

TDK-dolgozat

Lévai Balázs László

Megbízható optimalizációs eljárás a kényszerrezgéses fékezett inga kaotikus trajektóriáinak megtalálására

Szerző:

Lévai Balázs László
programtervező informatikus MSc
2. évfolyam

Témavezető:

Dr. Bánhelyi Balázs
egyetemi adjunktus

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Informatikai Tanszékcsoport
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Bevezetés

Környezetünk megértésének egy gyakran használt módja a körülöttünk zajló folyamatok modellezése. A modellalkotás meglehetősen nehéz feladat, hiszen két egymásnak ellentmondó feltétel kielégítésére kell törekednünk. A modellünknek egyfelől kellően egyszerűnek kell lennie ahhoz, hogy képesek legyünk tanulmányozni a rendelkezésünkre álló eszközökkel, módszerekkel, másfelől a modell elég közel kell álljon a valósághoz, hogy a kutatási eredményeik releváns információkat tartalmazzanak.

A minket körülvevő valós dinamikai rendszerek tökéletes leírása lehetetlen feladat, azonban az egyszerűbb modelleken keresztül történő vizsgálatok is sok mindent elárulhatnak ezen rendszerek természetéről. A dinamikai rendszerek mozgását differenciálegyenlet rendszerekkel szokás leírni, melyek megoldásai legtöbbször nem határozhatóak meg pontosan, csak a megoldások numerikus közelítései adhatóak meg. Ezen approximációk pontosságát nagymértékben befolyásolja, hogy a vizsgált egyenleteknek léteznek-e matematikai értelemben vett kaotikus megoldásai. Az ilyen rendszerekben a kaotikus viselkedés jellegéből adódóan kivételes odafigyeléssel kell végrehajtanunk a közelítések kiszámítását, különösen nagy figyelmet szentelve a végrehajtott számításorozatok során halmozódó kerekítési hibákra és az ebből eredő számítási pontatlanságra.

Egy rendszer kaotikus mivoltának eldöntése a mai napig rendkívül nehéz feladat. Gyakran előfordul, hogy a kutatók egy-egy problématerületen csak a káosz egzisztenciális feltételeinek vizsgálatáig jutnak el. Napjainkra a konkrét rendszerek kaotikusságának detektálásában egyre nagyobb szerepet játszik a számítógép. Erre számos példát [13], [14], [18] találhatunk a szakirodalomban, többek között a Hénon leképezés [6], [19] és a patkó leképezés [3] esetében.

J. H. Hubbard 1999-ben publikálta cikkét [7], amelyben egy sejtést fogalmazott meg az általa bemutatott kényszerrezgéses fékezett inga kaotikusságáról. E kaotikus trajektóriák létezésének formális bizonyítása [4] csak jóval később, több mint 10 évvel a sejtés után került publikálásra. A cikk bár belátta e nehezen megfogható tulajdonság egzisztenciáját, magukról a kaotikus trajektóriákról nem esett benne szó.

Dolgozatunk célja egy olyan megbízható numerikus módszer bemutatása [10], amely alkalmas tetszőleges, véges hosszán előírt viselkedés szerint mozgó kaotikus trajektóriák kez-

dőpontjainak megtalálására. Másképpen fogalmazva az általunk kidolgozott eljárás képessé tesz minket a kényszererős fékezett inga olyan kezdőállapotának meghatározására, hogy ebből az állapotból elindítva a rendszert az inga pontosan az általunk előre megadott mozgássorozatot hajtsa végre.

Először a káoszelmélet és a kényszererős fékezett ingához kapcsolódó néhány alapvető fogalom (Poincaré leképezés, trajektória) áttekintésével kezdjük a dolgozatot, majd a kaotikus trajektóriák megtalálására alkotott globális optimalizációs modellünket mutatjuk be, kitérve a keresési térre, a célfüggvény konstrukciójára és az alkalmazott optimalizációs eljárásra. A dolgozat végén bemutatunk néhány trajektóriát, amelynek sikeresen meglettük kezdőpontját az általunk kidolgozott algoritmus implementációjával.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Feladateleírás	4
1.1. Matematikai káosz	4
1.2. Kényszerrezgéses fékezett inga	6
1.3. Poincaré leképezés	7
1.4. Trajektória	8
1.5. Feladat	9
2. Globális optimalizálási modell	10
2.1. A rendszer átalakítása	10
2.2. Keresési tér	11
2.3. Optimalizáló eljárás	12
3. Célfüggvény	13
3.1. Trajektória régiók	13
3.2. Elvárt régiók	14
3.3. Hausdorff távolság	15
3.4. A célfüggvény kiszámítása	15
4. Eredmények	20
4.1. Egység trajektóriák	20
4.2. Három hosszú trajektóriák	21
4.3. $\otimes$ viselkedés sorozatok	24
5. Összefoglalás	25
Köszönetnyilvánítás	26
Irodalomjegyzék	27

1. fejezet

Feladatleírás

A megoldandó feladat és az általunk kidolgozott módszer bemutatása előtt először tekintünk át néhány matematikai fogalmat, hogy tisztában legyünk a szükséges elméleti háttérrel a problémakör megértéséhez.

1.1. Matematikai káosz

A matematikai káosz [15] a hétköznapi értelemmel ellentétben nem véletlenszerűséget jelent, sokkal inkább a megjósolhatatlanságot takarja. A káosz korrekt definiálása korántsem egyszerű feladat. Mivel elsősorban dinamikai rendszerek esetén szokás erről a fogalomról beszélni, a gyakorlatban inkább e rendszerek azon tulajdonságainak listáját adják meg, amelyek megléte esetén egy dinamikai rendszer kaotikusnak nevezhető.

A káoszelmélet története [8] 1887-ig nyúlik vissza, amikor is Henry Poincaré egy cikkében, amely a három test problémát vizsgálta, bebizonyította, hogy három kicsiny, egymás gravitációs terében mozgó test leírása nem lehetséges integrálható egyenletrendszerrel, továbbá az is előfordulhat, hogy a testek mozgásában vannak nemperiodikus pályák is.

Később többek között G. D. Birkhoff, A. N. Kolmogorov, M. L. Cartwright és J. E. Littlewood munkásságában folytatódott tovább a káoszelmélet kutatása a fizika különböző, nemlineáris differenciálegyenleteket is tartalmazó területein. Birkhoff az ergodelméleti és statisztikus mechanikai munkássága alatt, Kolmogorov a konzervatív rendszerekhez kötődő kutatásai során, Cartwright és Littlewood a radar nemlineáris áramköreinek leírására használt differenciálegyenletek vizsgálata okán bukkant kaotikus rendszerekre. Az elmélet egyik úttörője Edward Lorenz volt, aki munkája során véletlenül "botlott" a káoszba. Lorenz amerikai meteorológus volt, aki számítógéppel vizsgálta a légkört modellező differenciálegyenleteket. Ez a megközelítés 1958-ban meglehetősen újdonságnak számított. Egy korábbi szimuláció adatait szeretne újra megtekinteni, de mivel időt akart spórolni, nem a szimuláció kezdő

adatait, hanem a rendelkezésére álló köztes számítási eredményeket táplálta vissza a számítógépébe. Nagy meglepetésére az így kapott időjárás egyre nagyobb mértékben tért el az eredeti számsortól. Eleinte a gép hibájára gyanakodott, de mint később kiderült számára, nem a számítógépben volt a hiba. Lorenz az adatokat a számítógépen 6 tizedesjegy pontossággal ábrázolta, de csak 3 tizedesjegy pontosan nyomtatta ki, ezért csak ilyen mértékű pontossággal tudta visszagépelni őket. Rájött, hogy a bevitelkor elkövetett negyedik számjegyben való eltérés okozta a rendkívül nagy divergenciát. Az akkor elfogadott nézetek szerint ilyen kis eltérésnek nem lehetett volna túl nagy hatása a szimulációkra. A témával foglalkozó egy későbbi tanulmányának címe erről a jelenségről azóta híres mondássá vált: „Does the flap of a butterfly’s wing in Brazil set off a tornado in Texas?”, azaz Brazíliában egy pillangó szárny-csapása okozhat-e tornádót Texasban.

Legyen H egy tetszőleges halmaz és f egy $H \rightarrow H$ leképezés.

f érzékenyen függ a kezdőértékétől, ha $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in H$ esetén az $x \in N_x$ környezetére, $\exists y \in N_x$ és $\exists n > 0$, hogy $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$. Ez informálisan azt jelenti, hogy a halmaz két különböző pontja, bár lehetnek egymáshoz tetszőlegesen közel, a leképezés e két pontból indított iterációjának eredményei egy adott iterációs szám után mégis elfognak térni egymástól.

f topologikusan keverő, ha $\forall I, J \subset H$ nyílt halmazra $\exists N > 0$, hogy $\forall n > N$ esetén $f^n(I) \cap J \neq \emptyset$. A formális definíció jelentése, hogy tetszőleges nyílt halmazra iterálva a leképezést az így meghatározott eredménypontok bármely más nyílt halmaz pontjaival összekeverednek.

I halmaz sűrű a J halmazban, ha $\bar{I} \subset J$, ahol $\bar{I}$ az I halmaz lezártja, $\bar{I} = I \cup \{I \text{ torlódási pontjai}\}$. Ez azt jelenti, hogy ha I sűrű J -ben, akkor minden J -beli pont minden környezete tartalmaz legalább egy I -beli pontot.

f egy $x \in H$ pontja periodikus, ha $\exists n > 0$, hogy $f^n(x) = x$. Egyszerűen fogalmazva egy pont periodikus, ha a pontra újra és újra megismételve az f leképezést az, így kapott pontok sorozata valamilyen periódus számmal ismétlődik.

Az előbb bevezetett fogalmakat felhasználva már képesek vagyunk a káosz definiálására [2].

A káosz definíciója: egy $f : H \rightarrow H$ leképezést kaotikusnak nevezünk, ha f érzékenyen függ a kezdőállapottól, topologikusan keverő és a periodikus pontjainak halmaza sűrű H -ban.

A káosz általános definíciója helyett egy speciális, a dolgozat kutatási területéhez jobban illeszkedő káosz definíciót fogunk használni.

Legyen adott egy P sík és annak két régiója, L és R , továbbá legyen értelmezett a síkra egy $\varphi : P \rightarrow P$, folytonos leképezés. Jelölje a mindkét irányban végtelen L/R sorozatot $\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots$, ahol $e_i \in \{L, R\} \forall i$ -re. Ha P egy A régiójában bármely, mindkét irányban végtelen L/R sorozathoz megtudunk adni egy $p \in A$ pontot úgy, hogy

$$\dots, \varphi^{-1}(p) \in e_{-1}, \varphi^0(p) \in e_0, \varphi^1(p) \in e_1, \dots,$$

teljesül, akkor ezt a rendszert kaotikusnak nevezzük az A régióban.

1.2. Kényszerrezgéses fékezett inga

Kutatásunk tárgya a Hubbard cikkében [7] bemutatott kényszererős fékezett inga. E dinamikai rendszer egy l hosszú, súlytalan, szilárd rúdból és a rúd egyik végén elhelyezkedő m tömegű, pontszerű testből áll. Az inga kizárólag a rúd rögzítési pontja körül képes vertikális mozgásra a rúd hosszával megegyező sugarú kör mentén. Az inga mozgását három erő befolyásolja. A gravitációs erő, amelynek számításainkban csak az inga sebességével párhuzamos komponense számít, a légellenállási erő, amely mindig az inga mozgásával ellentétes irányú és egy periodikusan változó külső erő, amely iránya szintén párhuzamos az inga mozgásirányával.

gravitációs erő : $m \cdot g \cdot \sin(x(t))$, ahol g a gravitációs gyorsulási állandó, t az idő és $x(t)$ az inga szögét jelöli.

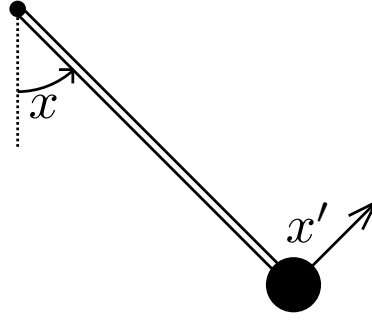
légellenállási erő : $\gamma \cdot l \cdot x'(t)$, ahol γ a légellenállási együttható és $x'(t)$ az inga szögsebessége.

külső periodikus erő : $A \cdot \cos(t)$, ahol A egy konstans érték, a külső erő maximális nagysága.

Newton dinamikai törvényei alapján a rendszer működését a következő másodrendű differenciál egyenlet írja le:

$$m \cdot l \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot \sin(x(t)) - \gamma \cdot l \cdot x'(t) + A \cdot \cos(t),$$

ahol a t jelöli az időt, $x(t)$ az inga szögét, $x'(t)$ az inga szögsebességét és $x''(t)$ az inga szöggyorsulását.



1.1. ábra. A kényszererős fékezett inga.

Az egyszerűség kedvéért válasszuk meg a szabad paramétereket úgy, hogy a rendszer a következő alakot öltse:

$$A = g, \quad l = g$$

$$m = 1, \quad \gamma = 0.1$$

$$x''(t) = \sin(x(t)) - 0,1 * x'(t) + \cos(t)$$

Az új formában megadott egyenletet helyettesítsük a következő vele ekvivalens egyenletrendszerrel

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = \sin(x_1(t)) - 0,1 * x_1(t) + \cos(t),$$

ahol x_1 az inga szöge, x_2 az inga szögsebessége. A dolgozat hátralevő részében ezzel a differenciálegyenlet rendszerrel fogunk tovább dolgozni.

Az inga szöge az óramutató járásával ellentétes irányban, azaz a pozitív körüljárási irány szerint növekszik. Az $x = 0$ szöget alsó, az $x = \pi$ szöget felső egyensúlyi pontnak nevezzük, mert megfelelő körülmények között a rendszer ezekben az állapotokban képes stabilizációra, azaz tetszőleges ideig az adott állapotban maradni.

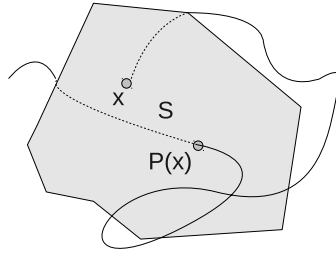
1.3. Poincaré leképezés

Tekintsünk egy n dimenziós determinisztikus dinamikai rendszert, melyet az alábbi egyenlet jellemez.

$$\overline{x'} = \overline{f(x)'},$$

ahol f egy folytonos függvény. Legyen S egy $n-1$ dimenziós hipersík, amelyre teljesül, hogy egyetlen S -ből induló pálya sem párhuzamos S -sel, azaz mindegyik áthalad az S hipersíkon.

Ekkor a Poincaré leképezés egy $P : S \rightarrow S$ leképezés, amely S minden T részhalmazát az T -ből induló pályák S -sel való első metszéspontjaiból álló halmazra képez le.



1.2. ábra. A Poincaré leképezés.

Megmutatható, hogy amennyiben egy folytonos dinamikai rendszerhez definiált Poincaré leképezés kaotikus, akkor az eredeti rendszer is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, így a kaotikusság vizsgálatához elegendő a Poincaré függvény elemzése.

A kényszererős fékezett inga, mint dinamikai rendszer, vizsgálatára a legalkalmasabb módszer, ha a 2π periodikus kényszererő periódusidejével megegyező időpillanatokban egy afféle pillanatfelvételt készítünk az $x - x'$ síkról. Ezek a pillanatfelvételek a $2n\pi$ időpillanatokban elkészített Poincaré képek lesznek, ahol n egy egész szám. A Poincaré képeket a következőképpen definiált Poincaré leképezés iterálásával állíthatjuk elő:

$$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, P : (x(0), x'(0)) \longmapsto (x(2\pi), x'(2\pi)).$$

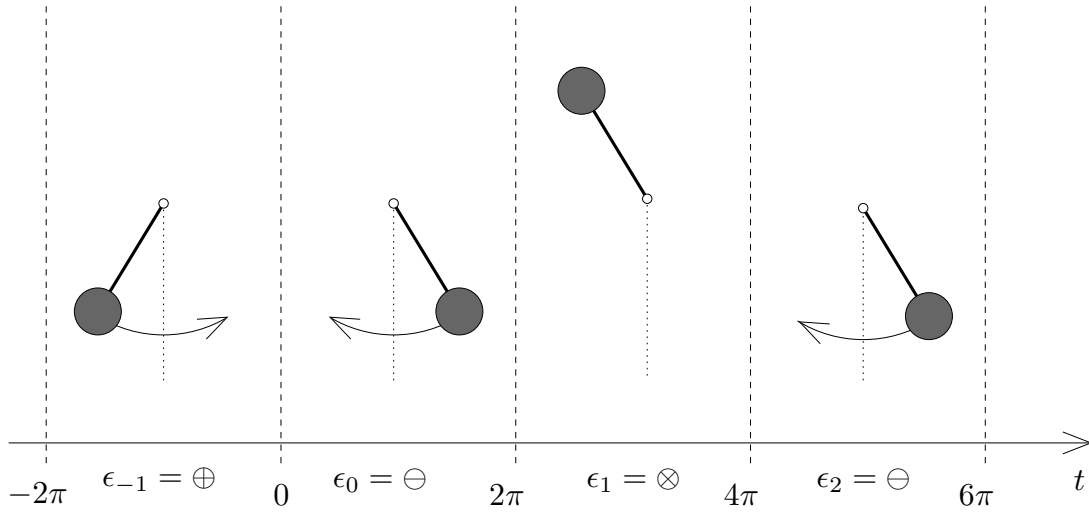
E leképezés fixpontjai a differenciál egyenletünk 2π periodikus megoldásainak felelnek meg. A Poincaré leképezés egy stabil fix pontját nyelőnek nevezzük. A nyelő pontok a rendszer azon 2π periodikus megoldásainak felelnek meg, amelyek valamely környezetében minden megoldás ezen periodikus megoldáshoz tart, ahogy $t \mapsto \infty$. Ha egy x 2π periodikus megoldásra teljesül, hogy bizonyos megoldások $t \mapsto \infty$ esetén x -hez tartanak, továbbá ezek-től eltérő megoldások $t \mapsto -\infty$ szintén x -hez tartanak, akkor x -et nyeregpontnak nevezzük. A nyeregpontok fontos szerepet játszanak a káosz detektálásában.

1.4. Trajektória

Az inga egy trajektóriája alatt az inga által a mozgása során bejárt pályát értjük. Jelölje I_k a $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ időintervallumot, ahol k egy egész szám. Vizsgálatunk tárgyát az inga azon trajektóriái képezik, amelyekben az egyes I_k intervallumok alatt az inga kizárólag a következő ϵ_k mozgások valamelyikét hajtja végre:

- $\epsilon_k = \ominus$ mozgás: az inga pontosan egyszer áthalad az alsó egyensúlyi ponton az óramutató járásával megegyező irányban.
- $\epsilon_k = \oplus$ mozgás: az inga pontosan egyszer áthalad az alsó egyensúlyi ponton az óramutató járásával ellentétes irányban.
- $\epsilon_k = \otimes$ mozgás: az inga egyszer sem halad át az alsó egyensúlyi ponton.

Nem foglalkozunk az inga azon trajektóriáival, amelyekben az inga az egyes I_k időintervallumok alatt az előbb felsoroltakon kívül másképp is viselkedhet.



1.3. ábra. Példa egy négy hosszú trajektória részletre

A kényszererős inga kaotikus trajektóriái az előbbi ϵ_k mozgásokból képezhető, mindkét irányban végtelen sorozatok. Egy kaotikus trajektória előírt viselkedésén a mozgás sorozat egyes ϵ_k eleminek rögzítését értjük.

1.5. Feladat

A feladatunk, hogy egy tetszőleges, de véges hosszú mozgássorozathoz, a trajektória úgynevezett előírt viselkedéséhez, amely a trajektória fogalmánál bevezetett három eseménytípus variációja, meghatározzunk egy olyan (szög, szögsebesség) párt, amelyből, mint kezdőállapotból, elindítva az ingát, az inga trajektóriája megfelel az előre rögzített mozgássorozatnak.

2. fejezet

Globális optimalizálási modell

A kitűzött probléma megoldására egy optimalizálási modell kidolgozása tűnt célszerűnek. Ehhez a kaotikus trajektóriák halmaza, mint keresési tér, felett definiálunk egy célfüggvényt, ami kifejezi, hogy az inga egy trajektória által leírt viselkedése mennyire tér el az elvárt viselkedéstől. A célfüggvényt úgy konstruáljuk meg, hogy az értéke 0 legyen, ha a trajektória megfelel az előírásoknak, egyébként legyen egy pozitív érték, amelynek nagysága arányosan tükrözi az előírt mozgássorozat megsértésének súlyosságát. Mindezek számításba vételével egy korlátos globális optimalizálási feladatot kapunk, amelyben egy adott célfüggvény minimum helyeinek meghatározása a feladat.

A fejezetben bemutatjuk a kidolgozott modell felépítését a célfüggvény kivételével, amely összetettségére való tekintettel külön fejezetben kerül részletes bemutatásra.

2.1. A rendszer átalakítása

A feladat megoldásának tervezése során célunk volt, hogy az inga kaotikus trajektóriáinak kezdőpontjait megbízhatóan állítsuk elő, ami alatt a kezdőpontok matematikai pontosságú megadását értjük, azaz a kidolgozandó módszer által adott eredmények ne a valódi kezdőpontok numerikus közelítései, hanem azok garantált intervallumos befoglalásai legyenek. Ehhez elengedhetetlen, hogy a Poincaré leképezést is megbízhatóan állítsuk elő. Mivel a leképezés nem adható meg zárt alakban ezért, a képek előállításához elengedhetetlen a trajektóriáknak a $[0, 2\pi]$ intervallumban történő követése. Ez azt jelenti, hogy a Poincaré leképezést a trajektória aktuális helyzete adja meg a 2π időpillanatban.

A trajektória befoglalásainak meghatározásához a VNODE [12] differenciálmegoldó programcsomagot használtuk, amely a befoglaló intervallumok ábrázolásában a PROFIL/BIAS [9] intervallum környezetre támaszkodik. A csomag a Taylor sorfejtésen alapszik, előnye hogy a lépéshosszt automatikusan és adaptívan határozza meg kisebb léptékekkel haladva és így nagyobb pontosságot elérve ott, ahol a pálya dinamikusabban változik. A szoftver hátránya,

hogy csak számítógéppel is ábrázolható pontokban képes meghatározni a differenciálegyenlet rendszer megoldásainak befoglalását. Az általunk használt 2π időpillanat nem ilyen szám. A probléma megoldására transzformáltuk az inga mozgását meghatározó egyenletrendszert úgy, hogy az a $t = 2\pi$ helyett a $t = 2$ időpillanatokban adja meg a Poincaré képet, ami már megfelel a VNODE elvárásainak.

$$\begin{aligned}y_0'(t) &= \pi \\y_1'(t) &= y_2(t) \cdot \pi \\y_2'(t) &= (-\sin(y_1(t)) - 0.1 \cdot y_2(t) + \cos(y_0(t))) \cdot \pi\end{aligned}$$

A VNODE további, számunkra kedvező tulajdonsága, hogy a leképezés inverzét is képes kiszámítani, amelyet a fenti átalakítás után a $t = -2$ időpillanatban kaphatunk meg.

2.2. Keresési tér

Az optimalizálási modellünk keresési terét a trajektóriák kezdőpontjai alkotják. A különböző hosszúságú elvárt viselkedésekhez tartozó trajektóriák Kántor-szerű halmazt alkotnak.

Az eredeti Kántor halmaz a következő rekurzióval definiálható. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumot, majd töröljük az intervallum középső harmadát. Az így kapott két, egyharmad hosszú intervallumnak is töröljük ki a középső egyharmad részét, majd ezt iteráljuk tovább *ad infinitum*. Az előbbi leírás után tekintsük a halmaz definícióját formálisan is.

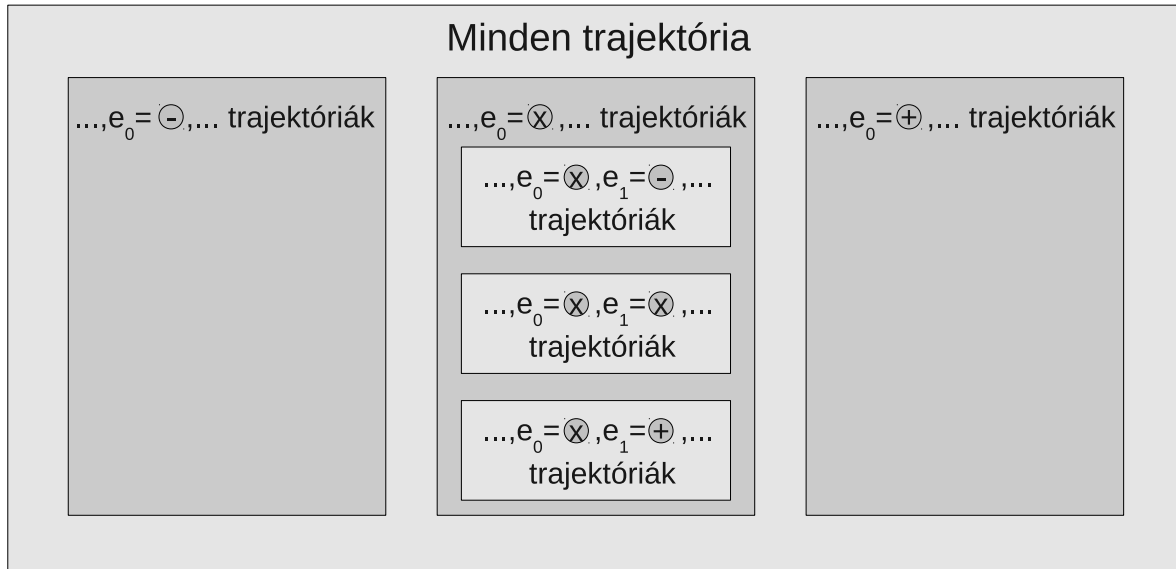
$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right) \quad (2.1)$$



2.1. ábra. Kántor halmaz az első hat iterációja.

A Kántor-szerű halmaz szerkezet a következőket jelenti a keresési térre nézve. Tekintsük például az összes olyan trajektória kezdőpontot, amikor az első végrehajtott mozgás $\otimes$. Ezen kezdőpontok halmaza fogja tartalmazni az összes olyan trajektória kezdőponthalmazát,

amelynek első két mozgására az $\epsilon_0 = \otimes$ és $\epsilon_1 = \otimes$ teljesül. Ugyanez igaz a $\epsilon_0 = \otimes$ és $\epsilon_1 = \ominus$ kezdőpont halmazra és az $\epsilon_0 = \otimes$ és $\epsilon_1 = \oplus$ kezdőpont halmazra is.



2.2. ábra. Keresési tér szerkezete.

Később látható lesz, hogy a keresési tér szerkezetének felhasználása nagyban segítségünkre volt a nehezebben lokalizálható kezdőpontok megtalálásában.

2.3. Optimalizáló eljárás

A következő fejezetben jellemzett célfüggvény minimum pontjainak megtalálására több globális optimalizáló eljárás [17], [16] is alkalmas lett volna. Választásunk a GLOBAL [5] programra esett, amely egy globális, sztochasztikus, klaszterezésen alapuló eljárás. A döntésünket az optimalizáló korábbi sikeres alkalmazásai [1], [11] indokolták.

Működésének lényege, hogy a számára definiált keresési térből véletlenszerűen választott pontokban kiértékeli a célfüggvényt, majd ezekből klasztereket képez. A klaszterek pontjaiban felvett célfüggvény értékektől függő valószínűséggel iteratíván új pontokat vesz fel a klaszterekben, amíg be nem következik valamelyik előre definiált, az iteratív optimalizációkban már jól ismert megállási feltétel. Futása során több optimum pont megtalálására is képes. Fontos megjegyezni, hogy a klaszter inicializálása után felvett pontok kívül eshetnek a keresési téren.

A GLOBAL sikeres alkalmazásának feltétele, hogy a megoldandó probléma dimenzió száma kevés legyen és a globális optimum pontok relatív vonzáskörzete ne legyen túl kicsi.

3. fejezet

Célfüggvény

A globális optimalizálási modellünk elkészítése során a célfüggvény megtervezése volt a legkritikusabb pont. A célfüggvény feladata, hogy kifejezze egy tetszőleges trajektória viselkedése és az előírt, vagy más néven elvárt viselkedés közötti eltérés mértékét. Ez három részfeladat megoldását követeli meg tőlünk.

- Határozzuk meg a vizsgált trajektória által végrehajtott mozgássorozat matematikai leírását.
- Határozzuk meg az elvárt esemény sorozat matematikai leírását, amely összehasonlítható a trajektória leírásával.
- Definiáljunk a két eseménysorozat hasonlósági mértékét.

3.1. Trajektória régiók

A VNODE a differenciálegyenlet rendszer megoldásával az egyes trajektóriák intervallumos befoglalásait számítja ki a $x - x'$ (szög - szögsebesség) síkon. Ez a befoglalás téglalap alakú, két dimenziós halmazok sorozata, amelynek minden eleme a trajektória egy-egy szakaszát tartalmazza. Mivel a mozgástípusok definíciói csak az inga szögének értékére, illetve annak megváltozására tartalmaznak megkötést, ezért a trajektória befoglalásait az $x - t$ síkon, azaz a szög és az eltelt idő viszonylatában vizsgáljuk. A VNODE ezt a trajektória befoglalást is előállítja számunkra. Ezen sorozat elemeinek unióját nevezzük aktuális, vagy trajektória régiónak.

$$I = \bigcup_{i \in T} i,$$

ahol T az inga trajektóriája.

Mivel olyan trajektóriákkal foglalkozunk, amelyek csak a már korábban felsorolt mozgásokból állhatnak, ezért meg kell vizsgálnunk, hogy ez a feltétel valóban teljesül-e. Ha egy trajektóriához tartozó aktuális régió rendelkezik a következő tulajdonságok valamelyikével, akkor kívül esik vizsgálódásunk körén.

1. A $[0, 2\pi]$ időintervallum alatt a trajektória szöge bármikor nagyobbá válik, mint 4π .
2. A $[0, 2\pi]$ időintervallum alatt a trajektória szöge bármikor kisebbé válik, mint -2π .
3. A $[0, 2\pi]$ időintervallum alatt a trajektória szöge a $[2\pi, 4\pi]$ intervallumból a $[0, 2\pi]$ intervallumba lép át.
4. A $[0, 2\pi]$ időintervallum alatt a trajektória szöge a $[-2\pi, 0\pi]$ intervallumból a $[0, 2\pi]$ intervallumba lép át.

3.2. Elvárt régiók

Az elvárt viselkedést alkotó mozgástípusok az inga pályájának egy adott szakaszára két dolgot írhatnak elő.

1. Az inga szöge adott szög intervallumokon belül legyen a mozgása során.
2. Az inga pályája adott irányban messe az $x - t$ síkon vett $x = 0$ egyenest a mozgása során.
3. Az inga pályája adott irányban messe az $x - t$ síkon vett $x = 2\pi$ egyenest a mozgása során.

Ezek a szabályok nem egy egzakt $x - t$ régiót írnak le, hanem egy régiótípust, amelyet az adott mozgástípushoz tartozó elvárt régiónak nevezünk.

1. $\otimes$ eset: a trajektória szöge végig a $[0, 2\pi]$ intervallumban marad.

$$E_{\otimes} = \{(x, x'), \text{ ahol } 0 < x < 2\pi\}.$$

2. $\ominus$ eset: a trajektória szöge egy adott pillanatig $[0, 2\pi]$ intervallumban marad, majd átlép a $[-2\pi, 0]$ intervallumba és a vizsgált időintervallum végéig ott is tartózkodik.

$$\begin{aligned} E_{\ominus} = & \{(x, x'), \text{ ahol } 0 < x < 2\pi, \text{ a metszés előtt}\}, \\ & \cup \{(x, x'), \text{ ahol } -2\pi < x < 2\pi \text{ és } x' < 0, \text{ a metszés alatt}\}, \\ & \cup \{(x, x'), \text{ ahol } -2\pi < x < 0, \text{ a metszés után}\}. \end{aligned}$$

3. $\oplus$ eset: a trajektória szöge egy adott pillanatig $[0, 2\pi]$ intervallumban marad, majd átlép a $[2\pi, 4\pi]$ intervallumba és a vizsgált időintervallum végéig ott is tartózkodik.

$$\begin{aligned} E_{\oplus} = & \{(x, x'), \text{ ahol } 0 < x < 2\pi, \text{ a metszés előtt} \}, \\ & \cup \{(x, x'), \text{ ahol } 2\pi < x < 4\pi \text{ és } x' > 0, \text{ a metszés alatt} \}, \\ & \cup \{(x, x'), \text{ ahol } 2\pi < x < 4\pi, \text{ a metszés után} \}. \end{aligned}$$

3.3. Hausdorff távolság

A Hausdorff távolság tetszőleges metrikus tér két, nem üres részhalmazának egymástól mért távolságát a következőképpen definiálja. A két halmaz távolsága legyen a legnagyobb olyan távolság, amely az egyik halmaz bármely pontja és a másik halmaz hozzá legközelebbi pontja között mérhető. Formálisan az elvart és aktuális régiókra ez a következőképpen írható le.

$$H(I, E) = \max\{\sup_{x \in E} \inf_{y \in I} d(x, y)\},$$

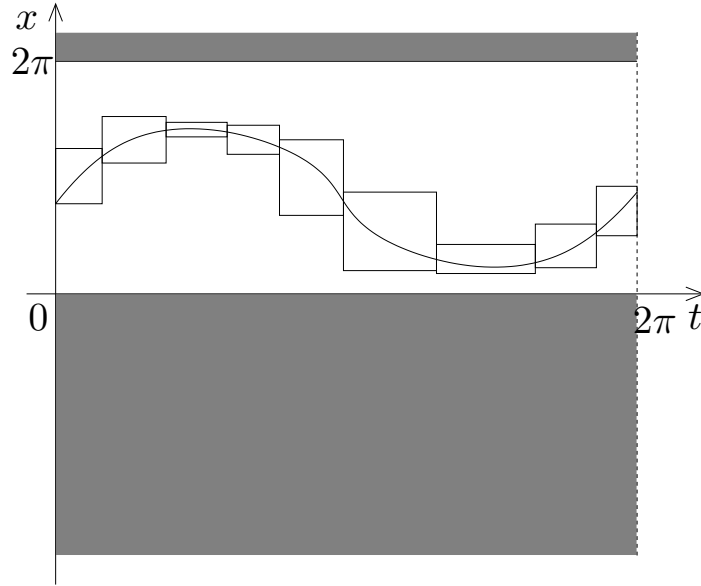
ahol I a trajektória régió, E valamely elvart régió és $d(., .)$ egy választott mértékfüggvény. Jelen esetben a Hausdorff távolság meghatározásához az Euklédesszi távolságát választottuk a pontok eltéréseinek.

A Hausdorff távolság előnye, hogy szimmetrikus, a távolság minimumértéke mindig 0, így a globális minimum elérése könnyen ellenőrizhető, továbbá arányosan reprezentálja a trajektóriák eltérését az elvárásoktól az egész trajektória halmazra.

3.4. A célfüggvény kiszámítása

Elsősorban a célfüggvény kiszámításának leírása során fontos megemlíteni, hogy nem egy állandó szerkezetű célfüggvénnyel dolgozunk. A célfüggvény felépítése az elvart viselkedés elemszámától és a sorozatban szereplő egyes mozgástípusoktól függően kerül megkonstruálásra, amelynek menete a következő.

1. Az elvart viselkedés minden elemére és a hozzátartozó trajektória szakaszra határozzuk meg a Hausdorff távolságot.
2. Adjuk össze a Hausdorff távolságokat.
3. A célfüggvény értékéhez adjunk hozzá 1-et (a büntető konstanst), ha bármelyik előírt viselkedés nem teljesült.



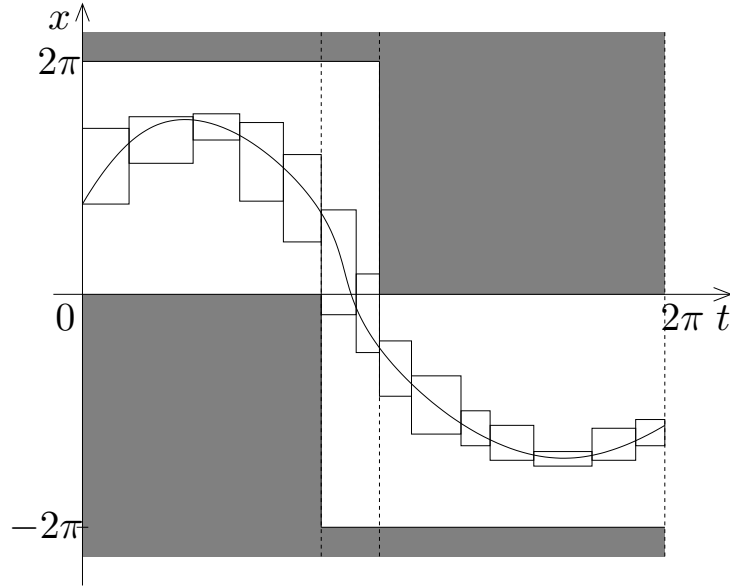
3.1. ábra. Az elvárt és a trajektória régió a $\otimes$ esetben.

A $\otimes$ mozgás esetén a trajektória régió és az elvárt régió Hausdorff távolsága 0, ha a trajektória végig a $[0, 2\pi]$ intervallumban marad, egyébként a távolság a trajektória szögének abszolút értékben legnagyobb eltérés a megengedett tartomány határától.

Algoritmus 1 $\epsilon = \otimes$ eset

- 1: $k = \max_d = 0$
 - 2: **while** $k \neq \max_k$ **do**
 - 3: $\max_d = \max(\min_{x \in I_k}(d(x,]0, 2\pi[)), \max_d), k++$
 - 4: **end while**
 - 5: **return** $\max_d$
-

A $\ominus$ és $\oplus$ mozgások esetén az elvárt régió alakja nem határozható meg egzakt módon előre, csak annyit tudhatunk, hogy milyen részekből szükséges, hogy álljon, és ezeknek milyen sorrendben kell következniük. Tovább bonyolítja ezeket az eseteket, hogy az sem ismert előre, hogy a trajektória mikor fogja az $x = 0$ vagy $x = 2\pi$ egyenest metszeni. Ezekből az okokból kifolyólag a Hausdorff távolság meghatározása a $\ominus$ és a $\oplus$ esetekben komplikáltabb.



3.2. ábra. Az elvárt és a trajektória régió a $\ominus$ esetben.

A $\ominus$ esetben a vizsgált trajektória szakasz logikailag három részre bontható a mozgástípushoz tartozó elvárt régió definíciója alapján. Az első szakaszban az inga 2π feletti szögeinek 2π -t meghaladó mértéke adja a Hausdorff távolságot. Mivel a trajektória befoglalásával dolgozunk, ezért egy egyenessel történő metszését nem egyetlen pontként, hanem intervallumok sorozataként kapjuk meg a VNODE-től. Ennek tükrében középső szakasz azokból a befoglalásokból áll, amelyek szöge intervalluma tartalmazza az $x = 0$ értéket. A metszés befoglalásában az inga szögsebessége nem lehet negatív, mert ez lehetővé tenné, hogy a trajektória visszakanyarodjon a $[0, 2\pi]$ intervallumba, ezért abban az esetben, ha ez megtörténne, a Hausdorff távolság a negatív szögsebesség abszolút értéke lesz. Ezzel eltérünk a két vizsgált régióra korábban lefektetett távolság interpretációnktól, azonban feltétlen szükséges, hogy ezzel a lépéssel kiszűrjük azokat a trajektóriákat, amelyekre előfordulhat, hogy a nem vizsgálandó trajektóriák halmazába tartoznak. A harmadik és logikailag utolsó szakaszban az inga szögének $[-2\pi, 0]$ intervallumból történő esetleges kilépésének mértéke adja a Hausdorff távolságot. A teljes mozgástípusra számított Hausdorff távolság a három különböző szegmensben meghatározott érték maximuma.

Algoritmus 2 $\epsilon = \ominus$ case

```
1:  $k = \max_a = \max_b = \max_d = \max_e = 0$ 
2: while  $0 \notin I_k$  and  $k \neq \max_k$  do
3:    $\max_b = \max(\min_{x \in I_k}(d(x, ]0, 2\pi[)), \max_b), k++$ 
4: end while
5: while  $0 \in I_k$  and  $k \neq \max_k$  do
6:    $\max_d = \max(\min_{x' \in I_k, x' < 0}(x'), \max_d), k++$ 
7: end while
8: while  $k \neq \max_k$  do
9:    $\max_a = \max(\min_{x \in I_k} d(x, ] - 2\pi, 0[), \max_a), k++$ 
10: end while
11: if  $\forall I_k : \min_{x \in I_k}(x) \geq 0$  then
12:    $\max_e = d(I_{\max_k}, 0)$ 
13: end if
14: return  $\max(\max_a, \max_b, \max_d, \max_e)$ 
```

Könnyen láthatóan a $\oplus$ mozgás esetén a trajektória régió elvárt régiótól vett eltérésének meghatározása kis módosítással a $\ominus$ esettel analóg módon elvégezhető.

Algoritmus 3 $\epsilon = \oplus$ case

```
1:  $k = \max_a = \max_b = \max_d = \max_e = 0$ 
2: while  $0 \notin I_k$  and  $k \neq \max_k$  do
3:    $\max_b = \max(\min_{x \in I_k}(d(x, ]0, 2\pi[)), \max_b), k++$ 
4: end while
5: while  $0 \in I_k$  and  $k \neq \max_k$  do
6:    $\max_d = \max(\min_{x' \in I_k, x' > 0}(x'), \max_d), k++$ 
7: end while
8: while  $k \neq \max_k$  do
9:    $\max_a = \max(\min_{x \in I_k} d(x, ]2\pi, 4\pi[), \max_a), k++$ 
10: end while
11: if  $\forall I_k : \min_{x \in I_k}(x) \geq 0$  then
12:    $\max_e = d(I_{\max_k}, 0)$ 
13: end if
14: return  $\max(\max_a, \max_b, \max_d, \max_e)$ 
```

A célfüggvény értéke az előírt viselkedés elemire megállapított Hausdorff távolságok összege, amelyhez egy további fix értékű büntető tényező adódik, ha trajektóriának volt olyan része, amely nem felelt meg az elvárt viselkedésnek. Ennek célja az optimum értékek egyértelmű megkülönböztethetősége az optimum közeli célfüggvény értékektől. A célfüggvény teljes és formális alakja az alábbi.

$$p(T) = (1+) \sum_{k=0}^n \max_{x \in E_{\epsilon_k}} \inf_{y \in I_k} d(x, y),$$

ahol $T = \dots, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \dots$ a vizsgált trajektória.

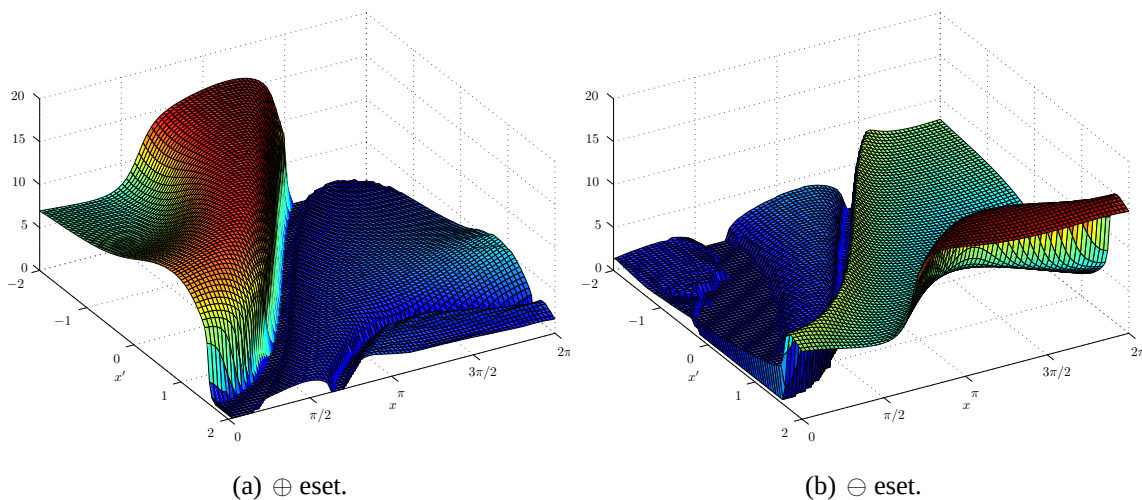
4. fejezet

Eredmények

Az előző fejezetekben ismertetett módszert több, eltérő hosszúságú előírt viselkedéshez tartozó kaotikus trajektóriák kezdőpontjainak megkeresésén keresztül vizsgáltuk. A fejezetben kutatásunk numerikus eredményei kerülnek bemutatásra.

4.1. Egység trajektóriák

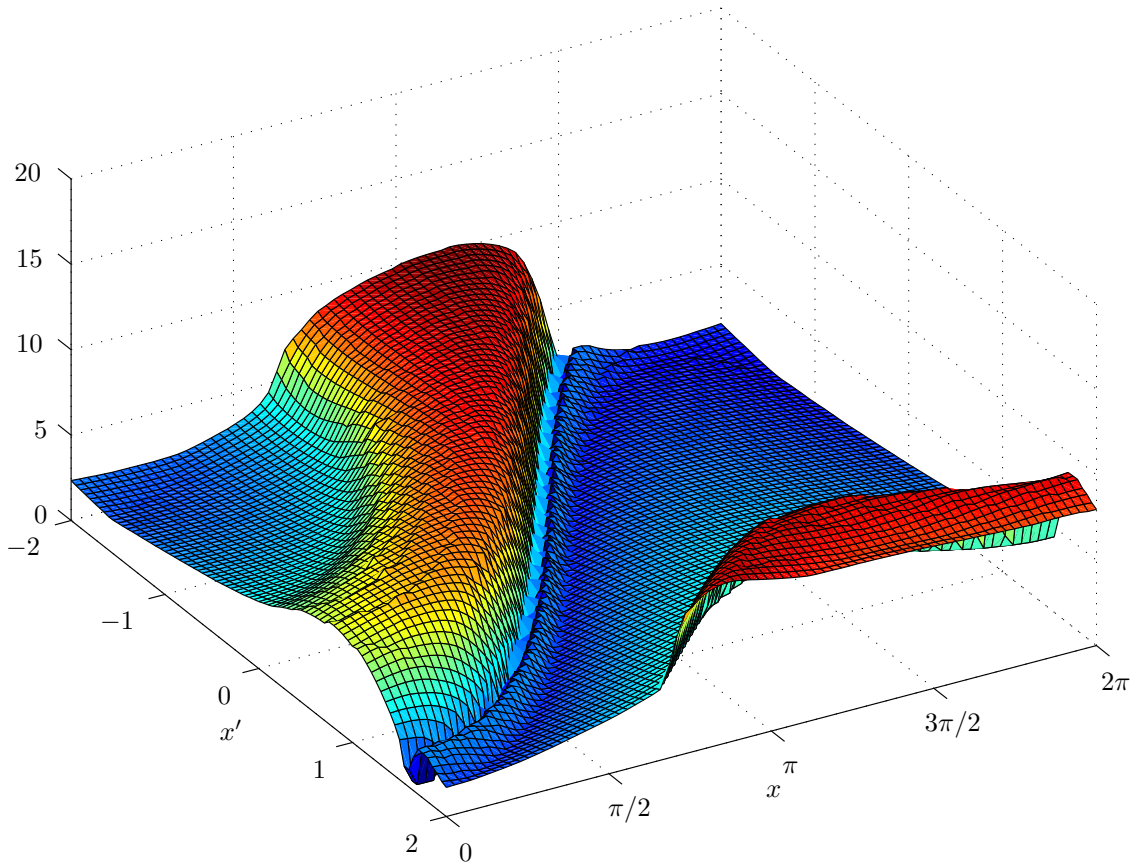
Első lépésként a kényszererős fékezett inga azon kaotikus trajektóriáinak kezdőpontjait próbáltuk megtalálni, amelyek esetében csak az ϵ_0 , azaz csak az első mozgás típusa rögzített.



4.1. ábra. A célfüggvény $\epsilon_0 = \ominus$ és $\epsilon_0 = \oplus$ előírt viselkedés esetén.

A fenti ábrákon a célfüggvényt láthatjuk, amikor a trajektória első mozgása $\oplus$ vagy $\ominus$. A két horizontális tengely az inga kezdőpontjának szöge és szögsebessége. Észrevehető, hogy a két trajektóriatípus esetén a kezdőpontok nagy része egy elnyújtott S alakú régióban lokalizálható a keresési tér közepén, ami mellett további kezdőpontokat találhatunk egy-egy nagyobb

kiterjedésű régióban is. A megoldást jelentő pontok relatív vonzáskörzetének mérete kellően nagy volt ahhoz, hogy ezen trajektóriák megtalálása nem okozzon problémát.



4.2. ábra. A célfüggvény $\epsilon_0 = 0$ előírt viselkedés esetén.

Az $\otimes$ esetben a célfüggvény grafikonja eltérő képet mutat. A megfelelő kezdőpontok kizárólag egyetlen régióban helyezkednek el, amely bár alakra és pozícióra az előzőekben tekintett két esettel analóg jegyeket mutat, a régió kiterjedése és relatív vonzáskörzete szignifikánsan kisebb, ami előrevetíti, hogy a $\otimes$ mozgással kezdődő trajektóriák megkeresése jóval nehezebb lesz, mint $\oplus$ vagy $\ominus$ mozgásokkal kezdődőké.

4.2. Három hosszú trajektóriák

Az első numerikus eredmények után érdeklődésünk a bonyolultabb trajektóriák vizsgálatára koncentrált. Kezdőpontokat kerestünk az összes olyan kaotikus trajektóriatípushoz, amelynél az első három mozgás a megengedett mozgástípusok valamely variációja.

Korábbi kutatásokban már meghatározásra kerültek a különböző megengedett mozgásokkal kezdődő trajektóriák $x - x'$ síkon vett kezdőpontjainak halmazai. E régiók konvex intervallumos befoglalásai a következők:

$$\begin{aligned}
Q_{\ominus} &= \{x \in [1, 2.226,], x' \in [-1.35, -0.208]\} \\
Q_{\otimes} &= \{x \in [2.436, 2.796,], x' \in [-0.123, -0.201]\} \\
Q_{\oplus} &= \{x \in [3.197, 4.412,], x' \in [0.389, 1.258]\}.
\end{aligned}$$

Minden előírt mozgássorozathoz a neki megfelelő keresési térből indítottuk az optimalizációt. A korábban megfogalmazott sejtésünk beigazolódni látszott. Azonnal szembetűnik, hogy minél több a $\otimes$ mozgás egy trajektóriában, annál nehezebben boldogult az optimalizáló, ami a kevesebb megtalált kezdőpontban és a kereséshez szükséges látványosan magasabb számú függvény kiértékelésben mutatkozik meg. Szintén leolvasható a táblázatból, hogy a legkönnyebben detektálható viselkedés $\ominus$ volt. A megelőző két fejezetben tárgyalásra került optimalizációs módszer hatékonyságának és a megfelelő célfüggvény választásnak köszönhetően egyetlen eset kivételével minden három hosszú, előírt viselkedéshez találtunk megfelelő kezdőpontot, bizonyos variációkra többet is.

S	X	ZO	FE	CT
$\sim \oplus \oplus \oplus$	(3.5145566; 1.1854134)	3	2 305	666
$\sim \oplus \oplus \otimes$	(3.541253; 1.1780008)	1	3 356	965
$\sim \oplus \oplus \ominus$	(4.1354217; 1.1146838)	9	1 489	431
$\sim \oplus \otimes \oplus$	(3.4500625; 1.2046848)	1	3 057	862
$\sim \oplus \otimes \otimes$	(3.6355882; 1.1519576)	1	7 229	2 089
$\sim \oplus \otimes \ominus$	(4.1873482; 1.1159454)	2	2 477	723
$\sim \oplus \ominus \oplus$	(4.3271325; 1.1040739)	3	2 968	858
$\sim \oplus \ominus \otimes$	(3.9656183; 1.0787189)	2	3 212	931
$\sim \oplus \ominus \ominus$	(3.7628911; 1.096835)	7	1 863	540
$\sim \otimes \oplus \oplus$	(2.6045829; 0.056101674)	2	3 680	1 061
$\sim \otimes \oplus \otimes$	(2.6558599; 0.004679824)	1	11 882	3 439
$\sim \otimes \oplus \ominus$	(2.5851486; 0.081902247)	6	2 054	594
$\sim \otimes \otimes \oplus$	(2.6840309; -0.024118557)	1	8 940	2 582
$\sim \otimes \otimes \otimes$	—	0	8 885	2 573
$\sim \otimes \otimes \ominus$	(2.4871575; 0.17213042)	1	2 782	803
$\sim \otimes \ominus \oplus$	(2.6099677; 0.043887032)	1	2 347	678
$\sim \otimes \ominus \otimes$	(2.7034849; -0.050274764)	2	5 313	1 537
$\sim \otimes \ominus \ominus$	(2.7717467; -0.11932383)	5	2 078	600
$\sim \ominus \oplus \oplus$	(1.3103648; -0.45392754)	8	1 568	451
$\sim \ominus \oplus \otimes$	(1.3957671; -0.73793841)	1	5 063	1 464
$\sim \ominus \oplus \ominus$	(1.4709218; -0.63161865)	12	1 055	305
$\sim \ominus \otimes \oplus$	(1.0277603; -0.20910021)	1	2 294	669
$\sim \ominus \otimes \otimes$	(1.4672718; -0.61087661)	1	9 873	2 869
$\sim \ominus \otimes \ominus$	(1.5116331; -0.66239224)	2	2 404	695
$\sim \ominus \ominus \oplus$	(1.6396628; -0.62997909)	7	1 527	447
$\sim \ominus \ominus \otimes$	(1.4479849; -0.5786194)	2	2 303	665
$\sim \ominus \ominus \ominus$	(1.3920852; -0.37132957)	12	1 131	327

4.1. táblázat. A három hosszú előírt viselkedések vizsgálati eredményei. S jelöli az előírt mozgás sorozatot, X egy megtalált kezdőpontot, ZO a keresés során megtalált alkalmas kezdőpontok számát, FE a keresés során végrehajtott függvénykiértékelések számát, és CT a kereséshez szükséges teljes CPU időt.

4.3. $\otimes$ viselkedés sorozatok

A három hosszú sorozatok tapasztalatain tovább indulva a kizárólag $\otimes$ mozgást tartalmazó viselkedés sorozatok kezdőpontjainak keresésével folytattuk az inga kaotikusságának tanulmányozását. A $\otimes$ mozgással kezdődő trajektóriák régiójának korábbi befoglalása túl nagy volt ahhoz, hogy három vagy hosszabb $\otimes$ sorozatokat vizsgálhassunk, ezért korábbi kutatási eredmények alapján [4] az inga nyeregponjtjának befoglalását ($x = [2.634272, 2.634274]$, $x' = [0.02604294, 0.02604485]$) felhasználva a keresési teret addig szűkítettük a különböző előírt hosszúságú sorozatok esetén a nyeregponjt környékére, amíg nem találtunk legalább egy kezdőponjt. A felhasznált keresési tereket és futási eredményeket a következő táblázat foglalja össze.

L	S	X	ZO	BE	FE	CT
1	$[2.4; 0.2]$	(2.7108515; -0.030099507)	12	0	1 055	303
2	$[2.7; 0.1]$	(2.6469962; 0.013297356)	4	0	3 254	940
3	$[2.634; 0.026]$	(2.6342106; 0.026105974)	1	0	2 225	643
4	$[2.6342; 0.0260]$	(2.634273; 0.026043388)	1	0	2 491	721
5	$[2.634272; 0.026042]$	(2.6342733; 0.026043083)	0	2.32 ...	7 620	2 206

4.2. táblázat. A különböző hosszúságú $\otimes$ mozgás sorozatok vizsgálati eredményei. L jelöli az előírt viselkedés hosszát, S a keresési teret (itt 2.4 a $[2.4, 2.8]$ intervallumot jelenti), X egy megtalált kezdőponjt, ZO a keresés során megtalált kezdőponjtok számát, BE a keresés során elért legjobb célfüggvény értéket, FE a keresés során végrehajtott függvénykiértékelések számát, és CT a kereséshez szükséges össze CPU időt másodpercben.

Az optimalizációs eljárás általunk készített implementációja az öt hosszú $\otimes$ sorozat esetén érte el teljesítőképessége határát. A sikertelen keresés oka természetesen nem a módszerünk hibája, hanem a megvalósításban használt adattípusok pontosságának hiányossága. Az egymás után öt $\otimes$ mozgással induló kaotikus trajektóriák kezdőponjtjait tartalmazó régió kiterjedése a szög és szögsebesség dimenziók mentén kisebb, mint a dupla pontosságú lebegőpontos értékek ábrázolási pontossága, így az optimalizálónk nem képes pontot felvenni ebben régióban, így egy megfelelő kezdőponjt megtalálása is lehetetlen. Különböző nagyobb, vagy szimbolikus számábrázolási technikák felhasználásával tovább növelhetnénk a hatékonyságot.

Tovább akadályozta az egyre hosszabb $\otimes$ mozgássorozattal kezdődő trajektóriák megtalálását az, hogy a nyeregponjt környékén elvégzett műveletek nagymértékű numerikus hibája miatt a VNODE által kiszámított befoglaló téglalapok mérete is jelentős növekedésnek indult, ami szintén gátolta a trajektória elvárt régió belül maradásának eldöntését.

5. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatunk témája a kényszerrezgéses fékezett inga kaotikus trajektóriáinak megbízható lokalizációja volt.

Bemutattuk a kutatás tárgyául szolgáló dinamikai rendszert és a probléma megértéséhez szükséges elméleti háttérrel. Felépítettünk egy korlátos, globális optimalizálási modellt, amely az inga trajektóriáinak megkeresését egy célfüggvény globális optimum pontjainak meghatározására transzformálja. Ennek keretein belül ismertettük az optimalizáció keresési terének felépítését, részletesen tárgyaltuk a célfüggvény megkonstruálásának és kiértékelésének folyamatát.

A kidolgozott eljárást implementáltuk és különböző összetételű és hosszúságú trajektóriák kezdőpontjainak meghatározásával vizsgáltuk a módszer hatékonyságát. A kapott eredményeket értelmeztük és feltártuk az inga könnyebben és nehezebben lokalizálható trajektóriáit, melyen keresztül megismertük az implementáció alkalmazhatóságának határait és azok okait.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Dr. Bánhelyi Balázsnak. Szaktudása és mindenre kiterjedő precizitása nélkül e dolgozat nem készülhetett volna el.

Irodalomjegyzék

- [1] BALOGH, J. ÉS B. TÓTH, *Global optimization on Stiefel manifolds: a computational approach*, Central European J. of Operations Research 13, 213–232 (2005).
- [2] BÁNHÉLYI, B., *Dinamikai rendszerek kaotikusságának és stabilitásának vizsgálata megbízható számítógépes módszerekkel*, Doktori értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Alkalmazott Informatika Tanszék (2007).
- [3] BÁNHÉLYI, B., T. CSENDES, ÉS B.M. GARAY, *Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe-type chaos by computer*, Int. J. Bifurc. Chaos, 17, 735–747 (2007).
- [4] BÁNHÉLYI, B., T. CSENDES, B.M. GARAY, ÉS L. HATVANI, *A computer-assisted proof for Σ_3 -chaos in the forced damped pendulum equation*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 7, 843–867 (2008).
- [5] CSENDES, T., *Nonlinear parameter estimation by global optimization – efficiency and reliability*, Acta Cybernetica, 8, 361–370 (1988).
- [6] CSENDES, T., B.M. GARAY, ÉS B. BÁNHÉLYI, *A verified optimization technique to locate chaotic regions of an Hénon system*, J. of Global Optimiz., 35, 145–160 (2006).
- [7] HUBBARD, J.H., *The forced damped pendulum: chaos, complication and control*, Amer. Math. Monthly, 8, 741–758 (1999).
- [8] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Káoszelmélet>, (elérve 2012).
- [9] KNÜPPEL, O., *PROFIL – Programmer’s Runtime Optimized Fast Interval Library*, Bericht 93.4., Technische Universität Hamburg-Harburg (1993).
- [10] LÉVAI, B.L., AND BÁNHÉLYI B., *An optimization technique for verified location of trajectories with prescribed geometrical behaviour in the chaotic forced damped pendulum*, Central European Journal of Operations Research, DOI:10.1007/s101000-012-0256-5 (2012).

- [11] MARKÓT, M.CS., *An Interval Method to Validate Optimal Solutions of the Packing Circles in a Unit Square Problems*, Central European J. of Operations Research, 8, 63–78 (2000).
- [12] NEDIALKOV, N.S., *VNODE – A validated solver for initial value problems for ordinary differential equations*, Available at www.cas.mcmaster.ca/~nedialk/Software/VNODE/VNODE.shtml (2001).
- [13] NEUMAIER, A., AND T. RAGE, *Rigorous chaos verification in discrete dynamical systems*, Physica D, 67, 327–346 (1993).
- [14] RAGE, T., A. NEUMAIER, AND C. SCHLIER, *Rigorous verification of chaos in a molecular model*, Phys. Rev. E, 50, 2682–2688 (1994).
- [15] P. SZÉPFALUSY, ÉS T. TÉL (SZERK.), *A káosz (Véletlenszerű jelenségek nemlineáris rendszerekben)*, Akadémiai Kiadó, Bp. (1982).
- [16] SALAH, M., *Convex optimization approach to a single quadratically constrained quadratic minimization problem*, Central European J. of Operations Research, 18, 181–187 (2010).
- [17] TORMA, B. AND B. G.-TÓTH, *An efficient descent direction method with cutting planes*, Central European J. of Operations Research, 18, 105–130 (2010).
- [18] TUCKER, W., *The Lorenz attractor exists*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. Math. 328, 1197–1202 (1999).
- [19] WILCZAK, D. AND P. ŻGLICZYŃSKI, *Computer assisted proof of the existence of homoclinic tangency for the Henon map and for the forced-damped pendulum*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 8, 1632–1663 (2009).