

Mágneses indukció szimulációja végeselem-módszer segítségével

Írta:

Friedl Gergely

(IV. éves villamosmérnök B.Sc. hallgató, infokommunikáció szakirány)

Konzulens:

Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós, Ph.D.
(egyetemi tanár, tanszékvezető)

Széchenyi István Egyetem
2012. december
Győr

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Elméleti áttekintés	2
2.1. Elektromágneses terek szimulációja	2
2.1.1. Maxwell-egyenletek	2
2.1.2. Potenciálformalizmusok	4
2.1.3. Végeselem-módszer	4
2.1.4. Gyenge alak	6
2.1.5. Fixpontos módszer	6
2.2. Jiles-Atherton-hiszterezismodell	7
2.2.1. Az alapegyenlet levezetése	7
2.2.2. A modell korrekciója.....	10
2.2.3. A paraméterek meghatározásának irodalomból ismert menete	10
3. Mágneses hiszterezis mérése.....	13
3.1. A mérési elrendezés	13
3.2. Mérőprogram LabVIEW környezetben	14
3.2.1. Műszervezrlő blokk	14
3.2.2. Szűrő.....	15
3.2.3. Mágneses indukció számítása	18
3.2.4. Mágneses indukció szabályozása.....	19
3.2.5. Segédparaméterek mérésének menete.....	20
4. A paraméterek meghatározása	24
4.1. A paraméterek hatása a számított görbékre.....	24

4.2. A paraméterek értékének meghatározása	25
5. A végeselemes szimuláció	27
5.1. A végeselem-módszer lépései	27
5.1.1. A modell specifikációja	27
5.1.2. Előfeldolgozás	27
5.1.3. Számítás	30
5.2. Szimuláció COMSOL Multiphysics környezetben	33
5.3. Szimulációs program építése Matlab környezetben	34
5.3.1. Szimuláció mágnesesen lineáris esetben	34
5.3.2. Szimuláció mágnesesen nemlineáris esetben	38
Konklúzió, jövőbeli tervek	41
Irodalomjegyzék	42
A. Függelék	44
B. Függelék	45
C. Függelék	50

1. Bevezetés

Villamos motorok, villamos gépek, valamint transzformátorok tervezésénél többek között fontos a lehető legkisebb veszteség elérése. Erre nagyon jó példa, hogy a jelen pillanatban is több csoport (pl.: EMLA Alapítvány) dolgozik azon, hogy a magyar villamoshálózatot optimalizálja, csökkentse a különböző veszteségeket, ezáltal csökkenjen a villamos ipar által kibocsájtott szén-dioxid mennyiség. Ilyen nemkívánatos veszteség például az örvényáram veszteség, aminek csökkentését a vastest lemezelésével érik el, valamint veszteség még a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti kapcsolat, a mágneses hiszterézis veszteség, de léteznek még úgynevezett járulékos veszteségek is, amelyek az anyag doménszerkezetével vannak kapcsolatban. Dolgozatomban a mágneses nemlinearitást, és a mágneses hiszterézis jelenségét emeltem ki. A hiszterézis jelenségének modellezésére számos különböző matematikai és fizikai modell létezik, a legelterjedtebbek a Preisach-modell és a Jiles-Atherton modell [3,4,6]. A hiszterézis modellezésének fontossága a mágneses elven működő eszközök tervezésénél, numerikus térszimulációjánál kerül elő. Ilyen numerikus módszer például a végeelem-módszer, melynek segítségével analitikusan nem megoldható problémákra lehet közelítő megoldást találni. Munkám során a mágneses hiszterézis vizsgálatára implementáltam egy LabVIEW programot, mely alkalmas a hiszterézis karakterisztika mérésére, a zajok szűrésére, valamint a mágneses indukció jelalakjának szabályozására. A mérés egy EI alakú vaslemezen történt. Ezen felül a mért görbe különböző fontosabb értékeinek meghatározására is alkalmas. Ezek az értékek szükségesek a jelenséghez illesztett hiszterézismodellhez. Én a Jiles-Atherton-féle hiszterézismodellt alkalmaztam a jelenség modellezésére. A paramétereinek meghatározására egy saját, szabályozáson alapuló módszert használtam. A mágneses indukció jelalakjának szimulációja a végeelem-módszer segítségével történt. A szimulációhoz a kétdimenziós geometriát, valamint a végeelemrácsot az ingyenes Gmsh program segítségével készítettem el. A mágneses térerősség és mágneses indukció nemlineáris kapcsolatának szimulációjához pedig egy Matlab scriptet írtam. Dolgozatom elején rövid elméleti áttekintést adok mind a végeelem-módszerről, mind a Jiles-Atherton-hiszterézismodellről. Bemutatom a mérés vezérlésére használt programot, annak részleteit. Ismertetem a Jiles-Atherton-féle hiszterézismodell paramétereinek hatásait a modellezett görbére, valamint a mért görbe alapján a paraméterek meghatározásának menetét. Végül ismertetem a lineáris illetve nemlineáris végeelemes szimuláció menetét.

2. Elméleti áttekintés

2.1. Elektromágneses terek szimulációja

Az elektrodinamikai jelenségeket leíró Maxwell-egyenletek alapján bonyolult rendszerek leírása és tervezése lehetséges, mint például villamos motorok, transzformátorok, különféle antennák és csőtápvonalak. Egyszerűbb problémák, mint például síkkondenzátorok vizsgálatára léteznek analitikus megoldások, bonyolult problémák megoldásához numerikus módszerek szükségesek. Ilyen numerikus módszer más technikák mellett a végeselem-módszer. A végeselem-módszerhez szükségesek a problémát leíró Maxwell-egyenletek és a peremfeltételek ismerete, időtől függő feladatok esetén a térváltozók, illetve potenciálok kiindulási értékre is szükség van a $t=0$ időpillanatban. A Maxwell-egyenletek skalár- illetve vektorpotenciálok bevezetésével átalakíthatók. Ezek parciális differenciálegyenletek, melyek megoldásához minden numerikus módszer használata esetén a probléma diszkretizálása szükséges. Ezek numerikus megoldása viszont csupán egy közelítő megoldást ad a problémára, habár ez a közelítés nagyon pontos lehet. Fontos azonban megjegyezni, hogy a következő alfejezetek csupán a témakör azon töredékét írják le, melyek alapvetően szükségesek voltak dolgozatom elkészítéséhez, bővebb kifejtésük túlságosan messzemenő lenne, bővebb leírást ad [2].

2.1.1. Maxwell-egyenletek

James Clerk Maxwell 1865-ben megjelent "A dynamical theory of the electromagnetic field" [16,17] című művében közölte először az elektromosság és mágnesesség közötti kapcsolatokat leíró, ma Maxwell-egyenletek néven ismert egyenleteket. A Maxwell-egyenleteknek létezik mind integrális (1-4), mind differenciális alakja (5-8):

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}, \quad (1)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (2)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (3)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \cdot dV, \quad (4)$$

ahol $\vec{H}$ jelöli a mágneses térerősséget [amper/méter], $\vec{J}$ az áramsűrűséget [amper/négyzetméter], $\vec{E}$ az elektromos térerősséget [volt/méter], $\vec{B}$ a mágneses indukciót [wéber/négyzetméter = tesla], $\vec{D}$ az elektromos eltolást [coulomb/négyzetméter], ρ pedig a töltéssűrűséget [coulomb/köbméter]. Az integrálokban szereplő l azt jelenti, hogy vonal mentén történik az integrálás, míg A a felület szerinti integrálást jelenti. Az (1) egyenlet az Ampere-féle gerjesztési törvény, (2) a Faraday-féle indukciós törvény, (3) a mágneses Gauss-

törvény, (4) pedig az elektrosztatika Gauss-törvénye. A Maxwell-egyenletek differenciális alakja sokszor könnyebben értelmezhető, és célravezetőbb egy probléma megértéséhez. Ezek a következők:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (8)$$

Itt ∇ a nabla-operátor, vagy nabla-vektor, jelentése $[\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z]$. A differenciális alak az integrális alakból a Gauss-tétel illetve a Stokes-tétel [10-13] segítségével vezethető le. Mivel a dolgozatomban alacsonyfrekvenciás témában íródott, így az esetben $\frac{d\vec{D}}{dt}$ abszolút értéke az áramsűrűség abszolút értékéhez képest elhanyagolható. Ezen felül felírhatók az alábbi térjellemzők, gerjesztő mennyiségek és térintenzitások között úgynevezett konstitúciós relációk. Lineáris, izotróp anyagok esetén ezek az alábbiak:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (9)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad (10)$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b), \quad (11)$$

ahol μ_0 a vákuum permeabilitása, értéke $4\pi 10^{-7}$ [farád/méter], μ_r az anyagra jellemző relatív permeabilitás, ε_0 a vákuum permittivitása, értéke $8,854 \cdot 10^{-12}$ [henry/méter], ε_r az anyagra jellemző relatív permittivitás, σ az anyag vezetőképessége, $\vec{E}_b$ pedig az úgynevezett beiktatott térerősség. Ezen felül szükséges még a peremfeltételek ismerete. Ezek a következők:

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{K}, \quad (12)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0, \quad (13)$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \quad (14)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \mathcal{Q}, \quad (15)$$

ahol $\vec{n}$ a felület normálvektora, $\vec{K}$ jelenti a felületi áramot, $\mathcal{Q}$ pedig a felületi töltéssűrűséget. Nemlineáris, hiszterézissel bíró rendszerek esetén (ebben a dolgozatban) a (9) összefüggés jóval bonyolultabb módon írható le, sok esetben fizikai tartalommal nem bíró, matematikai modell segítségével. Ezek a modellek például az alábbi leképezések szerint működhetnek:

$$B = B\{H\}, \quad (16)$$

$$H = H\{B\}. \quad (17)$$

2.1.2. Potenciálformalizmusok

A Maxwell-egyenletek általános megoldása potenciálok [2,5,6,15,18,30] bevezetésével célszerű. A feladatomban során az Ampère-törvényt és a mágneses Gauss-törvényt kell megoldani nemlineáris közeget feltételezve, tehát a probléma egy stacionárius örvényáramtól mentes mágneses tér. Az ehhez szükséges peremfeltételeket a (12) illetve a (13) írja le. Ismeretes, hogy potenciálok bevezetését a Maxwell-egyenletek alapján, különböző vektoralgebrai azonosságok ismeretével lehet végrehajtani. Így vezethető be (19) alapján a mágneses vektorpotenciál fogalma. Ismert az alábbi vektoralgebrai azonosság:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0, \quad (18)$$

amely bármely $\vec{v} = v(r, t)$ vektorfüggvényre igaz. (18) valamint (7) alapján felírható a mágneses vektorpotenciálra vonatkozó alap összefüggés,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (19)$$

ahol A a mágneses vektorpotenciál. Felhasználva a mágneses mennyiségek közötti konstitúciós relációt, valamint (19)-et behelyettesítve (5)-be kapható az A formalizmus alap egyenlete:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J} - \nabla \times \vec{I}, \quad (20)$$

ahol $\nu = 1/\mu_0\mu_r$, $\vec{I}$ pedig a nemlinearitást tartalmazza. Kétdimenziós probléma esetén a formalizmusra érvényes peremfeltétel (12) és (20) alapján:

$$(\nu \nabla \times \vec{A} + \vec{I}) \times \vec{n} = \vec{K}, \quad (21)$$

valamint

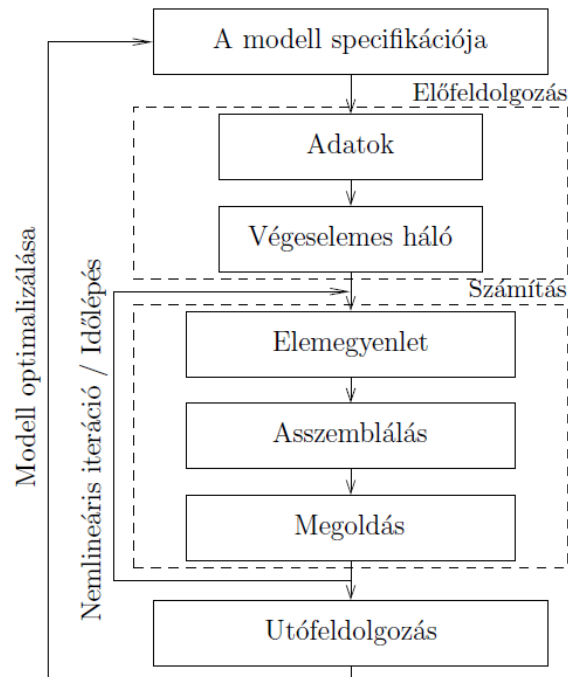
$$\vec{n} \times \vec{A} = 0, \quad (22)$$

ahol $\vec{K}$ a felületi áramot jelöli, mivel a modell kétdimenziós modelljében a tekercselés geometriájának megvalósítása helyett felületi áram segítségével történik a példa megoldása az ismeretlenek számának csökkentése érdekében.

2.1.3. Végeselem-módszer

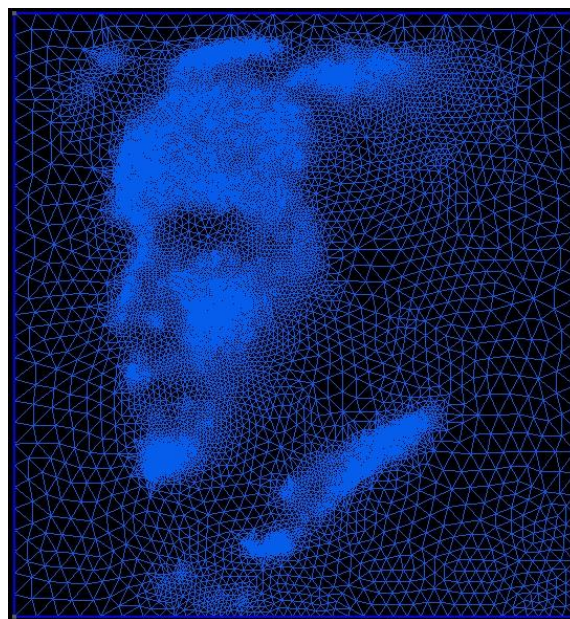
A végeselem-módszer egy népszerű numerikus módszer parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. Ezáltal analitikusan nem megoldható problémák közelítő számítására alkalmas. Egy végeselem-módszert használó szimuláció lépéseit a 2.1. ábra mutatja. A potenciálformalizmusok és azokra felírható peremfeltételek megoldásához az adott problémateret, tehát a probléma geometriáját diszkretizálni kell (2.2. ábra). Egydimenziós esetben ez egy szakasz, kétdimenziós esetben általában háromszögelem illetve négyszögelem, háromdimenziós esetben pedig legtöbbször tetra- illetve hexaéderelem használatos. Ezekre az elemekre a súlyozott maradék elv gyenge alakja alapján egyenletek írhatók fel, ezek alapján felépíthető az egész geometriát leíró egyenletrendszer. A gyenge alak lényege, hogy a problémára felírható egyenleteket egy megfelelő súlyfüggvénnyel beszorozva, majd integrálva a teljes térre a probléma egy közelítő megoldását kaphatjuk. A skalárpotenciálok

csomóponti végelemekkel, a vektorpotenciálok csomóponti elemekkel és élelemekkel is közelíthetők.



2.1. ábra. A végeselemes szimuláció lépései

A dolgozatomban csomóponti végeselemekkel dolgoztam. A csomóponti végeselemek alkalmazásakor N_i formafüggvénnyel kell közelíteni a potenciálokat. N_i formafüggvényre érvényes, hogy az i -edik csomópontban az értéke 1, míg minden más csomópontban az értéke 0. A probléma megoldása úgy történik, hogy végig kell haladni minden egyes végeselemen, a problémát leíró gyenge alak alapján fel kell írni az elemre érvényes egyenleteket, majd ezek együtthatóit asszemblálni. Ez után egy alkalmas megoldó algoritmus segítségével kiszámíthatók a csomópontokra az egyenletrendszer megoldásai, a potenciálok értékei.



2.2. ábra. James Clerk Maxwell arcképe alapján készített végelelemrács

2.1.4. Gyenge alak

Mint már fentebb említettem, a potenciálformalizmus gyenge alakja szükséges a probléma megoldásához végelelem-módszer használata esetén. Mivel a probléma nemlineáris, a (9) konstitúciós reláció itt nem érvényes. A formalizmust használva megoldásként a mágneses indukció számolható, ez alapján a mágneses indukció és a mágneses térerősség nemlineáris kapcsolatára felírható

$$\vec{H} = \nu \vec{B} + \vec{I}, \quad (23)$$

ahol I értéke tartalmazza a nemlinearitást. A (20) és (21) egyenleteket beszorozva a választott formafüggvénnyel, valamint véve az integrálját az egész térfogatra, az alábbi integrálegyenlet írható fel:

$$\int_{\Omega} N_i \cdot \nabla \times (\nu \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{I}) d\Omega + \int_{\Gamma_H} N_i \cdot ((\nu \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{I}) \times n - \vec{K}) \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} N_i \cdot (\vec{J} - \nabla \times \vec{I}) d\Omega. \quad (24)$$

A fenti egyenlet az úgynevezett direkt alak. Ez az egyenlet másodrendű deriváltakat tartalmaz, ezek megoldása meglehetősen nehéz, és hosszadalmas. Felhasználva a következő (25,26) vektoralgebrai azonosságokat, valamint a Gauss-Ostogradskij-tételt (27)

$$\nabla \cdot (\phi \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \phi + \phi \cdot \nabla \cdot \vec{v}, \quad (25)$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v}, \quad (26)$$

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad (27)$$

a (14) összefüggés egyszerűsíthető. Ez az egyszerűsített egyenlet (28) az A formalizmus úgynevezett gyenge alakja:

$$\int_{\Omega} \nu \cdot (\nabla \times N_i) \cdot (\nabla \times \vec{A}) d\Omega = \int_{\Gamma_H} N_i \cdot \vec{K} \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \times N_i) \cdot \vec{I} d\Omega \quad (28)$$

2.1.5. Fixpontos módszer

A fixpontos módszer segítségével nemlineáris egyenletrendszereket lehet megoldani iteratív módon. A módszer alapjául szolgáló

$$x = f(x) \quad (29)$$

egyenletet olyan iteratív sorozattal számolja ki, ahol az n -edik iteráció eredménye függ az $(n-1)$ -edik iteráció eredményétől:

$$x_n = f(x_{n-1}). \quad (30)$$

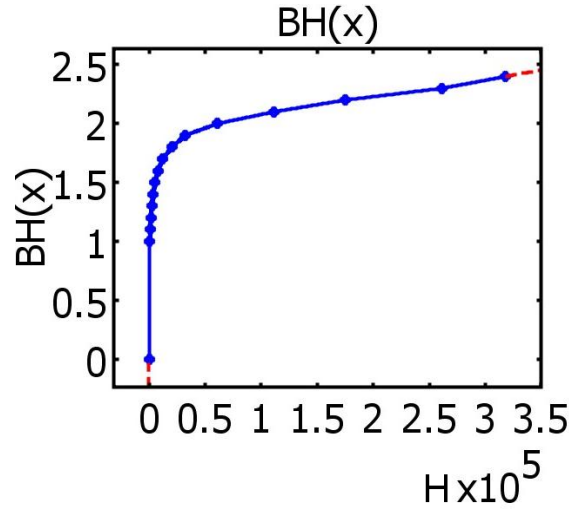
$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right| < 1 \quad (31)$$

Dolgozatomban a nemlinearitás a Jiles-Atherton-modell segítségével van kezelve.

2.2.1. Az alapegyenlet levezetése

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (32)$$

7



2.4. ábra. Mágneses szaturáció

A mágneses indukció értékét az alábbi

$$B = \mu_0 \cdot (H + M) \quad (33)$$

összefüggés írja le, ahol M a mágnesezettséget jelenti. Jiles és Atherton által megadott formula egy olyan fizikai alapokon fekvő differenciálegyenletet ad meg, amely időben a hiszterézismentes görbétől való eltérést adja meg. A hiszterézismentes görbét gyakran Langevin-függvénnyel közelítik,

$$M_{an} = M_s \cdot \left[\coth\left(\frac{H}{a}\right) - \frac{a}{H} \right]. \quad (34)$$

A (29) összefüggésben M_s az anyag maximális mágnesezettsége, a pedig egy fizikai paraméter, amely mérések alapján identifikálható. Ferromágneses anyagokban a szomszédos momentumok kölcsönhatásban állnak egymással, a Weiss-formula alapján definiálni kell egy H_e hatásos mágneses térerősséget

$$H_e = H + \alpha \cdot M, \quad (35)$$

ahol α ismét egy paraméter. A Langevin-függvény alakja tehát a következő lesz:

$$M_{an} = M_s \cdot \left[\coth\left(\frac{H + \alpha \cdot M}{a}\right) - \frac{a}{H + \alpha \cdot M} \right]. \quad (36)$$

Amennyiben $H + \alpha M$ értéke zérushoz tart, a Langevin-függvény nem folytonos, de belátható, hogy amennyiben $H + \alpha M$ értéke elegendően kicsi, M_{an} értéke felírható (36) Taylor-sora alapján:

$$M_{an} = M_s \cdot \frac{H + \alpha \cdot M}{3 \cdot a}. \quad (37)$$

A Jiles-Atherton-modell értelmében a mágnesezettség értéke egy reverzibilis és egy irreverzibilis komponens összegeként írható fel:

$$M = M_{rev} + M_{irr}. \quad (38)$$

A reverzibilis komponens felírható

$$M_{rev} = c \cdot (M_{an} - M_{irr}), \quad (39)$$

alakban, ahol c egy újabb paraméter. Behelyettesítve (39)-t a (38) összefüggésbe

$$M = c \cdot M_{an} + (1-c) \cdot M_{irr}. \quad (40)$$

Az irreverzibilis mágnesezettség változása felírható energia egyenletből, ahol M_{irr} energiája a hiszterézis nélküli mágnesezettség és a hiszterézissel bíró irreverzibilis mágnesezettség energiájának különbsége [6], azaz

$$\mu_0 \cdot \int M_{irr}(H) \cdot dH_e = \mu_0 \cdot \int M_{an}(H) \cdot dH_e - \mu_0 \cdot \int k \cdot \delta \cdot \frac{dM_{irr}}{dH_e} \cdot dH_e. \quad (41)$$

A fenti összefüggésben k egy paraméter, δ értéke pedig $\text{signum}(dH/dt)$. $dH/dt=0$ esetben δ értéke nem lehet zérus, ilyenkor választható, hogy értéke +1 vagy -1 legyen. A (41) összefüggés egyenértékű a következő kifejezéssel:

$$M_{an}(H) = M_{irr}(H) + k \cdot \delta \cdot \frac{dM_{irr}}{dH_e}. \quad (42)$$

A skalár Jiles-Atherton-modell segítségével két különböző módon állítható elő a mágneses térerősség és a mágneses indukció közötti viszony. Egyrészt direkt módon, amikor a H értéke ismert, és ez alapján számolható a B illetve M értéke, másrészt inverz módon, amikor B ismeretével számolható a H értéke. Én munkám során a direkt modellel foglalkoztam, ennek realizálásához dM/dH értékére vonatkozó differenciálegyenlet kifejezése szükséges. A (40) összefüggés H szerinti deriváltja

$$\frac{dM}{dH} = c \cdot \frac{dM_{an}}{dH} + (1-c) \cdot \frac{dM_{irr}}{dH}. \quad (43)$$

A Weiss-korrekciónak miatt M_{an} és M_{irr} értéke H_e függvénye. Az egyenlet jobb oldalát érdemes olyan alakra hozni, ahol M_{an} és M_{irr} függvény H_e szerinti deriváltja szerepel. A jobb oldalt megszorozva dH_e/dH -val

$$\frac{dM}{dH} = \left[c \cdot \frac{dM_{an}}{dH_e} + (1-c) \cdot \frac{dM_{irr}}{dH_e} \right] \cdot \frac{dH_e}{dH} \quad (44)$$

kifejezésre lehet jutni, ahol

$$\frac{dH_e}{dH} = 1 + \alpha \cdot \frac{dM}{dH}. \quad (45)$$

A (43), (44) és (45) összefüggések alapján felírható, hogy

$$\frac{dM}{dH} = \frac{c \cdot \frac{dM_{an}}{dH_e} + (1-c) \cdot \frac{dM_{irr}}{dH_e}}{1 - \alpha \cdot c \cdot \frac{dM_{an}}{dH_e} - \alpha \cdot (1-c) \cdot \frac{dM_{irr}}{dH_e}}, \quad (46)$$

és ez a differenciálegyenlet megoldható.

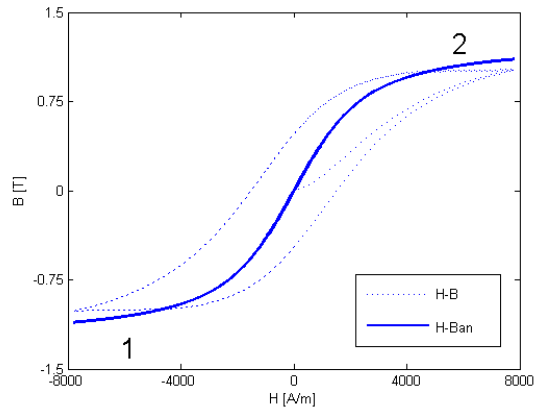
2.2.2. A modell korrekciója

Ezen egyenletek azonban korrekcióra szorulnak, ugyanis fizikailag helytelen eredményt is adhat az összefüggés olyan esetben, amikor H deriváltja előjelet vált, B deriváltja még nem, tehát például a H értéke elkezd csökkenni, de a B értéke még növekedik. A 2.5. ábrán látható „1” (47) és „2” (48) esetben kell a korrigálást (49) végrehajtani.

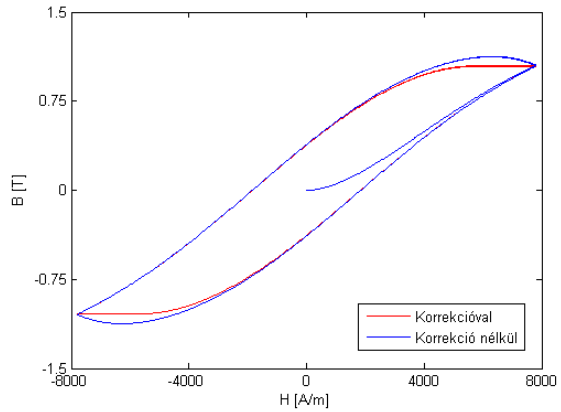
$$\delta < 0 \text{ és } M_{an} \geq M, \quad (47)$$

$$\delta > 0 \text{ és } M_{an} \leq M \quad (48)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = 0. \quad (49)$$



2.5. ábra. Korrigálásának esetei



2.6. ábra. A korrigálás hatása

2.2.3. A paraméterek meghatározásának irodalomból ismert menete

A paraméterek meghatározása különböző, mérés útján meghatározható értékek segítségével történik [3,4,6]. Ezek a segédparaméterek:

- kezdeti aniszteretikus szuszceptibilitás

$$\chi_{an} = \frac{dM_{an}}{dH} \quad M=0, H=0 \quad (50)$$

- kezdeti normál szuszceptibilitás

$$\chi_{in} = \frac{dM}{dH} \quad M=0, H=0 \quad (51)$$

- koercív mágneses térerősség H_c
- differenciális szuszceptibilitás a koercív pontban

$$\chi_{Hc} = \frac{dM}{dH} \quad H=H_c \quad (52)$$

- remanencia M_r
- differenciális szuszceptibilitás a remanens pontban

$$\chi_{M_r} = \frac{dM}{dH} \Big|_{M=M_r} \quad (53)$$

- maximális mágneses télerősség H_m
- maximális mágnesezettség M_m
- differenciális szuszeptibilitás a (H_m, M_m) pontban a kezdő mágnesezési görbén χ_m
- maximális differenciális szuszeptibilitás

$$\chi_{\max} = \max \left(\frac{dM}{dH} \right), \text{ ami általában } \chi_{H_c} \quad (54)$$

Ezen segédparaméterek tulajdonságai alapján, a modell tényleges paraméterei meghatározhatóak. Ezek, a szaturációs mágnesezettség kivételével, kölcsönösen hatnak egymásra, így az értéküket egy konvergens iterációs eljárással lehet meghatározni a mért értékekből.

A szaturációs mágnesezettség M_s mérés útján meghatározható érték, amely egy anyagnál a mágneses tér növelésével elérhető maximális mágnesezettséget jelenti. A c paraméter és a kezdeti normál szuszeptibilitás között egy egyszerű, és direkt kapcsolat írható fel. (43)-ban dM_{irr}/dH helyére a (42)-ből kifejezhető összefüggését behelyettesítve

$$\frac{dM}{dH} = c \cdot \frac{dM_{an}}{dH} + (1-c) \cdot \frac{M_{an} - M_{irr}}{k \cdot \delta - \alpha \cdot (M_{an} - M_{irr})}. \quad (55)$$

$H=M=0$ esetben ez a kezdeti normál szuszeptibilitás

$$\chi_{in} = \frac{(1-c) \cdot M_{an}}{k \cdot \delta - \alpha \cdot M_{an}} + \frac{c \cdot dM_{an}}{dH}. \quad (56)$$

M_{an} helyére, behelyettesítve (36)-be és véve a határértékét $H=0$ -ban, felírható, hogy

$$\chi_{in} = \frac{c \cdot M_s}{3 \cdot a} \longrightarrow c = \frac{\chi_{in} \cdot 3 \cdot a}{M_s}, \quad (57)$$

ami közvetlen kapcsolat c és a között, ez majd a paraméterek identifikálásánál hasznos lesz. Könnyen felismerhető, hogy a és a paraméterek között is egyszerű összefüggés írható fel (50) kifejezés bővebb kifejtése alapján. Amennyiben M és H értéke is tart zérushoz, (36) értéke a definiáltak alapján (37) összefüggéssel írható le a szingularitás elkerülése végett. (37) H szerinti deriváltjának határértéke nullában

$$\chi_{an} = \frac{M_s}{3 \cdot a - \alpha \cdot M_s}, \quad (58)$$

mely alapján felírható egy kapcsolat α és a között

$$a = \frac{M_s}{3} \cdot \left(\frac{1}{\chi_{an}} + \alpha \right). \quad (59)$$

A paraméterek közül a hiszterézis veszteséget leginkább a k paraméter fejezi ki, ahogy az látható a 4.1. ábrán, k értéke közel egyenesen arányos H_c értékével. χ_{Hc} értéke (55)-ből kifejezve:

$$\chi_{Hc} = \frac{1}{k \cdot \delta - \alpha \cdot [M_{an}(H_c) - M_{irr}]} \cdot [M_{an}(H_c) - M_{irr}] + c \cdot \left(\frac{dM_{an}(H_c)}{dH} - \frac{dM_{irr}}{dH} \right). \quad (60)$$

Mivel M értéke zérus $H=H_c$ esetben (40) felírható

$$M_{irr} = \frac{c}{1-c} \cdot M_{an}(H_c) \quad (61)$$

alakban, melynek H szerinti deriváltja $H=H_c$ -ben

$$\frac{dM_{irr}(H_c)}{dH} = \frac{1}{1-c} \chi_{Hc} - \frac{c}{1-c} \cdot \frac{dM_{an}(H_c)}{dH}. \quad (62)$$

(60)-at k -ra átrendezve, majd (62)-t behelyettesítve

$$k = \frac{M_{an}(H_c)}{\chi_{Hc} - c \cdot \frac{dM_{an}(H_c)}{dH}} \cdot \frac{1+\alpha}{1-c} \quad (63)$$

összefüggésre lehet jutni, ahol k értéke csak tapasztalati értékektől, és a többi paramétertől függ. Továbbá α és c paraméterek között (ismerve k -t) χ_{Mr} értékének segítségével található összefüggés. χ_{Mr} definícióját alkalmazva (55)-re, és α -ra rendezve (a hosszú levezetést mellőzve) kapható

$$\alpha = \frac{k \cdot (1-c)}{M_r - M_{an}(M_r)} - \frac{1-c}{\chi_{Mr} - c \cdot \frac{dM_{an}(M_r)}{dH}}. \quad (64)$$

További összefüggés írható fel a paraméterek között ismerve χ_m értékét. Feltételezve, hogy maximális M és H értékek mellett $dM/dH \approx dM_{an}/dH$, a (55) összefüggés egyszerűsített alakja írható fel.

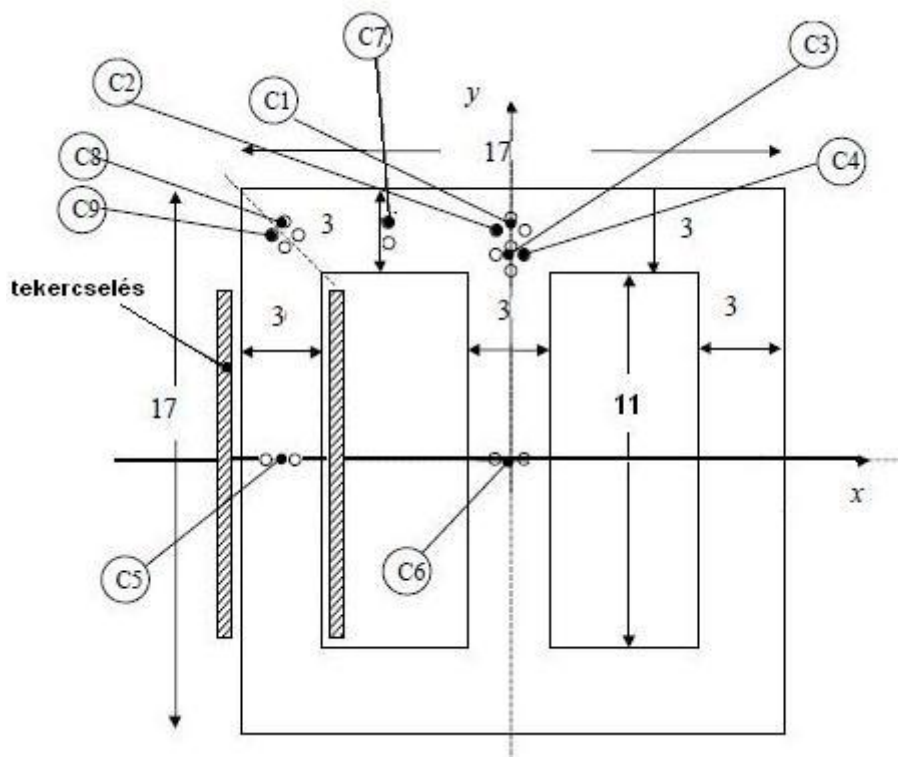
$$M_m = M_{an}(H_m) - \frac{(1-c) \cdot k \cdot \chi_m}{\alpha \cdot \chi_m + 1}. \quad (65)$$

A paraméterek számításának menete ezután egy iteratív folyamat. Először α -nak kezdőértéket kell adni, ez lehetőleg 10^{-3} nagyságrendbe essen. Ezután α értékének ismeretével (59) alapján megkapható a -nak értéke, majd a ismeretével (57) alapján c is számítható. Ezután (63) alapján megkapható k értéke is. Ekkor ismerve k és c értékét, α egy új értéke számítható (64)-ből, a új értéke pedig (65)-ben c helyére (57)-et behelyettesítve, és a -ra megoldva kapható meg. Ezután a számítási procedúra megismétlődő, amíg a paraméter értékek nem konvergálnak.

3. Mágneses hiszterézis mérése

3.1. A mérési elrendezés

A szimulációhoz szükséges az anyag hiszterézis-karakterisztikája. A mágneses indukció mérése a 3.1. ábrán látható geometriájú eszközön történt, melynek anyaga úgynevezett C19-es szerkezeti acél. Ezt hengereléssel gyártják, így csekély anizotrópiával rendelkezik, de ez nem számottevő, első közelítésben izotrópnak tekinthető. A feladat a TEAM 32-es nemzetközileg kiírt probléma [1] egy saját megvalósítása. Maga a lemez egy 170mm x 170mm 30mm él vastagságú négyzet alapú keret közepén áthidalva, mely 1mm vastag. A geometria nem teljes mértékben egyezik meg a TEAM 32-es probléma dolgozatában leírtakkal. A képen C1...9-el jelölt részek furatpárokat jelentenek, amikbe 0,1mm átmérőjű vezetékeket tekercseltem, mindegyikbe egyenként 15 menet, a mágneses indukció az itt indukált feszültség alapján számított. Baloldalt található a gerjesztés tekercselése az eszköznek, mely 1mm vastag 202 menetes rézvezeték.



3.1. ábra. A mért lemez geometriája

Valójában mindkét oldalon feltekercseltem az eszközt, de a későbbiekben a jobb oldali tekercs nem került felhasználásra. A lemezt a tekercselés alatt egyfajta textilanyaggal burkoltam be, hogy a tekercselés folyamán a rézvezeték védőrétege ne sérüljön, elkerülve ezzel az esetleges rövidzárat, valamint így nem érintkezik közvetlenül a vezeték a lemezzel. A gerjesztőtekercs ellenállása tizedohmos nagyságrendű, így nem éreztem a számolásnál korrekció szükségességét.

3.2. MÉRŐPROGRAM LabVIEW KÖRNYEZETBEN

A LabVIEW [7,20,21] program egy grafikus programozási környezetet biztosít a különböző mérnöki tevékenységek számára. LabVIEW folyamatvezérelt logikája megfelelő alapot ad a különböző mérési folyamatok programozásához. Én a mérési folyamat vezérlésére, szabályozására, az adatok megjelenítésére és kiértékelésére használtam. A gerjesztéshez egy feszültségvezérelt áramgenerátort, a feszültség méréséhez egy DAQ (Data Acquisition = adatgyűjtő) kártyát használtam, melyet asztali számítógéphez csatlakoztattam. Az általam implementált program 4 fő részre osztható, ahogy a 3.2. ábrán látható.

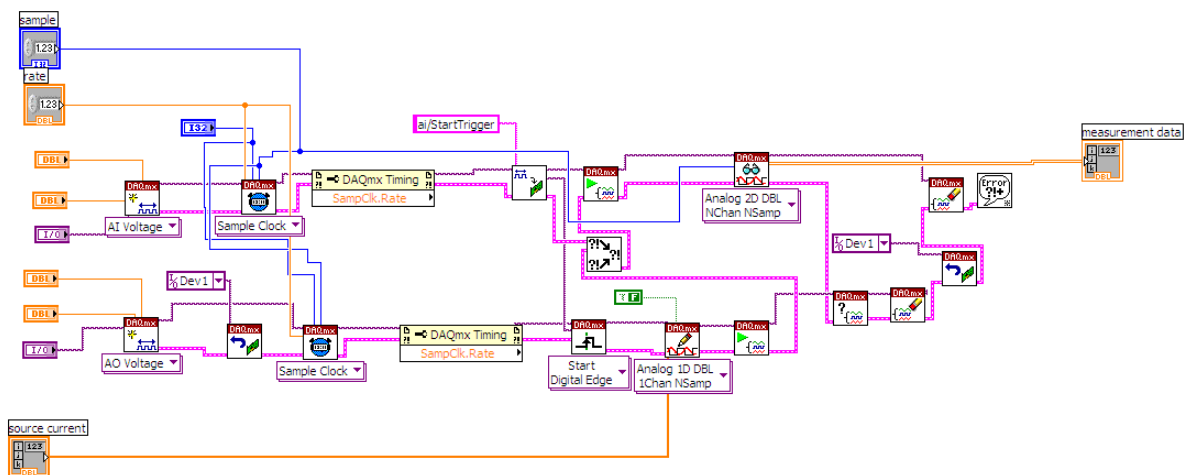


3.2. ábra. A LabVIEW-ba implementált mérőprogram blokkvázlata

A teljes program ennél több építőelemet tartalmaz, a fent felsorolt blokkok a főbb, mérni kívánt jellemzők rögzítéséhez szükségesek. További részek a hiszterézismodellhez szükséges, egyéb jellemzők, mint például kezdő mágnesezési görbe mérésére szolgálnak. Az egyes blokkokat a következőkben mutatom be részletesen.

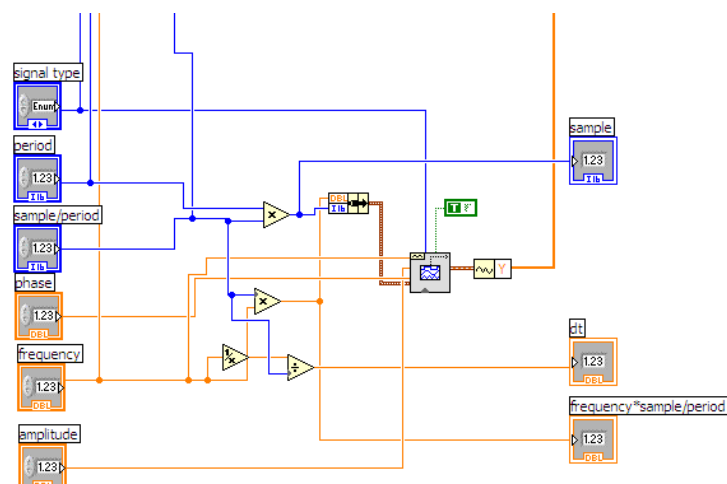
3.2.1. Műszervezrlő blokk

A LabVIEW környezetben implementált mágneses indukciómérő program első blokkja egy műszervezrlő blokk (3.3. ábra). Itt lehet megadni a gerjesztés amplitúdóját, frekvenciáját valamint azt, hogy hány mintát mérjen a mérőkártya periódusonként. Itt vezérlem a generátort, egy feszültségvezérelt áramgenerátort, tehát a mérés áramkényszerrel történt.



3.3. ábra. A műszervezrlő blokk

A 3.3 ábra teteje a generátort vezérli, az alja pedig a mérőkártyát. Innen egy 2 oszlopos, és N soros mátrixként halad tovább a gerjesztő és a mért jel, ezt egy egyszerű tömbbontással szét lehet választani. A 3.4. ábra mutatja gerjesztést beállító programrészletet. A gerjesztés árama itt 3A, frekvenciája 50Hz, egyszerre 10 periódusnyi jel mérése történt periódusonként 1200 mintával, tehát a mintavételezési frekvencia 60kHz.

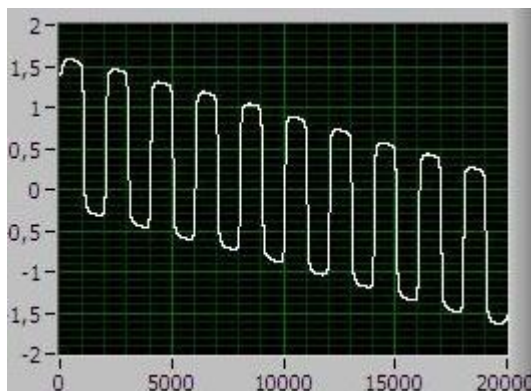


3.4. ábra. A gerjesztés és a mintavételezés beállítása

3.2.2. Szűrő

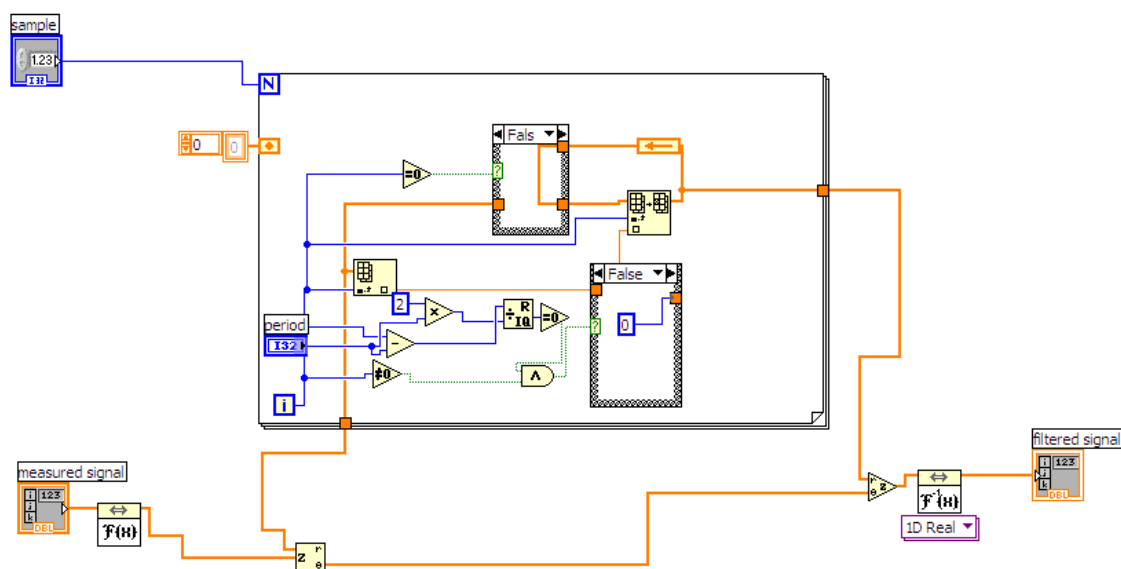
A mért jel a mágneses indukció változása miatt indukált feszültség és a környezeti zajok szuperpozíciója, viszont csak a hasznos jelre van szükség a számításokhoz. Eredetileg egy átlagoló szűrőt valósítottam meg, ami a mért jel periódusait átlagolta, majd újraépített egy átlagolt jelalakot. Ezzel az volt a baj, hogy a zajnak az átlaga is benne maradt a jelben, így az csak nagyobb frekvenciákon volt használható, mivel a jelre időben növekvő offset (3.5. ábra) ült azáltal, hogy a zaj átlaga nem zérus. Ehelyett egy sokkal hatásosabb, Fourier-transzformáción alapuló jelszűrő blokkot készítettem (3.6. ábra). A programrészlet azon logika alapján készült, miszerint a hasznos jelalak csak az alapharmonikus és annak felharmonikusainak összege, mivel a mért jel periodikus, a vaslemez pedig nemlineáris, ez a nemlinearitás pedig hatványpolinommal írható le, ami annyit jelent, hogy a bemenetre érkező

jelhez képest a kimeneti jel spektrumában a bemenő jel frekvenciájának a felharmonikusai is megjelennek. A vonalas spektrum a zaj miatt folytonossá válik, a program tudja, mit kell eldobni a mért jel spektrumából, sávkorlátossá teszi az eredetileg nem sávkorlátozott jelet.



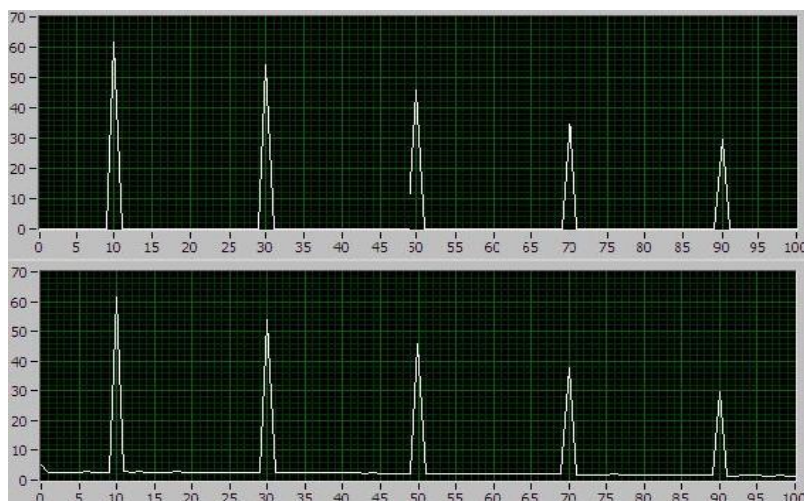
3.5. ábra. Szűrés nélkül a mágneses indukció alakulása 5Hz-en

Először vettem a mért feszültség Fourier-transzformáltját, majd annak a valós részét, ezután kihasználtam a LabVIEW azon tulajdonságát, miszerint a jel Fourier-transzformáltjának abszolút értékét (amplitúdóspektrumát) tartalmazó tömb annyidik eleme tartalmazza az alapharmonikus értékét, ahány periódusnyi jelet kiad egy ciklusban (3.7. ábra).



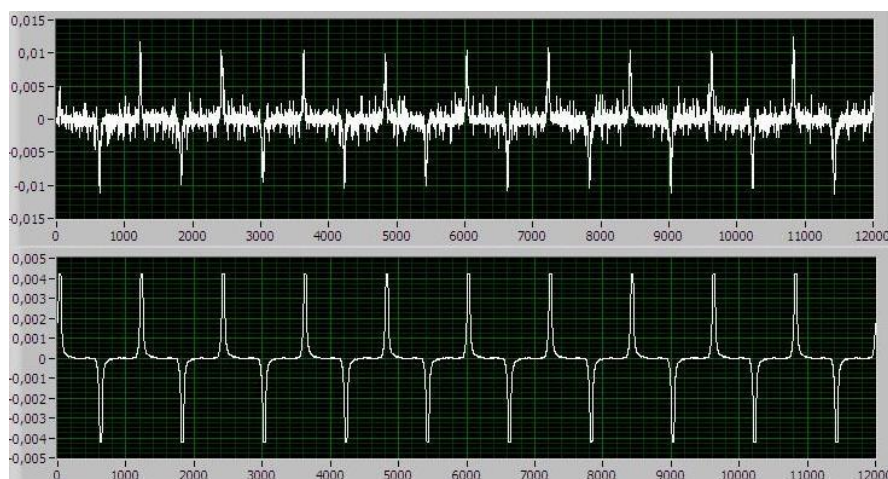
3.6. ábra. A Fourier-transzformáción alapuló digitális szűrő felépítése

Amennyiben a kiadott periódusok száma n , k pedig egy pozitív egész szám, a keletkező tömbnek minden elemét nullával tettem egyenlővé, aminek az indexe nem $n+k \cdot 2n$.



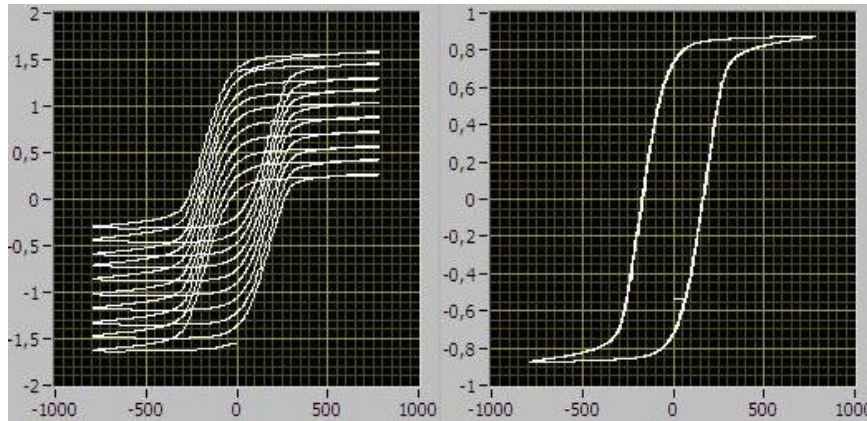
3.7. ábra. A szűrt és a szűretlen jel amplitúdóspektruma

Képezve a szűrt amplitúdóspektrumot a fázisspektrumával a jelnek, megkapható a már szűrt jelalak melyen ezután már nyugodtan végrehajthatók különböző műveletek. Az algoritmus hibátűrését mutatja, hogy az 1Hz-en végzett mérés esetén a jelre rengeteg, a hasznos jellel összemérhető zaj ült, viszont szűrés után ennek nem maradt nyoma (3.8. ábra).

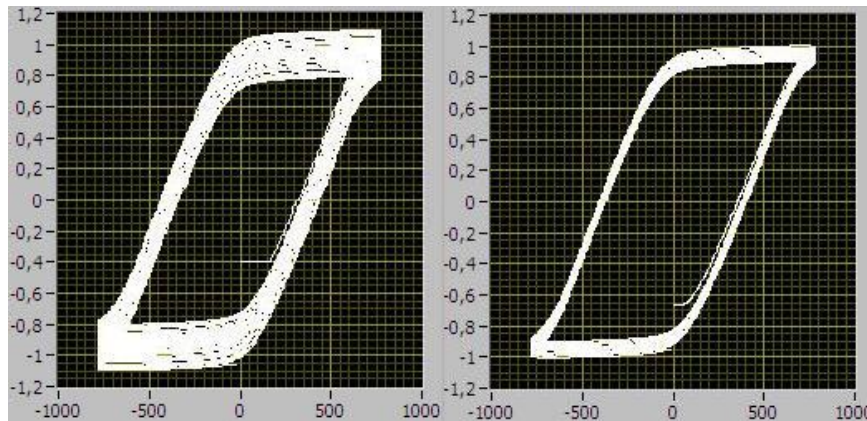


3.8. ábra. A szűretlen és a szűrt feszültségjelalak 1Hz-en a C7-es mérőtekercsnél

Ez nagyon fontos az alacsony frekvenciás méréseknél, mivel a hiszterézisgörbe jelalakja használhatatlanná válik (3.9. ábra), valamint az is megfigyelhető, hogy minél tovább tart a mérés, annál több zaj ül a jelre a növekvő offset miatt (3.9. ábra). A rövidebb idejű mérést viszont sokszor nem engedhetjük meg magunknak az esetlegesen előforduló tranziens jelenségek miatt, például ha több mérést végzünk el egymás után ugyanazon a vasmagon, az előző mérés eredményeképp a vasmagnak lesz egy bizonyos szintű mágnesezettsége, ami a következő mérés elején nem fog látszani, de az eredményt meghamisítja.



3.9. ábra. 5Hz-es gerjesztés mellett a hiszterézisgörbe szűrés nélkül, valamint szűréssel



3.10. ábra. 30 és 10 periódusnyi gerjesztés

Bár sok ebben a fejezetben közölt eredmény számításának a menetére csak a következő fejezetben kerül sor, fontosnak tartottam itt közölni a zaj mágneses indukcióra gyakorolt hatását, mivel a feszültség jelalakjából nem tudunk következtetni arra, hogy végül az eredményt mennyire befolyásolja, viszont a szűrést mindenképpen a mért feszültségen kell végrehajtani, mivel az integrálása után nem kívánt összetevők kerülhetnek be az eredménybe.

3.2.3. Mágneses indukció számítása

A mágneses indukció a mért feszültségből számítható két jól ismert összefüggés segítségével, miszerint

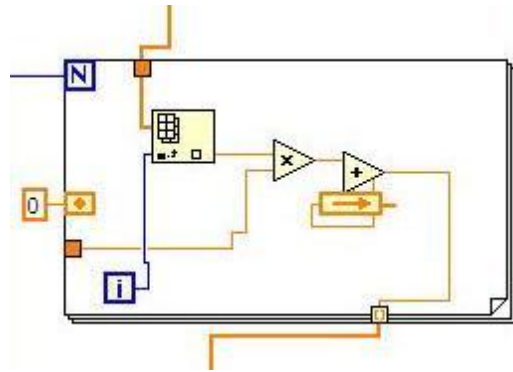
$$u = -N_{sz} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad (66)$$

$$\Phi = \int_A B \cdot dA, \quad (67)$$

ahol u a feszültség, N_{sz} a mérőtekercs menetszáma, Φ a fluxus, B pedig a mágneses indukció. Felhasználva, hogy a mágneses indukció a mérőtekercs felületén közel konstans, a mágneses indukcióra felírható a

$$B_0 + \frac{1}{A \cdot N} \cdot \int_t u \cdot dt = B \quad (68)$$

összefüggés alapján, ahol A a mérőtekercs felülete, B_0 pedig integrálási konstans, ami tulajdonképpen a vizsgált anyag kezdő mágnesezettségét jelenti, és ez kiküszöbölendő. Implementálva ezt az összefüggést LabVIEW-ba (3.11. ábra) megkapható a mágneses indukció a mért feszültségből.



3.11. ábra. Egyszerű integrátor

3.2.4. Mágneses indukció szabályozása

A mágneses indukció jelalakja „négyzetjel jellegű” a vas telítődése miatt. E jelalak szabályozása több szempontból is fontos, mivel szinuszos gerjesztés mellett a mért indukált feszültség tüskeszerű, a méréséhez sok mintavételezési pont szükséges, így nehéz a mérést reprodukálni, valamint a hirtelen indukcióváltozás örvényáramokat okoz, amelyek meghamisíthatják a mérési eredményeket. Érdekes tehát a mágneses indukció jelalakját kevésbé gyorsan változóvá, lehetőleg szinuszos jellegűre kényszeríteni. Az, hogy a szabályozás a mágneses indukcióra vonatkozzon, ma már szabvány. Ezt legegyszerűbben egy proporcionális szabályozó algoritmussal lehet elérni. Ennek megvalósítását mutatja a 3.12. ábra.

A szabályozás menete a következő:

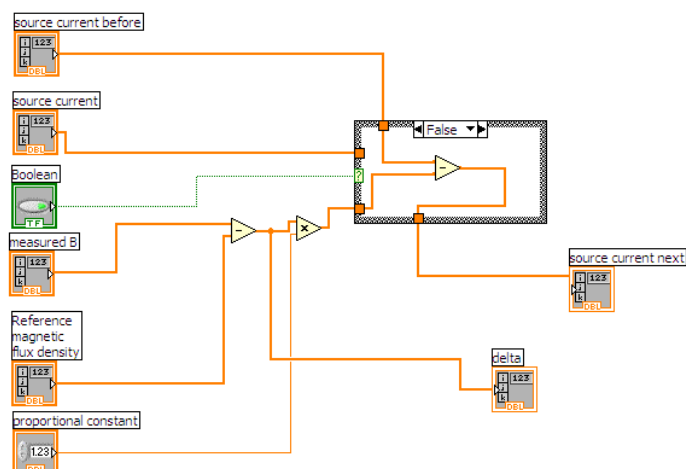
1. Szinuszos gerjesztő áram mellett történő mérés;
2. A mért mágneses indukció összehasonlítása a referenciaként megadott jelalakkal

$$\Delta B(t) = B_{ref}(t) - B_{mért}(t); \quad (69)$$
3. A két jel közötti különbségének nulla és egy közötti konstansszorosának hozzáadása a gerjesztő áramhoz

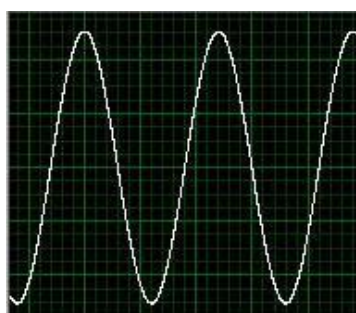
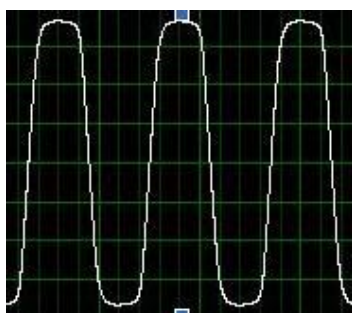
$$\Delta i(t) = p \cdot \Delta B(t); \quad (70)$$
4. Addig ismételni a 2. ponttól a folyamatot, míg el nem érünk egy megkívánt hibán belüli jelalakot felvevő mágneses indukciót.

Ezáltal közel tetszőleges időbeli lefutású jelalak elérhető, 50 ciklus után a jel spektrumképében elhanyagolható mértékű a felharmonikusok amplitúdója. A p értéke 0 és 1 közötti valós szám. Fontos a p értékének helyes megválasztása, ugyanis ha túl nagy értéket adunk meg, a gerjesztő áram túl nagymértékben fog változni, és ezáltal túlvezérlődhet a

generátor, valamint durva szabályozás mellett soha nem kapható meg a kívánt jelalak. Az értékén nemlineáris rendszer esetén próbálkozással lehet meghatározni. A mérés során az általam próbálkozással meghatározott megfelelő p értéke 0.3 volt.



3.12. ábra. A szabályozás megvalósítása

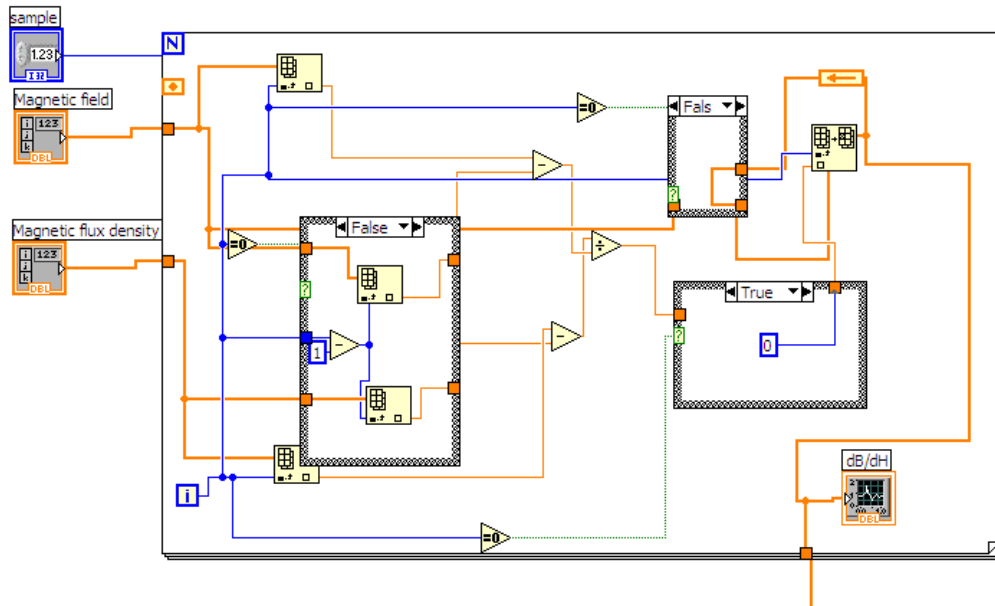


3.13. és 3.14. ábra. Mágneses indukció jelalakja szabályozás előtt és szabályozás után

3.2.5. Segédparaméterek mérésének menete

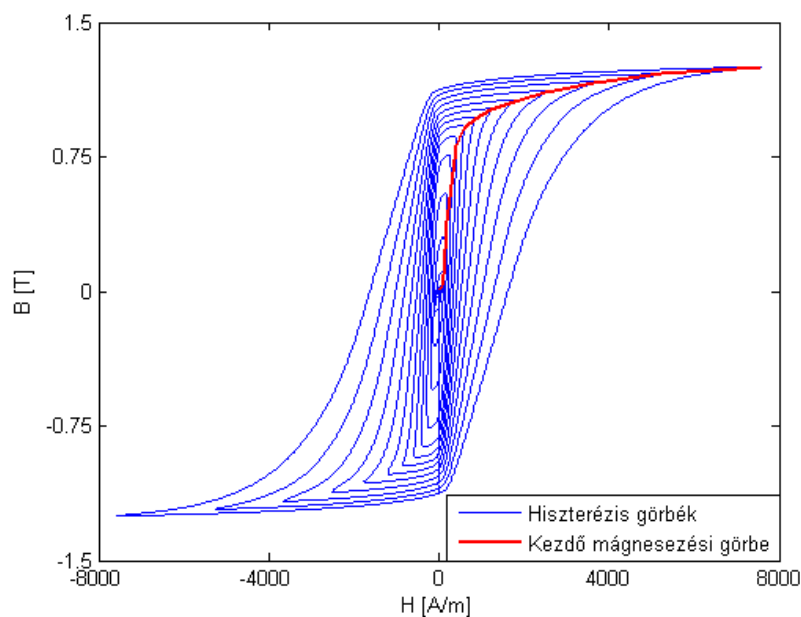
A paraméterek számításához szükséges segédértékeket mérés útján lehet meghatározni. Ezen paraméterek közül H_c , χ_{Hc} , M_r , χ_{Mr} , H_m és M_m értéke közvetlenül meghatározható a hiszterézisgörbe alapján, csupán egy maximumkereső és egy nullátmenet kereső algoritmust realizáló programrészletre (3.15. ábra) van szükség. Mivel a mért jel diszkrét, nagy valószínűséggel nem lesz olyan mintaérték, amely pontosan nulla, így ahhoz, hogy az adott pontban nullátmenet legyen, két feltételnek kell megfelelni. Az egyik pontban legyen nullánál kisebb a függvény értéke, a következő pontban pedig legyen nagyobb.

A görbe csúcsa kis amplitúdójú gerjesztések esetén (ahol a paraméterszámítás szempontjából leginkább érdekes lenne) nem a mágneses térerősség maximumánál található, hanem a görbe azon szakaszán, ahol a mágneses térerősség deriváltja már előjelet váltott, tehát a maximum elérése után. A görbe érintője nem más, mint dB/dH . A görbe csúcsa ott lesz, ahol ennek az érintőnek az iránya a legnagyobb mértékben változik, tehát d^2B/dH^2 maximumánál. Ehhez a 3.17. ábrán látható blokkot építettem bele a programomba.



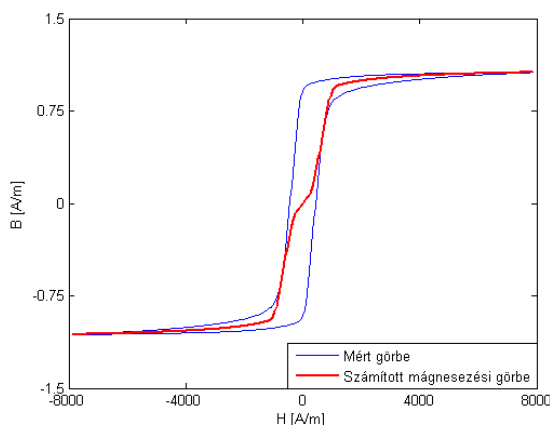
3.17. ábra. Mágneses térerősség szerinti deriválást végrehajtó ciklus

Összesen 15 különböző mértékű gerjesztésre írtam meg a programot. Az eredményt a 3.18. ábra mutatja.



3.18. ábra. A kezdő mágnesezési görbe mérésének eredménye

A felmágnesezési (hiszterézismentes) görbe mérésére egy nagyon kis frekvenciájú, egyenletesen növekvő gerjesztő jellel lehetne mérni kis hibával, viszont az általam használt feszültségvezérelt áramgenerátor erre nem képes, így egy közelítő mérési eljárást kellett alkalmaznom. Egy nagy amplitúdójú alacsony frekvenciás szinuszos jellel végeztem mérést, és a mért görbén, ahol azonos nagyságú a mágneses térerősség, a mágneses indukció átlagát vettem (3.19. ábra), tehát két félszínűt, amikor a mágneses térerősség növekszik, illetve csökken. A mérés 5Hz-es jellel történt.



3.19. ábra. A hiszterézismentes görbe mérésének közelítő eredménye

Ez az eljárás, mint látható, nem adott helyes eredményt, viszont a szükséges segédparaméter értéke meghatározható a mért görbe alapján. Így az összes tapasztalati úton meghatározható segédérték már meghatározható. A segédparaméterek értékeit az 1. táblázat tartalmazza.

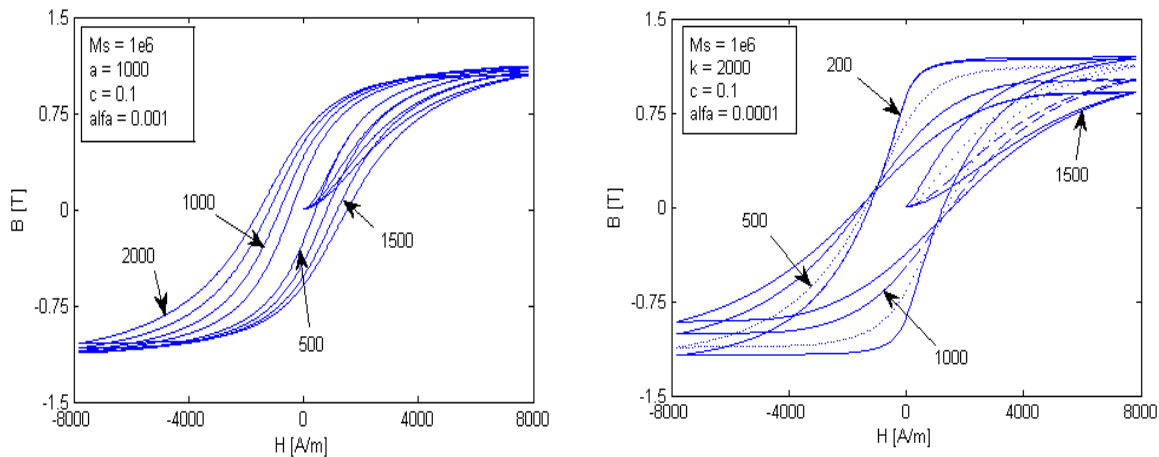
1. táblázat. A tapasztalati úton meghatározott értékek

χ_{an}	216,16
χ_{in}	177,89
H_c	1547 A/m
χ_{Hc}	609,6
M_r	865280 A/m
χ_{Mr}	176,02
H_m	7808 A/m
M_m	969270 A/m
χ_m	11,48

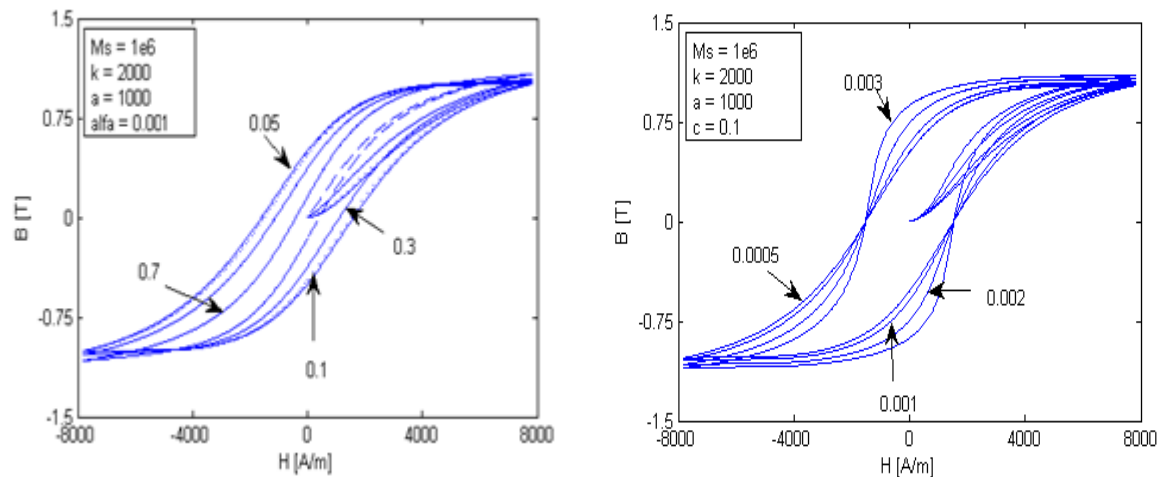
4. A paraméterek meghatározása

4.1. A paraméterek hatása a számított görbékre

Az ide vonatkozó irodalom a legtöbb esetben a 2.2.3. alfejezetben taglaltak szerint tárgyalja a paraméterszámítás menetét. Az én megoldásom [25] ehhez képest eltér. Először megvizsgáltam a paraméterek hatását a számított görbékre. Ezen vizsgálat szemléltetésére szolgálnak a következő ábrák (4.1.-4.4. ábra). M_s értékének változtatása értelemszerűen az értékének megváltoztatásával arányosan nyújtja meg, vagy nyomja össze a számított görbét.



4.1. és 4.2. ábra. A k és az a paraméter hatása



4.3. és 4.4. ábra. A c és α paraméter hatása

Mint az az ábrákon látható, k paraméter növekedésének hatására csökken a remanens pontban a görbe meredeksége, illetve növekszik a koercív térerősség értéke, a paraméter növekedésének hatására csökken a remanencia értéke, c paraméter változtatása esetén leglátványosabban a koercív térerősség értéke változik, míg α paraméter csökkentésére növekszik a görbe meredeksége a koercív pontban.

4.2. A paraméterek értékének meghatározása

Ezek a hatások levezethetők a 2.2. alfejezetben leírt kifejezésekből, de sokkal szemléletesebben ábrázolhatók grafikonon. A paraméterek értékeinek szokványos úton történő meghatározása meglehetősen bonyolult és nehézkes. Ehelyett a paraméterek által okozott változtatás, és a mért tapasztalati értékek ismerete alapján kidolgoztam a paraméterek meghatározására egy algoritmust.

Így kevesebb tapasztalati érték szükséges a paraméterek közelítő meghatározásához, ezáltal a megoldás lényegesen egyszerűbb. Bár a megoldás csak közelítőleg lesz helyes, a Jiles-Atherton-hiszterézismodell a tulajdonságainál fogva egyébként sem adna pontos eredményt. Első ciklusban kiszámítottam egy görbét tetszőleges kiinduló paraméterértékekkel, amelyek lehetőleg hiszterézis jellegű görbét adnak. Ennek a számított görbének a fent említett jellemzőit összehasonlítva a mért értékekkel, a paraméterekre egy proporcionális szabályozást írtam fel. A szabályozás menete szerint a paraméterek értékeinek változása

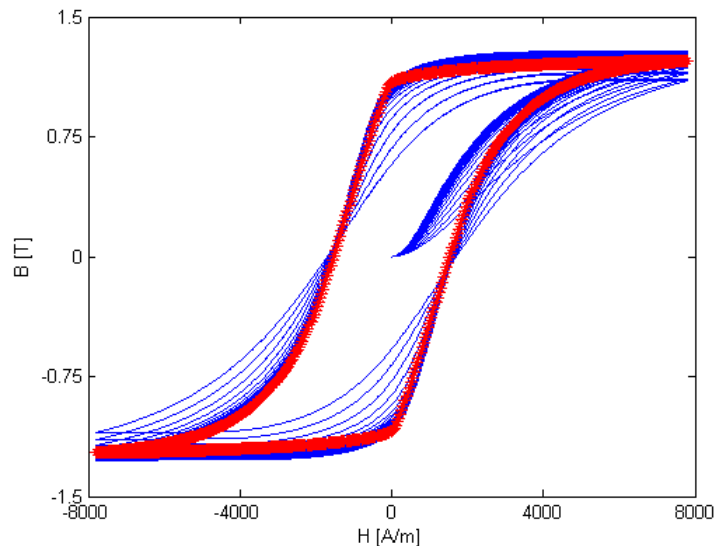
$$k_{új} = k_{régi} + p \cdot (\chi_{Mr} \text{ számított} - \chi_{Mr} \text{ mért}), \quad (71)$$

$$a_{új} = a_{régi} + q \cdot (M_r \text{ számított} - M_r \text{ mért}), \quad (72)$$

$$c_{új} = c_{régi} + r \cdot (H_c \text{ számított} - H_c \text{ mért}), \quad (73)$$

$$\alpha_{új} = \alpha_{régi} + s \cdot (\chi_{Hc} \text{ mért} - \chi_{Hc} \text{ számított}), \quad (74)$$

ahol p , q , r , és s különböző, 0 és 1 közötti valós számok. Ezeknek az értékét helyesen megválasztva a paraméter-keresés konvergens. A Jiles-Atherton-modell számítására és a paraméterek meghatározására Matlab [8] scriptet írtam (A függelék). A mért görbe közelítését a számított görbéhez a 4.5. ábra mutatja.



4.5. ábra. A paraméterek szabályozásának hatására a számított görbe a mért görbéhez konvergál

Az EI vaslemezre, 50Hz frekvenciájú, 3 A áramerősségű gerjesztés mellett, a hiszterézisére illesztett Jiles-Atherton-modell paramétereinek értékei az alábbiak szerint alakul:

$$k = 2036,2;$$

$$a = 357;$$

$$c = 0,0063;$$

$$\alpha = 0,00074;$$

$$M_s = 1100000;$$

5. A végeselemes szimuláció

5.1. A végeselem-módszer lépései

A végeselem-módszert [2,5,6,15,18,19,22,23,24] használó szimuláció lépéseit a 2.1. ábra mutatja. Ebben a fejezetben bemutatom ezeket a lépéseket az általam írt szimulációs eljárás alapján. Több lépés már korábban bemutatásra került, ezekre a továbbiakban csak röviden hivatkozom.

5.1.1. A modell specifikációja

A modell specifikációja jelenti egyrészt a helyes geometria megalkotását CAD (Computer Aided Design) rendszerben, másrészt a problémát leíró egyenletek, ezáltal potenciálformalizmus megválasztását, peremfeltételek felírását. A feladat itt tehát mágneses indukció jelalakjának szimulációja egy speciális mérőtranszformátorban. Az eszköz geometriájának egyszerűségéből adódóan kielégítő megoldást kaptam, ha a szimuláció csupán kétdimenziós környezetben zajlik.

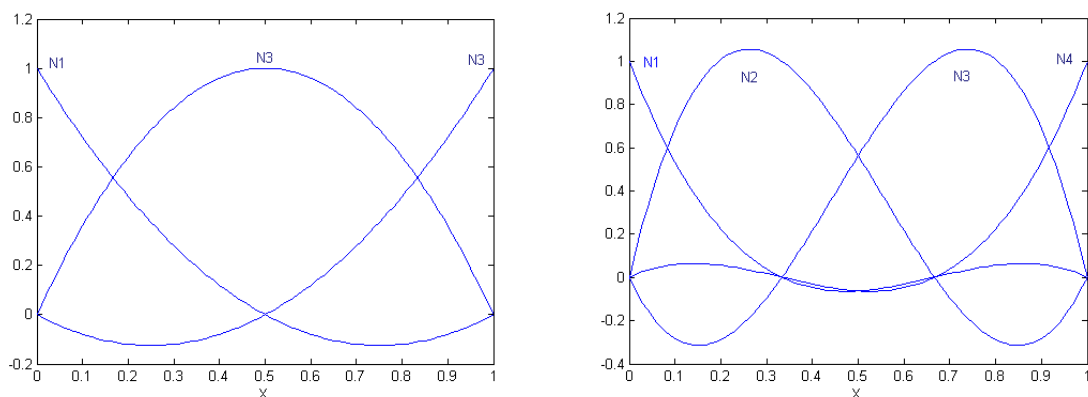
5.1.2. Előfeldolgozás

Az előfeldolgozás első lépése az adatok felvétele. A pontos geometria bemutatásra került a 3.1. fejezetben. A generátor árama 3 A, ami egy 202 menetes tekercsen folyik keresztül, a tekercs hossza 110 mm, így a felületi áram átszámítva 5510 A/m. Az alkalmazott hiszterézismodell frekvenciafüggetlen, így a szimuláció során a frekvencia értékén nem szükséges megadni. Lineáris esetben a vaslemez relatív permeabilitását 1000-nek választottam. Nemlineáris szimulációnál a Langevin-függvény alapján meghatározott telítődési görbe alapján történt a permeabilitás megválasztása.

Az előfeldolgozás második fázisa a szimulációhoz szükséges végeselemes rács generálása. Egydimenziós esetben a problémateret csak szakaszokra lehet osztani, így csak a csomópontokra lehet felírni az egyenleteket. Elsőrendű formafüggvények alkalmazása esetén egy elemre kettő formafüggvény írható fel. A fokszám növelésével mindig eggyel nő a felírható formafüggvények száma, ezáltal az elemen belül több ponton történik a potenciál értékének számítása. Az egydimenziós formafüggvények az alábbi formula alapján számíthatók:

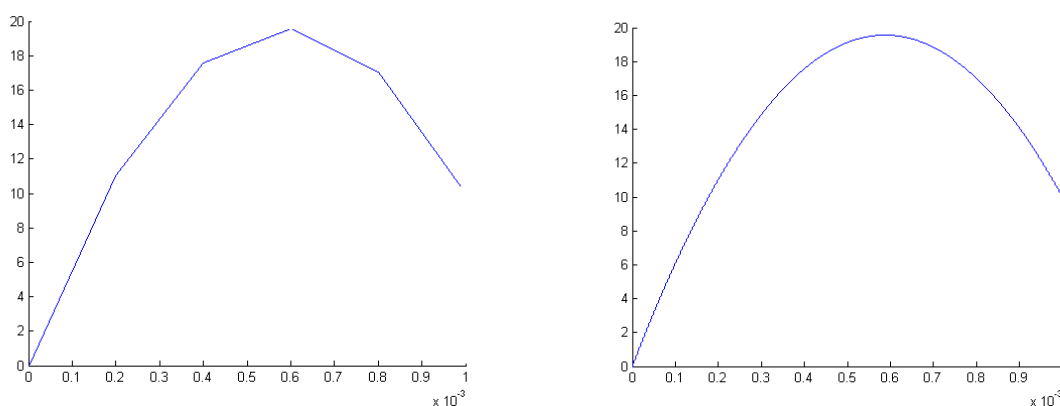
$$N_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (75)$$

ahol $m-1$ a formafüggvény rendje, N_i értéke az i -edik csomópontban 1, az összes többin pedig 0. A különböző rendű formafüggvények alakjára mutat példát az 5.1. és az 5.2. ábra.



5.1. és 5.2. ábra. Másod- (bal) illetve harmadrendű (jobb) formafüggvények egydimenziós elemen

A különböző fokú formafüggvények által elérhető eredmények különbözőségének illusztrációként egy egyszerű, egydimenziós síkkondenzátor példáján mutatom be (5.3. és 5.4. ábra). A feladatban a kondenzátor két fegyverzetének távolsága 1mm, az egyik földpotenciálon van, a másik pedig 10V feszültségre van kapcsolva. A két fegyverzet között $0.001\text{C}/\text{m}^3$ töltéssűrűséget állítottam be.

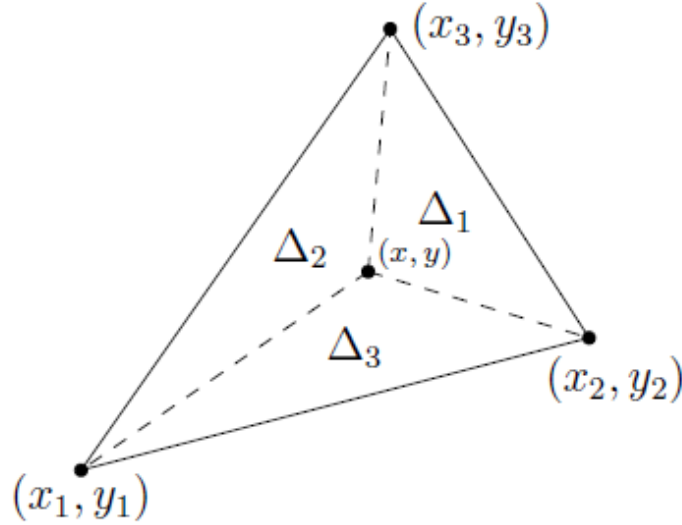


5.3. és 5.4. ábra. Az egydimenziós probléma megoldása első- illetve harmadrendű formafüggvények segítségével

Kétdimenziós geometriát háromszög-, vagy négyszögelemekkel lehet diszkretizálni. Csomóponti egyenleteket használva, egy csomópontra felírt formafüggvény értéke a saját csomópontjában 1, a többi csomóponton pedig 0. Ugyanúgy, mint egydimenziós esetben, a kétdimenziós elemekre felírható formafüggvények is lehetnek magasabb fokúak. Én munkám folyamán a háromszögelemmel foglalkoztam. Kétdimenziós esetben az elsőrendű formafüggvények felírhatók az úgynevezett baricentrikus koordinátarendszer segítségével. Egy háromszög területe meghatározható a háromszög csomópontjainak koordinátái segítségével (71). A háromszög csomópontjait óramutató járásával ellenkező irányban kell beírni a mátrixba, ugyanis a determináns ekkor ad pozitív értéket a területre.

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (76)$$

Egy elemen belül felvett pont (5.5. ábra) a háromszög csúcsaival a háromszöget 3 kisebb háromszögre osztja.



5.5. ábra. Az elem felosztása egy középben felvett ponttal

A területek arányával felírható az L_i területfüggvény

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (77)$$

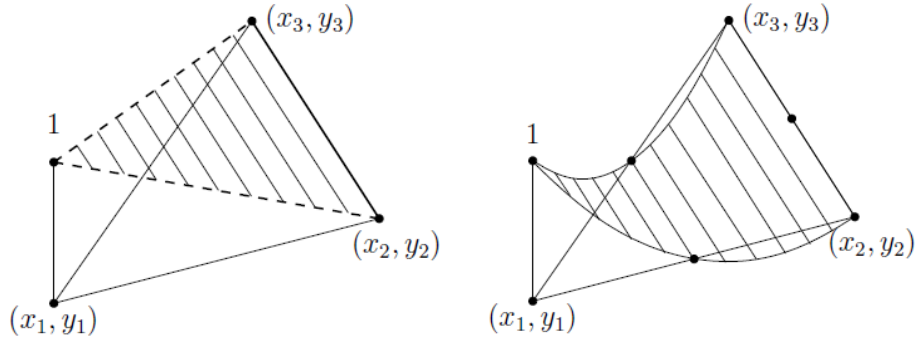
amely elsőrendű formafüggvények esetén megegyezik magával a formafüggvénnyel. Magasabb rendű formafüggvényeket viszont már sokkal összetettebb összefüggések segítségével lehet előállítani. A magasabb rendű formafüggvények általános leírását a (73) formula adja.

$$N_i = P_I^n(L_1) \cdot P_J^n(L_2) \cdot P_L^n(L_3), \quad (78)$$

ahol n az elem rendje, valamint $I + J + K = n$. Ezen értékek segítségével állítható elő a P -vel jelölt, úgynevezett Lagrange-polinom. Ennek értéke az alábbi módon számítható:

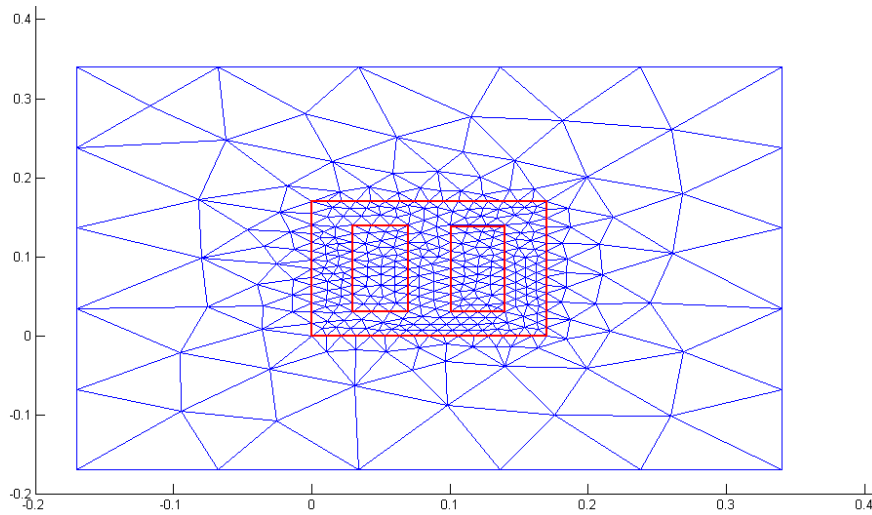
$$P_N^n(L_i) = \prod_{p=0}^{N-1} \frac{n \cdot L_i - p}{N - p}, \quad (79)$$

ahol $N=I, K, L$. Háromszög feletti formafüggvényekre az alábbi ábrák mutatnak példát.



5.6. és 5.7. ábra. Elsőrendű (bal) és másodrendű (jobb) formafüggvény háromszög felett

A dolgozatomban megoldandó probléma végelelemrácsának elkészítéséhez a már fent említett Gmsh programot használtam. A program által elkészített geometria és végelelemrács (5.8. ábra) a program .msh kiterjesztésű kimenete alapján használható fel.



5.8. ábra. A szimulációhoz alkalmazott végelelemrács

A rács 1040 elemet és 531 csomópontot tartalmaz. A Gmsh .msh kiterjesztésű kimenete tartalmazza a csomópontok, magasabb rendű rács esetén a köztes pontok koordinátáit, illetve az elemekhez tartozó csomópontok és köztes pontok sorszámát, továbbá azt, hogy az adott elem mely fizikai csoport része.

5.1.3. Számítás

Mint az a 2.1. ábrán is látható, a számítás első része az elemegyenlet meghatározása. A megoldás mátrixműveletek segítségével történik, ezért a (23) egyenletet, tehát az A -formalizmus gyenge alakját ennek megfelelően kell átalakítani. Az $\vec{A}$ vektor potenciálfüggvény közelíthető k számú lineárisan független formafüggvény segítségével:

$$\vec{A} \approx \vec{A}_a = \vec{A}_D + \sum_{j=1}^k \vec{W}_j \cdot A_j, \quad (80)$$

itt $\vec{A}_a$ jelöli a vektorfüggvény közelítését, $\vec{W}_j$ a formafüggvényt, A_j pedig az ismeretlen együttthatókat, $\vec{A}_D$ pedig a Dirichlet-típusú peremfeltételek kielégítésére szolgál.

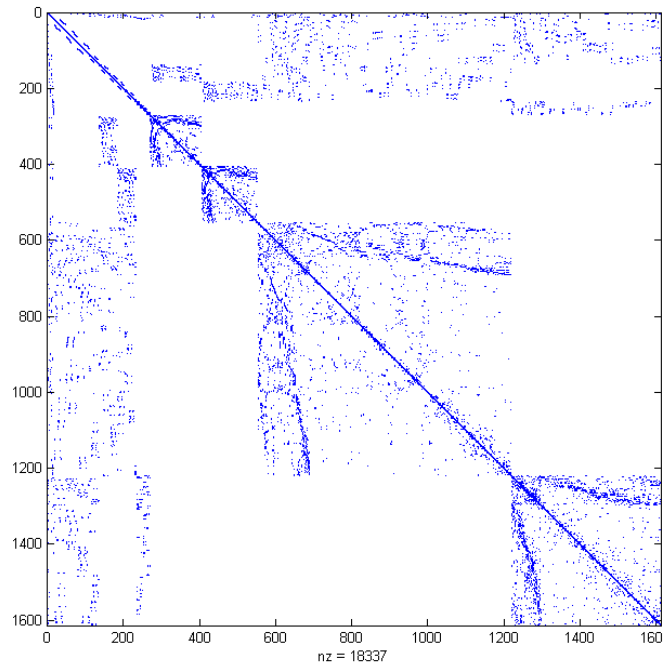
Dolgozatomban $\vec{A} = A_z(x, y) \cdot \vec{e}_z$, valamint $\vec{W} = W_z(x, y) \cdot \vec{e}_z$, ami skalár, mivel kétdimenziós példa esetén $\vec{W}_j$ megegyezik N_j csomóponti formafüggvénnyel. A formalizmus gyenge alakja (23) átalakítható (75) ismeretében az alábbi módon:

$$\sum_i \sum_j \int_{\Omega} \nu \cdot (\nabla N_i)(\nabla N_j) d\Omega \cdot \vec{A} = \sum_i \int_{\Gamma_H} N_i \cdot \vec{K} \cdot d\Gamma - \sum_i \int_{\Omega} (\nabla \times N_i) \cdot \vec{I} d\Omega, \quad (81)$$

ahol i és j indexek jelölik, hogy mely csomópont formafüggvényéről van szó. Ez a mátrix

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u} = \underline{b} \quad (82)$$

alakú, és a számítani kívánt tagja az $\underline{u}$ vektor. Asszemblálás során egyrészt a $\underline{\underline{K}}$ elemmátrixot kell felépíteni a problémát leíró (76) egyenlet alapján. Ez a $\underline{\underline{K}}$ mátrix egy úgynevezett ritka (angolul sparse) mátrix lesz (5.9. ábra). A peremfeltételek valamint a nemlinearitás alapján a $\underline{b}$ vektort is fel kell tölteni. Ez alapján összeáll a problémát leíró globális egyenletrendszer, amelyben a Dirichlet-féle peremfeltételeket is figyelembe kell venni.



5.9. ábra. Kék pontok jelölik, hogy a mátrixban hol található nullától különböző értékek

Lineáris esetben a (76) egyenlet jobb oldalán a második tagnak nincs értéke, ugyanis az a gyenge alak nemlineáris rész, így. a megoldás minden időlépésben a különböző beállított peremfeltételek alapján számítható, tehát

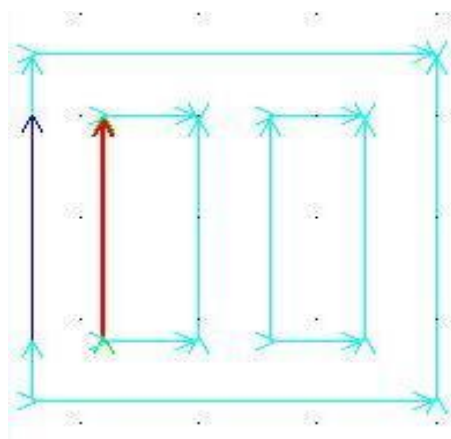
$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (83)$$

alapján. Az inverz képzés magasabb dimenzióban nem alkalmazható. Nemlineáris esetben a megoldást a fixpontos módszer segítségével lehet kiszámolni, ez esetben minden időlépésre külön fixpontos iterációt kell lefuttatni. A nemlineáris problémák megoldása ezáltal lényegesen hosszabb időt vesz igénybe.

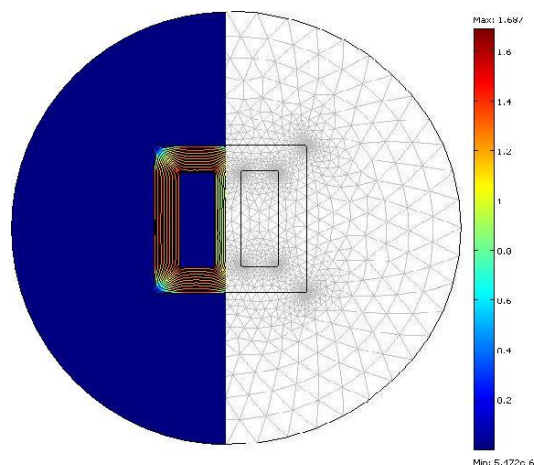
A probléma megoldása után következik az utófeldolgozás, más néven posztprocesszálas. A most már ismert potenciálértékek alapján a probléma szempontjából érdekes, tetszőleges mennyiségek számíthatók, mint a mágneses indukció értéke vagy a mágneses tér energiája. A számított értékek különböző formában megjeleníthetők, érdemes mindig az ábrázolni kívánt mennyiség szempontjából legmegfelelőbb ábrázolási módot választani. Erre példákat az 5.2. fejezetben mutatok be.

5.2. Szimuláció COMSOL Multiphysics környezetben

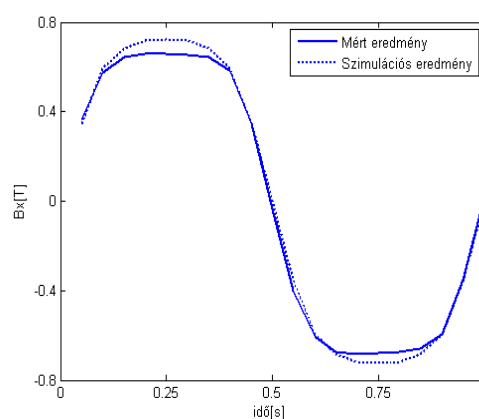
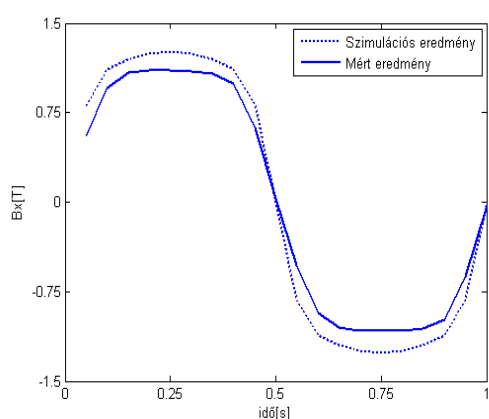
Az EI lemez kétdimenziós szimulációját először *Comsol Multiphysics* [9,29] környezetben hajtottam végre. A *Comsol Multiphysics* egy végeselem-módszert használó, jól ismert szimulációs software. A probléma megoldására a *Magnetostatic* modul került kiválasztásra. Először megvalósítottam az eszköz CAD modelljét. A gerjesztő tekercsek helyett felületi árammal számoltam, az ismeretlenek csökkentése érdekében. A 202 menetes tekercsben folyó 3 amper átszámítva 5510A/m felületi áramot jelent. A probléma gyenge alakja és a test mágneses telítődési görbéje mind beállítható. Sajnálatos módon a probléma tranziens analízise nem megoldható *Magnetostatic* modulban, konvergencia problémákra hivatkozva a szimuláció nem futott végig. A modell megoldásához ezért az úgynevezett *Comsol with Matlab* technikát használtam, ugyanis *Matlab* környezetben lehetőség van a szimuláció menetét befolyásolni a saját magam által megválasztott függvényvel. A program által épített *.m* kiterjesztésű fájlban egy beépített ciklus segítségével történt az időpillanatok léptetése.



5.10. ábra. A peremfeltétel felületi áram



5.11. ábra. A probléma stacionárius megoldása



5.12. és 5.13. ábra. A mért és a szimulált eredmények összehasonlítása C7 illetve C8 mérőtekercsnél

Az 5.10 ábra mutatja, hogy a geometria CAD modelljében felületi áramokkal történő számítás miatt nem építettem a modellbe a gerjesztés tekercselését. Az 5.11. ábra mutatja a stacionárius megoldást és az alkalmazott végeselemrácsot, míg az 5.12 és 5.13 ábrán a mérés és a

szimuláció eredményének összehasonlítása látható. A végelelemrács 7350 elemet tartalmazott, az ismeretlenek száma 14749 volt és 20 időpillanatra történt a számítás, a probléma megoldása 477.34 másodpercig tartott. Mint az látható, a szimuláció eredményeképpen kapott mágneses indukció jelalak hűen követi a mért jelalakot.

5.3. Szimulációs program építése Matlab környezetben

A mágneses indukció szimulációja mind lineáris, mind nemlineáris esetben megtörtént. Mindkét esetben ugyanazt a végelelemes rácsot alkalmaztam (2.1. ábra). A *.msh* kiterjesztésű fájlból készítettem két külön fájlt, ezek a fájlok a függelékben található programok hívják meg. Az egyik, *coords* nevű fájl tartalmazza a csomópontok koordinátáit, a másik, *connect* nevű pedig az elemek csúcspontjainak sorszámain, valamint a fizikai csoport számát. Az eredeti *.msh* fájl felépítése meglehetősen bonyolult, és részletesebb ismerete nagyobb rálátást igényel.

5.3.1. Szimuláció mágnesesen lineáris esetben

A szimulációhoz szükségesek azon csomópontok ismerete, ahol áram folyik, valamint a geometria szélén található, végtelen távolságot jelentő peremek csomópontjainak ismerete. Az áramperemek Neumann, a végtelen távolságot jelentő perem pedig Dirichlet peremfeltételt fog jelenteni a szimuláció során. Dirichlet peremfeltétel esetén egyszerűen meg kell adni, hogy az adott csomóponton mennyi lesz a mágneses vektorpotenciál értéke, jelen esetben a végtelen távolság miatt ez az érték 0. Ez úgy történik, hogy a (77) képlet bal oldalán szereplő $\underline{K}$ mátrix minden sorát nullával kell feltölteni utólag, amely az adott csomópontra vonatkozik, a főátló értéke ezekben a sorokban viszont 1 lesz, valamint az egyenletrendszer jobb oldalán található $\underline{b}$ oszlopvektor sorait kell nullával egyenlővé tenni a végtelen távoli perem csomópontjainak sorszáma alapján. Az áramperem viszont Neumann peremfeltételt jelent, ezen a peremen nem a vektorpotenciál értékét kell megadni, hanem a felületi áramot. A bal oldali $\underline{K}$ mátrix változatlan marad, a jobb oldali $\underline{b}$ oszlopvektor áramperemen levő sorait pedig meg kell szorozni a Neumann-peremfeltétel értékével. Szükséges továbbá megkülönböztetni a problémátérben a fizikai csoportokat, ugyanis asszemblálás során a vas területén található elemek csomópontjaira a relatív permeabilitás miatt a csomópontokra érvényes egyenletet még meg kell szorozni, lineáris esetben a relatív permeabilitás reciprokával, nemlineáris esetben pedig egy, a fixpontos módszer [27,28] számára optimálisra megválasztott permeabilitás érték reciprokával.

A Gmsh *.msh* kimeneti fájlja tartalmazza, hogy mely csomópont mely peremen található, ennek értelmezéséhez a program mélyebb ismerete szükséges, ezért a számításához fontos peremek kereséséhez ciklust írtam a probléma könnyítése céljából. Az eredmény ábrázolásának könnyítéséhez megvalósítottam egy elemkereső algoritmust. Ez annyit jelent, hogy a problémateret felosztva négyzetrácsra a rács minden pontjáról megállapítható, mely elemen belül található, így ezen pontokon a vektorpotenciál értéke pedig meghatározható az adott elem csomópontjaira kiszámított vektorpotenciál, valamint a csomópontokhoz tartozó formafüggvények alapján. Egy pont akkor szerepel egy adott elembe, ha az általa, és az elem csomópontjai alapján meghatározott 3 háromszög (5.5. ábra) területe mind pozitív. Amennyiben a pont az elemen kívül található, az egyik háromszög területe negatív lesz a csomópontok körüljárási iránya miatt. Ez nagyobb felbontású rács esetén viszont már igen hosszú ideig tartó számítást igényel. Az eredmények gyorsabb kiértékelése érdekében

szükséges volt az elemkereső algoritmus optimalizációja. A rácspontok keresése a négyzetrácsból rendre balról jobbra, és alulról felfele történt, így két egymást követő keresendő rácspont meglehetősen közel van egymáshoz. Egy algoritmus segítségével meghatároztam minden egyes elemre, hogy mely elemek a szomszédai. A végeselemrács-hoz viszonyítva megfelelően sűrűre választott négyzetrács esetén a következő keresendő rácspont vagy még mindig ugyanabban az elemben, vagy egy szomszédos elemben található. Ezzel a számítási idő lényegesen csökkenthető, nem kell 1040 elemet megvizsgálni mind a 10000 pont előfordulását, elég átlagosan 9-10 elem vizsgálata.

Elsőrendű formafüggvények alkalmazása esetén az alábbi képlettel számítható a vektorpotenciál az elemen belül:

$$A(x, z) = A_1 \cdot N_1 + A_2 \cdot N_2 + A_3 \cdot N_3. \quad (84)$$

Azonban nem csak a vektorpotenciál értéke ábrázolható így, bármilyen, a problémával kapcsolatos mennyiség számítható. A dolgozat szempontjából a mágneses indukció számítása a fontos, amit a mágneses vektorpotenciál rotációjaként lehet számítani. A (13) egyenlet bővebb kifejtését (80) írja le.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = e_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - e_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + e_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (85)$$

Mivel kétdimenziós probléma esetén a mágneses indukciónak csak x és y irányú komponense lehet, ezért a mágneses vektorpotenciálnak ebben az esetben csak z irányú komponense van.

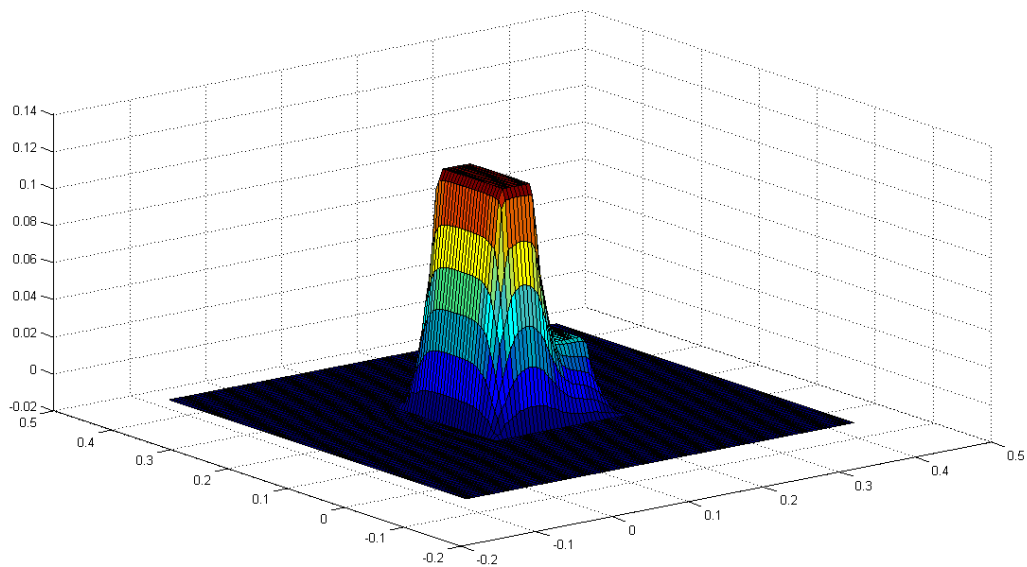
$$\vec{B} = e_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - e_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (86)$$

A mágneses indukció x és y irányú komponense külön számítandó. Mivel egy időpillanatban A_z értéke konstans, a fenti összefüggésbe behelyettesítve (79)-et egy elemen belül

$$B_x = \frac{dN_1}{dy} \cdot A_1 + \frac{dN_2}{dy} \cdot A_2 + \frac{dN_3}{dy} \cdot A_3, \quad (87)$$

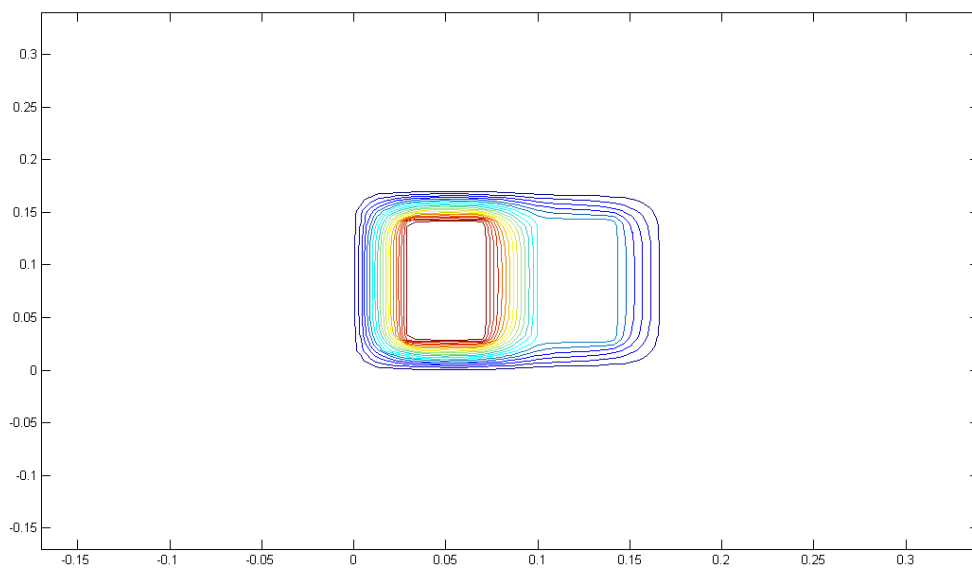
$$B_y = -\frac{dN_1}{dx} \cdot A_1 - \frac{dN_2}{dx} \cdot A_2 - \frac{dN_3}{dx} \cdot A_3, \quad (88)$$

összefüggések alapján számíthatók az indukció különböző irányú komponensei. Az írt programot a B függelék tartalmazza. Az 5.14. ábrán látható a mágneses vektorpotenciál értéke maximális gerjesztés esetén.



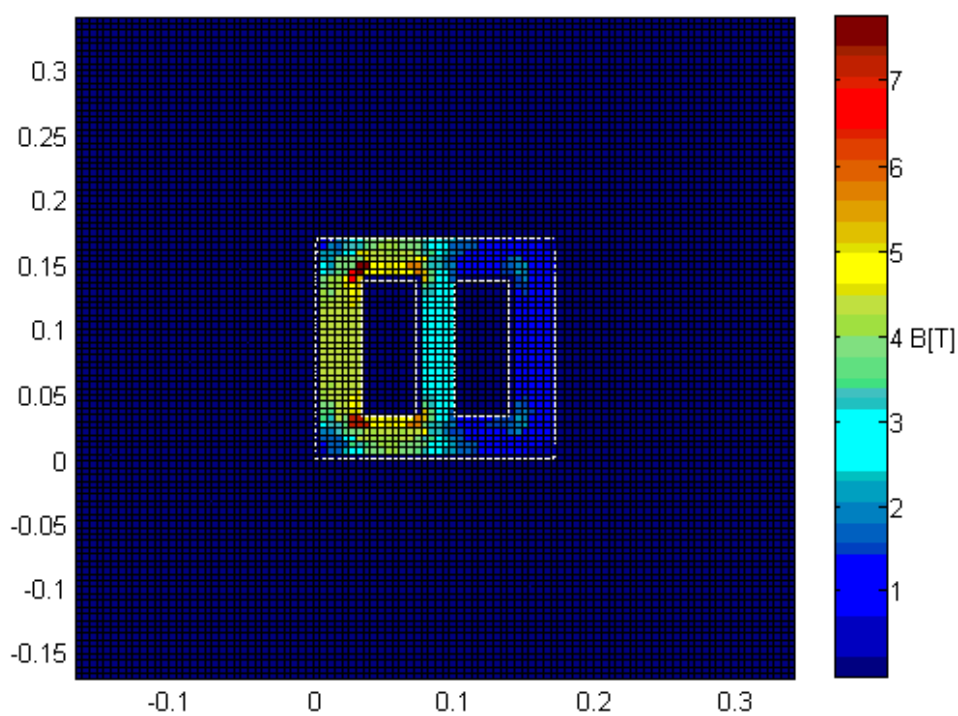
5.14. ábra. A mágneses vektorpotenciál számított értéke

Látványosabb és célravezetőbb ábra kapható azonban a vektorpotenciál kontúrvonalakkal történő ábrázolásával. Egy vonal mentén a vektorpotenciál értéke állandó.

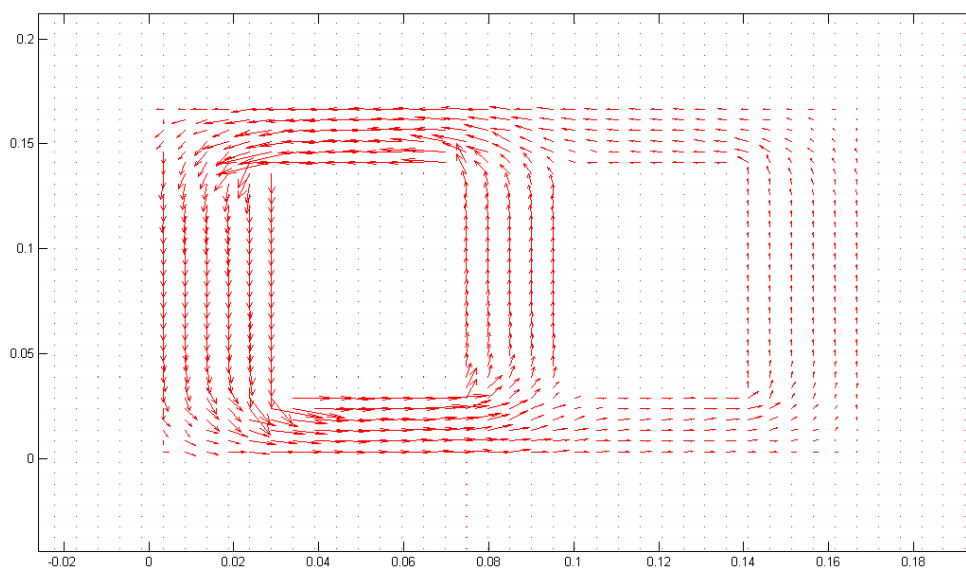


5.15. ábra. A vektorpotenciál ábrázolása kontúrvonalak segítségével

A mágneses indukciót ugyanekkora mértékű gerjesztés esetén ábrázolja az 5.16. és 5.17. ábra. Az 5.16. ábra az indukció abszolútértékét ábrázolja a négyzetrács pontjain, az 5.17. ábra pedig az eredmény vektorábrája.

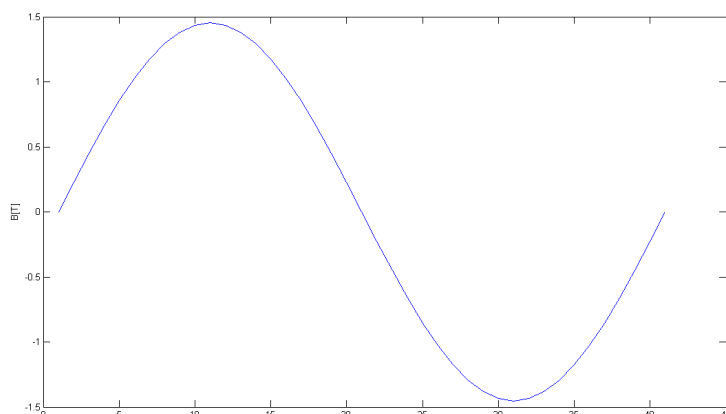


5.16. ábra. *A mágneses indukció abszolútértéke*

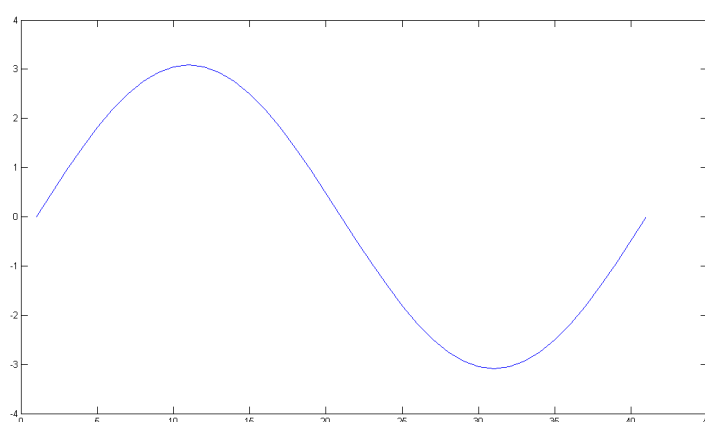


5.17. ábra. *A mágneses indukcióvonalak iránya*

A mágneses indukció lineáris szimulációja eredményét a C6 illetve a C7 tekercs helyén az 5.18. és az 5.19. ábra mutatja.



5.18. ábra. Szimuláció eredménye a C6 mérőtekerccs helyén



5.19. ábra. Szimuláció eredménye a C7 mérőtekerccs helyén

Természetesen a szimulációt lineáris esetben nem lehet összevetni a valósággal, pontosan a dolgozat fő csapásirányaként számító nemlinearitás miatt, viszont nagyon jó alap volt a végelelem-módszer mélyebb megismeréséhez.

5.3.2. Szimuláció mágnesesen nemlineáris esetben

A vaslemezben viszont a mágneses térerősség és a mágneses indukció kapcsolata nemlineáris, az anyag nagy mágneses térben telítődik, a linearitást feltételező szimuláció ezért meg sem közelíti a valóságot. Nemlineáris szimuláció esetén már számolni kell az anyag telítődésével, amennyiben még pontosabb eredményt szeretnénk kapni, a rendszer hiszterézisével is. A telítődés modellezésére számos formula létezik, az egyik ilyen a már ismertetett Langevin-függvény (31), illetve példaként egy arcus tangens függvény alapján történő közelítés:

$$B = \frac{2B_s}{\pi} \arctan\left(\frac{H}{H_0}\right), \quad (89)$$

ahol B_s a szaturáció értéke, H_0 pedig egy konstans, mely a karakterisztika dőlésszögét szabályozza. A telítődés miatt a relatív permeabilitás különböző mértékű gerjesztő tér esetén eltérő, nem konstans, így a reciproka sem, ami az A formalizmushoz szükséges. A nemlinearitást leíró függvény alapján bizonyítottan választható a fixpontos iterációhoz egy optimális érték a permeabilitásra, illetve a reciprokára ezen függvények által meghatározott maximális, illetve minimális értékeik alapján. Az optimális permeabilitás értéke

$$\mu_o = \frac{\mu_{\max} + \mu_{\min}}{2}, \quad (90)$$

ezáltal reciprokának optimális értéke

$$\nu_o = \frac{\nu_{\max} + \nu_{\min}}{2}, \quad (91)$$

ahol $1/\mu_{\max} = \nu_{\min}$ és $1/\mu_{\min} = \nu_{\max}$. Asszemblálás során a problémátér nemlineáris részén a fixpontos módszer számára optimális értékekkel kell számolni, valamint a fixpontos iteráció során a (16) egyenlet használatakor is, a problémátér levegő részén továbbra is a vákuum permeabilitás értékét kell használni az elemmátrix feltöltésekor. A nemlineáris problémák megoldása tehát a fixpontos iteráció helyes használata. A számításkor a (77) egyenletrendszer módosul

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u} = \underline{b} - \underline{b}_I \quad (92)$$

alakra, ahol $\underline{b}_I$ a nemlineáris része az egyenletnek, tehát (76) jobb oldalának második tagja. Ez a vektor a fixpontos módszerben ciklusonként változik, míg a $\underline{\underline{K}}$ elemmátrix az egész szimuláció alatt állandó, $\underline{b}$ pedig egy adott időpillanat vizsgálatakor állandó, míg nem változnak a peremfeltételek. A fixpontos iteráció bizonyos feltételek mellett egy lassú, de bizonyítottan konvergens eljárás. Nemlineáris problémák megoldására léteznek még más kidolgozott módszerek is, ilyen például a Newton-Raphson-módszer.

A dolgozatban tárgyalt probléma megoldási menete nemlinearitást feltételezve az alábbi:

1. Geometria és végelelemrács meghívása fájlból;
2. Elemmátrix feltöltése a problémát leíró gyenge alak alapján, asszemblálás;
3. Mágneses vektorpotenciál komponenseinek számítása

$$\underline{A} = \underline{\underline{K}}^{-1} (\underline{b} - \underline{b}_I); \quad (93)$$

4. Mágneses indukció számítása a mágneses vektorpotenciálból

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad (94)$$

5. Mágneses térerősség számítása (84) összefüggés alapján

$$H = H_0 \cdot \tan\left(\frac{B \cdot \pi}{2B_s}\right)$$

6. A nemlineáris tag számítása

$$\vec{I} = \vec{H} - \nu_o \vec{B}; \quad (95)$$

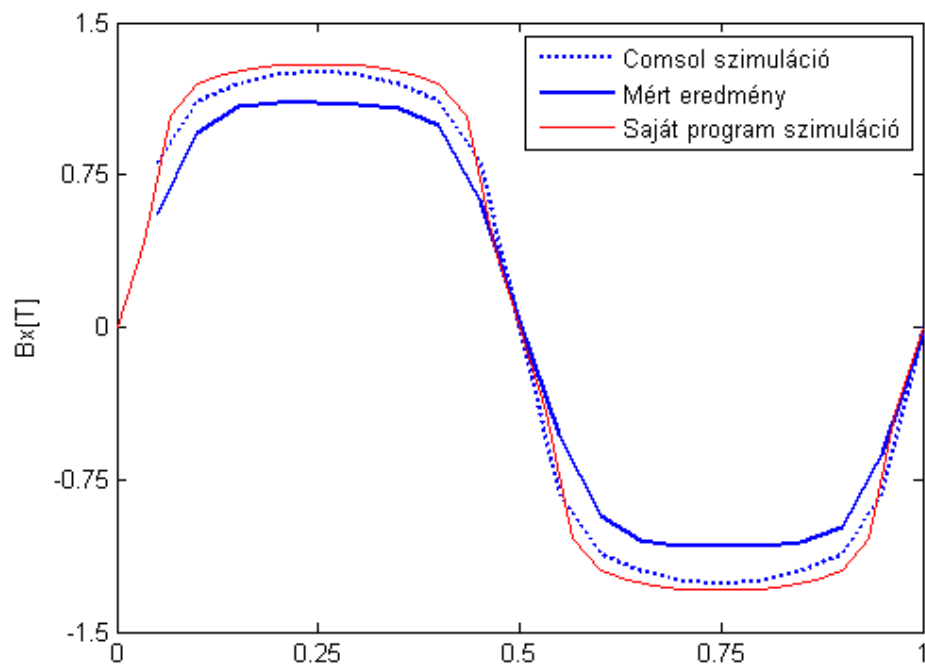
7. Hiba számítása

$$\|\vec{I} - \vec{I}_{\text{regi}}\| < \varepsilon; \quad (96)$$

8. Amennyiben a hiba értéke meghalad egy előre meghatározott ε értéket, ugrás a 3. pontra, egyébként kilépés a fixpontos iterációból;

9. Ugrás a következő időpillanatra, új peremfeltételek megadása és számítás folytatása a 3. ponttól;
10. Kilépés a számításból.

Az eredményeket minden csomópontra, x és y irányban, minden időpontban el kell tárolni, különben a szimuláció kiértékelhetetlen lesz eredmények hiányában. A 4. fejezetben meghatározott modell paramétereit behelyettesítve a Langevin-függvénybe (31) megkapható a vasmag telítődési görbéjének a modellje. A hiszterézismentes görbe a modell alapján a mágnesezettség függvénye, ami nemlineáris, de hiszterézismentes feltételek mellett azt jelenti, hogy önmaga függvénye is. Ezzel a számítás fixpontos iteráció esetén meglehetősen hosszadalmas. A modellezett hiszterézismentes görbéhez a (84) egyenlet által meghatározott modellt illesztettem egy hasonló proporcionális szabályzó algoritmus segítségével, mint amivel a paraméterek meghatározása történt. A modellben szereplő szaturációs mágneses indukció (B_s) értéke $1,383\text{T}$ míg H_0 értéke $387,428\text{A/m}$. A rács 1040 elemet és 531 csomópontot tartalmaz, a szimulációt egy periódusra, összesen 31 időpillanatban számíttattam ki, a probléma megoldása 631 másodpercig tartott. A mért eredmények, a *Comsol* által számított szimulációs eredmények, valamint az általam írt program számításainak összehasonlítását az 5.20. ábra mutatja. Az általam írt programkód megtalálható a *C* függelékben.



5.20. ábra. A mért és a szimulációs eredmények összehasonlítása

Az ábrán látható, hogy bár a szimulációs eredmények nem egyeznek meg tökéletesen a mérés eredményeivel, viszont közelítőleg jó eredményt mutatnak. Az eredmények eltérésének a fő oka, hogy a szimulációk hiszterézismentes feltételek között történtek, ami (mint a dolgozatban is több helyen kiderül) nem felel meg a valóságnak. A dolgozatomban nem esett szó az örvényáramú veszteségekről sem, az alkalmazott formalizmus viszont örvényárammentes problémákra alkalmas, örvényáramú problémák esetén 3D-s szimuláció szükséges, ami nagy számításigényű, ez meghaladta a jelen dolgozat kereteit, mindezt következőkben fogom megvizsgálni.

Konklúzió, jövőbeli tervek

Munkám során sikeresen építettem egy mágneses hiszterézis mérésre alkalmas programot LabVIEW környezetben, mely kiválóan alkalmas a hiszterézis jelenségének vizsgálatára. A program alkalmas a mért jelet frekvenciatartományban szűrni, valamint képes egy proporcionális algoritmus segítségével a mágneses indukció jelalakját szabályozni, ezáltal bizonyos mértékben csökkenthető a hiszterézisgörbe alatti terület, tehát maga a hiszterézis veszteség. Alkalmas továbbá a hiszterézisgörbével kapcsolatos egyéb paraméterek mérésére is, melyek szükségesek a jelenség modellezéséhez használt Jiles-Atherton-hiszterézismodell megvalósításához. A modell mérésekhez történő illesztéséhez egy saját módszerrel sikerült meghatároznom a modellhez szükséges paramétereket, melyek segítségével elég jó közelítéssel illeszkedik a modell a mért eredményekhez. Elsajátítottam a végelelem-módszer alapismereteihez szükséges tudást, megismertem a potenciálformalizmusok fontosságát, ezen ismereteimre alapozva pedig megvalósítottam egy mágneses indukció szimulációjára alkalmas, végelelem-módszert használó programot mind lineáris, mind nemlineáris esetekre.

Jövőben szeretném a programot bővíteni, hogy alkalmas legyen a hiszterézis szimulációjára ugyancsak a Jiles-Atherton-hiszterézismodellre támaszkodva, valamint szeretném további potenciálformalizmusok alkalmazásával megoldani a problémát.

Irodalomjegyzék

- [1] <http://www.compumag.org/jsite/team.html>
- [2] Kuczmann M., Iványi A., *The Finite Element Method in Magnetism*, Budapest: Academic Press, 2008.
- [3] D. Jiles, D. Atherton, *Ferromagnetic hysteresis*, IEEE Trans. Magn., vol. 19, pp. 2183–2185, September 1983.
- [4] D. C. Jiles and J. B. Thoele, *Theory of ferromagnetic hysteresis: Determination of model parameters from experimental hysteresis loops*, IEEE Trans. Magn., vol. 25, no. 5, pp. 3928–3930, September 1989.
- [5] Iványi A., *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*. Akademia Kiado, Budapest, 1997.
- [6] Kis P., *Jiles-Atherton Model Implementation to Edge Finite Element Method*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2007.
- [7] LabVIEW, National Instruments, <http://www.ni.com/labview/>
- [8] Matlab, www.mathworks.com
- [9] Comsol Multiphysics, www.comsol.com
- [10] Simonyi K., Zombory L. *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
- [11] Simonyi K., *Villamosságtan*, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1964
- [12] Fodor Gy. *Elektromágneses terek*. Műegyetemi Kiadó, 1996
- [13] Standaisky I. *Elektrodinamika*. Universitas, Győr, 2006.
- [14] Stoyan G. (szerk.). *Matlab - frissített kiadás*. TypoTex Kiadó, 2005.
- [15] J. P. A. Bastos, N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*
- [16] J. C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, 1865
- [17] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Macmillen and Co, London, 1873.
- [18] Iványi A., *Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában*, Akadémiai, Kiadó, Budapest, 2003
- [19] G Kovács, M Kuczmann, *Solution of the TEAM workshop problem No. 7 by the Finite Element Method*, PRZEGLAD ELEKTROTECHNICZNY 87:(3) pp. 99-102. (2011).

- [20] G Kovács, M Kuczmann, *Simulation and measurement of magnetic based nondestructive tester*, JOURNAL OF ADVANCED RESEARCH IN PHYSICS 2:(1) Paper 011104. (2011).
- [21] Z. Pólik, M. Kuczmann, *Measuring and Control the Hysteresis Loop by using Analog and Digital Integrators*, Journal of Optoelectronics and Advanced Materials , Vol. 10, No. 7, pp. 1861-1865, 2008.
- [22] Z. Pólik, M. Kuczmann, *Deep Flaws In Aluminum Examined By Different Potential Formulations*, Journal of Advanced Research in Physics, Vol 1, No 2, 2010.
- [23] Z. Pólik, M. Kuczmann, *Potential formulations for solving TEAM problem 27*, Przegląd Elektrotechniczny , Vol. 12, pp. 137-140, 2009.
- [24] D. Marcsa, M. Kuczmann, "Comparison of the $A^* - A$ and $T, \Phi - \Phi$ Formulations for the 2D Analysis of Solid-Rotor Induction Machines", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 45, No. 9, pp. 3329-3333, September 2009.
- [25] Friedl G., *Identification of Jiles-Atherton-hysteresis model parameters from measured data*, „Konferenciakiadvány:” Symposium on Applied Electromagnetics, Sopron (2012), 75-76. oldal.
- [26] Gmsh, <http://geuz.org/gmsh/>
- [27] Saitz J. *Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis*. IEEE Transactions on Magnetics, 35(3):1398-1401, 1999.
- [28] Chiampi M., Chiarabaglio D., Repetto M. *A Jiles-Atherton and fixed-point combined technique for time periodic magnetic field problems with hysteresis*. IEEE Transactions on Magnetics, 31(6):4306-4309, 1995.
- [29] COMSOL. *COMSOL Multiphysics User's Guide*. Comsol AB, 2007.
- [30] Preis K., Bárdi I., Bíró O., Magele C., Vrisk G., Richter K. R. *Different finite element formulations of 3D magnetostatic field*. IEEE Transactions on Magnetics, 28:1056-1059, 1992.

A. Függelék

```

clc;
clear;
Hc      = 1549;
kiHc    = 610;
Mr      = 864280;
kiMr    = 176;
Ms      = 1.1e6;
k       = 2000;
a       = 1000;
c       = 0.01;
alfa    = 0.0001;
mu0     = 4e-7*pi;
H       = 7808*sin([0:1:5000]*2*pi/2500);
M(1)    = 0;
He(1)   = 0;
Mirr(1) = 0;
Man(1)  = 0;
B(1)    = 0;
for i=2:length(H)
    dH(i)= H(i) - H(i-1);
    if dH(i) >= 0
        delta(i) = 1;
    else
        delta(i) = -1;
    end
end
for j=1:100
    for i=2:(length(H))
        He(i) = H(i) + alfa*M(i-1);
        Man(i) = Ms*(coth(He(i)/a)-(a/He(i)));
        if delta(i) == -1
            %effektív térerősség meghatározása
            %Langevin-függvény
            %Irreverzibilis mágnesezettség
            %korrekciója
            if Man(i) > M(i-1)
                Mirr(i) = Mirr(i-1);
                dMirr = 0;
            else
                Mirr(i) = (M(i-1)-c*Man(i))/(1-c);
                dMirr = (Man(i)-Mirr(i))/(k*delta(i));
            end
        else
            if Man(i) < M(i-1)
                Mirr(i) = Mirr(i-1);
                dMirr = 0;
            else
                Mirr(i) = (M(i-1)-c*Man(i))/(1-c);
                dMirr = (Man(i)-Mirr(i))/(k*delta(i));
            end
        end
        dMan = (Man(i)-Man(i-1))/(He(i)-He(i-1));
        dM = dH(i)*(c*dMan+(1-c)*dMirr)/(1-alfa*c*dMan-alfa*(1-c)*dMirr);
        M(i) = M(i-1)+dM;
        B(i) = mu0*(H(i)+M(i));
        Ban(i)=mu0*(H(i)+Man(i));
    end
end
for i=2:length(H)
    if M(i-1)<0 && M(i)>0
        Hc2=(H(i-1)+H(i))/2;
        kiHc2=((M(i)-M(i-1))/(H(i)-H(i-1)));
    else
        if H(i-1)<0 && H(i)>0
            Mr2 = abs((M(i)+M(i-1))/2);
            kiMr2= (M(i)-M(i-1))/(H(i)-H(i-1));
        end
    end
end
plot(H,B)
hold on
k = k + 0.02*(kiMr2-kiMr);
a = a + 0.0003*(Mr2-Mr);
c = c + 0.00001*(Hc2-Hc);
alfa = alfa + 0.000001*(kiHc-kiHc2);
end
%paraméterek szabályozása

```

B. Függelék

```
clc;
clear all;
% Geometria és végeselemrács beolvasása fájlból
load connect1.txt;
load coords1.txt;

connect = connect1;
coords = coords1;
% A Neumann peremfeltétellel jellemzett csomópontok keresése
k = 0;
bndaram = 0;
nemaram = 0;
peremf = 0;
j = 0;
for i=1:size(coords,1)
    if coords(i,2) == coords(5,2) && coords(i,3) >= coords(5,3) && coords(i,3) <= coords(10,3)
        k = k+1;
        bndaram(k) = coords(i,1);
        peremf(i) = 1;
    else
        if coords(i,2) == coords(6,2) && coords(i,3) >= coords(6,3) && coords(i,3) <=
coords(11,3)
            k = k+1;
            bndaram(k) = coords(i,1);
            peremf(i) = -1;
        else
            j=j+1;
            nemaram(j) = coords(i,1);
            peremf(i) = 0;
        end
    end
end
% A Dirichlet peremfeltétellel jellemzett csomópontok keresése
bndvegtelen = 0;
k = 0;
for i=1:size(coords,1)
    if coords(i,2) == coords(15,2) || coords(i,3) == coords(15,3) || coords(i,2) ==
coords(17,2) || coords(i,3) == coords(17,3)
        k = k+1;
        bndvegtelen(k) = coords(i,1);
    end;
end
% Geometria kirajzolása
% for i=1:length(coords)
%     figure(1),hold on,
%     plot(coords(i,2),coords(i,3),'.');
%     text(coords(i,2),coords(i,3),num2str(i));
% end
%
% for i=1:length(connect)
%     figure(1), hold on,
%     plot([coords(connect(i,6),2),...
%     coords(connect(i,7),2)], [coords(connect(i,6),3), ...
%     coords(connect(i,7),3)], 'b');
%     plot([coords(connect(i,7),2), coords(connect(i,8),2)]...
%     , [coords(connect(i,7),3), coords(connect(i,8),3)], 'b');
%     plot([coords(connect(i,8),2), coords(connect(i,6),2)],...
%     [coords(connect(i,8),3), coords(connect(i,6),3)], 'b');
% end
% Az anyagjellemzők és a gerjesztés megadása
nuzero = 1/(4*pi*1e-7);
nur = 1/1000;
f = 1;
t = [0:1/f/40:1];
Current = 5510*sin(2*pi*f*t);

K = zeros(length(coords));
b = zeros(length(coords),1);
A = zeros(length(coords),1);
% Asszemblálás
for i = 1:length(connect)
    x1 = coords(connect(i,6),2);
```

```

x2 = coords(connect(i,7),2);
x3 = coords(connect(i,8),2);
y1 = coords(connect(i,6),3);
y2 = coords(connect(i,7),3);
y3 = coords(connect(i,8),3);
delta = 0.5*det([1 x1 y1;1 x2 y2;1 x3 y3]);
xcsere=0;
yxsere=0;
if delta < 0
    xcsere = x3;
    yxsere = y3;
    x3 = x2;
    y3 = y2;
    x2 = xcsere;
    y2 = yxsere;
    xcsere = connect(i,8);
    yxsere = connect(i,11);
    connect(i,8) = connect(i,7);
    connect(i,11) = connect(i,9);
    connect(i,7) = xcsere;
    connect(i,9) = yxsere;
    delta = abs(delta);
end

gN1x = 0.5*(y2-y3)/delta;
gN1y = 0.5*(x3-x2)/delta;
gN2x = 0.5*(y3-y1)/delta;
gN2y = 0.5*(x1-x3)/delta;
gN3x = 0.5*(y1-y2)/delta;
gN3y = 0.5*(x2-x1)/delta;

if connect(i,5) == 26

    Ke = nuzero * nur * ([ gN1x; gN2x; gN3x] * [ gN1x, gN2x, gN3x] + [ gN1y; gN2y; gN3y] *
[ gN1y, gN2y, gN3y]) * delta;
else

    Ke = nuzero * ([ gN1x; gN2x; gN3x] * [ gN1x, gN2x, gN3x] + [ gN1y; gN2y; gN3y] * [
gN1y, gN2y, gN3y]) * delta;

end

for j = 1:3
    for k = 1:3
        K(connect(i,j+5), connect(i,k+5)) = K(connect(i,j+5), connect(i,k+5)) + Ke(j,k);
    end
end

end
% Peremfeltételek megadása
d=0;
aramel=0;
for i=1:length(connect)
    for j=6:8
        for k=1:length(bndaram)
            if connect(i,j) == bndaram(k)
                for l=j:8
                    for m=1:length(bndaram)
                        if connect(i,l) == bndaram(m)
                            d=d+1;
                            aramel(d,1) = i;
                            aramel(d,2) = bndaram(k);
                            aramel(d,3) = bndaram(m);
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

for i=1:length(aramel)
    if aramel(i,2) ~= aramel(i,3)

```

```

        W = abs(coords(aramel(i,2),3)-coords(aramel(i,3),3))/2;
        for j=2:3
            b(aramel(i,j)) = b(aramel(i,j)) + W;
        end
    end
end

for i=1:length(bndvegtelen)
    K(bndvegtelen(i),:) = 0;
    b(bndvegtelen(i)) = 0;
    K(bndvegtelen(i),bndvegtelen(i)) = 1;

end

% Elemek szomszédos elemeinek meghatározására szolgáló ciklusok
for c = 1: length(connect)
    g = 0;
    for k = 1:length(connect)

        for m = 6:8

            for n = 6:8
                if connect(c, m) == connect(k, n)
                    g = g+1;
                    cucc(c, g) = k;

                end
            end

        end

    end

end

for i = 1:length(cucc)
    x = 0;
    for j=1:length(cucc(1,:))
        g = 0;
        cucc2(i,1) = cucc(i,1);
        for h=1:length(cucc2(i,:))
            if cucc2(i,h) == cucc(i,j)
                g=g+1;
            end

        end

        if g == 0
            x = x+1;
            cucc2(i, x+1) = cucc(i,j);
        end

    end

end

pk=0;
mk=0;
fg=0;
xmin = min(coords(:,2));
xmax = max(coords(:,2));
ymin = min(coords(:,3));
ymax = max(coords(:,3));
xk = [xmin:(xmax-xmin)/100:xmax];
yk = [ymin:(ymax-ymin)/100:ymax];
Az = zeros(length(yk), length(xk),length(t));

% Elemkereső algoritmus
for a=1:length(t)

    bold= b;

```

```

for g=1:length(peremf)

    bold(g) = bold(g)*peremf(g)*Current(a);

end

A(:,a) = K\bold;
norm(A(:,a))

zs = 0;

for i=1:length(xk)

    s = 0;
    for j= 1:length(yk)
        x = xk(i);
        y = yk(j);
        s = s + 1;
        if s == 1
            OK = 0;
            while ~OK
                for k = 1: length(connect)

                    x1 = coords(connect(k,6),2);
                    x2 = coords(connect(k,7),2);
                    x3 = coords(connect(k,8),2);
                    y1 = coords(connect(k,6),3);
                    y2 = coords(connect(k,7),3);
                    y3 = coords(connect(k,8),3);

                    D1 = 0.5*det([1 x y; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
                    D2 = 0.5*det([1 x1 y1; 1 x y; 1 x3 y3]);
                    D3 = 0.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x y]);
                    if D1 >= 0 && D2 >= 0 && D3 >= 0
                        p = k;
                        OK = 1;
                    end
                end
            end
        end
    else
        OK = 0;
        while ~OK
            for d = 1: length(cucc2(1,:))
                k = cucc2(p,d);
                if k ~= 0

                    x1 = coords(connect(k,6),2);
                    x2 = coords(connect(k,7),2);
                    x3 = coords(connect(k,8),2);
                    y1 = coords(connect(k,6),3);
                    y2 = coords(connect(k,7),3);
                    y3 = coords(connect(k,8),3);

                    D = abs(0.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]));
                    D1 = abs(0.5*det([1 x y; 1 x2 y2; 1 x3 y3]));
                    D2 = abs(0.5*det([1 x1 y1; 1 x y; 1 x3 y3]));
                    D3 = abs(0.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x y]));

                    if (D1 + D2 + D3 -D) < 1e-11
                        p = k;
                        OK = 1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
end
end

end

end
p1 = connect(p,6);
p2 = connect(p,7);
p3 = connect(p,8);
x1 = coords(connect(p,6),2);
x2 = coords(connect(p,7),2);
x3 = coords(connect(p,8),2);
y1 = coords(connect(p,6),3);
y2 = coords(connect(p,7),3);
y3 = coords(connect(p,8),3);

D = 0.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
D1 = 0.5*det([1 x y; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);
D2 = 0.5*det([1 x1 y1; 1 x y; 1 x3 y3]);
D3 = 0.5*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x y]);
N1 = D1/D;
N2 = D2/D;
N3 = D3/D;
FI1 = A(p1,a);
FI2 = A(p2,a);
FI3 = A(p3,a);
Az(j,i,a) = N1*FI1+N2*FI2+N3*FI3;
gN1x = 0.5*(y2-y3)/D;
gN1y = 0.5*(x3-x2)/D;
gN2x = 0.5*(y3-y1)/D;
gN2y = 0.5*(x1-x3)/D;
gN3x = 0.5*(y1-y2)/D;
gN3y = 0.5*(x2-x1)/D;
Bx(j,i,a) = A(p1,a)*gN1y+A(p2,a)*gN2y+A(p3,a)*gN3y;
By(j,i,a) = -A(p1,a)*gN1x-A(p2,a)*gN2x-A(p3,a)*gN3x;
B(j,i,a) = sqrt(Bx(j,i,a)^2+By(j,i,a)^2);

end
end
end

```

C. Függlék

```
tic
clc;
clear all;

load connect1.txt;
load coords1.txt;

connect = connect1;
coords = coords1;

k = 0;
bndaram = 0;
nemaram = 0;
peremf = 0;
j = 0;
for i=1:size(coords,1)
    if coords(i,2) == coords(5,2) && coords(i,3) >= coords(5,3) && coords(i,3) <= coords(10,3)
        k = k+1;
        bndaram(k) = coords(i,1);
        peremf(i) = 1;
    else
        if coords(i,2) == coords(6,2) && coords(i,3) >= coords(6,3) && coords(i,3) <=
coords(11,3)
            k = k+1;
            bndaram(k) = coords(i,1);
            peremf(i) = -1;
        else
            j=j+1;
            nemaram(j) = coords(i,1);
            peremf(i) = 0;
        end
    end
end

bndvegtelen = 0;
k = 0;
for i=1:size(coords,1)
    if coords(i,2) == coords(15,2) || coords(i,3) == coords(15,3) || coords(i,2) ==
coords(17,2) || coords(i,3) == coords(17,3)
        k = k+1;
        bndvegtelen(k) = coords(i,1);
    end;
end

% for i=1:length(coords)
%     figure(1),hold on,
%     plot(coords(i,2),coords(i,3),'.');
%     text(coords(i,2),coords(i,3),num2str(i));
% end
%
% for i=1:length(connect)
%     figure(1), hold on,
%     plot([coords(connect(i,6),2), ...
%     coords(connect(i,7),2)], [coords(connect(i,6),3), ...
%     coords(connect(i,7),3)], 'b');
%     plot([coords(connect(i,7),2), coords(connect(i,8),2)]...
%     , [coords(connect(i,7),3), coords(connect(i,8),3)], 'b');
%     plot([coords(connect(i,8),2), coords(connect(i,6),2)],...
%     [coords(connect(i,8),3), coords(connect(i,6),3)], 'b');
%     %     text((coords(connect(i,1),1)+coords(connect(i,2),1)+coords(connect(i,3),1))/3,...
%     %     (coords(connect(i,1),2)+coords(connect(i,2),2)+coords(connect(i,3),2))/3, num2str(i));
% end

Bs = 1.3832092;

Ho = 397.4283;

nuzero = 1/(4*pi*1e-7);
nur = 1/1000;
nuopt = (pi*Ho/(2*Bs)+nuzero)/2;
```

```

f = 1;
t = [0:1/f/30:1];
Current = 5510*sin(2*pi*f*t);

K = zeros(length(coords));
b = zeros(length(coords),1);
A = zeros(length(coords),1);

for i = 1:length(connect)
    x1 = coords(connect(i,6),2);
    x2 = coords(connect(i,7),2);
    x3 = coords(connect(i,8),2);
    y1 = coords(connect(i,6),3);
    y2 = coords(connect(i,7),3);
    y3 = coords(connect(i,8),3);
    delta = 0.5*det([1 x1 y1;1 x2 y2;1 x3 y3]);
    xcsere=0;
    ycsere=0;
    if delta < 0
        xcsere = x3;
        ycsere = y3;
        x3 = x2;
        y3 = y2;
        x2 = xcsere;
        y2 = ycsere;
        xcsere = connect(i,8);
        ycsere = connect(i,11);
        connect(i,8) = connect(i,7);
        connect(i,11) = connect(i,9);
        connect(i,7) = xcsere;
        connect(i,9) = ycsere;
        delta = abs(delta);
    end

    gN1x = 0.5*(y2-y3)/delta;
    gN1y = 0.5*(x3-x2)/delta;
    gN2x = 0.5*(y3-y1)/delta;
    gN2y = 0.5*(x1-x3)/delta;
    gN3x = 0.5*(y1-y2)/delta;
    gN3y = 0.5*(x2-x1)/delta;

    if connect(i,5) == 26

        Ke = nuopt * ([ gN1x; gN2x; gN3x] * [ gN1x, gN2x, gN3x] + [ gN1y; gN2y; gN3y] * [
gN1y, gN2y, gN3y]) * delta;
        else

        Ke = nuzero * ([ gN1x; gN2x; gN3x] * [ gN1x, gN2x, gN3x] + [ gN1y; gN2y; gN3y] * [
gN1y, gN2y, gN3y]) * delta;

    end

    for j = 1:3
        for k = 1:3
            K(connect(i,j+5), connect(i,k+5)) = K(connect(i,j+5), connect(i,k+5)) + Ke(j,k);
        end
    end

end

d=0;
aramel=0;
for i=1:length(connect)
    for j=6:8
        for k=1:length(bndaram)
            if connect(i,j) == bndaram(k)
                for l=j:8
                    for m=1:length(bndaram)
                        if connect(i,l) == bndaram(m)
                            d=d+1;
                            aramel(d,1) = i;
                            aramel(d,2) = bndaram(k);

```

```

                                aramel(d,3) = bndaram(m);
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

    for i=1:length(aramel)
        if aramel(i,2) ~= aramel(i,3)
            W = abs(coords(aramel(i,2),3)-coords(aramel(i,3),3))/2;
            for j=2:3
                b(aramel(i,j)) = b(aramel(i,j)) + W;
            end
        end
    end

    for i=1:length(bndvegtelen)
        K(bndvegtelen(i),:) = 0;
        b(bndvegtelen(i)) = 0;
        K(bndvegtelen(i),bndvegtelen(i)) = 1;

    end

    for c = 1: length(connect)
        g = 0;
        for k = 1:length(connect)

            for m = 6:8

                for n = 6:8
                    if connect(c, m) == connect(k, n)
                        g = g+1;
                        cucc(c, g) = k;
                    end
                end

            end

        end

    end

    for i = 1:length(cucc)
        x = 0;
        for j=1:length(cucc(1,:))
            g = 0;
            cucc2(i,1) = cucc(i,1);
            for h=1:length(cucc2(i,:))
                if cucc2(i,h) == cucc(i,j)
                    g=g+1;
                end
            end

            end
            if g == 0
                x = x+1;
                cucc2(i, x+1) = cucc(i,j);
            end
        end

    end

    pk=0;
    mk=0;
    fg=0;
    xmin = min(coords(:,2));
    xmax = max(coords(:,2));
    ymin = min(coords(:,3));

```

```

ymax = max(coords(:,3));
xk = [xmin:(xmax-xmin)/70:xmax];
yk = [ymin:(ymax-ymin)/70:ymax];
Az = zeros(length(yk), length(xk), length(t));

Bx = zeros(length(connect), length(t));
By = Bx;
Hx=Bx;
Hy=Bx;
Ix=Bx;
Iy=Bx;
Ixold=Ix;
Iyold=Iy;
Bxold=Bx;
Byold=By;

bIex=zeros(3);
bIey=zeros(3);
bfp= zeros(length(coords),1);
bIx= zeros(length(coords),1);
bIy= zeros(length(coords),1);

for a=1:length(t)

    bold= b;

    for g=1:length(peremf)

        bold(g) = bold(g)*peremf(g)*Current(a);

    end

    %    A(:,a) = K\bold;
    %    norm(A(:,a))

    OK = 0;
    %    if a==1, bfp=bold;
    %    end

    bfp = bold;

    while ~OK
        A(:,a)=K\bfp;

        bIx= zeros(length(coords),1);
        bIy= zeros(length(coords),1);
        %    Ixold(:,a)=Ix(:,a);
        %    Iyold(:,a)=Iy(:,a);
        for i=1:length(connect)
            if connect(i,5) == 26

                x1 = coords(connect(i,6),2);
                x2 = coords(connect(i,7),2);
                x3 = coords(connect(i,8),2);
                y1 = coords(connect(i,6),3);
                y2 = coords(connect(i,7),3);
                y3 = coords(connect(i,8),3);
                delta = 0.5*det([1 x1 y1;1 x2 y2;1 x3 y3]);

                gN1x = 0.5*(y2-y3)/delta;
                gN1y = 0.5*(x3-x2)/delta;
                gN2x = 0.5*(y3-y1)/delta;
                gN2y = 0.5*(x1-x3)/delta;
                gN3x = 0.5*(y1-y2)/delta;
                gN3y = 0.5*(x2-x1)/delta;

                % B érték számítása az elemen belül

```

```

        Bx(i,a) =
A(connect(i,6),a)*gN1y+A(connect(i,7),a)*gN2y+A(connect(i,8),a)*gN3y;
        By(i,a) = -A(connect(i,6),a)*gN1x-A(connect(i,7),a)*gN2x-
A(connect(i,8),a)*gN3x;

%           B = sqrt(Bx(i,a)^2+By(i,a)^2);

        if abs(Bx(i,a)) >= Bs
            Bx(i,a) = sign(Bx(i,a))*0.98*Bs;
        end
        if (By(i,a)) >= Bs
            By(i,a) = sign(By(i,a))*0.98*Bs;
        end

% H számítása a tangens alapján

        Hx(i,a)=Ho*tan(pi*Bx(i,a)/(2*Bs));
        Hy(i,a)=Ho*tan(pi*By(i,a)/(2*Bs));

% I számítása B-ből meg H-ből

        Ix(i,a)=Hx(i,a)-nuopt*Bx(i,a);
        Iy(i,a)=Hy(i,a)-nuopt*By(i,a);

% rotW*I

        bIex = [gN1y;gN2y;gN3y]*Ix(i,a)*delta;
        bIey = -[gN1x;gN2x;gN3x]*Iy(i,a)*delta;

        for j=1:3

            bIx(connect(i,j+5)) = bIx(connect(i,j+5)) + bIex(j);
            bIy(connect(i,j+5)) = bIy(connect(i,j+5)) + bIey(j);
        end
    end

    bfp = bold-(bIx+bIy);

%           norm(A)
%           A(:,a)=K\bfp;
%           %norm(Bx(:,a)/(length(coords)) - Bxold(:,a)/(length(coords)))
%           norm(By(:,a)/(length(coords)) - Byold(:,a)/(length(coords)))

        OK = (norm(Bx(:,a)/(length(coords)) - Bxold(:,a)/(length(coords))) < 0.00003 &&
norm(By(:,a)/(length(coords)) - Byold(:,a)/(length(coords))) <0.00003)

        Bxold(:,a)=Bx(:,a);
        Byold(:,a)=By(:,a);

end

end

toc

```