

A POINCARÉ-FÉLE KÖRMODELL PARKETTÁZÁSA

Szerző: Ágó Krisztina

Matematika szak, Természettudományi Kar, Újvidéki Egyetem

Témavezető: Dr. Takácsi Árpád

Egyetemi tanár, Természettudományi Kar, Újvidéki Egyetem

Készült: 2012 novembere

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Rövid ismertető a Poincaré-féle körmodellről	3
3. Az euklideszi sík parkettázása háromszögek segítségével	4
4. A hiperbolikus sík parkettázása	10
4.1. Háromszöges parkettázás	10
4.2. Négyzetes parkettázás	15
5. Néhány érdekes példa és összegzés	17
6. Felhasznált irodalom.....	18

1. Bevezetés

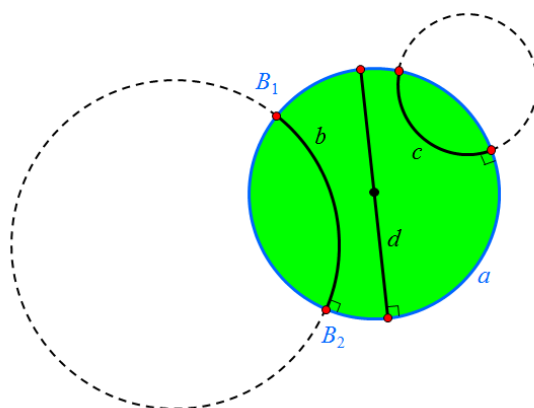
A parkettázás szót meghallva valószínűleg kevés ember gondol matematikai fogalomra. A sík kiparkettázása valójában azt jelenti, hogy egy előre megadott alakzattal hézag- illetve átfedésmentesen kitöltjük a síkot. Használatos még erre a folyamatra a csempézés szó.

Dolgozatom azzal foglalkozik, hogy hogyan lehet háromszögek illetve négyzetek segítségével kiparkettázni a hiperbolikus sík Poincaré-féle körmodelljét. Legelőször néhány szóban ismertetem ezen modell főbb tulajdonságait, majd visszakanyarodok az euklideszi síkhoz. Ez azért szükséges, mert magát a parkettázás folyamatának módszerét az euklideszi síkon dolgozom ki. Az alapötlet egyszerű, először definiálunk egy leképezést, amely egy komplex szám alakjában megadott síkbeli ponthoz hozzárendeli annak tükörképét arra az egyenesre nézve, amely két előre megadott ponton halad át. Ezt az ötletet továbbfejlesztve egy háromszöget tetszőlegesen sokszor tudunk tükrözni oldalain keresztül úgy, hogy mindig az aktuális csúcsot tükrözzük a másik két csúcs által meghatározott egyenesen keresztül, majd a keletkezett új pontokból határozunk meg új háromszögeket. Természetesen nem lehet akármilyen háromszögekkel kitölteni a síkot. Munkámban bemutatásra kerül az, hogy a fent említett módszerrel mely háromszög sokszoros tükrözésével érhető el hézag- és átfedésmentes síkkitöltés. Ezek után pedig egyszerű dolgunk van, mert mindössze néhány módosításra van csak szükség, hogy előállítsunk különféle parkettázásokat a körmodellben. Először a háromszöges majd a négyzetes parkettázás kerül bemutatásra.

A folyamat illetve az illusztrációk elkészítéséhez Mathematica programot használtam, amelynek köszönhetően színes, szép ábrák segítik az olvasót a téma teljesebb megértésében, valamint az emberi elme számára kissé elképzelhetetlen hiperbolikus sík tulajdonságainak megismerésében.

2. Rövid ismertető a Poincaré-féle körmodellről

A hiperbolikus sík Poincaré-féle körmodellje tulajdonképpen nem más, mint egy egység sugarú kör, amelyben a hiperbolikus síknak a kör belső tartománya felel meg. A kör belsejében levő pontok valójában a hiperbolikus sík pontjai. Hiperbolikus egyenesek ebben a modellben mindazok a körívek, amelyek az egység sugarú kört derékszög alatt metszik, valamint a kör átmérőit.

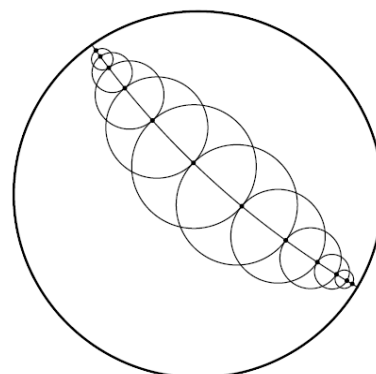


$$b, c, d \perp a$$

2.1. ábra

Bizonyítható, hogy ebben a modellben teljesülnek az abszolút geometria illeszkedési axiómái, és igazolható az is, hogy egy adott egyenesre egy nem rajta fekvő ponton keresztül létezik legalább kettő különböző egyenes, amely nem metszi az adott egyenest.

Érdekes megjegyezni, hogy ahogy közeledünk az általunk megadott kör körvonala felé, úgy a hiperbolikus végtelen felé közeledünk, ezért például ha elhelyezünk a modellben két egyforma hosszúságú szakaszt, akkor az, amelyik közelebb van a körvonalhöz, sokkal kisebbnek van ábrázolva. A 2.2. ábrán rendre egyforma méretű sugárral rendelkező körök vannak feltüntetve.



2.2. ábra

3. Az euklideszi sík parkettázása háromszögek segítségével

A kétdimenziós euklideszi síkra tekinthetünk úgy, mint a komplex számsíkra. Egy az euklideszi síkban megadott pont megfelelője az $a + ib$ alakú komplex szám. Legelőször is definiáljuk azt a leképezést, amellyel egy pontot tükrözünk egy egyenesen át, amely két előre megadott ponton halad keresztül.

Legyen A, B, C három adott pont. A C pontot szeretnénk tükrözni azon az egyenesen keresztül, amelyet a B és C pontok határoznak meg. Nevezzük C' -nek a C pont tükörképét, amelyet a következőképp kaphatunk meg:

$$C' = \frac{(\bar{A}B - \bar{B}A) + (A - B)\bar{C}}{\bar{A} - \bar{B}}$$

ahol felülhúzással az adott komplex szám konjugált párját jelöltük.

Most pedig definiáljuk a Mathematica programban a **tukroz** parancsot.

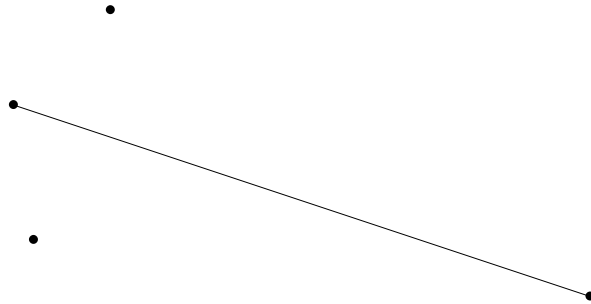
```
tukroz[{r_,p1_,p2_}]:=Module[{cr,cp1,cp2,ujcr,ujr},{cr,cp1,cp2}=Map[(First[#]+I Last[#])&,{r,p1,p2}];  
ujcr=  
(((cp1-cp2) Conjugate[cr]+(Conjugate[cp1] cp2-cp1 Conjugate[cp2]))/(Conjugate[cp1]Conjugate[cp2]));  
ujr=N[{Re[ujcr], Im[ujcr]}]]
```

A parancs lefutása után megkapjuk a tükrözött pont koordinátáit $\{x,y\}$ alakban. Most egy újabb program segítségével bemutatjuk mindezt vizualizálva.

```
abratukroz[r_, p1_, p2_]:=  
Module[{X}, Show[Graphics[Join[{PointSize[0.015], Map[Point, {r, p1, p2, X=tukroz[{r, p1, p2}]}],  
Line[{p1,p2}]}], AspectRatio->Automatic]]
```

És most lássunk egy konkrét példát. Tükrözzük a $(-2,3)$ pontot a $(-3,2)$ és a $(3,0)$ pontok által meghatározott egyenesen át:

```
abratukroz[{-2,3}, {-3,2}, {3,0}]
```



3.1. ábra

A további munka megkönnyítése érdekében definiáljuk a **haromszog** parancsot, amely három adott pontból, azok összekötésével kirajzol egy háromszöget.

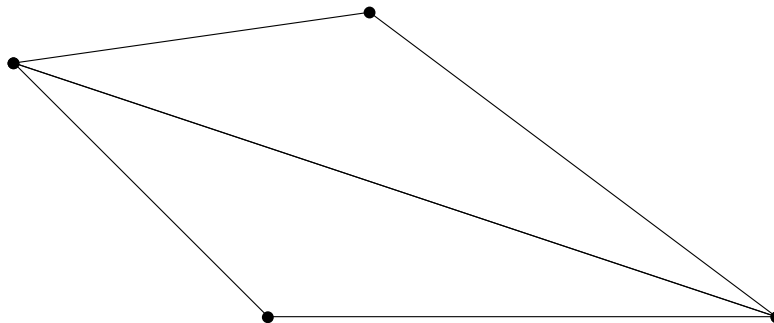
```
haromszog[triangle[color_:GrayLevel[0],{r_,p1_,p2_}]]:=  
{{Line[{p2,r,p1,p2}],{PointSize[0.015], Point[r], Point[p1], Point[p2]}}
```

Elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy ha adva van egy háromszögünk, akkor azt tükrözni tudjuk az egyik oldalán keresztül, mégpedig a következő parancssor segítségével:

```
haromszegtukrozegyszer[{a_,b_,c_}]:=Module[{A},Show[Graphics[Join[{haromszog[triangle[{a,b,c}],  
haromszog[triangle[{A=tukroz[{a,b,c}],b,c}]]]],AspectRatio->Automatic]]
```

Az előbb leírt művelet sor először elkészít egy háromszöget három megadott pontból, majd az egyik pontot tükrözi a másik két pont által meghatározott egyenesen keresztül, és az így kapott pontból, valamint a szimmetriatengely két pontjából ismét kirajzol egy háromszöget. Lássunk egy példát:

```
haromszegtukrozegyszer[{{3,1},{2,2},{5,1}}]
```



3.2. ábra

Az ezt követő lépés tükrözni egy adott háromszöget minden oldalán keresztül. Ehhez először definiálunk egy segédfüggvényt, amely szükséges ahhoz, hogy végigmenjünk a háromszög három csúcsán, és mindig a megfelelőt tükrözzük.

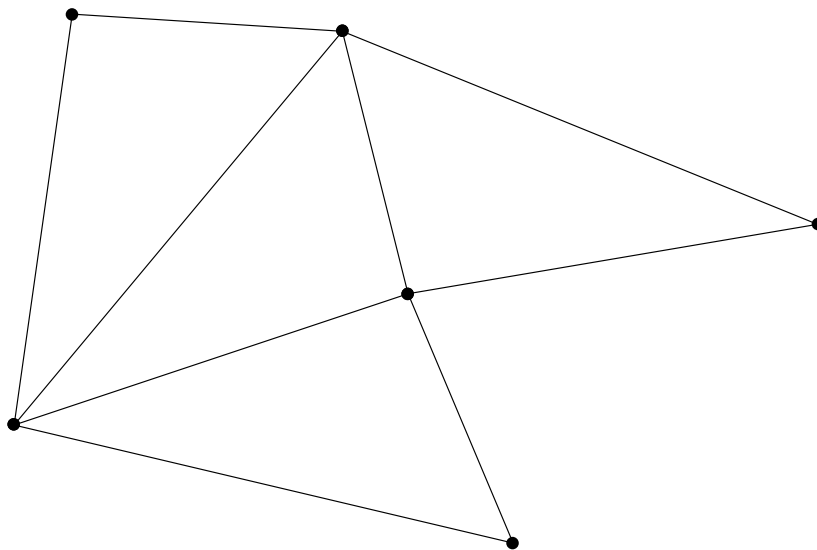
```
csucspertutas[x_List]:=NestList[RotateLeft, x, Length[x]-1]
```

Most pedig jöhet a tükrözés:

```
haromszagtukrozes[triangle[color_:GrayLevel[0],{a_,b_,c_}]]:=  
Map[triangle[#]&,MapThread[{a,b,c}/.#2->tukroz[#1])&,{csucspertutas[{a,b,c}],{a,b,c}}]]
```

Nézzünk meg egy konkrét példát:

```
Show[Graphics[Map[haromszog,haromszagtukrozes[triangle[{{6,2},{0,0},{5,6}}]]],AspectRatio->  
Automatic]]
```



3.3. ábra

A következő lépés a folyamatban, hogy tükrözzük a három új háromszöget mindhárom oldalán keresztül, majd az így keletkezett új háromszögeket ismételt, tetszőlegesen sokszor. Ezt a következő parancssor segítségével vihetjük végbe:

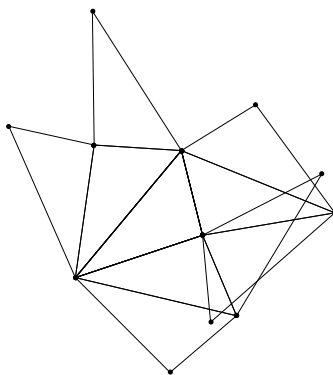
```
haromszogatparkettazas1[triangle_,n_]:=Show[Graphics[Map[haromszog,Flatten[NestList[haromszogat-  
tukrozes,triangle,n]]], AspectRatio->Automatic]
```

Vigyáznunk kell arra, hogy már a második lépés után a **haromszochtukrozes** parancsnak egy lista lesz az argumentje, ezért fontos beállítanunk még a **haromszogparkettazas** parancs lefuttatása előtt azt, hogy a **haromszochtukrozes** alkalmazható legyen listákra is:

SetAttributes[haromszochtukrozes, Listable]

És most alkalmazzuk ezt az előbb használt háromszögre. Először nézzük meg, hogyan néz ki két tükrözés után:

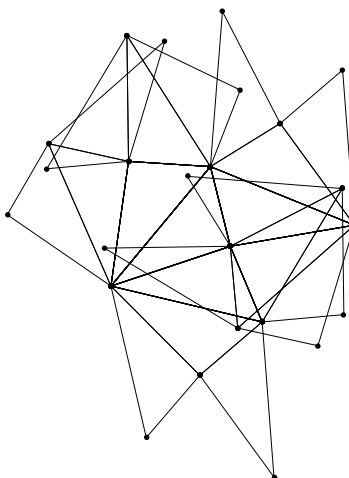
haromszogparkettazas[triangle[{{6,2},{0,0},{5,6}}], 2]



3.4. ábra

És három tükrözés után:

haromszogparkettazas[triangle[{{6,2},{0,0},{5,6}}], 3]



3.5. ábra

Ahogy az ábra is szemlélteti, a helyzet egyre komplikáltabb. Az egyik problémát az jelenti, hogy nagy számú szükségtelen háromszög keletkezik, ugyanis, amikor tükrözünk egy háromszöget az egyik oldalán keresztül, a következő lépésben, mikor az újonnan keletkezett háromszöget tükrözzük, annak egyik képe az előző háromszög lesz. Ez, ha pár lépésről van szó, nem jelent problémát, viszont ha már több tízszer vagy esetleg több százszor szeretnénk tükrözni, a számítógép memóriakapacitásától függően előfordulhat, hogy a program nem tud végig lefutni. Ennek a hibának a kiküszöbölése érdekében alkalmazunk némi módosítást a **haromszogparkettazas1** forráskódján:

haromszogparkettazas[triangle_,n_]:=

Module[{temp},Show[Graphics[Map[haromszog,Join[Nest[(temp=#;Flatten[Union[haromszegtukrozes[#]]])&, triangle, n], temp]], AspectRatio->Automatic]]];

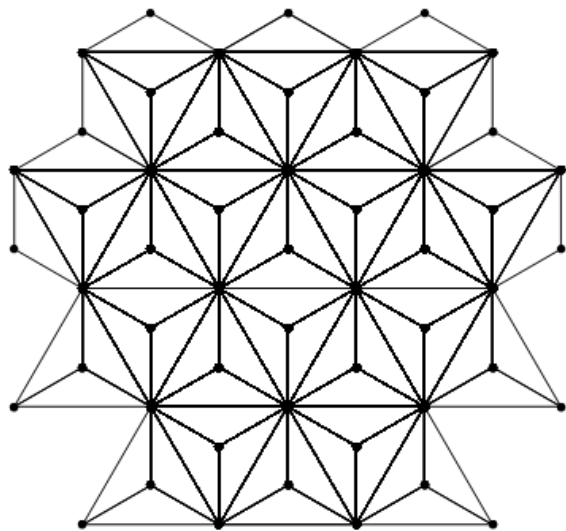
Ezzel a módszerrel azokkal a háromszögekkel parkettázhatjuk ki a síkot, amelyeknek a szögei rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha a 360° -ot elosztjuk velük, egész számot kapunk. Ez annak a következménye, hogy nem lehet például két és félszer tükrözni. Ilyen háromszögből kilenc darab van, mégpedig a következők:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $120^\circ - 45^\circ - 15^\circ$ | 4. $120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$ | 7. $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ |
| 2. $120^\circ - 40^\circ - 20^\circ$ | 5. $90^\circ - 72^\circ - 18^\circ$ | 8. $72^\circ - 72^\circ - 36^\circ$ |
| 3. $120^\circ - 36^\circ - 24^\circ$ | 6. $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ | 9. $60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$ |

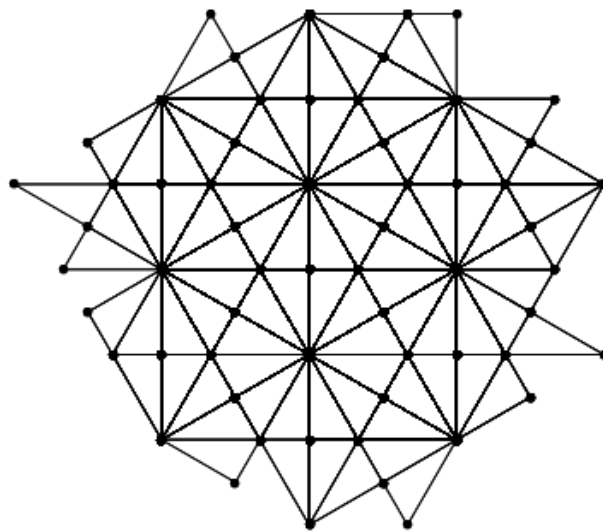
Viszont még ezek között is akadnak olyanok, amelyek bizonyos számú tükrözés után átfedéseket produkálnak. Összesen négy olyan háromszög létezik, amely segítségével, ha a dolgozat által vizsgált tükrözési módszert használjuk átfedés- és hézagmentesen lefedhetjük az euklideszi síkot, ezek pedig a következők:

1. $120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$
2. $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$
3. $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$
4. $60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$

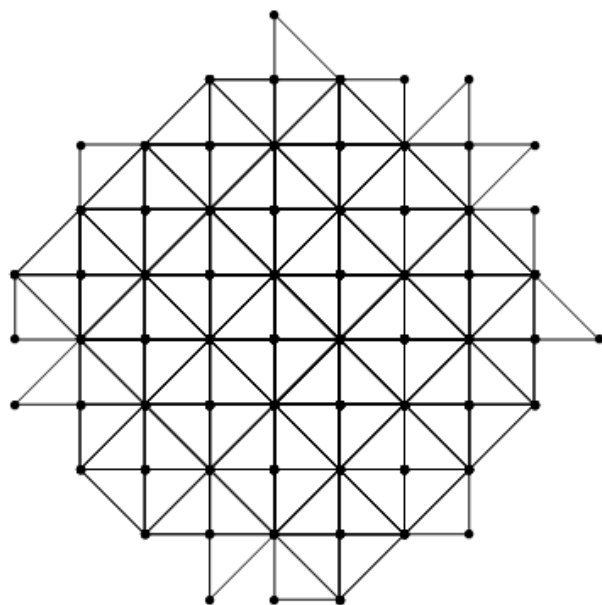
Íme, hogyan néznek ki ezek az esetek rendre 8 tükrözés után:



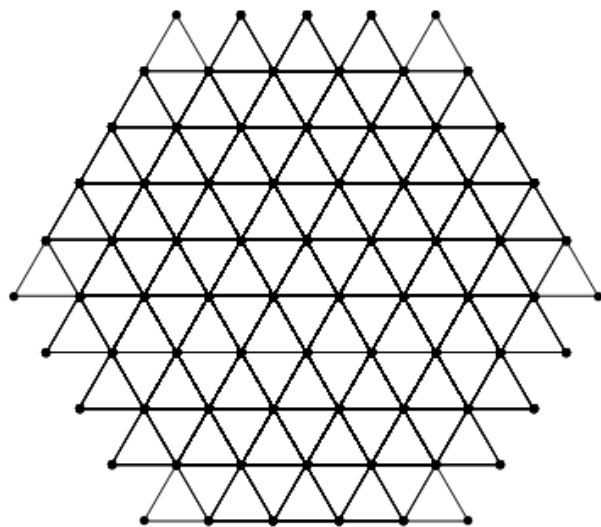
$120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$



$90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$



$90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$



$60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$

3.6. ábra

4. A hiperbolikus sík parkettázása

4.1. Háromszöges parkettázás

Miután végigelemeztünk egy módszert az euklideszi sík kiparkettázására, nem lesz nehéz dolgunk a hiperbolikus síkkal sem, hiszen rendre ugyanazokat a parancsokat fogjuk alkalmazni. Először is definiáljuk azt a leképezést, amely egy komplex szám alakjában megadott ponthoz hozzárendeli a tükörképét azon a hiperbolikus egyenesen keresztül, amely összeköt két előre megadott pontot. Legyen R a tükrözni kívánt pont, A és B pedig a két adott pont. Ekkor

$$R' = \frac{B\bar{A} - A\bar{B} + (A - B + B\bar{B}A - AB\bar{A})\bar{R}}{\bar{A} - \bar{B} + B\bar{B}\bar{A} - A\bar{A}\bar{B} + (A\bar{B} - \bar{A}B)}$$

A Mathematicában használt forráskód hasonló az euklideszi esetben használthoz:

```
hiperbolikustukroz[{r_, p1_, p2_}]:=
Module[{cr, cp1, cp2, ujr, {cr, cp1, cp2}=Map[(First[#]+I Last[#]) &, {r, p1, p2}];
ujcr=((Conjugate[cp1] cp2-Conjugate[cp2] cp1)+Conjugate[cr] (cp1-cp2+cp1 cp2 Conjugate[cp2]-cp2
cp1 Conjugate[cp1]))/((Conjugate[cp1]-Conjugate[cp2]+Conjugate[cp1] cp2 Conjugate[cp2]-
Conjugate[cp2] cp1 Conjugate[cp1])+Conjugate[cr] (Conjugate[cp2] cp1-Conjugate[cp1] cp2));
ujr=N[{Re[ujcr], Im[ujcr]}]}
```

Mivel a Poincaré-modellben az egyenesek az átmérők illetve azok a körök, amelyek merőlegesek az adott egység sugarú körre, ezért ebben az esetben nyilvánvalóan nem használhatjuk egyszerűen csak a **Line** parancsot, hanem külön szükséges definiálnunk rá egy függvényt. Ez pedig a következőképp lehetséges:

$$z \rightarrow \frac{z(A - \lambda_{AB}B) - (A + \lambda_{AB}B)}{z(1 - \lambda_{AB}) - (1 + \lambda_{AB})}$$

ahol A és B két előre megadott pont a kör belső tartományában, valamint

$$\lambda_{AB} = \frac{(1 - A\bar{B})}{|1 - A\bar{B}|} \sqrt{\frac{1 - A\bar{A}}{1 - B\bar{B}}}$$

és z a $[-1, 1]$ intervallumon sétál.

Ezen információk segítségével definiálhatjuk a **hiperbolikusszakasz** parancsot:

```
hiperbolikusszakasz[{a_List, b_List}]:=
Module[{aC, bC, pontok, IAB, pontokAB}, {aC, bC}=Map[(First[#]+I Last[#])&, {a,b}];
pontok=Range[-1,1,0.1];
IAB=
((1-aC Conjugate[bC])/Abs[1-aC Conjugate[bC]])*Sqrt[(1-aC Conjugate[aC])/(1-bC Conjugate[bC])];
pontokAB=
Map[(((# *(aC-IAB bC)-(aC+IAB bC)))/(# (1-IAB)-(1+IAB))) &, pontok]/.x_?NumberQ->{Re[x], Im[x]}
```

A parancs lefuttatásával egy 21 elemű listát kapunk, melynek tagjai rendre az A és B pontokat összekötő szakasz 21 pontjának koordinátái. Ezt követően a **hiperbolikusharomszog** parancs segítségével úgy tudunk lerajzolni egy háromszöget a körmodellben, hogy meghatározzuk hiperbolikus háromszög oldalán 21 pontnak a koordinátáját, majd ezeket egyszerű euklideszi szakasszal összekötjük. Ennyi pont elég ahhoz, hogy a kapott ábrán ne egy tört vonalat, hanem egy összefüggő görbét lássunk. A forráskód a következő:

```
hiperbolikusharomszog[triangle[color_ : GrayLevel[0], {a_, b_, c_}]]:=
Join[{color},{Polygon[Apply[Join,Map[hiperbolikusszakasz,Partition[{a,b,c,a},2,1]]]]}]
```

Íme egy hiperbolikus háromszög:

```
Show[Graphics[hiperbolikusharomszog[triangle[Hue[0.95],{{0,-0.9},{-0.9,0}, {0.5,0.5}}]]]]
```



4.1. ábra

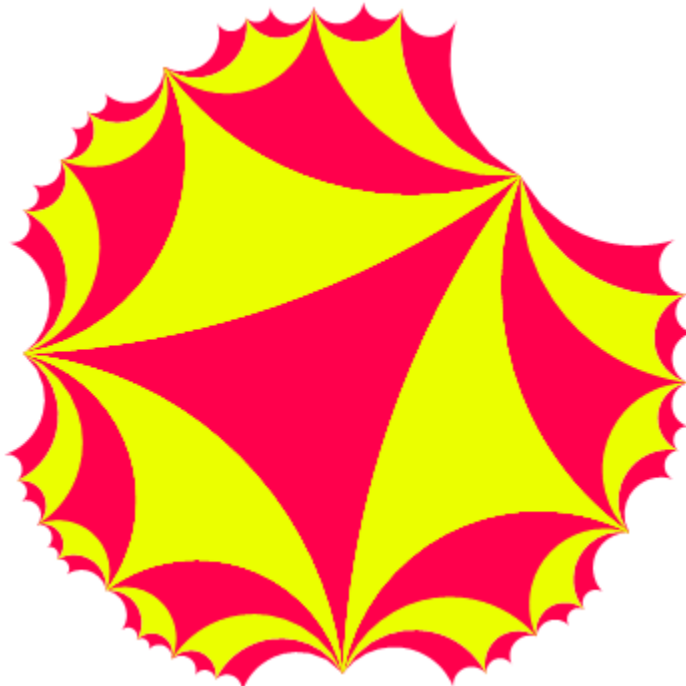
Innentől kezdve pedig egyszerű dolgunk van. Sorra alkalmazzuk ugyanazokat a parancsokat, amelyeket használtunk az euklideszi sík kiparkettázása esetén némi apró módosítással. Lássuk először azt a műveletsort, amely egyszer tükrözi a háromszöget az oldalain keresztül:

```
hipharomszegtukrozegyszer[triangle[color_, {a_, b_, c_}]]:=  
Map[triangle[If[Head[color]==Hue, ReplacePart[#, Switch[#[[1]],0.95,0.18,0.18,0.95],1]&[color]], #] &  
MapThread[({a,b,c}/.#2->hiperbolikustukroz[#1]) &, {csucspermutalas[{a,b,c}],{a,b,c}}]]
```

Természetesen a hiperbolikus tükrözés esetén is be kell állítanunk, hogy a **hipharomszegtukrozegyszer** parancsot alkalmazhassuk listákra is, majd ezután következhet a sokszoros tükrözést előállító program forráskódja:

```
hipharomszogparkettazas1[triangle_, n_]:=  
Module[{temp},Show[Graphics[Map[hiperbolikuharomszog,Join[Nest[{temp=#;Flatten[Union[hipharo  
mszegtukrozegyszer[#]]]&,triangle, n ], temp]]], AspectRatio->Automatic]]
```

Íme az előbb lerajzolt háromszög 4 tükrözés után:



4.2. ábra

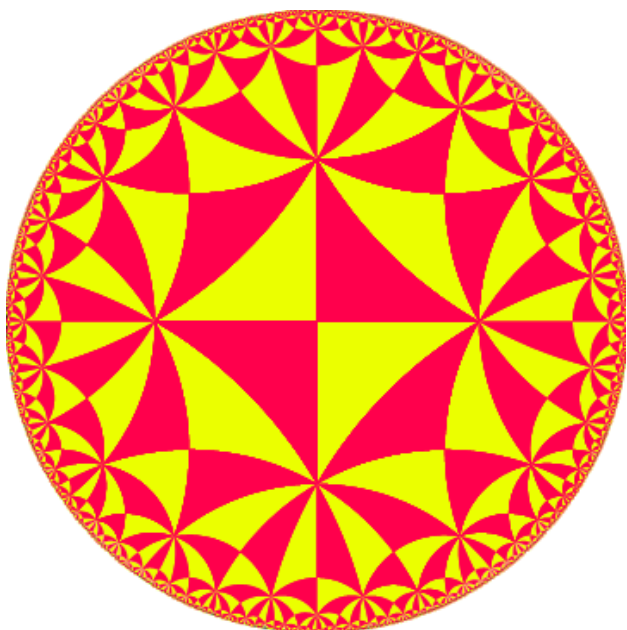
Ahogy közeledünk az egység sugarú kör körvonala felé, valójában a hiperbolikus sík végtelen távoli pontja felé közeledünk. Mivel az ábrán azon a helyen az egészen kicsi távolságok a valóságban az ábrabeli méretükhöz képest sokszáz-, ezer-, akár milliószorosai lehetnek, ezért egy apró tizedesbeli különbség egy pont koordinátájában óriás hibát generálhat. Így fordulhat elő, hogy kettő számunkra azonos háromszög a számítógépes program pontatlansága miatt nem lesz azonos. Ezen probléma elkerüléséhez használjuk a **torles** programot, amely ha két háromszög csúcsai között minimális különbség van csak, akkor eltávolítja az egyiket.

```
torles[lista_List]:=Module[{eltavolit, uj, i, n, dif}, uj=Sort[Flatten[lista]];
For[n=1,n≤Length[uj],n++,eltavolit={}];For[m=n+1,m≤Length[uj],m++,If[Min[Flatten[dif=Map[Flatten[
Map[Abs, (uj[[n,2]]-#)]]]&, Join[#, Map[Reverse, #]]& [csucspermutas[uj[[m,2]]]]]]>0.001, Break[],
For[l=1, l≤Length[dif], l++, If[Apply[Plus, dif[[1]]]<10^-8, If[!MemberQ[Map[(#<10^-
9)&, dif[[1]]], False], AppendTo[eltavolit, uj[[m]]]; Break[ ]]]]; uj=Complement[uj, eltavolit]; uj]
```

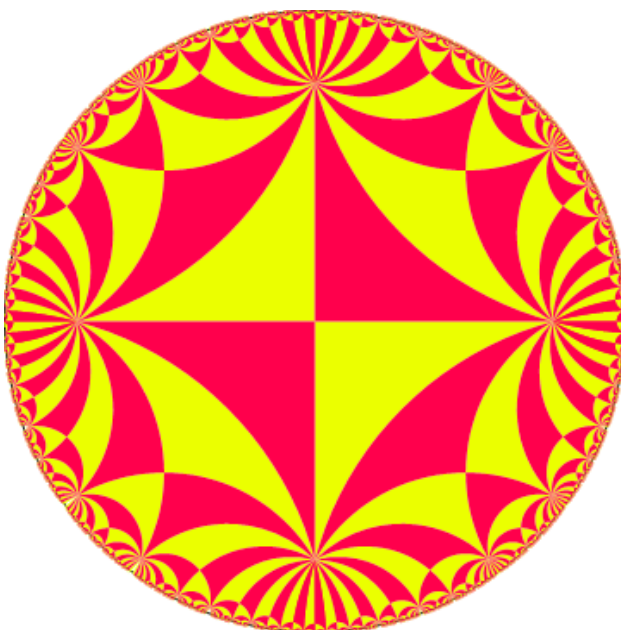
Ezt követően alkalmazzuk az imént leírt parancsot a tükrözés során:

```
hipharomszogparkettazas[triangle_n_]:=Module[{temp}, Show[Graphics[{Circle[{0,0},1],
Map[hiperbolikusharomszog, Join[Nest[{temp=#; Flatten[torles[hipharomszogtukrozegyszer[#]]]}&,
triangle, n], temp]]], AspectRatio->Automatic, PlotRange->{{-1,1},{-1,1}}]
```

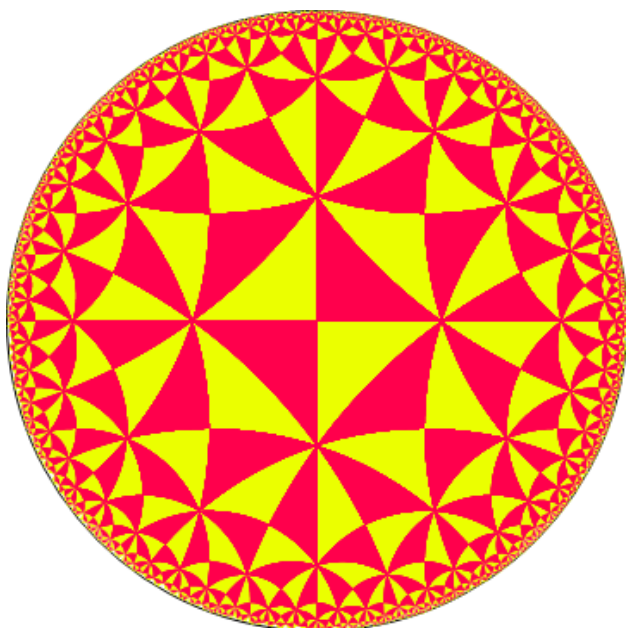
Most megvan minden eszköz ahhoz, hogy ki tudjuk parkettázni a hiperbolikus sík egy modelljét, már csak az a kérdés, hogy milyen háromszögek segítségével tehetjük ezt meg. Ismeretes, hogy a hiperbolikus geometriában a háromszög szögeinek összege kevesebb mint 180° , ez az egyik tényező, amire oda kell figyelnünk, a másik pedig ismételt az, hogy mindegyik szög mértékének egész számú sokszorosa legyen a 360° . Mivel a látványosság kedvéért most színes ábrákkal dolgozunk (két színt használunk) nem elég arra odafigyelni, hogy a szög mértékének egész számú sokszorosa legyen a teljes szög, mert például ha a háromszög egyik szöge 40° -os, akkor az a csúcs körül 9-szeres tükrözéssel jutunk vissza az eredeti háromszöghöz, és így lehetetlen két színnel kiszínezni. Tehát csakis olyan α szögek jöhetnek számításba, amelyekre teljesül $\alpha \cdot 2k = 360^\circ, k \in \mathbb{N}$. Mivel a szögek összege egy háromszögben kevesebb mint az egyenesszög, ennek a következménye az, hogy itt a megfelelő háromszögek száma sokszorosa az euklideszi síkban megfelelő háromszögek számának, mivel azok szögeinek egy egyenletnek kellett megfelelniük, itt viszont egy egyenlőtlenségnek, ezért szinte lehetetlen volna felsorolni mindazokat a háromszögeket, amelyekkel létrejöhet a parkettázás. Íme négy közülük:



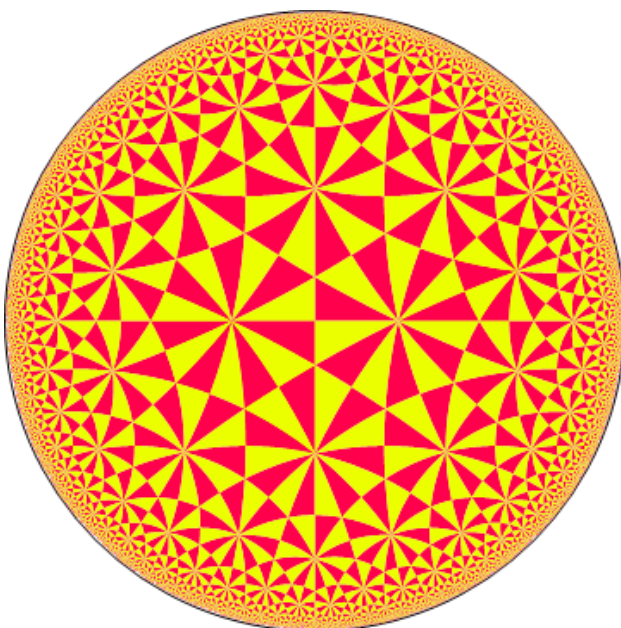
$$90^\circ - 30^\circ - 30^\circ$$



$$90^\circ - 10^\circ - 10^\circ$$



$$90^\circ - 36^\circ - 36^\circ$$



$$90^\circ - 60^\circ - 25,71^\circ (= \frac{\pi}{7})$$

4.3. ábra

4.2. Négyzetes parkettázás

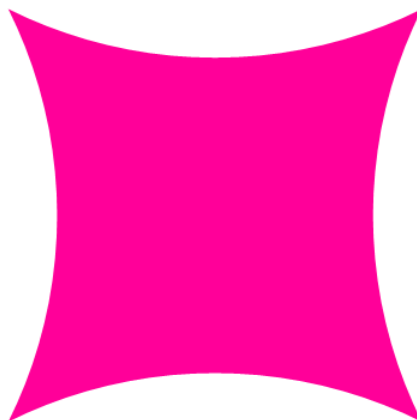
Az euklideszi síkban a négyzet fogalma egészen más, mint a hiperbolikus síkban, hiszen az előbbiben csak „egy fajta” négyzet létezik, mégpedig az, amelynek szögei rendre 90° -osak. Egy hiperbolikus négyzet szögeinek nagysága a $(0,90)$ intervallumból gyakorlatilag bármelyik értéket felveheti, ezért sokkal izgalmasabb a hiperbolikus síkot parkettázni négyzetek segítségével, mint az euklideszit, hiszen ezt sokféleképpen megtehetjük, mindössze arra kell odafigyelnünk, hogy ha a négyzet szöge α nagyságú, akkor $\frac{360^\circ}{\alpha}$ egész számot adjon.

A hiperbolikus négyzetet pontosan ugyanúgy definiáljuk, mint a hiperbolikus háromszöget, csak eggyel több pontot használunk.

```
hiperbolikusnegyzet[square[color_:Hue[1],{a_,b_,c_,d_}]]:=  
Join[{color},{Polygon[Apply[Join, Map[hyperbolicLine, Partition[{a,b,c,d,a},2,1]]]]}]
```

Íme erre is egy példa:

```
Show[Graphics[hiperbolikusnegyzet[square[Hue[0.9],{{0.5,0.5},{0.5,-0.5},{-0.5,-0.5},{-0.5,0.5}}]]]]
```



4.4. ábra

A következő lépés definiálni a **hipnegyzettukroz** parancsot:

```
hipnegyzettukroz[square[color_: Hue[1], {a_, b_, c_, d_}]]:=  
MapThread[square, {Table[color, {4}], lines=Partition[{a,b,c,d,a}, 2,1];  
refl[{x__}] := (#:>hiperbolikustukroz[{#,x}])&;MapThread[{a,b,c,d}/.(Map[refl[#1],#2])&,{#,  
Map[Complement[{a,b,c,d}, #]&, #]}&[lines]]]
```

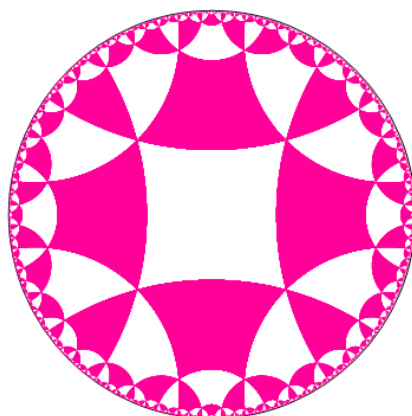
Ahhoz, hogy többször egymás után tükrözzünk ismét szükség van arra, hogy az előbbi két parancsot alkalmazni tudjuk egyszerre több négyzetre is, tehát beállítjuk, hogy mindkettő parancs alkalmazható legyen listákra is.

SetAttributes[hipnegyzettukroz, Listable]; SetAttributes[hiperbolikusnegyzet, Listable];

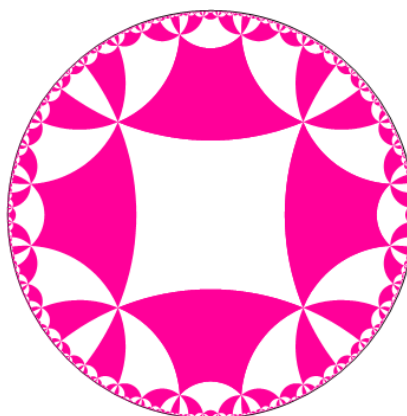
A következő paranccsal pedig előállíthatjuk a parkettát. Az x nagysága függ attól hogy, hány fokos a négyzet belső szöge.

Show[Graphics[{Circle[{0,0},1],Map[hiperbolikusnegyzet,Nest[Flatten[torles[hipnegyzettukroz[#]]]&,{square[Hue[{{x, x}, {-x, x},{-x, -x},{x, -x}]],7}]]], AspectRatio->Automatic]

Íme három példa, melyben három különböző négyzet segítségével parkettázunk:



$$\alpha = 60^\circ$$



$$\alpha = 45^\circ$$



$$\alpha = 30^\circ$$

4.5. ábra

5. Néhány érdekes példa és összegzés

Valószínűleg kevés ember akad, aki nem hallott még Escherről, illetve munkásságáról. Egy holland grafikusról van szó, aki a huszadik században élt és alkotott. Talán leghíresebb művei azok, amelyeken lehetetlen alakzatokat illetve épületeket ábrázolnak. 1958-ban Maurits Cornelis Escher megismerkedett Donald Coxeterrel, akinek akkoriban jelent meg szerzeménye a Poincaré-féle körmodellről. Ez felkeltette Escher érdeklődését a hiperbolikus geometria ezen modellje felé, és ekkor készítette el a Circle Limit nevű munkasorozatát, amelyben több módot mutatott be a Poincaré-féle körmodell kiparkettázására. Íme kettő közülük:



1958



1959

5.1. ábra

A dolgozat során bemutatott parkettázási módszerek elsőre talán meg sem közelítik Escher munkáit, viszont, ha már elkészítettünk egy ilyen „egyszerűbb” csempézést, akkor annak egy-egy elemébe mi is rajzolhatunk valamilyen mintát, ahogyan azt Escher is tette és az eredmény máris szemet gyönyörködtető lesz.

6. Felhasznált irodalom

- [1] William T. Shaw: *Complex Analysis with MATHEMATICA*, Cambridge University Press, 2006
- [2] Paul Kelly, Gordon Matthews: *The Non-Euclidean Hyperbolic Plane*, Springer-Verlag, 1981
- [3] <http://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml>
- [4] www.wikipaintings.org
- [5] <http://zeus.nyf.hu/~kovacs/poincare.pdf>