

**EGÉSZ SZÁMOK ELŐÁLLÍTÁSA HATVÁNYSZORZATOK
LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT**

TDK DOLGOZAT

BERTÓK CSANÁD

I. ÉVFOLYAM MATEMATIKUS MSC

TÉMAVEZETŐ: DR. HAJDU LAJOS, DEBRECENI EGYETEM

**DEBRECENI EGYETEM, 2013
LEZÁRÁS: 2013.01.03**

1. BEVEZETÉS

Az egész számok hatványok lineáris kombinációjaként történő reprezentációja széleskörű szakirodalommal rendelkezik. Egyrészt az előállítható egész számok vizsgálata is fontos kérdés, lásd például Everest [6], Jarden, Narkiewicz [11], Hajdu [7], Ádám, Hajdu, Luca [1], Hajdu, Luca [8] és Nathanson [12] eredményeit, másrészt bizonyos speciális számok, például a prímek előállíthatósága is érdekes probléma (lásd Hajdu [7], illetve Ádám, Hajdu, Luca [1]). A reprezentáció kérdése újabban a kettős alapú számrendszerek területén is különböző alkalmazásokat nyert, például Dimitrov és Howe [4] munkája nyomán.

Külön figyelmet érdemel a vizsgálatok során az az eset, amikor a reprezentációban szereplő hatványszorzatok száma rögzített. Nathanson [12] több idevágó kérdést is megfogalmazott, melyekre bizonyos esetekben Hajdu és Tijdeman [9, 10] válaszolni tudott. Jelen dolgozatban ebben az irányban elért eredményeinket mutatjuk be. Ehhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Legyenek $a_1, \dots, a_l$ különböző pozitív egészek és $A = \{a_1, \dots, a_l\}$. Legyen A' az A -ban lévő elemek hatványainak szorzataiból álló halmaz, azaz

$$A' := \{a_1^{m_1} \cdot \dots \cdot a_l^{m_l} \mid m_1, \dots, m_l \text{ nemnegatív egészek}\}.$$

Legyen $A'_\pm = A' \cup (-A')$, és jelölje $F(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) azt a legkisebb természetes számot, melyet nem tudunk előállítani k -nál kevesebb A' -beli tag összegeként. (Korábbi eredmények alapján jól ismert, hogy ilyen szám létezik). Defináljuk hasonlóan az $F_\pm(k)$ függvényt, azzal a különbséggel hogy alaphalmazként A' helyett most $A'_\pm$ -t használjuk.

Hajdu és Tijdeman beláttak több, az $F(k)$ és $F_\pm(k)$ függvények viselkedésével kapcsolatos tételt ([9, 10]). Bebizonyították, hogy ha $a_1, \dots, a_l$ prímszámok, akkor minden $k > 1$ esetén

$$k^{C_0^*} < F(k) < C_1^*(kl)^{(1+\varepsilon^*)kl} \text{ és } k^{C_0^*} < F_\pm(k) < \exp((kl)^{C_2^*}) \quad (1)$$

áll fenn, ahol C_0^* és C_2^* pozitív, abszolút konstansok, $\varepsilon^* > 0$ tetszőleges, C_1^* pedig egy olyan pozitív konstans, mely kizárólag ε^* -tól függ.

Ebben a dolgozatban azzal az esettel foglalkozunk, amikor az a_i ($i = 1, \dots, l$) elemek nem csupán prímek, hanem tetszőleges pozitív egészek lehetnek. Motivációként két dolgot is említünk. Egyrészt, a korábbi eredmények közül több is erre az esetre vonatkozik (lásd például [7, 1]). Másrészt, a bizonyítások egy része modulo m történik (megfelelő m választással), így az extra feltétel, miszerint az a_i ($i = 1, \dots, l$) számok prímek, több ponton eleve lényegtelen.

Eredményeink bizonyításához többek között ki kell tejesztenünk Tijdeman klasszikus tételeit, melyek az A' elemei közötti hézagok nagyságáról szólnak

([14, 15]) a kizárólag prím alapokra vonatkozó esetről arra, mikor az alapok tetszőleges pozitív egészek lehetnek.

Végezetül megemlítyük, hogy eredményeinket közlésre elfogadták [3].

2. ÚJ EREDMÉNYEK

Az $n_1, n_2, \dots, n_t$ pozitív egészeket multiplikatív függgetleneknek nevezzük, ha

$$n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n_t^{\alpha_t} = 1 \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{Z})$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = 0$.

Első eredményünk arra az esetre vonatkozik, amikor az A elemei között van legalább két multiplikatív független szám.

2.1. Tétel. *Legyenek $A, A', A'_\pm, F(k)$, illetve $F_\pm(k)$ a korábban adottak, és tegyük fel, hogy A elemei között található legalább két multiplikatív független. Ekkor*

- i) $F(k) > k^{c_1 k}$ minden $k > 1$ esetén, ahol c_1 egy kizárólag A -tól függő konstans,
- ii) $F(k) < c_2(kl)^{(1+\varepsilon)kl}$ minden $k > 1$ -re, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és c_2 egy csak ε -tól függő konstans,
- iii) $F_\pm(k) < \exp((kl)^{c_3})$ minden $k > 1$ esetén, ahol c_3 egy abszolút konstans.

Megjegyezzük, hogy mivel $F_\pm(k) \geq F(k)$ teljesül minden $k \geq 1$ esetén, így látható, hogy a fenti tétel i) része alsó becslést nyújt $F_\pm(k)$ -ra is. Ha összehasonlítjuk ezeket a becsléseket (1)-gyel, megállapíthatjuk, hogy az $F(k)$ -ra, illetve $F_\pm(k)$ -ra kapott korlátok hasonlóak, mint a [10]-ben találhatóak, ugyanakkor a mi eredményeink általánosabb esetre vonatkoznak.

A következő állításban azzal az esettel foglalkozunk, mikor az A halmaz elemei páronként multiplikatív függőek. Amennyiben összehasonlítjuk az így kapott korlátokat a 2.1. Tételben szereplőkkel, megfigyelhető, hogy az $F(k)$, illetve $F_\pm(k)$ függvények viselkedése ebben az esetben lényegesen eltérő.

2.1. Állítás. *Ha A elemei páronként multiplikatív függőek, akkor léteznek olyan, csak A -tól függő $1 < c_4 < c_5$ konstansok, melyekre*

$$c_4^k < F(k) \leq F_\pm(k) < c_5^k \quad \text{minden } k > 1 \text{ esetén.}$$

A következő eredményünk fontos szerepet játszik a 2.1. Tétel bizonyításában. Érdemes megemlíteni, hogy az alábbi állítás Tijdeman [14, 15] azon tételeinek kiterjesztése, melyek az A' elemei közötti hézagokra nyújtanak alsó-, illetve felső

korlátokat abban a speciális esetben, mikor az A halmaz elemei kizárólag prímek. Jelen állítás ezen eredményeket terjeszti ki arra az esetre, mikor A elemei tetszőleges pozitív egészek.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az A halmaz tartalmaz legalább két multiplikatíve független elemet, és legyen $1 = a'_0 < a'_1 < \dots$ az A' elemeiből képzett növekvő sorozat. Ekkor létezik egy olyan N pozitív egész, illetve csak az A -tól függő $c_6, c_7 > 0$ konstansok, hogy*

$$i) \ a'_{n+1} - a'_n > \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{c_6}} \quad \text{ha } a'_n \geq 3,$$

$$ii) \ a'_{n+1} - a'_n < \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{c_7}} \quad \text{ha } a'_n \geq N.$$

Azt az esetet, amikor A elemei páronként multiplikatíve függőek, a 3.5. Lemmában tárgyaljuk.

3. LEMMÁK

Az előző fejezetben ismertetett tételek bizonyításához több lemmára is szükségünk van. Ezek közül az első két szám multiplikatív függőségére ad egy ekvivalens feltételt.

3.1. Lemma. *Legyenek u és $v \neq 1$ pozitív egészek. Ekkor $\frac{\log u}{\log v}$ akkor és csak akkor racionális, ha u és v multiplikatíve függőek.*

Bizonyítás. Ha u és v multiplikatíve függőek, akkor könnyen látható, hogy mindkét szám hatványa valamilyen b pozitív egésznek. Így $\frac{\log u}{\log v}$ nyilvánvalóan racionális. Tegyük most fel, hogy $\frac{\log u}{\log v}$ racionális szám. Ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p , illetve q pozitív egészek. Így $q \log u = p \log v$, azaz $u^q v^{-p} = 1$, amiből az állítás következik. $\square$

A következő lemma a $\frac{\log u}{\log v}$ szám közelítő törtjeiről szól. Megjegyezzük, hogy egy hasonló állítás szerepel [14]-ben, ám az arra az esetre vonatkozik, amikor u , illetve v prímek. Valójában a lemma igazolása nagyon hasonló a [14]-beni állításhoz, ám a teljesség kedvéért a bizonyítás egészét közöljük.

3.2. Lemma. *Legyenek $u, v \neq 1$ multiplikatíve független pozitív egészek és legyen $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots$ a $\frac{\log u}{\log v}$ szám közelítő törtjeinek sorozata. Ekkor létezik egy olyan, csak u -tól és v -től függő c_8 konstans, hogy bármely $i \geq 2$ esetén*

$$q_{i+1} < q_i^{c_8} \log v.$$

Bizonyítás. Ha $i \geq 2$ akkor $q_i \geq 2$. Jól ismert, hogy

$$\left| \frac{p_i}{q_i} - \frac{\log u}{\log v} \right| < \frac{1}{q_i q_{i+1}}.$$

Ez alapján

$$|p_i \log v - q_i \log u| < \frac{\log v}{q_{i+1}}. \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy a 3.1. Lemma segítségével $|p_i \log v - q_i \log u| \neq 0$, így Baker [2] egy klasszikus eredményét felhasználva

$$|p_i \log v - q_i \log u| > \exp(-C_1(\log H))$$

adódik, ahol $H = \max(p_i, q_i)$ és C_1 egy olyan konstans, mely kizárólag u -tól és v -től függ. Mivel $\frac{p_i}{q_i} < 1 + \frac{\log u}{\log v}$, ezért $\log H \leq C_2 \log q_i$ ($i \geq 2$), ahol C_2 is kizárólag u -tól és v -től függ. Így

$$|p_i \log v - q_i \log u| > q_i^{-c_8} \quad (i \geq 2) \quad (3)$$

következik, ahol c_8 egy csupán u -tól és v -től függő konstans. Összevetve (2)-t és (3)-at éppen a lemma állítását kapjuk. $\square$

Legyen λ a Carmichael-függvény. Azaz $m \geq 1$ esetén jelölje $\lambda(m)$ azt a legkisebb pozitív egész számot, melyre

$$r^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

teljesül minden m -hez relatív prím r esetén.

A következő lemma a [9] cikk 1. Tétele. Megjegyezzük, hogy az eredmény Erdős, Schmutz és Pomerance [5] egy tételének explicit változata.

3.3. Lemma. *Léteznek olyan C_3 és C_4 pozitív konstansok, hogy minden elég nagy i egész szám esetén van olyan m egész, melyre*

$$\log m \in [\log i, (\log i)^{C_3}] \text{ és } \lambda(m) < (\log m)^{C_4 \log \log \log m}.$$

Legyen k egy pozitív egész szám és definiáljuk a $H_{A,k}$ halmazt a következőképpen:

$$H_{A,k} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = \sum_{i=1}^I a'_i \text{ ahol } I \leq k \text{ és } a'_i \in A' \ (i = 1, \dots, I)\}.$$

Ha $H \subseteq \mathbb{Z}$ és $m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$, akkor legyen

$$H(\bmod m) = \{i | 0 \leq i < m, h \equiv i \pmod{m} \text{ valamely } h \in H \text{ elemek esetén}\}.$$

A következő lemma a [10] cikk 1. Tétele.

3.4. Lemma. *Legyenek C_3, A , illetve k mint fent. Ekkor létezik egy olyan C_5 konstans, hogy minden elég nagy i egész szám esetén van olyan m egész, melyre $\log m \in [\log i, (\log i)^{C_3}]$, továbbá*

$$|H_{A,k}|(\bmod m) < (\log m)^{C_5 k l \log \log \log m}.$$

A következő lemma megadja az A' szerkezetét, valamint az elemei között található hézagok méretét abban az esetben, amikor az A halmaz elemei páronként multiplikatíve függőek.

3.5. Lemma. *Ha A elemei páronként multiplikatíve függőek, akkor létezik egy olyan b pozitív egész szám, hogy A' elemei felírhatóak b nemnegatív hatványaiaként. Továbbá, léteznek olyan, kizárólag A -tól függő c_9, c_{10} pozitív konstansok, hogy bármely nemnegatív $\beta \geq c_9$ egész szám esetén $b^\beta \in A'$ teljesül. Végül, ha $a'_n > b^{c_9}$, akkor*

$$a'_{n+1} - a'_n = (b - 1)b^{n+c_{10}}.$$

Bizonyítás. Ha az A elemei páronként multiplikatíve függőek, akkor léteznek olyan nemnegatív γ_i, γ_j egészek, hogy $a_i^{\gamma_i} = a_j^{\gamma_j}$ áll fenn minden $i, j \leq l$ index esetén. Könnyen látható, hogy ez épp azt jelenti, hogy létezik egy olyan pozitív egész b szám, melyre $a_i = b^{\beta_i}$ teljesül minden $i = 1, \dots, l$ -re. Amennyiben b nem egyértelműen meghatározott, úgy legyen b a lehető legnagyobb.

A lemma második állításának igazolásához először vegyük észre, hogy $\text{lko}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = 1$. Ismert, hogy van olyan $c_9 \in \mathbb{N}$, csak a $\beta_1, \dots, \beta_l$ számoktól függő konstans, hogy a

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_l x_l = \beta$$

diofantikus egyenletnek (ahol x_i ismeretlen pozitív egészek ($i = 1, \dots, l$), β pedig rögzített) $\beta > c_9$ esetén létezik megoldása (lásd pl. [13]). Így minden b^β alakú szám, melyre $\beta > c_9$ teljesül, benne van az A' halmazban. Innen a lemma második állítása is könnyen adódik. $\square$

4. A TÉTELEK BIZONYÍTÁSA

Mivel a 2.1. Tétel bizonyítása nagymértékben a 2.2. Tételen alapszik, így elsőként az utóbbit igazoljuk.

A 2.2. Tétel bizonyítása. Először belátjuk az i) állítást. Tijdeman [14] az összefüggést bebizonyította abban az esetben, amikor A elemei prímek. Amennyiben A elemei között szerepelnek nem prím egészek is, úgy legyen $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ az A -ban szereplő elemek szorzata prímtenyezőinek halmaza, és definiáljuk P' -t az alábbi módon:

$$P' = \{p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ nemnegatív egészek}\}.$$

Könnyen látható, hogy $A' \subseteq P'$, így felhasználva Tijdeman [14] eredményét, következik a tétel i) része.

A ii) állítás igazolásához Tijdeman [15] módszerét követjük. Legyenek u és v multiplikatív független elemei az A halmaznak és legyenek $1 = x_0 < x_1 < \dots$ az $\{u^r v^s \mid r, s \geq 0\}$ halmaz elemei. Megjegyezzük, hogy az alábbiakban megjelenő C_i konstansok kizárólag az u és a v számoktól függenek. Legyen $x = x_n = u^r v^s \geq N$, ahol N értékét később adjuk meg. Feltehető, hogy $u^r \geq \sqrt{x}$. Így

$$r \geq \frac{\log x}{2 \log u}. \quad (4)$$

Legyen most $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots$ a $\frac{\log u}{\log v}$ szám közelítő törtjeinek sorozata. Ismert, hogy $q_0, q_1, \dots$ monoton növekvő sorozat. Válasszuk meg i -t úgy, hogy $q_i \leq r < q_{i+1}$ teljesüljön és tegyük fel, hogy N elég nagy ahhoz, hogy $n \geq 3$ és $i \geq 2$ is fennálljon. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

a) Tegyük fel először, hogy

$$\frac{p_i}{q_i} > \frac{\log u}{\log v}.$$

Ekkor legyen $x' = u^{r-q_i} v^{s+p_i}$. Látható, hogy ezzel a választással $x' > x$. Így a közelítő törtek egy jól ismert tulajdonsága alapján

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{\log u}{\log v} < \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \frac{1}{q_i q_{i+1}}$$

adódik. Innen

$$\log \frac{x'}{x} = \log \frac{v^{p_i}}{u^{q_i}} = p_i \log v - q_i \log u < \frac{\log v}{q_{i+1}}.$$

Felhasználva (4)-et, illetve hogy $r < q_{i+1}$, látható, hogy

$$\log \frac{x'}{x} < \frac{\log v}{q_{i+1}} < \frac{\log v}{r} \leq \frac{2 \log u \log v}{\log x}.$$

A fenti két egyenlőtlenség összevetéséből adódik, hogy az $\frac{x'}{x}$ törtre u és v ismeretében adható egy, csak ezen két számtól függő felső korlát. Továbbá $x' > x$ -ből, illetve az $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$ (ahol $y = \frac{x'}{x}$) függvény elemi tulajdonságaiból adódik, hogy

$$\log \frac{x'}{x} > C_6 \left(\frac{x'}{x} - 1 \right).$$

Ezen állításból pedig

$$\frac{x'}{x} - 1 < \frac{C_7}{\log x}$$

következik. Így végül

$$x_{n+1} \leq x' < x + C_7 \frac{x}{\log x} = x_n + C_7 \frac{x_n}{\log x_n}. \quad (5)$$

b) Tegyük most fel, hogy

$$\frac{p_i}{q_i} < \frac{\log u}{\log v}.$$

Jól ismert, hogy $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} > \frac{\log u}{\log v}$. Így az $x' = u^{r-q_{i-1}}v^{s+p_{i-1}}$ választással $x' > x$ adódik. Ez alapján

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{\log u}{\log v} < \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{q_{i-1}q_i},$$

amiből

$$\log \frac{x'}{x} = \log \frac{v^{p_{i-1}}}{u^{q_{i-1}}} = p_{i-1} \log v - q_{i-1} \log u < \frac{\log v}{q_i}$$

következik. A 3.2. Lemma alapján innen végül

$$q_i > \left(\frac{q_{i+1}}{\log v} \right)^{C_8}.$$

A fenti egyenlőtlenségeket felhasználva, (4), illetve $u < q_{i+1}$ alapján

$$\log \frac{x'}{x} < \frac{\log v}{q_i} < \frac{(\log v)^{1+C_8}}{q_{i+1}^{C_8}} < \frac{(2 \log u)^{C_8} (\log v)^{1+C_8}}{(\log x)^{C_8}}$$

teljesül. Így az a) esethez hasonlóan létezik egy olyan C_9 konstans, melyre

$$\log \frac{x'}{x} > C_9 \left(\frac{x'}{x} - 1 \right).$$

Ebből

$$x_{n+1} \leq x' < x + C_{10} \frac{x}{(\log x)^{C_8}} = x_n + C_{10} \frac{x_n}{(\log x_n)^{C_8}}. \quad (6)$$

Így (5) és (6) miatt mind az a), mind a b) esetben az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$x_{n+1} \leq x_n + C_{11} \frac{x_n}{(\log x_n)^{C_{12}}}, \quad \text{ha } x_n \geq N.$$

Ha itt N elég nagy, úgy

$$x_{n+1} < x_n + \frac{x_n}{(\log x_n)^{C_7}}, \quad \text{ha } x_n \geq N,$$

ami bizonyítja az állítást. □

A 2.1. Állítás bizonyítása. Először megemlítyük, hogy $F(k) \leq F_{\pm}(k)$ teljesül minden $k \geq 1$ szám esetén. Ahhoz, hogy igazoljuk a $c_4^k < F(k)$ egyenlőtlenséget, vegyük észre, hogy a 3.5. Lemma miatt ebben az esetben A' kizárólag egy b nem-negatív egész különböző hatványait tartalmazza, és létezik egy olyan X pozitív egész, hogy ha $x > X$, akkor $b^x \in A'$. Így az állítás ezen részének igazolása egyszerű számolással adódik.

Most az $F_{\pm}(k) < c_5^k$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Ehhez az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a fenti jelölések megtartása mellett $A' = \{b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$. Legyen $k \geq 1$, és ha $b \geq 3$, akkor $n = b^{k-1} + b^{k-2} + \dots + b + 1$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben n bármely $n = a'_1 + \dots + a'_t$ előállítás esetén ($a'_i \in A'_{\pm}$, $i = 1, 2, \dots, t$) a $t \geq k$ egyenlőtlenség adódik. Legyen t minimális és tegyük fel, hogy $|a'_1| \geq |a'_2| \geq \dots \geq |a'_t|$. A t minimalitása miatt könnyen látható, hogy teljesülnie kell az $a'_1 = b^{k-1}$ egyenlőségnek. Legyen most $n' = n - b^{k-1}$ és alkalmazzuk a fenti eljárást n' -re, hogy megkapjuk a'_2 értékét. Innen indukciónal kapjuk, hogy $a'_1 = b^{k-1}$, $a'_2 = b^{k-2}$, $\dots$, $a'_{t-1} = b$, $a'_t = 1$. Az $n < b^k$ egyenlőtlenség felhasználásával következik, hogy $F_{\pm}(k) < n$, így ebben az esetben a $c_5 = b$ választás megfelelő. Ha $b = 2$, úgy a fenti eljárást az $n = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \dots + 1$ számra alkalmazva azonnal adódik, hogy $n < 4^k$, így az állítást beláttuk. □

A 2.1. Tétel bizonyítása. A bizonyítás során Hajdu és Tijdeman [10] 3. Tételének a gondolatmenetét követjük. A fő eltérés az, hogy most a 2.2. Tételben szereplő hézagokat használhatjuk a bizonyítás során, így általánosabb állítást igazolhatunk.

A 2.1. Tétel i) részének bizonyításához a mohó algoritmust használjuk. Tegyük fel, hogy ki akarjuk fejezni az n pozitív egész számot az A' halmaz elemeinek összegeként. Legyenek $a'_1, a'_2 \in A'$ olyan számok, melyekre $a'_1 \leq n < a'_2$ teljesül és legyen $n_1 := n - a'_1$. Ekkor a 2.2. Tétel alapján $n_1 \leq a'_2 - a'_1 <$

$\frac{a'_1}{(\log a'_1)^{C_{13}}} < \frac{n}{(\log n)^{C_{13}}}$ adódik, ahol C_{13} kizárólag A -tól függ. Ezt az eljárást n_1 -re megismételve n_2 -t kapjuk, melyre fennáll az $n_2 < \frac{n_1}{(\log n_1)^{C_{14}}}$ egyenlőtlenség. Az eljárást iterálva a fennmaradó részt mindig legalább $(\log n)^{C_{15}}$ -ed részére csökkenthetjük egészen addig, míg n_i nagyobb, mint $\exp(\sqrt{\log n})$. Amennyiben n_i kisebb, mint $\exp(\sqrt{\log n})$, úgy $n_i, n_{i+1}, \dots$ értékét minden egyes lépésben C_{16} -od részére redukáljuk, ahol a C_{16} konstans kizárólag az A halmaztól függ. Ezt egészen addig ismételhetjük, míg $(\log n_{i+j})^{C_{16}} > C_{17}$, ahol C_{17} egy csak A -tól függő konstans. Az eljárás végeztével kapjuk, hogy

$$k \leq i + j + C_{17} < \frac{\log n}{C_{15} \log \log n} + \frac{\sqrt{\log n}}{\log C_{16}} + C_{17}$$

A' -beli elem elegendő, hogy előállítsuk n -et, ami igazolja az $F(k) > k^{c_1 k}$ állítást.

A tétel ii) részének bizonyításához, meg kell vizsgálnunk az n -nél nem nagyobb pozitív egészek $\sum_{j=1}^k a'_j$, $a'_j \in A' \cup \{0\}$ alakban történő előállítását. Mivel azon $A' \cup \{0\}$ -beli elemek száma, melyek nem nagyobbak n -nél legfeljebb $(C_{18} \log n)^l$, így látható, hogy az előállított egészek száma nem több, mint $(C_{18} \log n)^{kl}$. Ha ez a szám kisebb, mint n , úgy biztosak lehetünk abban, hogy létezik olyan n -nél nem nagyobb pozitív egész szám, mely nem áll elő ilyen alakban. Ez akkor áll fenn, ha

$$kl < \frac{\log n}{\log \log n + \log C_{18}}.$$

Tegyük most fel, hogy $n > (kl)^{(1+\varepsilon)kl}$. Ekkor elég nagy x esetén a $\frac{\log x}{\log \log x + C_{18}}$ függvény monotonitásából következik, hogy

$$\frac{\log n}{\log \log n + C_{18}} > \frac{(1+\varepsilon)kl \log(kl)}{\log(kl) + \log((1+\varepsilon) \log(kl)) + C_{18}} > kl,$$

ha kl elég nagy. Ha c_2 -t kl kisebb értékeinek megfelelően választjuk, úgy az összes kl esetén fennálló $n \geq c_2(kl)^{(1+\varepsilon)kl}$ egyenlőtlenséghez jutunk. Így

$$F(k) \leq c_2(kl)^{(1+\varepsilon)kl},$$

amivel beláttuk a tétel ii) részét.

A tétel iii) részének igazolásához vizsgáljuk meg a pozitív egész számok $A'_\pm$ -beli elemek összegeként való előállítását. Legyen $H_{A,k}^*$ a 3. fejezetben bevezetett $H_{A,k}$ halmaz megfelelője, azzal a különbséggel, hogy most A' helyett $A'_\pm$ elemeit használjuk. Keressük meg a legkisebb olyan i egész számot, melyre $i > 10$ teljesül úgy, hogy $j > (\log j)^{C_5 kl \log \log \log j}$ áll fenn, ha $j \geq i$. Ekkor $i < 2(\log i)^{C_5 kl \log \log \log i}$. Ebből következik, hogy

$$\log i < C_{19} kl (\log \log i) (\log \log \log i),$$

ahonnan $\log i < C_{20}kl(\log(kl))(\log \log(kl))$ adódik valamely C_{19} és C_{20} konstansokkal. A 3.3. Lemma alapján létezik egy olyan m egész, melyre $\log i \leq \log m \leq (\log i)^{C_3}$ teljesül, úgy, hogy minden $H_{A,k}^*$ -beli reprezentáció lefedhető legfeljebb $(\log m)^{C_5kl \log \log \log m}$ modulo m maradékosztály segítségével. Az i definíciójából, illetve az $i \leq m$ egyenlőtlenségből látható, hogy ezen maradékosztályok száma kisebb, mint m , így legalább egy $n \leq m$ pozitív egész szám nem áll elő $\sum_{j=1}^k a'_j$ alakban (ahol $a'_j \in A' \cup \{0\}$). Így

$$\log n \leq \log m \leq (\log i)^{C_3} < (C_{20}kl(\log(kl))(\log \log(kl)))^{C_3} < (kl)^{c_3}$$

teljesül valamilyen c_3 konstanssal. Innen következik, hogy $F_{\pm}(k) < \exp((kl)^{c_3})$, amivel beláttuk a tétel iii) állítását is. $\square$

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom Dr. Hajdu Lajosnak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért. A diákköri dolgozat elkészítését a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 számú projekt támogatta.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.



FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Zs. Ádám, L. Hajdu, and F. Luca. Representing primes as linear combinations of pure powers. *Acta Arith.*, 138:101–107, 2009.
- [2] A. Baker. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. *Mathematika*, 13:204–216, 1966.
- [3] Cs. Bertók. Representing integers as sums or differences of general power products. *Acta. Math. Hungar.* (közlésre elfogadva).
- [4] V. S. Dimitrov and E. W. Howe. Lower bounds on the lengths of double-base representations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139:3423–3430, 2011.

- [5] P. Erdős, C. Pomerance, and E. Schmutz. Carmichael's lambda function. *Acta Arith.*, 58:365–385, 1991.
- [6] G. R. Everest. Counting the values taken by sums of S -units. *J. Number Theory*, 35:269–286, 1990.
- [7] L. Hajdu. Arithmetic progressions in linear combinations of S -units. *Periodica Math. Hungar.*, 54:175–181, 2007.
- [8] L. Hajdu and F. Luca. On the length of arithmetic progressions in linear combinations of S -units. *Arch. Math.*, 94:357–363, 2010.
- [9] L. Hajdu and R. Tijdeman. Representing integers as linear combinations of powers. *Publ. Math. Debrecen*, 79:461–468, 2011.
- [10] L. Hajdu and R. Tijdeman. Representing integers as linear combinations of power products. *Arch. Math.*, 98:527–533, 2012.
- [11] M. Jarden. and W. Narkiewicz On sums of units. *Monatsh. Math.*, 150:327–332, 2007.
- [12] M. B. Nathanson. Geometric group theory and arithmetic diameter. *Publ. Math. Debrecen*, 79:563–572, 2011.
- [13] J. L. Ramírez Alfonsín. *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford Univ. Press, 2005.
- [14] R. Tijdeman. On integers with many small prime factors. *Compos. Math.*, 26:319–330, 1973.
- [15] R. Tijdeman. On the maximal distance of integers composed of small primes. *Compos. Math.*, 28:159–162, 1974.