\delta/(2A)}} f_n(x) P_n(dx) + \int_{x \in K_{\delta/(2A)}} f_n(x) P_n(dx) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} P_n(x \in K_{\delta/(2A)}) < \delta. \end{aligned}$$

□

6.2. Következmény. Legyen $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ az egész rácspontokra koncentrált d -dimenziós véletlen vektorok sorozata, melyekre $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ valamely szintén az egész rácspontokra koncentrált d -dimenziós η véletlen változóra. Továbbá legyen minden $y \in \mathbb{Z}^d$ -re az $\{a_{n,y}\}_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, mely abszolút korlátos, illetve minden $y \in \mathbb{Z}^d$ -re $a_{n,y} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} a_{n,y} P(\eta_n = y) = 0.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy mivel a $\mathbb{Z}^d$ rácstetszőleges részhalmaza nyílt, ezért minden $\mathbb{Z}^d$ -n értelmezett függvény folytonos. Legyen $S = \mathbb{Z}^d$, minden $n \in \mathbb{N}$ és $y \in \mathbb{Z}^d$ esetén $f_n(y) = a_{n,y}$, valamint $P_n = P_{\eta_n}$. Az $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat eloszlásbeli konvergenciájából következik, hogy $\{P_{\eta_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ feszes. Így az előző lemma feltételei teljesülnek, az állítás a lemma alkalmazásával adódik.

□

A következőkben i és m természetes számok esetén $\widehat{M}_{i,m}$ -re, valamint $\hat{N}_{i,m}$ -re mondunk ki állításokat. Azonban jegyezzük meg, hogy rögzített m esetén a paraméterbecslések, melyeket az 5.2. Tételben határoztunk meg, nem mindig léteznek. Ekkor az $\widehat{M}_{i,m}$ és $\hat{N}_{i,m}$ becslések sem léteznek, de az 5.3. Tétel (i) állítása szerint a becslések 1-hez tartó valószínűséggel léteznek. Az állításokhoz ez elegendő, ugyanis csak sztochasztikus és eloszlásbeli konvergenciákat fogunk bizonyítani ezen változókra. Legyen minden $m \in \mathbb{N}$ esetén A_m a következő esemény,

$A_m := \{\text{az } m \text{ hosszú tanulóminta alapján számolt paraméterbecslések mindegyike létezik}\}.$

Továbbá legyen $\{B_m, m \in \mathbb{N}\}$ tetszőleges eseménysorozat. Tegyük fel, hogy $P(B_m | A_m) \rightarrow p$, $m \rightarrow \infty$. Ekkor a teljes valószínűség tételének értelmében

$$P(B_m) = P(B_m | A_m) P(A_m) + P(B_m | \bar{A}_m) P(\bar{A}_m) \rightarrow p, \quad m \rightarrow \infty.$$

Így mivel csak eloszlásbeli és sztochasztikus konvergenciákat fogunk bizonyítani, a továbbiakban elegendő az A_m eseményre feltételesen dolgozni. Tehát a következőkben feltesszük, hogy a paraméterbecslések léteznek, és a feltételes valószínűségek konvergenciáját bizonyítjuk.

Először adjunk alsó korlátot a (3)-ben bevezetett g függvényre. Amennyiben $k \leq m$, akkor

$$g_\gamma(m, k) = m^{1/2} \left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma = k^\gamma m^{1/2-\gamma} \left(\frac{m+k}{m}\right)^{1-\gamma} \geq k^\gamma m^{1/2-\gamma} 2^{1-\gamma} = C_1 k^\gamma m^{1/2-\gamma}, \quad (9)$$

ahol C_1 megfelelően választott konstans. Hasonlóan, amennyiben $k > m$, akkor

$$g_\gamma(m, k) \geq m^{1/2} \frac{k}{m} \left(\frac{k}{k+k}\right)^\gamma = C_2 \frac{k}{m^{1/2}}, \quad (10)$$

ahol C_2 konstans.

6.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, valamint $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\epsilon < \infty$. Legyen $\tilde{\mathbf{Y}}$ a (2) formulában definiált, ergodikus $\{\mathbf{Y}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ Markov-lánc stacionárius eloszlása.*

(i) *Amennyiben $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ pozitív egészekből álló sorozat, melyre $a_m \rightarrow \infty$ teljesül, akkor*

$$\sup_{k > a_m} \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty,$$

(ii) *valamint*

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} = O_P(1).$$

Bizonyítás. (i) Jegyezzük meg, hogy mivel $\{\mathbf{Y}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ergodikus, (5) alapján tetszőleges $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{Z}^{p+1}$ esetén

$$\frac{\sum_{i=1}^k (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \rightarrow 0 \quad \text{m.b.,} \quad k \rightarrow \infty,$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$\sup_{k > a_m} \left\| \frac{\sum_{i=1}^k (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \right\| \xrightarrow{P} 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

tetszőleges $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{Z}^{p+1}$ kezdeti érték mellett. Mivel az $\{\mathbf{X}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sorozat i . eleme definíció szerint csak az öt megelőző p elemtől függ, azaz $\mathbf{X}_{i-1}$ -től, ezért minden $y \in \mathbb{Z}^{p+1}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\left\| \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \right\| \middle| \mathbf{Z}_m = y \right) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\left\| \frac{\sum_{i=1}^k (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \right\| \middle| \mathbf{Z}_0 = y \right),$$

hiszen

$$(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots | \mathbf{Y}_0 = y) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\mathbf{Y}_{m+1}, \mathbf{Y}_{m+2}, \dots | \mathbf{Y}_m = y).$$

Ebből adódik, hogy

$$\sup_{k > a_m} \left(\left\| \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \right\| \middle| \mathbf{Y}_m = y \right) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{k > a_m} \left(\left\| \frac{\sum_{i=1}^k (\mathbf{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbf{Y}}))}{k} \right\| \middle| \mathbf{Y}_0 = y \right) \xrightarrow{P} 0,$$

ha $m \rightarrow \infty$. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy mindez feltétel nélkül is teljesül, azaz minden $\delta > 0$ esetén

$$P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \middle| \mathbb{Y}_m = y \right) P(\mathbb{Y}_m = y). \end{aligned}$$

Azonban ez az összeg teljesíti a 6.2. Következmény feltételeit, hiszen minden $m \in \mathbb{N}$ és $y \in \mathbb{Z}^{p+1}$ értékekre $P(\mathbb{Y}_m = y) \leq 1$, tehát korlátos, valamint

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \middle| \mathbb{Y}_m = y \right) \\ &= P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \middle| \mathbb{Y}_0 = y \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ha $m \rightarrow \infty$. Így a 6.2. Következmény értelmében valóban teljesül az állítás,

$$P \left(\sup_{k > a_m} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > \delta \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

(ii) Az (i) részben látott átalakítások alapján minden $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > c \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > c \middle| \mathbb{Y}_m = y \right) P(\mathbb{Y}_m = y) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} P \left(\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \sum_{i=1}^k (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}})) \right\|}{k} > c \middle| \mathbb{Y}_m = 0 \right) P(\mathbb{Y}_m = y) =: \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} p_{c,y} P(\mathbb{Y}_m = y). \end{aligned}$$

A fessség miatt minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan $K \subset \mathbb{Z}^{p+1}$ kompakt halmaz, melyre $P(\mathbb{Y}_m \notin K) < \delta/2$. Az (i) részben tett megállapítások szerint minden $y \in \mathbb{Z}^{p+1}$ esetén létezik olyan $c = c(y)$ küszöbszám, hogy $p_{c,y} < \delta/2$. Mivel K kompakt, ezért véges sok rácspontot tartalmaz. Így a $c_K := \max_{y \in K} c(y)$ maximum létezik.

Ekkor

$$P\left(\sup_{k \geq 1} \left\| \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} (\mathbb{Y}_{i-1} - E(\tilde{\mathbb{Y}}))}{k} \right\| > c_K\right) \leq \sum_{y \in K} \frac{\delta}{2} P(\mathbb{Y}_m = y) + \sum_{y \notin K} 1 P(\mathbb{Y}_m = y) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ezzel az (ii) részt is bizonyítottuk. $\square$

6.4. Lemma. *Legyen a (4)-hoz hasonlóan*

$$A = A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A^i\|^{1/i} = \varrho(A) < 1,$$

ahol $\varrho(A)$ az A mátrix spektrálsugara.

Bizonyítás. Gelfand tétele alapján [5] tetszőleges mátrixnormára teljesül, hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A^i\|^{1/i} = \varrho(A).$$

Így csak azt kell igazolnunk, hogy $\varrho(A) < 1$. A 4.1. Tétel alapján $\varrho(A_q) < 1$, ahol $q := \max\{r = 1, \dots, p : \mu_r > 0\}$. Az A mátrix felírásából jól látszik, hogy

$$A = \begin{bmatrix} A_q & 0 \\ C & B \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A blokk alsó trianguláris. Jól ismert, hogy ekkor A sajátértékei A_q és B sajátértékeinek összessége, B sajátértékei viszont mind nullák. Így $\varrho(A) = \varrho(A_q) < 1$, ezzel az állítást beláttuk. $\square$

6.5. Tétel. *Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, valamint az utódeloszlások és az innováció várható értékei végesek, akkor a következők teljesülnek tetszőleges $\ell \in \mathbb{N}$ esetén.*

$$(i) \quad \left\| E(\mathbb{X}_i) - E(\tilde{\mathbb{X}}) \right\| = O(\varrho(A)^i),$$

$$(ii) \quad \left\| E(\mathbb{X}_{\ell+i} | \mathcal{F}_\ell) - E(\tilde{\mathbb{X}}) \right\| = O_P(\varrho(A)^i),$$

(iii) *Amennyiben az utódeloszlások és az innováció második momentumai is végesek, akkor*

$$\left\| E(\mathbb{X}_i \mathbb{X}_i^T) - E(\tilde{\mathbb{X}} \tilde{\mathbb{X}}^T) \right\| = O(\varrho(A)^i),$$

(iv) *valamint*

$$\left\| E(\mathbb{X}_{\ell+i} \mathbb{X}_{\ell+i-1}^T | \mathcal{F}_\ell) - E(\tilde{\mathbb{X}} \tilde{\mathbb{X}}^T) \right\| = O_P(\varrho(A)^i).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{X}_k = A\mathbb{X}_{k-1} + M_k e_1 + \mu_\varepsilon e_1, \quad (11)$$

ahol $e_1 = [1 \ 0 \dots \ 0]^T$, hiszen

$$\begin{aligned} A\mathbb{X}_{i-1} &= \begin{bmatrix} \mu_1 X_{i-1} + \dots \mu_p X_{i-p} \\ X_{i-1} \\ \vdots \\ X_{i-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_i | \mathcal{F}_{k-1}) - \mu_\varepsilon \\ X_{i-1} \\ \vdots \\ X_{i-p+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_i - M_i - \mu_\varepsilon \\ X_{i-1} \\ \vdots \\ X_{i-p} \end{bmatrix} = \mathbb{X}_i - \begin{bmatrix} M_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy minden rögzített $\ell \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}_{\ell+i} | \mathcal{F}_\ell) &= E(M_{\ell+i} e_1 + \mu_\varepsilon e_1 + A\mathbb{X}_{\ell+i-1} | \mathcal{F}_\ell) \\ &= E(M_{\ell+i} e_1 | \mathcal{F}_\ell) + \mu_\varepsilon e_1 + A^1 E(\mathbb{X}_{\ell+i-1} | \mathcal{F}_\ell) \\ &= \mu_\varepsilon e_1 + A(\mu_\varepsilon e_1 + A(\mu_\varepsilon e_1 + A^1 E(\mathbb{X}_{\ell+i-2} | \mathcal{F}_\ell))) \\ &= \dots \\ &= (E + A^1 + \dots A^{i-1}) \mu_\varepsilon e_1 + A^i E(\mathbb{X}_\ell | \mathcal{F}_\ell) \\ &= (E + A^1 + \dots A^{i-1}) \mu_\varepsilon e_1 + A^i \mathbb{X}_\ell, \end{aligned} \quad (12)$$

hiszen $\mathbb{X}_\ell$ mérhető $\mathcal{F}_\ell$ -re nézve.

Így speciálisan $\ell = 0$ esetén

$$E(\mathbb{X}_i | \mathcal{F}_0) = E(\mathbb{X}_i) = (E + A + \dots + A^{i-1}) \mu_\varepsilon e_1 + A^i \mathbb{X}_0,$$

továbbá

$$E(\tilde{\mathbb{X}}) = \lim_{i \rightarrow \infty} E(\mathbb{X}_i) = (E + A + \dots) \mu_\varepsilon e_1 + 0 = (E - A)^{-1} \mu_\varepsilon e_1 < \infty,$$

hiszen $\mathbb{X}_0$ rögzített, A^i határértéke pedig 0, ha $i \rightarrow \infty$.

(i) Így azt kapjuk, hogy

$$\left\| E(\mathbb{X}_i) - E(\tilde{\mathbb{X}}) \right\| = \left\| A^i \mathbb{X}_0 - (A^i + A^{i+1} + \dots) \mu_\varepsilon e_1 \right\| \leq \left\| A^i \right\| \left\| \mathbb{X}_0 - (E - A)^{-1} \mu_\varepsilon e_1 \right\| = O(\varrho(A)^i).$$

Az utóbbi egyenlőséget a 6.4.Lemma alapján kaptuk, hiszen a második tényező rögzített, véges.

(ii) A bizonyítás hasonlóan történik, itt azt kapjuk, hogy

$$\left\| E(\mathbb{X}_{\ell+i} | \mathcal{F}_\ell) - E(\tilde{\mathbb{X}}) \right\| \leq \left\| A^i \right\| \left\| \mathbb{X}_\ell - (E - A)^{-1} \mu_\varepsilon e_1 \right\| = O_P(\varrho(A)^i),$$

hiszen $\left\| \mathbb{X}_\ell - (E - A)^{-1} \mu_\varepsilon e_1 \right\| = O_P(1)$.

(iii) Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T = \begin{bmatrix} X_i \\ \vdots \\ X_{i-p+1} \end{bmatrix} [X_i \quad \dots \quad X_{i-p+1}] = \begin{bmatrix} X_i^2 & X_i X_{i-1} & \dots & X_i X_{i-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{i-p+1} X_i & X_{i-p+1} X_{i-1} & \dots & X_{i-p+1}^2 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

normája megegyezik

$$\mathbf{X}_i^{\oplus 2} = \begin{bmatrix} X_i^2 \\ \vdots \\ X_i X_{i-p+1} \\ \vdots \\ X_{i-p+1} X_i \\ \vdots \\ X_{i-p+1} X_{i-p+1} \end{bmatrix}_{p^2 \times 1}$$

normájával, hiszen ugyanazon elemekből állnak.

Ugyanígy belátható, hogy $E(\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T) - E(\tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{X}}^T)$ normája megegyezik $E(\mathbf{X}_i^{\oplus 2}) - E(\tilde{\mathbf{X}}^{\oplus 2})$ normájával. Így az állítás azzal ekvivalens, hogy $\left\| E(\mathbf{X}_i^{\oplus 2}) - E(\tilde{\mathbf{X}}^{\oplus 2}) \right\| = O(\varrho(A)^i)$. Ezt pedig a [10] cikk A.1 Lemmájának bizonyításával analóg módon láthatjuk be.

(iv) Amennyiben a második momentumok végesek, akkor 4.6. Megjegyzés alapján $E(\tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{X}}^T) < \infty$, így az (ii) rész bizonyításával analóg módon adódik a (iv) állítás. $\square$

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$I := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E \left(\begin{bmatrix} M_k^2 & M_k N_k \\ M_k N_k & N_k^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right),$$

valamint

$$J := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Legyen továbbá

$$I_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E \begin{bmatrix} M_k^2 & M_k N_k \\ M_k N_k & N_k^2 \end{bmatrix},$$

illetve

$$J_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(M_k^2).$$

6.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}_0$ teljesül, valamint $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$, illetve $0 < E(\varepsilon) < \infty$. Továbbá tegyük fel, hogy a folyamat nem degenerált, amin azt értjük, hogy $\sigma_2 \neq 0$, ahol σ_2 a szórásnagyságvektor.*

(i) *Ha minden második momentum véges, azaz $E(\xi_1(1,1)^2), \dots, E(\xi_p(1,1)^2)$, valamint $E(\varepsilon(1))^2$ mind végesek, akkor*

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} - \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} M_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m M_i \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1).$$

(ii) Amennyiben minden negyedik momentum véges, akkor

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{N}_{i,m} - \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} N_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m N_i \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1).$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\mathbf{Z}_i := \mathbf{Y}_i - E(\widehat{\mathbf{Y}})$ jelölést.

(i) Emlékeztetünk arra, hogy minden $i, m \in \mathbb{N}$ esetén $M_i = X_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Y}_{i-1}$, valamint $\widehat{M}_{i,m} = X_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbf{Y}_{i-1}$. Így

$$\widehat{M}_{i,m} - M_i = (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1}.$$

Jegyezzük meg, hogy (7) utolsó egyenlősége alapján $\sum_{i=1}^m \widehat{M}_{i,m} = 0$. Így

$$\begin{aligned} & \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} - \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} M_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m M_i \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\ &= \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\widehat{M}_{i,m} - M_i) - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (\widehat{M}_{i,m} - M_i) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\ &= \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} \right|}{g_\gamma(m, k)} \\ &= \sup_{k \geq 1} \frac{\left| (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbf{Z}_{i-1} - \frac{k}{m} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1} \right|}{g_\gamma(m, k)} \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{\left| (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbf{Z}_{i-1} \right|}{g_\gamma(m, k)} + \sup_{k \geq 1} \frac{k}{m} \frac{\left| (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1} \right|}{g_\gamma(m, k)} \\ &=: D_1(m, k) + D_2(m, k). \end{aligned}$$

Először mutassuk meg, hogy $D_2(m, k) = o_P(1)$, amennyiben $m \rightarrow \infty$.

Felhasználva a $g_\gamma(m, k)$ függvényre adott becsléseket, valamint az 5.3. Állítás (ii) részét, mely szerint $\sqrt{m} \|\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T\| = O_P(1)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_2(m, k) &\leq \sup_{1 \leq k < m} \left| \frac{k}{m} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}}{g_\gamma(m, k)} \right| + \sup_{m \leq k} \left| \frac{k}{m} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}}{g_\gamma(m, k)} \right| \\ &\leq \sup_{1 \leq k < m} \left| \frac{k}{m} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}}{C_1 m^{1/2-\gamma} k^\gamma} \right| + \sup_{m \leq k} \left| \frac{k}{m} (\boldsymbol{\mu}^T - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}}{C_2 m^{-1/2} k} \right| \\ &= O_P(1) \frac{\|\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}\|}{m} \sup_{1 \leq k < m} \left(\frac{k}{m} \right)^{1-\gamma} + O_P(1) \sup_{m \leq k} \frac{\|\sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i-1}\|}{m} \\ &= O_P(1) o_P(1) + O_P(1) o_P(1) = o_P(1), \end{aligned}$$

amennyiben $m \rightarrow \infty$. Az utóbbi lépés első részében $\mathbf{Y}$ ergodicitását használtuk fel, míg a másodiknál a 6.3. Lemma (i) pontját, $a_m = m$ választással.

Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy $D_1(m, k) = o_P(1)$, ha $m \rightarrow \infty$. A korábbi

jelölésekkel élve

$$D_1(m, k) \leq \sup_{1 \leq k \leq \sqrt{m}} \left| (\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}}{g_\gamma(m, k)} \right| + \sup_{\sqrt{m} < k \leq m} \left| (\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}}{g_\gamma(m, k)} \right| \\ + \sup_{m < k} \left| (\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}}{g_\gamma(m, k)} \right| =: B_1(m, k) + B_2(m, k) + B_3(m, k).$$

Felhasználva a (9) becslést, valamint az 5.3. Lemma (ii) pontját, kapjuk, hogy

$$B_1(m, k) \leq \sup_{1 \leq k \leq \sqrt{m}} \left| (\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}}{C_1 m^{1/2-\gamma} k^\gamma} \right| \\ \leq \sqrt{m} \|\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T\| \sup_{1 \leq k \leq \sqrt{m}} \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k} \left(\frac{k}{m} \right)^{1-\gamma} \\ \leq O_P(1) \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right)^{1-\gamma} \sup_{1 \leq k} \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k} = O_P(1) o_P(1) O_P(1) = o_P(1).$$

Hasonlóan az 5.3. Lemma (ii) pontja alkalmazásával, $a_m = \sqrt{m}$ mellett

$$B_2(m, k) \leq \sup_{\sqrt{m} < k \leq m} \left| (\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}}{C_1 m^{1/2-\gamma} k^\gamma} \right| \\ \leq \sup_{\sqrt{m} < k \leq m} \sqrt{m} \|\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T\| \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k} \left(\frac{k}{m} \right)^{1-\gamma} \\ \leq O_P(1) \sup_{\sqrt{m} < k \leq m} \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k} \leq O_P(1) \sup_{\sqrt{m} < k} \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k} = O_P(1) o_P(1).$$

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy $B_3(m, k) = o_P(1)$. A korábbiakhoz hasonlóan

$$B_3(m, k) \leq \sup_{m < k} \|\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T\| \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{C_2 m^{-1/2} k} = O_P(1) \sup_{m < k} \frac{\|\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Z}_{i-1}\|}{k}.$$

Ebből következik, hogy $D_1(m, k) = o_P(1)$. Összegezve az eredményeket kapjuk, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \left\| \frac{\sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} - \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} M_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m M_i \right)}{g_\gamma(m, k)} \right\| \leq D_1(m, k) + D_2(m, k) = o_P(1),$$

ami épp a tétel állítása.

(ii) Emlékeztetünk rá, hogy minden $i, m \in \mathbb{N}$ esetén $N_i = M_i^2 - \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbb{Y}_{i-1}$, valamint $\hat{N}_{i,m} = \widehat{M}_{i,m}^2 - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2,m} \mathbb{Y}_{i-1}$. Így

$$\hat{N}_{i,m} - N_i = (\widehat{M}_{i,m}^2 - M_i^2) + (\boldsymbol{\sigma}_2 - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2,m}) \mathbb{Y}_{i-1}.$$

Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^m \hat{N}_{i,m} = 0$, hiszen ez épp a paraméterbecsléskor megoldandó (8) utolsó egyenlete. Így a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával, az (i) részben látottakhoz hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned}
& \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \hat{N}_{i,m} - \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} N_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m N_i \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&= \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\hat{N}_{i,m} - N_i) - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{N}_i - N_i) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&\leq \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} (\hat{M}_{i,m}^2 - M_i^2) - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{M}_{i,m}^2 - M_i^2) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&\quad + \sup_{k \geq 1} \frac{\left| (\boldsymbol{\sigma}_2^T - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^T) \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Y}_{i-1} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&=: \tilde{D}_1(m, k) + \tilde{D}_2(m, k).
\end{aligned}$$

Annak bizonyítása, hogy $\tilde{D}_2(m, k) = o_P(1)$, az (i) részben látott bizonyításhoz hasonlóan történik, és alkalmaznunk kell az 5.3. Lemma (ii) pontját, mely alapján $\sqrt{m} \|\boldsymbol{\sigma}_2^T - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2,m}^T\| = O_P(1)$. Ezért ezt nem részletezzük. A továbbiakban megmutatjuk, hogy $\tilde{D}_1(m, k) = o_P(1)$, ha $m \rightarrow \infty$. Tudjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{i,m}^2 - M_i^2 &= \left(X_k - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbb{Y}_{i-1} \right)^2 - \left(X_k - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1} \right)^2 \\
&= \left(\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \right) 2X_i \mathbb{Y}_{i-1} + \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_m - \boldsymbol{\mu}^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \boldsymbol{\mu} \\
&= \left(\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \right) 2X_i \mathbb{Y}_{i-1} + \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T (\hat{\boldsymbol{\mu}}_m - \boldsymbol{\mu}) + \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T - \boldsymbol{\mu}^T \right) \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \boldsymbol{\mu} \\
&= \left(\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \right) 2X_i \mathbb{Y}_{i-1} + \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T - \boldsymbol{\mu}^T \right) \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T (\hat{\boldsymbol{\mu}}_m + \boldsymbol{\mu}),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a második tag skalár, így egyenlő transzponáltjával. Így az erős konzisztencia miatt

$$\begin{aligned}
\hat{D}_1(m, k) &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{\left| 2(\boldsymbol{\mu}^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} X_i \mathbb{Y}_{i-1} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1} \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&\quad + \sup_{k \geq 1} \frac{\left| \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T - \boldsymbol{\mu}^T \right) \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{Y}_{i-1} \mathbb{Y}_{i-1}^T \right) (\hat{\boldsymbol{\mu}}_m + \boldsymbol{\mu}) \right|}{g_\gamma(m, k)} \\
&=: C_1(m, k) + C_2(m, k)
\end{aligned}$$

Amennyiben teljesül, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^m X_i \mathbb{Y}_{i-1}}{m} \rightarrow E \left(\tilde{X} \tilde{\mathbb{Y}} \right) \quad \text{m.b.} \quad m \rightarrow \infty,$$

akkor a $C_1(m, k) = o_P(1)$ bizonyítása szintén az (i)-ben látottak alapján történik. A feltétel pedig az ergodicitásból levezethető.

Mivel $\boldsymbol{\mu}$ konstans és az 5.3. Lemma (ii) pontja alapján $\hat{\boldsymbol{\mu}}^T = O_P(1)$, ha $m \rightarrow \infty$, ezért a másik esetet is visszavezethetjük a korábbi bizonyításra, amennyiben

$$\frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_{i-1} \mathbf{Y}_{i-1}^T}{m} \rightarrow E(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T) \quad \text{m.b.,} \quad m \rightarrow \infty,$$

amely (6) alapján teljesül. Így az állítás a korábban látottakhoz hasonlóan adódik. $\square$

6.7. Lemma. *Amennyiben teljesül a $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, továbbá $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$,*

(i) valamint végesek az utóeloszlások és az innováció második momentumai, akkor

$$I = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_2^T E(\tilde{\mathbf{Y}}) & \boldsymbol{\sigma}_3^T E(\tilde{\mathbf{Y}}) \\ \boldsymbol{\sigma}_3^T E(\tilde{\mathbf{Y}}) & 2\boldsymbol{\sigma}_2^T E(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T) \boldsymbol{\sigma}_2 + (\boldsymbol{\sigma}_4^T - 3\boldsymbol{\sigma}_2^{(2)}) E(\tilde{\mathbf{Y}}) \end{bmatrix}.$$

(ii) Amennyiben az utóeloszlások és az innováció várható értékei végesek, akkor

$$J = \boldsymbol{\sigma}_2^T E(\tilde{\mathbf{Y}}).$$

Bizonyítás. (i) A definíció értelmében

$$I = \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})}{n} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E(M_k N_k | \mathcal{F}_{k-1})}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E(M_k N_k | \mathcal{F}_{k-1})}{n} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E(N_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})}{n} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Az 5.1. Lemma (ii) pontjának értelmében $E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{\sigma}_2^T E(\mathbf{Y}_{k-1})$.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén M_k és N_k definíciója szerint, valamint az 5.1. Lemma alapján

$$\begin{aligned} E(M_k N_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= E(M_k (M_k^2 - E(M_k | \mathcal{F}_{k-1}))^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= E(M_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}) - E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) E(M_k | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= E(M_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}) = \boldsymbol{\sigma}_3^T \mathbf{Y}_{k-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ismét alkalmazva az 5.1. Lemmát, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} E(N_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) &= E((M_k^2 - E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))^2 | \mathcal{F}_{k-1}) = E(M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}) - (E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))^2 \\ &= 3\boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{Y}_{k-1}^T \boldsymbol{\sigma}_2 + (\boldsymbol{\sigma}_4^T - 3\boldsymbol{\sigma}_2^{(2)}) \mathbf{Y}_{k-1} - \boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{Y}_{k-1}^T \boldsymbol{\sigma}_2 \\ &= 2\boldsymbol{\sigma}_2^T \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{Y}_{k-1}^T \boldsymbol{\sigma}_2 + (\boldsymbol{\sigma}_4^T - 3\boldsymbol{\sigma}_2^{(2)}) \mathbf{Y}_{k-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Alkalmazva a 4.6. Lemmát, az ergodicitásból következik, hogy I valóban a fenti alakú.

(ii) Vegyük észre, hogy J az I mátrix első komponense, továbbá az (i) rész bizonyításában az első komponensnél csak $1/n \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}_k$ konvergenciájára volt szükség, melyhez elegendő, ha a várható értékek végesek. $\square$

6.8. Állítás. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, akkor teljesülnek a következők.*

- (i) Ha az innováció és az utódeloszlások várható értékei is végesek, akkor a korábban bevezetett $J \geq 0$, továbbá, ha $\sigma_{2,\varepsilon} > 0$, akkor $J > 0$.
- (ii) Tegyük fel, hogy az innováció és az utódeloszlások második momentumai végesek, ekkor az I mátrix kovariancia mátrix, tehát I pozitív szemidefinit, azaz $\det(I) \geq 0$. Amennyiben teljesül, hogy az ε innovációnak létezik 3 különböző értéke, melyeket pozitív valószínűséggel felvesz, akkor I pozitív definit, azaz $\det(I) > 0$.

Bizonyítás. (i) A 6.7. Lemma (ii) pontja alapján

$$J = \sigma_2^T E(\tilde{Y}) = \underline{\sigma}_2^T E(\tilde{X}) + \sigma_{2,\varepsilon} \geq \sigma_{2,\varepsilon} > 0,$$

hiszen a szórásnégyzetek nemnegatívak, és a folyamat nemnegativitása miatt $E(\tilde{X})$ elemei is mind nemnegatívak. A lépések során felhasználtuk, hogy $\tilde{Y} = [\tilde{X} \ 1]^T$. Ezzel az (i) részt beláttuk.

(ii) Mutassuk meg, hogy I valóban kovarianciamátrix. Tekintsük azt az $\{Y_i, i \geq 0\}$ folyamatot, melyre $Y_0 \stackrel{D}{=} \tilde{Y}$, azaz kezdeti állapota stacionárius eloszlású. Legyen $\tilde{M} = X_1 - E(X_1|\mathcal{F}_0)$, valamint $\tilde{N} = \tilde{M}^2 - E(\tilde{M}^2|\mathcal{F}_0)$. Ekkor (14) alapján

$$E(\tilde{M}^2) = E(E(\tilde{M}^2|\mathcal{F}_0)) = \sigma_2^T E(\tilde{Y}), \quad E(\tilde{M}\tilde{N}) = E(E(\tilde{M}\tilde{N}|\mathcal{F}_0)) = \sigma_3^T E(\tilde{Y}), \quad (16)$$

valamint

$$\begin{aligned} E(\tilde{N}^2) &= E(E(\tilde{N}^2|\mathcal{F}_0)) = E(2\sigma_2^T \tilde{Y} \tilde{Y}^T \sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)}) \tilde{Y}) \\ &= 2\sigma_2^T E(\tilde{Y} \tilde{Y}^T) \sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)}) E(\tilde{Y}). \end{aligned} \quad (17)$$

Így azt kaptuk, hogy

$$I = \text{Cov} \begin{bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

hiszen az $\begin{bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}$ vektor várható értéke 0. Tehát I valóban kovarianciamátrix, amiből az is következik, hogy pozitív szemidefinit.

Ismert, hogy $\det(I) = 0$ pontosan akkor, ha léteznek olyan c_1 és c_2 konstansok, hogy $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, valamint teljesül, hogy

$$c_1 \tilde{M} + c_2 \tilde{N} = 0 \quad \text{m.b.}$$

Az állítás feltételei alapján léteznek olyan különböző $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ és ε_3 értékek, melyeket az ε innováció pozitív valószínűséggel vesz fel. Pozitív valószínűséggel bekövetkezik az az A' esemény, hogy valamely p egymást követő generáció során az utódeloszlások mind nullák, az innováció pedig minden lépésben az ε_1 értékét veszi fel.

Ezen A' esemény mellett

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = X_1 - E(X_1|\mathcal{F}_0) = \varepsilon_1 - \mu^T \tilde{Y}, \quad \tilde{N} = \tilde{M}^2 - E(\tilde{M}^2|\mathcal{F}_0) = \tilde{M}^2 - \sigma_2^T \tilde{Y}$$

teljesülnek, ahol $\varepsilon_1 = [\varepsilon_1 \ \dots \ \varepsilon_1]^T$. Ekkor

$$\tilde{M} = \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_1 - \dots - \mu_p \varepsilon_1 - \mu_\varepsilon = \varepsilon_1 (1 - \mu_1 - \dots - \mu_p) - \mu_\varepsilon =: \varepsilon_1 a - \mu_\varepsilon,$$

valamint ehhez hasonlóan

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \varepsilon_1^2 a^2 - 2a\varepsilon_1\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon^2 - \sigma_2^T \tilde{\mathbf{Y}} =: \varepsilon_1^2 a^2 - 2a\varepsilon_1\mu_\varepsilon + \mu_\varepsilon^2 - \varepsilon_1 b - \sigma_{2,\varepsilon} \\ &= -\varepsilon_1(2a\mu_\varepsilon + b) + \varepsilon_1^2 a^2 + (\mu_\varepsilon^2 - \sigma_{2,\varepsilon}).\end{aligned}$$

Az eddig leírtak pozitív valószínűséggel teljesülnek ε_1 mellett ε_2 és ε_3 esetén is. Tegyük fel, hogy $\det(I) = 0$, ekkor léteznek megfelelő c_1 és c_2 konstansok, melyekre

$$c_1(\varepsilon_1 a - \mu_\varepsilon) + c_2(-\varepsilon_1(2a\mu_\varepsilon + b) + \varepsilon_1^2 a^2 + (\mu_\varepsilon^2 - \sigma_{2,\varepsilon})) = 0.$$

Átalakítva az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon_1^2(c_2 a^2) + \varepsilon_1(c_1 a - (2a\mu_\varepsilon + b)c_2) - c_1\mu_\varepsilon + c_2(\mu_\varepsilon^2 - \sigma_{2,\varepsilon}) = 0.$$

Amennyiben az egyenlet másodfokú, akkor két megoldása van, ami azt jelenti, hogy csak az innováció két lehetséges értéke esetén elégítheti ki a felírt egyenletet. Mivel ezen c_1, c_2 konstansokkal az egyenletnek mindhárom ε érték mellett teljesülnie kellene, ezért ellentmondásra jutunk. Az elsőfokú esetben, ami akkor fordul elő, ha $c_2 = 0$ és $c_1 \neq 1$, az egyenlet a $c_1 \widehat{M} = 0$ egyenletre redukálódik, ahol $c_1 \neq 0$. Így ez csak akkor teljesülhet, ha

$$\widehat{M} = \varepsilon_1 a - \mu_\varepsilon = 0.$$

Ez az egyenlet azonban elsőfokú, így legfeljebb egy megoldása van, tehát szintén nem lehet igaz mindhárom ε érték esetén a feltevés. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

6.9. Lemma. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis mellett, amennyiben $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$, akkor teljesülnek az alábbi állítások.*

- (i) *Amennyiben az utódeloszlások és az innováció várható értékei végesek, akkor $\hat{J}_m \rightarrow J$ majdnem biztosan, amint $m \rightarrow \infty$.*
- (ii) *Amennyiben az utódeloszlások és az innováció második momentumai végesek, akkor*

$$\hat{I}_m \rightarrow I$$

majdnem biztosan, ha $m \rightarrow \infty$.

Tehát a becslések erősen konzisztensek.

Bizonyítás. Használjuk fel az 5.3. Lemmát, valamint az (5) állítást, ekkor kapjuk, hogy

$$\hat{J}_m - J = \hat{\sigma}_{2,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j}{m} - \sigma_2^T E(\tilde{\mathbf{Y}}) = (\hat{\sigma}_{2,m}^T - \sigma_2^T) \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j}{m} + \sigma_2^T \left(\frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j}{m} - E(\tilde{\mathbf{Y}}) \right) \rightarrow 0 \quad \text{m.b.},$$

ha $m \rightarrow \infty$. Ezzel az (i) részt bizonyítottuk, valamint beláttuk, hogy az (ii) állításban szereplő mátrix első komponense konvergens. A bizonyítás teljességéhez meg kell mutatni a konvergenciát a többi komponensre is. A továbbiakban részletezzük az utolsó komponens konvergenciájának bizonyítását. Az összeg második tagja az előbb látottakkal analóg. Az első tagra pedig teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{2,m}^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j^T}{m} \hat{\sigma}_{2,m} - \sigma_2^T E(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T) \sigma_2 &= (\hat{\sigma}_{2,m}^T - \sigma_2^T) \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j^T}{m} \hat{\sigma}_{2,m} \\ &+ \sigma_2^T \left(\frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j^T}{m} - E(\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T) \right) \sigma_2 + \sigma_2^T \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j \mathbf{Y}_j^T}{m} (\hat{\sigma}_{2,m} - \sigma_2) \rightarrow 0 \quad \text{m.b.},\end{aligned}$$

ha $m \rightarrow \infty$. A többi komponensre a konvergencia bizonyítása ugyanígy történik. $\square$

Így azt megmutattuk, hogy az előbbi becslések erősen konzisztensek. A következő állítás alapján később a konvergencia sebességét is megbecsüljük.

6.10. Állítás. *A $\mathcal{H}_0$ nullhipotézis, továbbá $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$ és $0 < \mu_\varepsilon < \infty$ esetén,*

(i) amennyiben az utódeloszlások és az innováció várható értékei végesek, akkor

$$\left\| E(M_i^2) - E(\widetilde{M}^2) \right\| = O(\varrho(A)^i),$$

(ii) valamint tetszőleges $l \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| E(M_{l+i}^2 | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{M}^2) \right\| = O_P(\varrho(A)^i).$$

(iii) Ha az utódeloszlások és az innováció második momentumai végesek, akkor

$$\left\| E \begin{bmatrix} M_i^2 & M_i N_i \\ M_i N_i & N_i^2 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M} \widetilde{N} \\ \widetilde{M} \widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| = O(\varrho(A)^i),$$

továbbá tetszőleges $l \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| E \left(\begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i} N_{l+i} \\ M_{l+i} N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) - E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M} \widetilde{N} \\ \widetilde{M} \widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| = O_P(\varrho(A)^i),$$

Bizonyítás. (i) Az 5.1. Lemma (ii) pontja és (16) alapján

$$\begin{aligned} \left\| E(M_i^2) - E(\widetilde{M}^2) \right\| &= \left\| \boldsymbol{\sigma}_2^T \left(E(\mathbf{Y}_{i-1}) - E(\widetilde{\mathbf{Y}}) \right) \right\| \leq \\ &\left\| \boldsymbol{\sigma}_2^T \right\| \left\| E(\mathbf{Y}_{i-1}) - E(\widetilde{\mathbf{Y}}) \right\| = O(\varrho(A)^{i-1}) = O(\varrho(A)^i) \end{aligned}$$

a 6.5. Tétel (i) pontja szerint. Ezzel az (i) rész állítását beláttuk.

(ii) Szintén az 5.1. Lemma (ii) pontja és (16) alapján

$$\begin{aligned} \left\| E(M_{l+i}^2 | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{M}^2) \right\| &= \left\| \boldsymbol{\sigma}_2^T E(\mathbf{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - \boldsymbol{\sigma}_2^T E(\widetilde{\mathbf{Y}}) \right\| \leq \\ &\left\| \boldsymbol{\sigma}_2^T \right\| \left\| E(\mathbf{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{\mathbf{Y}}) \right\| = O(1) O_P(\varrho(A)^{i-1}) = O_P(\varrho(A)^i). \end{aligned}$$

Ezzel az (ii) pontot beláttuk.

(iii) Bizonyítsunk komponensenként, hiszen definíció szerint a norma megegyezik a komponensek normáinak összegével. Vegyük észre, hogy az (i) részben épp az első komponensre vonatkozó állítás szerepelt. Hasonlóan (14) és (16) alapján, felhasználva a 6.5. Tétel (i) pontját, kapjuk, hogy

$$\left\| E(M_i N_i) - E(\widetilde{M} \widetilde{N}) \right\| = \left\| \boldsymbol{\sigma}_3^T E(\mathbf{Y}_{i-1} - \widetilde{\mathbf{Y}}) \right\| = O(\varrho(A)^{i-1}) = O(\varrho(A)^i).$$

Végül (15) és (17) alapján

$$\begin{aligned} \left\| E(N_i N_i) - E(\widetilde{N}^2) \right\| &= \left\| 2\boldsymbol{\sigma}_2^T E(\mathbf{Y}_{i-1} \mathbf{Y}_{i-1} - \widetilde{\mathbf{Y}} \widetilde{\mathbf{Y}}) \boldsymbol{\sigma}_2 + (\boldsymbol{\sigma}_4^T - 3\boldsymbol{\sigma}_2^{(2)}) E(\mathbf{Y}_{i-1} - \widetilde{\mathbf{Y}}) \right\| \\ &= O(\varrho(A)^{i-1}) = O(\varrho(A)^i) \end{aligned}$$

a 6.5. Tétel (i) és (iii) pontjai szerint. A második momentumok létezését itt használtuk fel. Így már adódik az állítás, hiszen

$$\begin{aligned} & \left\| E \begin{bmatrix} M_i^2 & M_i N_i \\ M_i N_i & N_i^2 \end{bmatrix} - E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M} \widetilde{N} \\ \widetilde{M} \widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| \\ & \leq \left\| E(M_i^2 - \widetilde{M}^2) \right\| + 2 \left\| E(M_i N_i - \widetilde{M} \widetilde{N}) \right\| + \left\| E(N_i^2 - \widetilde{N}^2) \right\| = 4 O(\varrho(A)^i) = O(\varrho(A)^i). \end{aligned}$$

(iv) A bizonyítás az (iii) rész bizonyításával analóg, szintén a komponensek normáját vizsgáljuk, majd alkalmazzuk a 6.5. Lemma (ii) és (iv) pontjait. A hasonlóság miatt csak az utolsó komponensre részletezzük a bizonyítást. Felhasználva a (15) formulát, adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \left\| E(N_{l+i} N_{l+i} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{N}^2) \right\| = \left\| E(E(N_{l+i} N_{l+i} | \mathcal{F}_{l+i-1}) | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{N}^2) \right\| \\ & = \left\| 2\sigma_2^T \left(E(\mathbb{Y}_{l+i-1} \mathbb{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{\mathbb{Y}} \widetilde{\mathbb{Y}}) \right) \sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)}) \left(E(\mathbb{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{\mathbb{Y}}) \right) \right\| \\ & \leq \left\| 2\sigma_2^T \right\| \left\| E(\mathbb{Y}_{l+i-1} \mathbb{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{\mathbb{Y}} \widetilde{\mathbb{Y}}) \right\| \left\| \sigma_2 \right\| + \left\| \sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)} \right\| \left\| E(\mathbb{Y}_{l+i-1} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{\mathbb{Y}}) \right\| \\ & = O(1) O_P(\varrho(A)^{i-1}) O(1) + O(1) O(\varrho(A)^{i-1}) = O_P(\varrho(A)^i). \end{aligned}$$

A többi komponensre hasonló nagyságrend belátható ugyanezzel a módszerrel. Így

$$\begin{aligned} & \left\| E \left(\begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i} N_{l+i} \\ M_{l+i} N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) - E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M} \widetilde{N} \\ \widetilde{M} \widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| \\ & \leq \left\| E(M_{l+i}^2 | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{M}^2) \right\| + 2 \left\| E(M_{l+i} N_{l+i} | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{M} \widetilde{N}) \right\| + \left\| E(N_{l+i}^2 | \mathcal{F}_l) - E(\widetilde{N}^2) \right\| \\ & = O_P(\varrho(A)^i) + 2 O_P((\varrho(A)^i) + O_P(\varrho(A)^i) = O_P(\varrho(A)^i). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk. $\square$

A következő tétel Eberlein ([3], Theorem 1.) eredménye (1986). A tételben szereplő normákat a 2.1. Megjegyzésben vezettük be.

6.11. Tétel. (Eberlein, 1986). Legyen $\{S_k\}_{k \geq 1}$ d -dimenziós véletlen vektorok sorozata, valamint minden $l \geq 0$ és $k \geq 1$ esetén $\mathcal{G}_l$ az $S_1, \dots, S_l$ vektorok által generált σ -algebra és $T_k(l) := S_{l+1} + \dots + S_{l+k}$. Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $E(S_k) = 0$ minden $k \geq 1$ esetén.

(b) Létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$\sup_{l \geq 0} \left\| E(T_k(l) | \mathcal{G}_l) \right\|_1 = O(k^{1/2-\delta}).$$

(c) Létezik egy $\delta > 0$, valamint egy Σ kovariancia-mátrix, melyekre

$$\sup_{l \geq 0} \left\| E\{T_k(l) T_k(l)^T\} - k \Sigma \right\| = O(k^{1-\delta}).$$

(d) Létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$\sup_{l \geq 0} \left\| E\{T_k(l) T_k(l)^T | \mathcal{G}_l\} - E\{T_k(l) T_k(l)^T\} \right\|_1 = O(k^{1-\delta}).$$

(e) Létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$\sup_{k \geq 1} E \left(\|S_k\|^{2+\delta} \right) < \infty.$$

Ekkor létezik olyan $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{P}')$ valószínűségi mező, valamint egy ezen definiált $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat és egy $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ d -dimenziós standard Wiener-folyamat úgy, hogy az $\{S'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat az $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozattal azonos eloszlású, továbbá létezik egy olyan $\kappa > 2$ konstans, melyre

$$\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} S'_k - \Sigma^{1/2} \mathcal{W}(t) = O(t^{1/\kappa}), \quad \text{m.b.,} \quad t \rightarrow \infty.$$

6.12. Tétel. Tegyük fel, hogy a nullhipotézis teljesül, valamint $0 < \mu_\varepsilon < \infty$. Legyen $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ az (1)-ben definiált sorozat, melyre $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p < 1$, ahol $\mu_p > 0$.

(i) Legyen $E(\xi_1^4), \dots, E(\xi_p^4), E(\varepsilon^4) < \infty$. Ekkor létezik olyan $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{P}')$ valószínűségi mező, valamint egy ezen definiált $\{M'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat és egy $\{W(t), t > 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat úgy, hogy $\{M'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ azonos eloszlású sorozatok és

$$\sum_{j=1}^k M'_j - J^{1/2} W(k) = O(k^{1/\kappa}) \quad \text{m.b., amint } k \rightarrow \infty,$$

ahol $\kappa > 2$ és $J = \sigma_2^T E(\tilde{Y})$.

(ii) Legyen $E(\xi_1^8), \dots, E(\xi_p^8), E(\varepsilon^8) < \infty$. Ekkor létezik olyan $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{P}')$ valószínűségi mező, valamint léteznek az $\{M'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és $\{N'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok, melyek rendre azonos eloszlásúak a $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokkal. Ekkor létezik olyan kétdimenziós standard $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ Wiener-folyamat, melyre

$$\sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - I^{1/2} \mathcal{W}(k) = O(k^{1/\kappa}) \quad \text{m.b., amint } k \rightarrow \infty,$$

ahol $\kappa > 2$ és

$$I = \begin{bmatrix} \sigma_2^T E(\tilde{Y}) & \sigma_3^T E(\tilde{Y}) \\ \sigma_3^T E(\tilde{Y}) & 2\sigma_2^T E(\tilde{Y}\tilde{Y}^T)\sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)})E(\tilde{Y}) \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 6.11. Tételt, az (i) rész esetén $S_k = M_k$ -ra, míg az (ii) résznél $S_k := \begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix}$ -ra. Ehhez azonban a tételben szereplő feltételeknek teljesülniük kell, így a továbbiakban ezeket ellenőrizzük. Az (i) rész bizonyítása a (ii) egyszerűbb esete, ezért (ii)-t bizonyítjuk.

Mivel $\mathbb{X}_0$ determinisztikus, ezért az $\left\{ \begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix} \right\}_{1 \leq k \leq n}$ által generált $\mathcal{G}_n$ filtráció megegyezik az $\mathcal{F}_n$ filtrációval.

(a) A toronyszabály alkalmazásával

$$E \left(\begin{bmatrix} M_k \\ N_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E(X_k - E(X_k | \mathcal{F}_{k-1})) \\ E(M_k^2 - E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_k) - E(E(X_k | \mathcal{F}_{k-1})) \\ E(M_k^2) - E(E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})) \end{bmatrix} = 0.$$

(b) A toronyszabály ismételt alkalmazásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \sup_{l \geq 0} \|E(T_k(l) | \mathcal{G}_l)\|_1 &= \sup_{l \geq 0} \left\| E \left(\begin{bmatrix} M_{l+1} \\ N_{l+1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) \right\|_1 \\ &= \sup_{l \geq 0} \left\| 0 + E \left(\begin{bmatrix} M_{l+2} \\ N_{l+2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) \right\|_1 \\ &= \sup_{l \geq 0} \left\| 0 + E \left(E \left(\begin{bmatrix} M_{l+2} \\ N_{l+2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_{l+1} \right) \middle| \mathcal{F}_l \right) \right\|_1 \\ &= \sup_{l \geq 0} \left\| 0 + E \left(0 + E \left(\begin{bmatrix} M_{l+3} \\ N_{l+3} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_{l+1} \right) \middle| \mathcal{F}_l \right) \right\|_1 \\ &= \dots = 0, \end{aligned}$$

azaz $\delta = 1/2$ megfelelő.

(c) Először mutassuk meg, hogy

$$E(T_k(l)T_k(l)^T) = \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} E(T_k(l)T_k(l)^T) &= E \left(\left(\begin{bmatrix} M_{l+1} \\ N_{l+1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} M_{l+1} \\ N_{l+1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} M_{l+k} \\ N_{l+k} \end{bmatrix} \right)^T \right) \\ &= E \left(\left(\begin{bmatrix} M_{l+1} + \dots + M_{l+k} \\ N_{l+1} + \dots + N_{l+k} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} M_{l+1} + \dots + M_{l+k} \\ N_{l+1} + \dots + N_{l+k} \end{bmatrix} \right)^T \right) \\ &= E \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right)^2 & \left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right) \left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right) \\ \left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right) \left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right) & \left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E \left(\left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right)^2 \right) & E \left(\left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right) \left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right) \right) \\ E \left(\left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right) \left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right) \right) & E \left(\left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right)^2 \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ezért azt kell belátnunk, hogy

$$E \left(\left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^k E(M_{l+i}^2), \quad (19)$$

$$E \left(\left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^k E(N_{l+i}^2), \quad (20)$$

valamint

$$E \left(\left(\sum_{i=1}^k M_{l+i} \right) \left(\sum_{i=1}^k N_{l+i} \right) \right) = \sum_{i=1}^k E(M_{l+i}N_{l+i}). \quad (21)$$

A (19) állítás adódik, hiszen amennyiben $i \neq j$, akkor feltehető, hogy $i < j$, és így

$$\begin{aligned} E(M_{l+i}M_{l+j}) &= E(E(M_{l+i}M_{l+j}|\mathcal{F}_{l+i})) = E(M_{l+i}E(M_{l+j}|\mathcal{F}_{l+i})) \\ &= E(M_{l+i}E(E(M_{l+j}|F_{l+j-1})|\mathcal{F}_{l+i})) = E(M_{l+i}E(E(M_{l+j}|F_{l+j-1})|\mathcal{F}_{l+i})) = 0. \end{aligned}$$

A (20) és a (21) állítások analóg módon bizonyíthatóak.

Így felhasználva a (18) formulát, azt kapjuk, hogy a (c) pont állítása

$$\sup_{\ell > 0} \left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| = O(k^{1-\delta}),$$

alakban írható fel valamely $\delta > 0$ konstansra.

A háromszög-egyenlőtlenség és a 6.10. Lemma (iii) pontjának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\sup_{\ell > 0} \left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \sup_{\ell > 0} \sum_{i=1}^k \left\| E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| = \sup_{\ell > 0} \sum_{i=1}^k O(\varrho(A)^i) \\ &= \sum_{i=1}^k O(\varrho(A)^i) = O\left(\sum_{i=1}^k \varrho(A)^i\right) = O\left(\frac{(\varrho(A))^{k+1} - 1}{\varrho(A) - 1}\right) = O(1), \end{aligned}$$

hiszen $0 < \varrho(A) < 1$. Így a (c) pont teljesül $\delta = 1$ választással.

(d) Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} E(M_{l+i}M_{l+j}|\mathcal{F}_l) &= E(E(M_{l+i}M_{l+j}|\mathcal{F}_{l+i})|\mathcal{F}_l) = E(M_{l+i}E(M_{l+j}|\mathcal{F}_{l+i})|\mathcal{F}_l) \\ &= E(M_{l+i}E(E(M_{l+j}|F_{l+j-1})|\mathcal{F}_{l+i})|\mathcal{F}_l) = E(M_{l+i}E(E(M_{l+j}|F_{l+j-1})|\mathcal{F}_{l+i})|\mathcal{F}_l) = 0, \end{aligned}$$

a (c) pontban látottakkal analóg módon adódik, hogy

$$E(T_k(l)T_k(l)^T|\mathcal{F}_l) = \sum_{i=1}^k E \left(\begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right).$$

A 6.10. Lemma (iv) pontjának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| = O(1).$$

Így az is teljesül, hogy

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\|_1 \\ &= E \left(\left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\| \right) = O(1). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt, a háromszög egyenlőtlenséget, illetve a supremum szubadditivitását. Ekkor az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
& \sup_{l \geq 0} \left\| E\{T_k(l)T_k(l)^T | \mathcal{G}_l\} - E\{T_k(l)T_k(l)^T\} \right\|_1 \\
&= \sup_{\ell \geq 0} \left\| \sum_{i=1}^k E \left(\begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) - E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \right\|_1 \\
&\leq \sup_{\ell \geq 0} \left\| \sum_{i=1}^k E \left(\begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_l \right) - k E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\|_1 \\
&\quad + \sup_{\ell \geq 0} \left\| \sum_{i=1}^k E \begin{bmatrix} M_{l+i}^2 & M_{l+i}N_{l+i} \\ M_{l+i}N_{l+i} & N_{l+i}^2 \end{bmatrix} - k E \begin{bmatrix} \widetilde{M}^2 & \widetilde{M}\widetilde{N} \\ \widetilde{M}\widetilde{N} & \widetilde{N}^2 \end{bmatrix} \right\|_1 \\
&= O(1) + O(1) = O(1).
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy determinisztikus érték $\|\cdot\|_1$ normája megegyezik annak $\|\cdot\|$ normájával, így a korábban bizonyított (c) állítást alkalmazhattuk. Ezzel a (d) állítást beláttuk, a $\delta = 1$ választás megfelelő.

(e) Legyen $\delta = 2$, ekkor

$$\begin{aligned}
& E \left(\|Y_k\|^{2+\delta} \right) = E(|M_k| + |N_k|)^4 \\
& \leq E(2 \max(|M_k|, |N_k|))^4 \leq 2^4 E(\max(M_k^4, N_k^4)) \leq 2^4 (E(M_k^4) + E(N_k^4)).
\end{aligned}$$

Használjuk fel az 5.1. Lemmát, azt kapjuk, hogy

$$E(M_k^4) = E(E(M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1})) = \sigma_2^T E(\mathbb{Y}_{k-1} \mathbb{Y}_{k-1}^T) \sigma_2 + (\sigma_4^T - 3\sigma_2^{(2)}) E(\mathbb{Y}_{k-1}).$$

Mivel (5) és (6) alapján $E(\mathbb{Y}_{k-1} \mathbb{Y}_{k-1}^T) < \infty$ és $E(\mathbb{Y}_{k-1}) < \infty$, ezért $E(M_k^4)$ véges, amennyiben σ_2, σ_4 , valamint $\sigma_2^{(2)}$ végesek. Ez viszont a feltételek mellett teljesül. N_k definíciója alapján

$$\begin{aligned}
E(N_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}) &= E((M_k^2 - E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}))^4 | \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= E(M_k^8 | \mathcal{F}_{k-1}) - 4E(M_k^6 | \mathcal{F}_{k-1}) + 6E(M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1})E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})^2 - 3E(M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1})^4,
\end{aligned}$$

ami az 5.1. Lemma alapján véges, ha a nyolcadik momentumok azok. Ez azonban a tétel feltételei között szerepel.

Így a feltételeket ellenőriztük, valóban alkalmazható Eberlein tétele. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

6.13. Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett teljesülnek a következők.*

- (i) *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $\{W_{1,m}(t), t \geq 0\}$ és $\{W_{2,m}(t), t \geq 0\}$ független, egydimenziós standard Wiener-folyamatok, melyekre teljesül, hogy*

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M'_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M'_j \right) - J^{1/2} \left(W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{1,m}(m) \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

(ii) Minden $m \in \mathbb{N}$ és $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix esetén léteznek olyan $\{\mathcal{W}_{1,m}(t), t \geq 0\}$ és $\{\mathcal{W}_{2,m}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamatok, melyekre

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right) - D I^{1/2} (\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_{2,m}(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1),$$

amennyiben $m \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja Kirch és társai ([8], 3.1.Lemma) bizonyítása, azonban a kétdimenziós eset, valamint a különböző modell miatt a bizonyítás egyes lépései jelentősen eltérnek a cikkben látottaktól. A továbbiakban az (ii) részt bizonyítjuk, (i) bizonyítása ezzel analóg.

A 6.12. Tétel alapján tudjuk, hogy létezik olyan $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat, melyre valamely $\kappa > 2$ esetén

$$\sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - I^{1/2} \mathcal{W}(m) = O(k^{1/\kappa}) \quad \text{m.b.}$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{W}_{1,m}(k) := \mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)$ és $\mathcal{W}_{2,m}(m) := \mathcal{W}(m)$ választásokkal a tétel teljesül. Erre a Wiener-folyamatra azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - I^{1/2} \mathcal{W}(m+k) = O((m+k)^{1/\kappa}),$$

valamint

$$\sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - I^{1/2} \mathcal{W}(m) = O((m)^{1/\kappa}) \leq O((m+k)^{1/\kappa}).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} O((m+k)^{1/\kappa}) - I^{1/2} (\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)) = O((m+k)^{1/\kappa}).$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad k \rightarrow \infty, \quad (22)$$

valamint

$$\sup_{k \geq 1} \frac{k}{m} \frac{\left\| D \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (\mathcal{W}(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad k \rightarrow \infty \quad (23)$$

teljesülnek.

Először bizonyítsuk be a (22) formulát úgy, hogy a supremumot három különböző tartományon tekintjük, végül annak szubadditivitása alapján belátjuk az eredeti állítást. Amennyiben $k > m$, akkor alkalmazva a (10) becslést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sup_{k>m} \frac{\left\| D \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (W(m+k) - W(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \leq \sup_{k>m} \|D\| m^{1/2} \frac{O_P((m+k)^{1/\kappa})}{k} \\ & \leq O_P(1) \sup_{k>m} m^{1/2} \frac{(2k)^{1/\kappa}}{k} = O_P(1) \sup_{k>m} m^{1/2} \frac{k^{1/\kappa}}{k^{1/\kappa}} \frac{1}{k^{1-1/\kappa}} \\ & \leq O_P(1) \frac{m^{1/2}}{m^{1-1/\kappa}} = O_P(m^{-1/2-1/\kappa}) = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

hiszen $1/\kappa < 1/2$, így $-1 < -1/2 - 1/\kappa < 0$.

Legyen $0 < \zeta < 1$ olyan, hogy

$$\max\left(0, 1 - \frac{1/2 - 1/\kappa}{\gamma}\right) < \zeta.$$

Ekkor (9) szerint

$$\begin{aligned} & \sup_{m^\zeta \leq k \leq m} \frac{\left\| D \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (W(m+k) - W(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \leq \|D\| \sup_{m^\zeta \leq k \leq m} \frac{m^\gamma O_P((m+k)^{1/\kappa})}{m^{1/2} k^\gamma} \\ & \leq O_P(1) m^{\gamma-1/2} \frac{m^{1/\kappa}}{m^{\zeta\gamma}} \leq O_P(1) m^{-(\gamma+1/2-1/\kappa+\zeta\gamma)} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ugyanis ha $1/2 - 1/\kappa - \gamma \geq 0$, akkor m kitevője negatív, hiszen $\zeta > 0$ a definíció alapján. Amennyiben $1/2 - 1/\kappa - \gamma < 0$, akkor

$$-\gamma + 1/2 - 1/\kappa + \zeta\gamma < -\gamma + 1/2 - 1/\kappa + \left(1 - \frac{1/2 - 1/\kappa}{\gamma}\right) \gamma = 1/2 - 1/\kappa - 1/2 + 1/\kappa = 0,$$

tehát a kitevő szintén negatív.

Így már csak a harmadik tartományon kell megmutatnunk a $o_P(1)$ nagyságrendet, azaz azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\sup_{1 \leq k < m^\zeta} \frac{\left\| D \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (W(m+k) - W(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Így a továbbiakban ezt bizonyítjuk.

A Wiener-folyamatok tulajdonsága, valamint az iterált-logaritmus tétel alapján

$$\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{W}(k) = O_P(\sqrt{k \log \log k}).$$

Továbbá a 6.12. Tétel alapján tudjuk, hogy

$$\left\| D \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} M'_i \\ N'_i \end{bmatrix} - D I^{1/2} \mathcal{W}(k) \right\| = O_P(k^{1/\kappa}).$$

Ezen állításokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\| D \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| &\leq \left\| D \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} \mathcal{W}(k) \right\| + \left\| D I^{1/2} \mathcal{W}(k) \right\| \\ &= O_P(k^{1/\kappa}) + O_P(\sqrt{k \log \log k}) = O_P(\sqrt{k \log \log k}). \end{aligned}$$

Ez a 2.2. Megjegyzés alapján azt jelenti, hogy minden $\delta > 0$ értékhez létezik olyan $c \in \mathbb{N}$ konstans, melyre teljesül, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$P \left(\left\| \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| > c \sqrt{k \log \log k} \right) < \delta.$$

Mivel az állítás nem függ a folyamat kezdeti állapotától, ezért

$$P \left(\left\| \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| > c \sqrt{k \log \log k} \mid \mathbb{Y}_0 = y \right) < \delta. \quad (24)$$

is teljesül tetszőleges $y \in \mathbb{Z}^{p+1}$ esetén.

A folyamatról tudjuk, hogy tetszőleges $y \in \mathbb{Z}^{p+1}$ mellett

$$\left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \mid \mathbb{Y}_m = y \right) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \mid \mathbb{Y}_0 = y \right)$$

teljesül. Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét, valamint a (24) állítást, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P \left(\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| > c \sqrt{k \log \log k} \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} P \left(\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| > c \sqrt{k \log \log k} \mid \mathbb{Y}_m = y \right) P(\mathbb{Y}_m = y) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} P \left(\left\| \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| > c \sqrt{k \log \log k} \mid \mathbb{Y}_0 = y \right) P(\mathbb{Y}_m = y) \\ &< \sum_{y \in \mathbb{Z}^{p+1}} \delta P(\mathbb{Y}_m = y) = \delta. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| = O_P(\sqrt{k \log \log k}).$$

Így a háromszög egyenlőtlenség és az iterált logaritmus tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\left\| D \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} - D I^{1/2} (\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)) \right\| \\ &\leq \|D\| \left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M'_j \\ N'_j \end{bmatrix} \right\| + \|D\| \|I^{1/2}\| \|\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)\| \\ &= O(1) O_P(\sqrt{k \log \log k}) + O(1) O(1) O_P(\sqrt{k \log \log k}) = O_P(\sqrt{k \log \log k}). \end{aligned}$$

Így az adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq k < m^\zeta} \frac{\left\| D \sum_{j=1}^k \left[\frac{M'_j}{N'_j} \right] - D I^{1/2} (\mathcal{W}(m+k) - \mathcal{W}(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = O_P(1) \sup_{1 \leq k < m^\zeta} \frac{(k \log \log k)^{1/2} m^\gamma}{m^{1/2} k^\gamma} \\ & \leq O_P(1) m^{\zeta(1/2-\gamma)} (\log \log m^\zeta)^{1/2} m^{\gamma-1/2} \leq O_P(1) m^{(\zeta-1)(1/2-\gamma)} (\log \log m)^{1/2} = o_P(1), \end{aligned}$$

amint $m \rightarrow \infty$, hiszen $(\zeta-1)(1/2-\gamma) < 0$. Ezzel a (22) formulát beláttuk. A (23) bizonyítása egyszerűbb, ezúttal két tartományon vizsgáljuk a supremumot. A g_γ függvény imént látott becsléseit alkalmazva egyrészt

$$\begin{aligned} & \sup_{k \geq m} \frac{k}{m} \frac{\left\| D \sum_{j=1}^m \left[\frac{M'_j}{N'_j} \right] - D I^{1/2} \mathcal{W}(m) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \\ & \leq \sup_{k \geq m} \frac{m^{1/2}}{k} O_P(m^{1/\kappa}) = \sup_{k \geq m} O_P(m^{1/\kappa-1/2}) = o_P(1), \end{aligned}$$

hiszen $\kappa > 2$.

Másrészt

$$\begin{aligned} & \sup_{k < m} \frac{k}{m} \frac{\left\| D \sum_{j=1}^m \left[\frac{M'_j}{N'_j} \right] - D I^{1/2} - \mathcal{W}(m) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \\ & \leq \sup_{k < m} \frac{k}{m} \frac{m^{\gamma-1/2}}{k^\gamma} O_P(m^{1/\kappa}) \leq \sup_{k < m} \left(\frac{k}{m} \right)^{1-\gamma} O_P(m^{1/\kappa-1/2}) = o_P(1). \end{aligned}$$

□

6.14. Megjegyzés. Amennyiben $D = E$ a 2×2 -es egységmátrix, akkor $\{\mathcal{W}_{1,m}(t), t \geq 0\}$ és $\{\mathcal{W}_{2,m}(t), t \geq 0\}$ olyan független kétdimenziós standard Wiener-folyamatok, melyekre

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \left[\frac{M'_j}{N'_j} \right] - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \left[\frac{M'_j}{N'_j} \right] \right) - I^{1/2} (\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_{2,m}(m)) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1),$$

amennyiben $m \rightarrow \infty$.

6.15. Lemma. Tegyük fel, hogy a nullhipotézis teljesül, $\mu_1 + \dots + \mu_p < 1$, valamint $0 < \mu_\epsilon < \infty$.

(i) Amennyiben $E(\xi_1^4), \dots, E(\xi_p^4) < \infty$, akkor

$$\sup_{k \geq 1} \frac{|W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat.

(ii) Tetszőleges $T > 0$ esetén, amennyiben $E(\xi_1^4), \dots, E(\xi_p^4) < \infty$, akkor

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{|W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\frac{T}{T+1} \right)^{1/2-\gamma} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat.

(iii) Tetszőleges $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix esetén, amennyiben $E(\xi_1^8), \dots, E(\xi_p^8) < \infty$, akkor

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_{2,m}(m) \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\left\| D \mathcal{W}(t) \right\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat.

(iv) Tetszőleges $T > 0$ és $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix esetén, amennyiben $E(\xi_1^8), \dots, E(\xi_p^8) < \infty$, akkor

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_{2,m}(m) \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\frac{T}{T+1} \right)^{1/2-\gamma} \frac{\left\| D \mathcal{W}(t) \right\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja Horváth és társai ([6], 5.3. Lemma) bizonyítása, azonban a levezetés jelentősen megváltozik, hiszen más modellt tekintünk, illetve kétdimenziós esetben bizonyítunk.

Mivel (i) és (ii) bizonyítása rendre analóg (iii) és (iv) bizonyításával, így a továbbiakban az utóbbi két állítás bizonyítását részletezzük.

A 6.13. Következményben megadott $\{\mathcal{W}_{1,m}, t \geq 0\}$ és $\{\mathcal{W}_{2,m}, t \geq 0\}$ Wiener-folyamatok nem függnak m -től, hiszen a Wiener-folyamatok stacionárius növekményűek. Így léteznek olyan $\{\mathcal{W}_1(t), t \geq 0\}$ és $\{\mathcal{W}_2(t), t \geq 0\}$ független Wiener-folyamatok, melyekre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{W}_1$ és $\mathcal{W}_{1,m}$, valamint $\mathcal{W}_2$ és $\mathcal{W}_{2,m}$ azonos eloszlásúak.

Legyen $T > 0$ tetszőleges. Ekkor a Wiener-folyamatok tulajdonsága miatt

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_1(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(m) \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_1\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(1) \right) \right\|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma}.$$

Ha $m \rightarrow \infty$, akkor

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_1\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(1) \right) \right\|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma} \rightarrow \sup_{0 < t \leq T} \frac{\left\| D \left(\mathcal{W}_1(t) - t \mathcal{W}_2(1) \right) \right\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \quad \text{m.b.}, \quad (25)$$

hiszen ahogy m növekszik, úgy lesznek a k/m értékek egyre sűrűbbek a $(0, T]$ intervallumon.

Vizsgáljuk a folyamatok viselkedését, ha $mT \leq k$. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \frac{\left\| \mathcal{W}_1\left(\frac{k}{m}\right) \right\|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} \leq \sup_{T \leq t < \infty} \frac{\left\| \mathcal{W}_1(t) \right\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}, \quad (26)$$

valamint alkalmazva az iterált-logaritmus tételt adódik, hogy

$$\sup_{T \leq t < \infty} \frac{\left\| \mathcal{W}_1(t) \right\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \leq \sup_{T \leq t < \infty} \frac{O_P(\sqrt{t \log \log t})}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} = o_P(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Tudjuk, hogy

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \left| \frac{\frac{k}{m}}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma} - 1 \right| \leq \sup_{T \leq t < \infty} \left| \frac{t}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - 1 \right| \rightarrow 0,$$

ha $T \rightarrow \infty$. Így az is teljesül, hogy amennyiben $T \rightarrow \infty$, akkor

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \left\| \frac{\frac{k}{m} \mathcal{W}_2(1)}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma} - \mathcal{W}_2(1) \right\| \leq \sup_{T \leq t < \infty} \left\| \frac{t \mathcal{W}_2(1)}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - \mathcal{W}_2(1) \right\| \rightarrow 0. \quad (27)$$

Használjuk fel a normákra vonatkozó egyenlőtlenséget, mely alapján

$$\begin{aligned} & \sup_{T \leq t < \infty} \left\| \frac{\|D(t\mathcal{W}_2(t) - \mathcal{W}_1(t))\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - \|D\mathcal{W}_2(1)\| \right\| \\ & \leq \sup_{T \leq t < \infty} \left\| \frac{D(t\mathcal{W}_2(t) - \mathcal{W}_1(t))}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - D\mathcal{W}_2(1) \right\| \leq \|D\| \sup_{T \leq t < \infty} \left\| \frac{t\mathcal{W}_2(t) - \mathcal{W}_1(t)}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} - \mathcal{W}_2(1) \right\| \\ & \leq \|D\| \left(\sup_{T \leq t < \infty} \left\| \frac{t\mathcal{W}_2(t) - \mathcal{W}_1(t)}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \right\| + \sup_{T \leq t < \infty} \|\mathcal{W}_2(1)\| \right) = \|D\|(o_P(1) + o_P(1)) = o_P(1), \end{aligned}$$

amennyiben $T \rightarrow \infty$.

A (26) és a (27) formulák alapján, az előzővel hasonló módon adódik, hogy

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \left\| \frac{\|D(\mathcal{W}_1(\frac{k}{m}) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(1))\|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{m+k}\right)^\gamma} - \|D\mathcal{W}_2(1)\| \right\| = o_P(1), \quad mT \rightarrow \infty.$$

Tehát azt kapjuk, hogy amennyiben $m \rightarrow \infty$, akkor

$$\sup_{mT \leq k < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(\frac{k}{m}) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(1))\|}{\left(1 + \frac{k}{m}\right) \left(\frac{k}{k+m}\right)^\gamma} \xrightarrow{P} \sup_{T \leq t < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}.$$

Így (25) alapján adódik, hogy

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_2(m))\|}{g_\gamma(m, k)} - \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \xrightarrow{P} 0,$$

ezért tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m} \mathcal{W}_{2,m}(m))\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t) \left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}.$$

Könnyen ellenőrizhető a kovariancia-függvények kiszámításával, hogy

$$\{\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1), 0 \leq t < \infty\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ (1+t)\mathcal{W}\left(\frac{t}{1+t}\right), 0 \leq t < \infty \right\},$$

ahol $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat. Így mivel

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t < \infty} \frac{\|D(1+t)\mathcal{W}\left(\frac{t}{1+t}\right)\|}{(1+t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma},$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\|D(\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m}\mathcal{W}_{2,m}(m))\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Ezzel az (iii) állítást beláttuk.

A következőkben az (iv) állítást bizonyítjuk.

Ezúttal is teljesül, hogy léteznek olyan $\{\mathcal{W}_1(t), t \geq 0\}$ és $\{\mathcal{W}_2(t), t \geq 0\}$ független kétdimenziós standard Wiener-folyamatok, melyekre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{W}_1$ és $\mathcal{W}_{1,m}$, valamint $\mathcal{W}_2$ és $\mathcal{W}_{2,m}$ azonos eloszlásúak. Így a korábbi megfontolások alapján

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\|D(\mathcal{W}_{1,m}(k) - \frac{k}{m}\mathcal{W}_{2,m}(m))\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma}.$$

Szintén teljesül, hogy

$$\{\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1), 0 \leq t < \infty\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ (1+t)\mathcal{W}\left(\frac{t}{1+t}\right), 0 \leq t < \infty \right\},$$

ahol $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat. Ezért alkalmazva egy helyettesítést, valamint felhasználva a Wiener-folyamatok tulajdonságait, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\|D(\mathcal{W}_1(t) - t\mathcal{W}_2(1))\|}{(1+t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\|D\mathcal{W}\left(\frac{t}{1+t}\right)\|}{\left(\frac{t}{1+t}\right)^\gamma} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t \leq \frac{T}{1+T}} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}\left(\frac{T}{T+1}t\right)\|}{\left(\frac{T}{T+1}t\right)^\gamma} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\sqrt{\frac{T}{T+1}} \|D\mathcal{W}(t)\|}{\left(\frac{T}{T+1}\right)^\gamma t^\gamma} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\frac{T}{T+1}\right)^{1/2-\gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}. \end{aligned}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\frac{T}{T+1}\right)^{1/2-\gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

azaz

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{i,m} \\ \widehat{N}_{i,m} \end{bmatrix} \right\|}{h_{\gamma,T}(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $h_{\gamma,T}(m,k) := g_\gamma(m,k) \left(\frac{T}{T+1}\right)^{1/2-\gamma}$. Ezzel a bizonyítás teljes. $\square$

6.16. Következmény. A 6.15. Lemma feltételei mellett teljesülnek a következők.

(i)

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} M_j - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m M_i \right) \right|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat.

(ii) Legyen $T > 0$, ekkor

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} M_i - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m M_i \right) \right|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\frac{T}{T+1} \right)^{1/2-\gamma} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{W(t), t \geq 0\}$ egydimenziós standard Wiener-folyamat.

(iii) Legyen $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tetszőleges mátrix, ekkor

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D I^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat.

(iv) Legyen $T > 0$ és $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tetszőleges mátrix, ekkor

$$\max_{1 \leq k \leq mT} \frac{\left\| D I^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\frac{T}{T+1} \right)^{1/2-\gamma} \frac{\|D\mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma},$$

amennyiben $m \rightarrow \infty$, ahol $\{\mathcal{W}(t), t \geq 0\}$ kétdimenziós standard Wiener-folyamat.

Bizonyítás. A továbbiakban az (i) esetet bizonyítjuk, a többi állítás bizonyítása ezzel analóg. A 6.15. Lemma (i) pontja szerint

$$\sup_{k \geq 1} \frac{|W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m)|}{g_\gamma(m,k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Továbbá a 6.13 Tétel (i) állítása alapján

$$\sup_{k \geq 1} \frac{|J^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M'_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M'_j \right) - (W_{1,m}(k) - \frac{k}{m} W_{2,m}(m))|}{g_\gamma(m,k)} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M'_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M'_j \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} - \sup_{k \geq 1} \frac{|W_{1,m}(k) - W_2(m)|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad m \rightarrow \infty$$

szintén teljesül, amiből adódik, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M'_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M'_j \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|W(t)|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Ebből már következik az állítás, hiszen

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M'_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M'_j \right) \right|}{g_\gamma(m, k)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{k \geq 1} \frac{\left| J^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} M_j - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m M_j \right) \right|}{g_\gamma(m, k)}.$$

Ezzel az (i) állítást beláttuk. $\square$

7. A 2.3. és a 2.5. Tétel bizonyítása

Bizonyítás. A 2.3. és a 2.5. Tétel pontjainak bizonyítása analóg, így a továbbiakban csak a 2.5. Tétel (ii) pontjának bizonyítását részletezzük.

Először mutassuk meg, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{j,m} \\ \widehat{N}_{j,m} \end{bmatrix} - D I^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1),$$

ha $m \rightarrow \infty$.

A 6.9.Lemma alapján ha a mátrixok invertálhatóak, akkor $\hat{I}_m^{-1/2} \rightarrow I^{-1}$ m.b, amennyiben $m \rightarrow \infty$. A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{j,m} \\ \widehat{N}_{j,m} \end{bmatrix} - D I^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \\ & \leq \sup_{k \geq 1} \left\| D \right\| \left\| \hat{I}_m^{-1/2} \right\| \frac{\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{j,m} \\ \widehat{N}_{j,m} \end{bmatrix} - \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \\ & + \sup_{k \geq 1} \left\| D \right\| \left\| \hat{I}_m^{-1/2} - I^{-1/2} \right\| \frac{\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)}. \end{aligned}$$

Mivel a konvergencia miatt $\left\| D \right\| \left\| \hat{I}_m^{-1/2} \right\| = O_P(1)$, ezért a 6.6. Tétel (iii) része alapján az első tag $o_P(1)$ nagyságrendű, ha $m \rightarrow \infty$. Továbbá a 6.9. Tétel alapján $\left\| D \right\| \left\| \hat{I}_m^{-1/2} - I^{-1/2} \right\| =$

$= o_P(1)$, ha $m \rightarrow \infty$. Így már csak azt kell megmutatni, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Ez pedig abból következik, hogy a 6.16. Következmény (iii) pontja alapján

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D I^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D \mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma} = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Ebből adódik, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{j,m} \\ \widehat{N}_{j,m} \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} - \sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D I^{-1/2} \left(\sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} M_j \\ N_j \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} = o_P(1), \quad (28)$$

amennyiben $m \rightarrow \infty$.

Továbbá a 6.16. Következmény (iii) pontja alapján

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D I^{-1/2} \left(\sum_{i=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} - \frac{k}{m} \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix} \right) \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D \mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Így az is teljesül, hogy

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\left\| D \hat{I}_m^{-1/2} \sum_{j=m+1}^{m+k} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{j,m} \\ \widehat{N}_{j,m} \end{bmatrix} \right\|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\|D \mathcal{W}(t)\|}{t^\gamma}, \quad m \rightarrow \infty,$$

ami épp a 2.5. Tétel (ii) pontja, tehát az állítást bizonyítottuk. $\square$

8. Alternatív hipotézis mellett

A korábbi eredményeink a nullhipotézis mellett jellemzik a folyamatot, azonban fontos kérdés, hogy hogyan viselkedik a modell, amennyiben a nullhipotézis nem áll fenn.

Természetesen azt várjuk, hogy amennyiben változás történik a modellben, akkor a próbák segítségével azt ki tudjuk mutatni. A továbbiakban egy egyszerű alternatív hipotézis mellett bizonyítjuk, hogy az egydimenziós próba konzisztens. Legyen minden $i \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boldsymbol{\mu}_i = \begin{bmatrix} E(\xi_1(i, 1)) \\ \vdots \\ E(\xi_p(i, 1)) \\ E(\varepsilon(i)) \end{bmatrix}.$$

Tekintsük azt a $\mathcal{H}_A$ ellenhipotézist, mely szerint létezik olyan $k^* \geq 1$, melyre $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \dots = \boldsymbol{\mu}_{m+k^*} \neq \boldsymbol{\mu}_{m+k^*+1} = \dots$ teljesül. Vezessük be a $\boldsymbol{\mu}_0 := \boldsymbol{\mu}_1$, valamint a $\boldsymbol{\mu}_* = \boldsymbol{\mu}_{m+k^*+1}$ jelöléseket.

A következő tétel bizonyítása a Horváth és társai [6] által leírt bizonyítás menetét követi, azonban a részeredmények, melyeket alkalmazunk, eltérnek a cikkben leírtaktól.

8.1. Tétel. *Amennyiben $E(\xi_1(1,1)) + \dots + E(\xi_p(1,1)) < 1$, valamint $0 < E(\varepsilon(1)) < \infty$ és $E(\tilde{\mathbf{Y}}) \neq 0$, akkor a $\mathcal{H}_A$ ellenhipotézis mellett teljesül, hogy*

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+k} \widehat{M}_{i,m} \right|}{g_\gamma(m, k)} \xrightarrow{P} \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$M_i = X_i - E(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) = X_i - \boldsymbol{\mu}_0^T \mathbf{Y}_{i-1},$$

amennyiben $i \leq m+k^*$,

$$M_i = X_i - E(X_i | \mathcal{F}_{i-1}) = X_i - \boldsymbol{\mu}_*^T \mathbf{Y}_{i-1},$$

ha $m+k^* < i$, illetve

$$\widehat{M}_{i,m} = X_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T \mathbf{Y}_{i-1}$$

minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $\tilde{k} = m+k^*$, ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} \widehat{M}_{i,m} &= \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} M_i + \sum_{i=m+1}^{m+k^*} (\boldsymbol{\mu}_0^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} + \sum_{i=m+k^*+1}^{m+\tilde{k}} (\boldsymbol{\mu}_*^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} \\ &= \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} M_i + \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} (\boldsymbol{\mu}_0^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} + \sum_{i=m+k^*+1}^{m+\tilde{k}} (\boldsymbol{\mu}_*^T - \boldsymbol{\mu}_0^T) \mathbf{Y}_{i-1}. \end{aligned}$$

A 6.6. Tétel feltételei teljesülnek, így bizonyítása alapján

$$\frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} M_i + \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} (\boldsymbol{\mu}_0^T - \hat{\boldsymbol{\mu}}_m^T) \mathbf{Y}_{i-1} \right|}{g_\gamma(m, \tilde{k})} = O_P(1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+k^*+1}^{m+\tilde{k}} \mathbf{Y}_{i-1} &= \sum_{i=1}^{m+\tilde{k}} \mathbf{Y}_{i-1} - (m+\tilde{k})E(\tilde{\mathbf{Y}}) - \left(\sum_{i=1}^{m+k^*} \mathbf{Y}_{i-1} - (m+k^*)E(\tilde{\mathbf{Y}}) \right) + (\tilde{k} - k^*)E(\tilde{\mathbf{Y}}) \\ &= O_P(1) + (\tilde{k} - k^*)E(\tilde{\mathbf{Y}}), \end{aligned}$$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}_*^T - \boldsymbol{\mu}_0^T) \liminf_{\tilde{k} \geq 1} \frac{\sum_{i=m+k^*+1}^{m+\tilde{k}} \mathbf{Y}_{i-1}}{g_\gamma(m, \tilde{k})} &= O_P(1) + (\boldsymbol{\mu}_*^T - \boldsymbol{\mu}_0^T) \liminf_{\tilde{k} \geq 1} \frac{\tilde{k} - k^*}{g_\gamma(m, \tilde{k})} E(\tilde{\mathbf{Y}}) \\ &= O_P(1) + O_P(1) + m^{1/2} \liminf_{\tilde{k} \geq 1} \left(\frac{\tilde{k}}{m+\tilde{k}} \right)^{1-\gamma} = O_P(1) + Cm^{1/2}, \quad |C| > 0. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az állítást, hiszen

$$\sup_{\tilde{k} \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} \widehat{M}_{i,m} \right|}{g_\gamma(m, \tilde{k})} \geq \liminf_{\tilde{k} \geq 1} \frac{\left| \sum_{i=m+1}^{m+\tilde{k}} \widehat{M}_{i,m} \right|}{g_\gamma(m, \tilde{k})} = O_P(1) + |C|m^{1/2} \xrightarrow{P} \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

□

9. További célkitűzések

A szimulációk rámutatnak arra, hogy a kétdimenziós próbastatisztikára épülő próba kis mintaméret esetén nem ad megfelelő eredményt. Bár a komponensek aszimptotikusan függetlenek, de kis mintaméret mellett erősen korreláltak lehetnek. Szeretnénk erre a problémára megoldást találni, például úgy, hogy a kétdimenziós próbastatisztikában szereplő komponensek új lineáris kombinációit tekintjük. A lineáris kombinációt a dolgozat során alkalmazott D mátrix határozza meg, így ezen mátrix megváltoztatásával vehetünk az eddigiektől különböző lineáris kombinációkat.

Szintén a szimulációk alapján tudjuk, hogy a próbastatisztikák konvergenciája a határeloszlásokhoz sok esetben nem elég gyors, így a továbbiakban megpróbálunk ezen javítani a paraméterbecslések korrigálásával. Erre egy lehetőség a súlyozott legkisebb négyzetes becslés alkalmazása, melyet Wei és Winnicki vezettek be cikkeikben ([13], [14]).

A dolgozatban megadott próbastatisztikák határeloszlásának kritikus értékeit elméleti úton nem tudjuk számolni, a szükséges értékeket Monte Carlo szimulációval határozták meg, ezen eredmények szerepelnek az irodalomban, például Horváth és társai [6] cikkében. Azonban a Csörgő és Horváth [2] könyvében szereplő határeloszlások mintájára szeretnénk olyan $\alpha(t)$ és $c_m(t)$ függvényeket meghatározni, melyekre minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(S_m > c_m(t)) \rightarrow \alpha(t), \quad m \rightarrow \infty,$$

ahol S_m jelöli az m hosszú tanulóminta esetén kapott próbastatisztikát. Így elegendően nagy m mellett, ha a t értéket úgy választjuk meg, hogy $\alpha(t)$ a megfelelő szignifikancia szinthez tartozzon, akkor kaphatnánk egy számolható $c_m(t)$ kritikus értéket.

Szeretnénk az eddig vizsgált modell mellett threshold modellekkel dolgozni, melyekben a ξ utódeloszlások függhetnek a populáció méretétől is. Threshold modell szerepel Franke és társai [4] cikkében, Poisson utódeloszlás esetén.

Egyszerű alternatív hipotézis mellett megmutattuk, hogy a próba, melyet az egydimenziós próbastatisztika alapján kaptunk, konzisztens. Célunk ezt megmutatni a többi próba, valamint általánosabb alternatív hipotézis mellett is. Az alternatív hipotézis mellett fontos kérdés, hogy a modellben mikor következik be változás, így szeretnénk becslést adni a változás időpontjára. Független véletlen változókból álló modell esetén a változás időpontjának becslésével foglalkozik Csörgő és Horváth [2] könyvének 1.5. fejezete.

Távolabbi célunk, hogy a dolgozatban szereplő szubkritikus eset után a kritikus és szuperkritikus esetben is vizsgáljuk a modellt. A feladat nehézsége, hogy ezen esetekben a folyamat nem ergodikus. Mivel a bizonyítások zömében az ergodicitást felhasználtuk, így az eredmények kiterjesztéséhez ezen esetekre új bizonyítási módszereket kell majd alkalmaznunk. A kritikus esetben azonban alkalmazhatóak lehetnek Barczy és Pap [1] eredményei.

10. Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Szűcs Gábornak, hogy tanulmányaim során felkeltette érdeklődésemet a valószínűségelmélet és a statisztika iránt, temérdek teendője mellett elvállalta szakdolgozatom témavezetését, majd figyelmembe ajánlotta a témát, melyről a dolgozat született. Köszönöm sok türelmét, segítségét és útmutató tanácsát.

Köszönettel tartozom támogatásáért Dr. Pap Gyula tanár úrnak, akitől megtanulhattam a valószínűségelmélet alapjait, valamint Dr. Krámlí Andrásnak, kinek különleges látásmódján keresztül ismerkedhettem meg a statisztikával.

T. Szabó Tamás korábbi dolgozatából sokat tanultam a változásészlelésről, továbbá köszönöm neki, hogy a témával kapcsolatos kérdéseimre mindig segítőkészen válaszolt.

Hivatkozások

- [1] Barczy, M., Ispány, M., Pap, Gy. [2011] Asymptotic behavior of unstable INAR(p) processes, *Stochastic Processes and their Applications* **121**, 583-608.
- [2] Csörgő, M., Horváth, L. [1997] Limit theorems in Change-Point Analysis.
- [3] Eberlein, E. [1986] On strong invariance principles under dependence assumptions, *Annals of Probability* **14**, 260-270.
- [4] Franke, J., Kirch, C., Kamgaing, J.T. [2012] Changepoints in times series of counts, *Journal of Time Series Analysis* **33**, 757-770.
- [5] Gelfand, I. [1941] Normierte Ringe, *Recueil Mathématique N.S.* **9(51)**:1, 3-24.
- [6] Horváth, L., Hušková, M., Kokoszka, P., Steinebach, J. [2004] Monitoring changes in linear models, *Journal of Statistical Planning and Inference* **126**, 225-251.
- [7] Kaplan, N. [1973] The multitype Galton-Watson process with immigration, *The Annals of Probability* **1**, 947-953.
- [8] Kirch, C., Kamgaing, J.T. [2011] An online approach to detecting changes in nonlinear autoregressive models, Report in Wirtschaftsmathematik (WIMA Report), Technische Universität Kaiserslautern, https://kluedo.ub.uni-kl.de/files/2772/pp_online.pdf
- [9] Klimko, L. A., Nelson, P. I., [1978] On conditional least squares estimation for stochastic processes, *Annals of Statistics*, **6**:629-642
- [10] Pap, Gy., T. Szabó, T. [2011] Change detection in INAR(p) processes against various alternative hypotheses, megjelenés előtt, <http://arxiv.org/abs/1111.2532>
- [11] Quine, M., P. [1972] The multitype Galton-Watson process with ρ near 1, *Advances in Applied Probability* **4**, 429-452.
- [12] T. Szabó, T. [2010] Change point detection for integer-valued autoregressive (INAR(p)) processes, Tudományos Diákköri Dolgozat, Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet.
- [13] Wei, C. Z., Winnicki, J. [1990] Estimation of the means in the branching process with immigration, *The Annals of Statistics* **18**, 1757-1773.
- [14] Winnicki, J. [1991] Estimation of the variances in the branching process with immigration, *Probability Theory and Related Fields* **88**, 77-106.