

Hibrid valószínűségi-lehetőségi keverékek és hasznossági függvények

OTDK – 2013.

Készítette: Erős Dávid

Témavezető: Pap Endre akadémikus

Intézmény: Újvidéki Természettudományi-matematikai Egyetem, Matematikai-
informatikai Kar

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Bevezető

1. Alapfogalmak és tételek
2. Feltételes disztributivitás
3. Hibrid keverékek
4. S-mértékek bináris fákra történő dekompozíciója
5. Hibrid hasznossági függvények

Felhasznált irodalom

Bevezető

Dolgozatom célja az úgynevezett valószínűségi-lehetőségi keverékek illetve az azokon alapuló hasznossági függvények rövid bemutatása, ami tulajdonképpen nem más, mint a klasszikus, von Neumann – Morgenstern-féle hasznossági függvényeken alapuló döntéelméletnek a nem valószínűségi bizonytalanságokra történő általánosítása. A hibrid keverékek létrehozatala értékküszöbök bevezetésével történik, melyek alatt a keverék lehetőségi, felettük pedig valószínűségi. Az elmélet alapját a feltételes disztributivitás követelményét kielégítő folytonos trianguláris normakonorma párok képezik a nekik megfelelő pszeudo-additív S-mértékekkel együtt.

1. Alapfogalmak és tételek

Definíció 1.1: Az $S:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bináris operációt trianguláris konormának (t-konorma) nevezzük, amennyiben minden $x,y,z \in [0,1]$ esetében érvényes a következő négy feltétel:

1. $S(x,y)=S(y,x)$ (kommutatív)
2. $S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)$ (asszociatív)
3. $S(x,y) \leq S(x,z)$ minden $y \leq z$ esetében (nemcsökkenő)
4. $S(x,0)=x$ (határkövetelmény)

Az S trianguláris konorma párja a $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ trianguláris norma:

$$T(x,y)=1-S(1-x,1-y)$$

Példaként megemlíteném a négy alapvető trianguláris normát t-konorma párjaikkal együtt:

1. A minimum T_M illetve a maximum S_M :

$$\begin{aligned} T_M(x,y) &= \min(x,y) \\ S_M(x,y) &= \max(x,y) \end{aligned}$$

2. A szorzat T_P illetve a valószínűségi összeg S_P :

$$\begin{aligned} T_P(x,y) &= x \cdot y \\ S_P(x,y) &= x + y - x \cdot y \end{aligned}$$

3. A Lukasziewicz t-norma T_L és t-konorma S_L

$$\begin{aligned} T_L(x,y) &= \max(x+y-1, 0) \\ S_L(x,y) &= \min(x+y, 1) \end{aligned}$$

4. Végül pedig a leggyengébb t-norma, a drasztikus szorzat T_D illetve a legerősebb t-konorma S_D :

$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{amikor } \max(x,y) = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{amikor } \min(x,y) = 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A következő tétel egy általános módja a t-normák adott t-normák alapján történő szerkesztésének:

Tétel (1.1): Legyen $(T_k)_{k \in K}$ t-normák családja, $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k \in K}$ pedig a $[0, 1]$ intervallum párban diszjunkt nyitott részintervallumainak családja (K legfeljebb megszámlálható). Ezen kívül adottak a $(\varphi_k: [\alpha_k, \beta_k] \rightarrow [0, 1])_{k \in K}$ lineáris transzformációk, ahol:

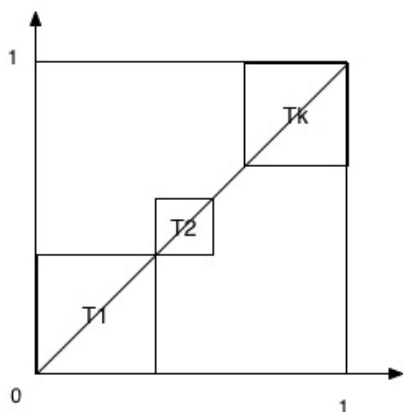
$$\varphi_k(u) = \frac{u - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}$$

Akkor a $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyet a következőképpen definiálunk:

$$T(x, y) = \begin{cases} \varphi_k^{-1}(T_k(\varphi_k(x), \varphi_k(y))) & \text{amikor } (x, y) \in [\alpha_k, \beta_k]^2 \\ \min(x, y) & \text{egyébként} \end{cases}$$

trianguláris norma, mely a $T_k, k \in K$ összeadandók sorrendi összege. A normát pedig a következőképpen írhatjuk fel:

$$T = (\langle \alpha_k, \beta_k, T_k \rangle)_{k \in K}$$



Az fentivel megegyező módon definiálhatunk trianguláris konormát is más t-konormák sorrendi összegeként, azzal, hogy a minimum helyett maximumot használunk. A kapott konormát pedig a így írhatjuk fel:

$$S = (\langle \alpha_k, \beta_k, S_k \rangle)_{k \in K}$$

Definíció 1.1: Az $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ függvényt folytonos archimédieszi t-konormának nevezzük, ha minden $x \in]0, 1[$ esetében igaz, hogy $S(x, x) > x$.

Definíció 1.2: A $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ függvényt folytonos archimédieszi t-normának nevezzük, ha minden $x \in]0, 1[$ esetében igaz, hogy $T(x, x) < x$.

Tétel (1.2): Az $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor folytonos archimédieszi t-konorma, ha létezik egy folytonos, szigorúan növekvő $s: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ függvény, melyre igaz, hogy $s(0) = 0$ és minden $x, y \in [0, 1]$ esetében érvényes, a következő:

$$S(x, y) = s^{-1}(\min(s(x) + s(y), s(1)))$$

A fentihez nagyon hasonló tétel érvényes a trianguláris normákra is.

Tétel (1.3): Az $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ függvény akkor és csak akkor folytonos archimédeszi t-norma, ha létezik egy folytonos, szigorúan csökkenő $t:[0,1] \rightarrow [0,+\infty]$ függvény, melyre igaz, hogy $t(1)=0$ és minden $x,y \in [0,1]$ esetében érvényes, a következő:

$$T(x,y) = t^{-1}(\min(t(x) + t(y), t(0)))$$

A fenti két tételben szereplő s és t függvényeket az S illetve T additív generátorainak nevezzük.

Tétel (1.4): Az $S:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ függvény akkor és csak akkor folytonos t-konorma, ha felírható sorrendi összegként, melynek összeadandói folytonos archimédeszi t-konormák.

Tétel (1.5): A $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ függvény akkor és csak akkor folytonos t-norma, ha felírható sorrendi összegként, melynek összeadandói folytonos archimédeszi t-normák.

Az adott S t-konormát szigorúnak nevezzük, ha folytonos és szigorúan monoton a $]0,1[$ nyílt négyzetintervallumon (ugyanaz érvényes a t-normákra is).

Egy tetszőleges folytonos t-konormát (vagy t-normát) nilpotensnek nevezünk, ha minden $a \in]0,1[$ nilpotens eleme az S -nek (illetve T -nek). Azaz bármely adott $a \in]0,1[$ esetében igaz, hogy létezik n természetes szám, melyről elmondhatjuk, hogy $a_s^{(n)} = 0$. $S^{(n)}(a)=0$

Definíció: Legyen S egy t-konorma, $\mathcal{A}$ pedig legyen egy σ -algebra az X halmazon. Ekkor az $m:\mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ leképezést pseudo-additív mértéknek azaz S -mértéknek nevezzük, amennyiben $m(\emptyset) = 0, m(X) = 1$ és érvényes a következő:

$$(\forall A, B \in \mathcal{A}) ((A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (m(A \cup B) = S(m(A), m(B))))$$

Egy másik fontos fogalom a valószínűség-számítás-elméletből a független események fogalma, ami nem csak elméleti szempontból jelentős, de gyakorlati, praktikus problémáknál is kucsfontosságú. Ezen elméletben a független események fogalmát a *-szeparabilitás hivatott helyettesíteni.

*Definíció: Az A és B eseményeket *-szeparabilisnek nevezzük, amennyiben:*

$$m(A \cap B) = m(A) * m(B)$$

miközben a $$ egy trianguláris normát jelöl.*

2. Feltételes disztributivitás

Azt tudjuk, hogy egy T t -norma akkor és csak akkor disztributív egy S t -konorma felett az egész $[0,1]^2$ négyzetintervallumon, ha $S=S_M$. Ezen feltétel fellazításának érdekében vezetjük be a következő fogalmat:

Definíció (2.1): A T t -normára akkor mondjuk, hogy feltételesen disztributív az S t -konorma felett, ha minden $x, y, z \in [0,1]$, $S(y, z) < 1$ esetében érvényes a következő:

$$T(x, S(y, z)) = S(T(x, y), T(x, z)) .$$

Tétel (2.1): Legyen T egy folytonos trianguláris norma, mely feltételesen disztributív az folytonos S t -konorma felett. Ezenkívül adottak a következők:

$$\begin{aligned} x, y, z &\in [0,1] \\ S(y, z) &= 1 \\ (\forall b < y)(S(b, z) < 1) \text{ vagy } (\forall c < z)(S(y, c) < 1) \end{aligned}$$

Ekkor tehát, elmondhatjuk, hogy T disztributív az S felett.

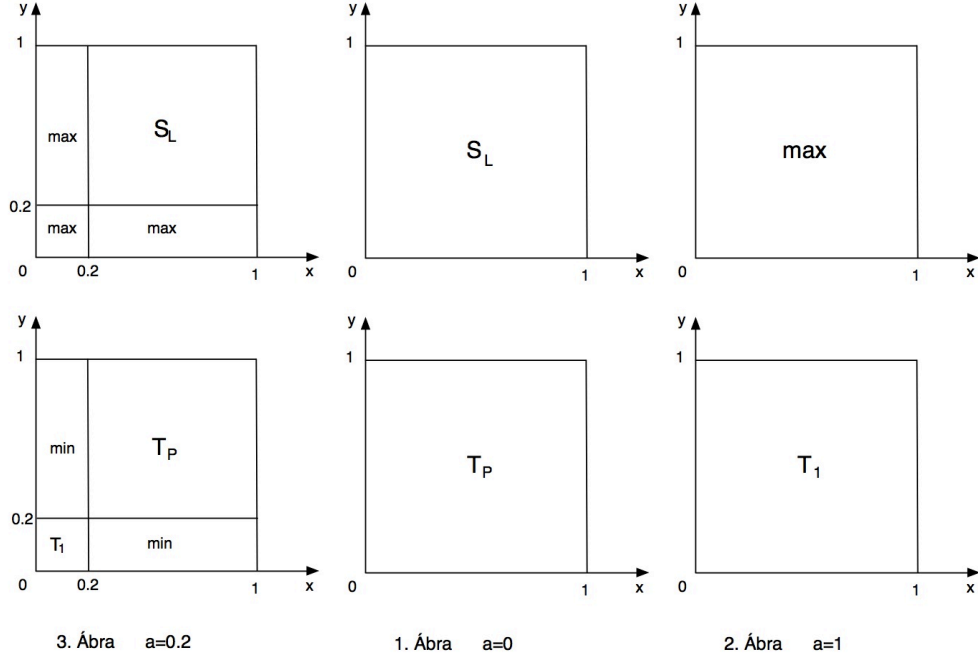
Tétel (2.2): Egy adott folytonos T t -norma akkor és csak akkor feltételesen disztributív az úgyszintén folytonos S t -konorma felett, ha létezik egy $a \in [0,1]$, egy szigorú T' t -norma és egy nilpotens S^* t -konorma úgy, hogy az s^* additív generátor multiplikatív generátora a T' -nek és $s^*(1)=1$ ezenkívül

$$T = (\langle 0, a, T_1 \rangle, \langle a, 1, T' \rangle)$$

ahol T_1 egy tetszőleges folytonos t -norma és

$$S = (\langle a, 1, S^* \rangle).$$

Ennek értelmében a folytonos t -norma és t -konorma párt a fenti tételből felírhatjuk a következő módon: $(\langle S_M, S^* \rangle, \langle T_1, T' \rangle)_a$



3. Hibrid keverékek

Legyen (S, T) egy folytonos trianguláris norma-konorma pár, mely kiegészíti a feltételes disztributivitás követelményét. Ebben az esetben a (2.2) tétel alapján felírhatjuk őket a következő alakban:

$$(\langle S_M, S^* \rangle, \langle T_1, T' \rangle)_a .$$

Miközben $a \in [0, 1]$, S^* egy nilpotens t-konorma, T_1 egy tetszőleges t-norma, a T' pedig egy szigorú t-norma. Ezenkívül definiáljuk a Φ_S halmazt, melynek elemei a következőképpen megadott rendezett (α, β) párok:

$$\Phi_S = \{(\alpha, \beta) | (\alpha, \beta) \in [0, 1], S(\alpha, \beta) = 1\} .$$

Definíció: A (G, M, T, S) rendezett négyest bővített keverékalmaznak nevezzük, ha G egy halmaz, az $M: G^2 \times \Phi_S \rightarrow G$ függvény (bővített keverék operáció) és beteljesülnek a következő feltételek:

- M1. $M(x, y; 1, 0) = 1$
- M2. $M(x, y; \alpha, \beta) = M(y, x; \beta, \alpha)$
- M3. $M(M(x, y; \alpha, \beta), y; \gamma, \delta) = M(x, y; T(\alpha, \gamma), S(T(\beta, \gamma), T(\delta, 1)))$
- M4. $M(x, x; \alpha, \beta) = x$

Miközben meg kell jegyezni, hogy az $M4$ levezethető az $M1$, $M2$ illetve $M3$ feltételeköl.

Definíció: Hibrid keverékalmaznak nevezzük azt a (G, M, T, S) rendezett négyest, ahol a G egy halmaz, (S, T) egy feltételesen disztributív, folytonos trianguláris normakonorma pár, az $M: G^2 \times \Phi_{S,a} \rightarrow G$ függvény pedig egy hibrid keverékoperáció, melyet így definiálunk:

$$M(x, y; \alpha, \beta) = S(T(\alpha, x), T(\beta, y))$$

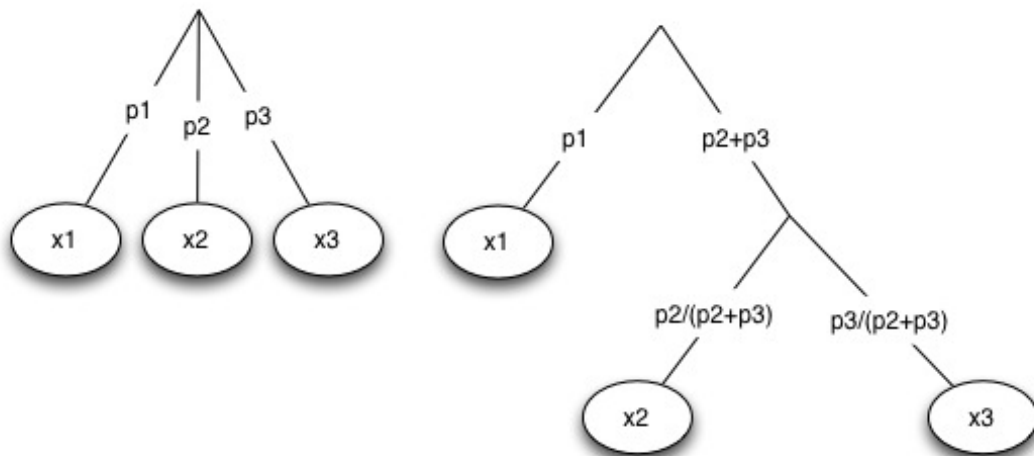
Miközben $\Phi_{S,a}$ a következőképpen van definiálva:

$$\Phi_{S,a} = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in]a, 1[, \alpha + \beta = 1 + \alpha \text{ vagy } \min(\alpha, \beta) \leq a, \max(\alpha, \beta) = 1\}$$

Tudjuk, hogy $\Phi_{S,a} \subset \Phi_S$. Ezekután a (2.1) tétel alapján leszögezhetjük, hogy érvényes a disztributivitás minden $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi_{S,a}$ esetében.

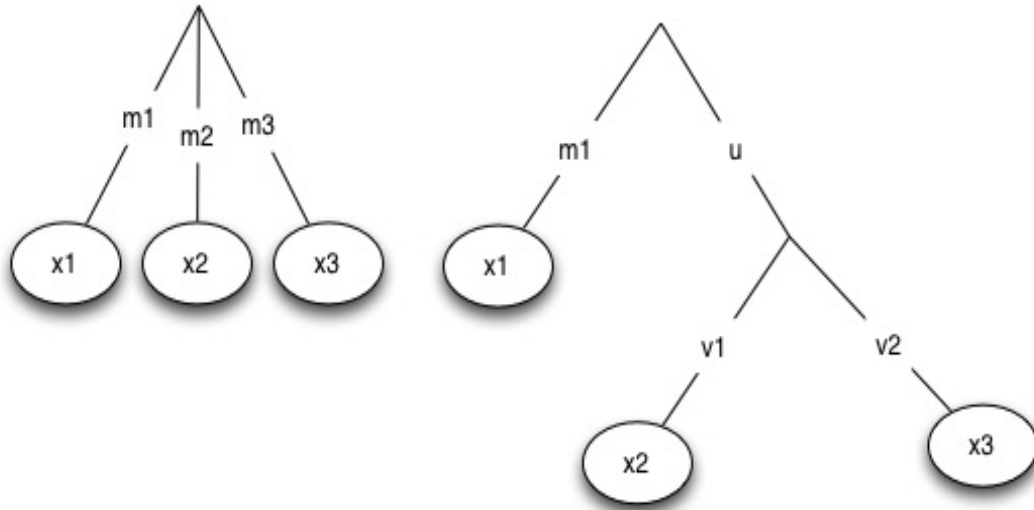
4. S-mértékek bináris ágakra történő dekompozíciója

Tulajdonképpen minden valószínűségi disztribúciót fel tudunk írni bináris lutrik sorozataként. Bináris lutri alatt pedig (A, α, x, y) rendezett négyeseket értünk, ahol $A \subset X$ és $P(A) = \alpha$ ami tulajdonképpen azt a véletlenszerű eseményt képviseli, melynek hozadéka x , ha az A bekövetkezik és y ha nem az A következik be.



Legyen p valószínűség az $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmazon: $p_i = p(x_i)$, $x_i \in X$. A klasszikus valószínűségszámítás-elmélet elveit követve a fenti ábrán jobb oldalt látható bináris fát kapjuk, ahol az egyes levelek valószínűségét úgy kapjuk meg, ha összeszorozzuk a fa tövétől az adott levélig vezető ágakon lévő valószínűségeket.

Viszont próbáljuk meg generalizálni, elvonatkoztatni a problémát a klasszikus valószínűség-számítás-elmélettől, azaz interpretálni a dolgozat témáját képező elméletre vonatkozóan. Legyen m egy S-mérték az $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ halmazon, $m_i = m(x_i)$. Az alábbi ábrán látható ternáris fát írjuk fel vele ekvivalens bináris fa formájában.



Ekkor a következő három egyenletet kell szemelőtt tartanunk:

$$\begin{aligned} S(v_1, v_2) &= 1 \\ T(u, v_1) &= m_2 \\ T(u, v_2) &= m_3 \end{aligned}$$

ahol T a szeparabilitást kifejező megfelelő triangulációs norma az adott S-mérték esetében. Ha, tehát, ennek a három egyenletnek van egyértelmű megoldása, akkor a fenti gondolatmenet követve az S-mérték minden lehetséges disztribúciója dekomponálható bináris lutrik sorozatává. Normalizálással, adott α_1 és α_2 esetén a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} S(v_1, v_2) &= 1 \\ \alpha_1 &= T(u, v_1) \\ \alpha_2 &= T(u, v_2) \end{aligned}$$

Egy a dolgozatban be nem mutatott korollárium alapján tudjuk, hogy a (u, v_1, v_2) rendezett hármasnak van általános egyértelmű megoldása. Tegyük fel, hogy $\alpha_1 > \alpha_2$, illetve, hogy $T_1 = \min$. A következő három esetet különböztetjük:

$$1) \quad a < \alpha_1, \quad a < \alpha_2$$

$$\alpha_1 = a + \frac{(u - a)(v_1 - a)}{1 - a}$$

$$\alpha_2 = a + \frac{(u - a)(v_2 - a)}{1 - a}$$

$$1 = v_1 + v_2 - a$$

így tehát rendezett hármasunkra a következő megoldást kapjuk:

$$(u, v_1, v_2) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 - a, a + \frac{(1-a)(\alpha_1 - a)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2a}, a + \frac{(1-a)(\alpha_2 - a)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2a} \right)$$

2) $\alpha_1 > a > \alpha_2$

Ebben az esetben $u > a$, ezenkívül a T tulajdonképpen minimum (mivel a második egyenletben az eredmény kisebb az a-nál) az S pedig maximum. Ebből kifolyólag

$$(u, v_1, v_2) = (\alpha_1, 1, \alpha_2)$$

Az egyenletrendszerünk pedig így néz ki:

$$\max(v_1, v_2) = 1$$

$$\alpha_1 = a + \frac{(u-a)(v_1-a)}{1-a}$$

$$\alpha_2 = \min(u, v_2)$$

3) $a \geq \alpha_1 \geq \alpha_2$

Ebben az esetben az $S = \max$. Tegyük fel, hogy $v_1 = 1$. Ekkor a rendszer első egyenletéből azt kapjuk, hogy $u = \alpha_1$. Feltéve, hogy $T = T_1 = \min$, a második egyenletből megkapjuk, hogy $v_2 = \alpha_2$. Így tehát azt kaptuk, hogy a megoldás ugyanaz, mint a második esetben: $(\alpha_1, 1, \alpha_2)$.

Tulajdonképpen maradt még egy eset mégpedig az, amikor $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \leq a$. Ebben az esetben van az egyenletnek több megoldása is, ellenben az egyetlen kézenfekvő az $(\alpha, 1, 1)$.

5. Hibrid hasznossági függvények

Végül pedig az eddig elmondottakat felhasználva, definiáljuk magukat a hibrid hasznossági függvényeket.

Legyen (S,T) folytonos trianguláris norma-konorma pár, melynek a következő a formája:

$$(\langle S_M, S_L \rangle, \langle T_1, T_P \rangle)_a$$

Legyen u_1, u_2 két hasznossági fok a $[0,1]$ intervallumból, μ_1, μ_2 pedig két valószínűségi fok a $\Phi_{S,a}$ -ból. Ekkor az úgynevezett optimista hibrid hasznossági függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$U(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(T(u_1, \mu_1), T(u_2, \mu_2)).$$

Az ú.n. pesszimista hibrid hasznossági függvényt pedig a következőképpen :

$$\bar{U}(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = 1 - U(1 - u_1, 1 - u_2; \mu_1, \mu_2).$$

Felhasznált irodalom

[1] Didier Dubois, Endre Pap, Henri Prade, 1999. “Hybrid probabilistic-possibilistic mixtures and utility functions” University Paul Sabatier, Toulouse

[2] Endre Pap, 2009. “Decision making by hybrid probabilistic-posibilistic utility theory” Panoeconomicus