



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

2012.

Rugalmas kerékfelfüggesztés hatása a vontatott kerekek stabilitására

Szerző: Sykora Henrik Tamás, gépészmérnöki szak, BSc. III. évfolyam

Konzulens: Dr. Takács Dénes, tudományos munkatárs

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés.....	2
2. Egyenes pályán vontatott kerék.....	3
2.1. Mechanikai modell.....	3
2.1.1. Kinematikai modell.....	4
2.2. A mozgásegyenletek.....	5
2.3. Lineáris stabilitásvizsgálat.....	9
2.3.1. Cauchy átírás.....	9
2.3.2. Taylor sorba fejtés.....	12
2.3.3. A karakterisztikus egyenlet.....	13
2.3.4. Együtthatók vizsgálata.....	14
3. Állandó sugarú kanyaríven vontatott kerék.....	21
3.1. Mechanikai modell.....	21
3.1.1. Kinematikai modell.....	21
3.2. Mozgásegyenletek.....	23
3.3. Lineáris stabilitásvizsgálat:.....	28
3.3.1. Cauchy átírás.....	28
3.3.2. Stabilitástérképek.....	30
4. Szimulációk.....	37
4.1. Egyenes pályán vontatott kerék.....	37
4.2. Állandó sugarú köríven vontatott kerék.....	38
4.2.1. Stabil eset.....	38
4.2.2. Instabil eset.....	39
5. Összefoglalás.....	40
Irodalomjegyzék.....	41

1. BEVEZETÉS

Vontatott kerekeknél gyakran probléma az egyenes vonalú gördülésük során jelentkező stabilitásvesztés, amely az úgynevezett kerékszítáló mozgás megjelenésével jár. Ez a hétköznapi életben bevásárló kocsik, hordágyak és babakocsik önbeállós kerekeinél figyelhető meg. A felsorolt esetekben a kerékszítálás oka a kerékfelfüggesztés lágyága, míg a repülőgépek futóműve, a motorkerékpár első kereke esetén a stabilitásvesztésben a meghatározó szerepet a kerék rugalmassága játssza. Rugalmas kerék modell esetén, pusztán a kerék-talaj érintkezési tartomány pontos modellezésével is kimutathatók a kerékszítáló mozgás legfontosabb tulajdonságai [1], mint a kvázi-periodikusság, és a szubkritikusság. Egy valóságos járműdinamikai rendszer esetén olyan modell szükséges, amelyben figyelembe veszi a kerék rugalmasságát és a felfüggesztés lágyágát is, de ezeknek a modelleknek az analitikus vizsgálata nagyon bonyolult.

Mivel a bevásárlókocsiknál, hordágyaknál a kerékszítálás többnyire nem okoz semmiféle veszélyt a használat során, így ezek esetén nem is mindig törekednek a kerékszítás elkerülésére, illetve a kerékszítálás vizsgálatára jóval egyszerűbb modelleket használnak. Egy motorkerékpárnál, repülőgépnél nagyon súlyos balesetet okozhat egy váratlan stabilitásvesztés, így a kerékszítálás vizsgálata során elkerülhetetlen pontos, szabatos mechanikai modellek használata. A kerékszítálást igyekeznek csillapító szerkezetek beépítésével elkerülni, de ez nem mindig valósítható meg, így már a felfüggesztés tervezésénél gondoskodni kell a kiküszöböléséről.

Dolgozatomban a vontatórúd lágy csapágyazásának hatását vizsgálom, és a kerék rugalmasságát elhanyagolom. Modellként egy kis szabadságfokú, állandó sebességgel vontatott, a vontatórúdnál torziós viszkózus csillapítással ellátott vontatott merev kereket használok, amely egy ponton érintkezik a talajjal. A mozgásegyenleteket a Routh-Voss egyenletek [2] segítségével írom fel, melyek másodrendű, nemlineáris, közönséges differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Az egyenes vonalon egyenletesen haladó kerék lineáris stabilitását analitikus úton vizsgálom meg a Routh-Hurwitz [2] kritérium alkalmazásával. A körpályán vontatott kerék lineáris stabilitása analitikusan már nem vizsgálható, ezért numerikus módon stabilitástérképeket készítek. A csillapítás hatását csak az egyenes gördülés esetén vizsgálom. Eredményeimet szimuláción keresztül ellenőrzöm, majd összevetem az irodalomban [3] találhatóakkal.

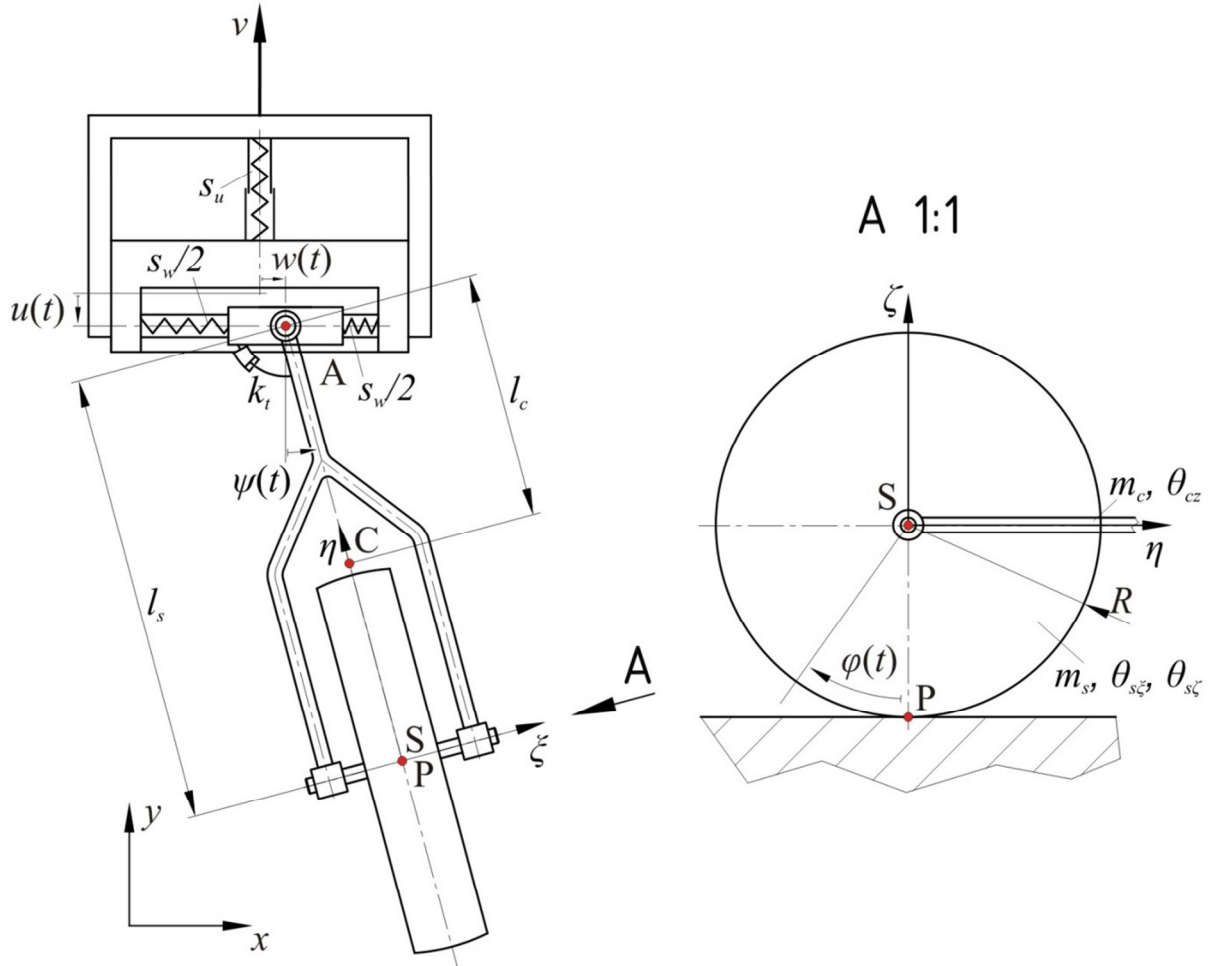
2. EGYENES PÁLYÁN VONTATOTT KERÉK

2.1. MECHANIKAI MODELL

A dolgozatomban egy 4 szabadságfokú kerékmodell dinamikai viselkedését vizsgálom. Első esetben a kerék (felfüggesztése) v állandó sebességgel halad a rajzon kijelölt irányba. A szabadságfokokat az álló (x, y, z) vonatkoztatási rendszerben állandó sebességgel, a felfüggesztéssel együtt haladó koordinátarendszerben értelmezem. A négy szabadságfok a kerék csapágyazásának y irányú relatív elmozdulása $(u(t))$, x irányú relatív elmozdulása $(w(t))$, a vontatórúd xy síkban való elfordulása $(\psi(t))$, és a kerék szögelfordulása $(\varphi(t))$.

Az általános koordinátavektor:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (1)$$



1. ábra: Egyenes vonal mentén vontatott kerék geometriai modellje

2.1.1. KINEMATIKAI MODELL

A kinematikai kényszer kimondja, hogy kerék talajjal érintkező pontjának a talajhoz képesti sebessége nulla. A talajt álló vonatkoztatási rendszernek tekintve, a vontatórúdat mozgó vonatkoztatási rendszernek választva, a kerék talajjal érintkező pontjának sebessége az alábbi alakban írható fel:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\text{Pszáll}} + \mathbf{v}_{\text{Prel}} = \mathbf{0} . \quad (2)$$

A $\mathbf{v}_{\text{Pszáll}}$ a kerék „S” súlypontjának sebessége, ez felírható az „A” pontból kiindulva ($\boldsymbol{\omega}_c$ a vontatórúd szögsebessége, részletezve a (23)-ban):

$$\mathbf{v}_{\text{Pszáll}} = \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{r}_{AS} , \quad (3)$$

ahol az „A” pont sebessége (v a vontatási sebesség):

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ v - \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4)$$

Kifejtve a (3) egyenletet:

$$\mathbf{v}_{\text{Pszáll}} = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ v - \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ l_s \sin \psi & -l_s \cos \psi & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi \\ v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (5)$$

A $\mathbf{v}_{\text{Prel}}$ a kerék „P” pontjának az „S” ponthoz képesti sebessége, ahol a $\boldsymbol{\omega}_k$ kerék rúdhoz képesti szögsebessége:

$$\mathbf{v}_{\text{Prel}} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{SP} , \quad (6)$$

kifejtve:

$$\mathbf{v}_{\text{Prel}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dot{\phi} \cos \psi & -\dot{\phi} \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{\phi} \sin \psi \\ -R\dot{\phi} \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Beírva a (2) egyenletbe az (5) és (7) egyenleteket kapunk kettő skalár kinematikai egyenletet. Ezek az egyenletek a (2) egyenlet x , y irányú skalár komponensei:

$$x: \quad \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi + R\dot{\phi} \sin \psi = 0 , \quad (8)$$

$$y: \quad v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi - R\dot{\phi} \cos \psi = 0 . \quad (9)$$

A kinematikai kényszereket felírhatjuk a következő módon:

$$\sum_{k=1}^n A_{\beta k} \dot{q}_k + A_{\beta 0} = 0 , \quad (10)$$

amely esetben a $\beta=1\dots\kappa$, és κ a skalár kinematikai egyenletek száma. Az így kapott együtthatók:

$$\begin{aligned} (\beta = 1), \quad & A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1, \quad A_{13} = l_s \cos \psi, \quad A_{14} = R \sin \psi, \quad A_{10} = 0, \\ (\beta = 2), \quad & A_{21} = -1, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = l_s \sin \psi, \quad A_{24} = -R \cos \psi, \quad A_{20} = v. \end{aligned} \quad (11)$$

2.2. A MOZGÁSEGYENLETEK

A rendszerben nem csak geometriai kényszerek, hanem kinematikai kényszerek is vannak, így a hagyományos másodfokú Lagrange¹ egyenletek nem használhatóak rá. Ennek egy kibővített változatát, a Routh-Voss egyenleteket alkalmazom, amelyek a következőképpen írhatóak fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{\beta=1}^k \mu_{\beta} A_{k,\beta}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (12)$$

ahol:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + Q_k^*. \quad (13)$$

A T a kinetikus energiát, q_k az általános koordinátákat jelöli. Az $A_{\beta,k}$ a kinematikai kényszerekből származó, a (11)-ben megadott együtthatókat jelöli, a μ_{β} pedig a Lagrange multiplikátor. A q_i az (1)-ben megadott $\mathbf{q}$ vektor i -edik vektor elemét jelenti. A Q_k^* az általános erőket jelöli, amelyeket virtuális teljesítményből számíthatunk.

A kinetikus energia két komponensre bontható: a kerék (T_s) és a vontatórúd (T_c) kinetikus energiájára:

$$T = T_s + T_c, \quad (14)$$

ahol,

$$T_s = \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v}_s|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_s^T \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\omega}_s, \quad (15)$$

és

$$T_c = \frac{1}{2} m_c |\mathbf{v}_c|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T \boldsymbol{\Theta}_c \boldsymbol{\omega}_c. \quad (16)$$

A kerék súlypontjának („S”) sebessége:

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi \\ v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

¹ Lagrange, Joseph, Louis, Comte (gróf) (1736-1813) Olasz-francia matematikus és csillagász. 1788-ban jelent meg fő műve, a Mécanique analytique (Analitikus mechanika). Napóleon grófi rangra emelte. Kiemelkedő eredményeket ért el a számelmélet, a mechanika, a Naprendszer stabilitása és az algebrai egyenletek területén.
[4]

ebből

$$|\mathbf{v}_s|^2 = v^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + l_s \dot{\psi} (2v \sin \psi + 2\dot{w} \cos \psi + l_s \dot{\psi}) - 2\dot{u}(v + l_s \dot{\psi} \sin \psi) . \quad (18)$$

A kerék forgásából származó energiát a kerék tehetetlenségi főtengelei által kijelölt koordináta-rendszerben számítom (ξ, η, ζ) . Feltételezzük, hogy a kerék ideális (hengersizmetrikus, homogén, merev). A kerék szögsebessége:

$$\mathbf{\omega}_{s_{(\xi, \eta, \zeta)}} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

A kerék tehetetlenségi nyomatéki mátrixa az „S” pontra:

$$\mathbf{\Theta}_{S_{(\xi, \eta, \zeta)}} = \begin{bmatrix} \theta_{s\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{s\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{s\zeta} \end{bmatrix} , \quad (20)$$

ahol $\theta_{s\xi} \equiv \theta_{s\eta}$.

A vontatórúd súlypontjának („C”) sebessége csupán abban különbözik a $\mathbf{v}_s$ sebességtől, hogy az „A” ponttól viszonyítva nem l_s , hanem l_c távolságra számoljuk a sebességet:

$$\mathbf{v}_c = \begin{bmatrix} \dot{w} + l_c \dot{\psi} \cos \psi \\ v - \dot{u} + l_c \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (21)$$

ebből:

$$|\mathbf{v}_c|^2 = v^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + l_c \dot{\psi} (2v \sin \psi + 2\dot{w} \cos \psi + l_c \dot{\psi}) - 2\dot{u}(v + l_c \dot{\psi} \sin \psi) . \quad (22)$$

A vontatórúd szögsebessége:

$$\mathbf{\omega}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} . \quad (23)$$

A vontatórúd tehetetlenségi nyomatéki mátrixa a vontatórúd súlypontjára („C”):

$$\mathbf{\Theta}_C = \begin{bmatrix} \theta_{cx}(t) & -D_{cxy}(t) & -D_{cxz}(t) \\ -D_{cxy}(t) & \theta_{cy}(t) & -D_{cyz}(t) \\ -D_{cxz}(t) & -D_{cyz}(t) & \theta_{cz} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ezt azért írhatjuk fel abszolút koordináta-rendszerben, mert az időtől függő tehetetlenségi tagok kiesnek a műveletek elvégzésénél. A θ_{cz} időtől független, mivel a rúd csak a z tengellyel párhuzamos tehetetlenségi főtengele körül forog el.

A fentiek alapján a kinetikus energia a következőképpen írható fel (egyszerűsítések után):

$$T = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(m_s + m_c)}_{:= M_0} (v^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 - 2v\dot{u}) + \underbrace{2(m_s l_s + m_c l_c)}_{:= M_1} ((v - \dot{u}) \sin \psi + \dot{w} \cos \psi) \dot{\psi} + \underbrace{(m_s l_s^2 + m_c l_c^2 + \theta_{s\zeta} + \theta_{c\zeta})}_{:= M_2} \dot{\psi}^2 + \theta_{s\xi} \dot{\phi}^2 \right) \quad (25)$$

Egyszerűsítsük tovább a kinetikus energia felírását a (25) egyenletben bevezetett M_0 , M_1 , M_2 beírásával:

$$T = \frac{1}{2} (M_0 (v^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 - 2v\dot{u}) + M_1 ((v - \dot{u}) \sin \psi + \dot{w} \cos \psi) \dot{\psi} + M_2 \dot{\psi}^2 + \theta_{s\xi} \dot{\phi}^2) . \quad (26)$$

A potenciál függvény (csak a rugókban tárolódik energia):

$$U = \frac{1}{2} (s_u u^2 + s_w w^2) . \quad (27)$$

A disszipatív potenciál (csillapítás csak az „A” pontban, a vontatórúd elfordulásának csillapítására van):

$$D = \frac{1}{2} k_t \dot{\psi}^2 . \quad (28)$$

A (12), (13) egyenletbe behelyettesítve, a deriválásokat elvégezve, a Routh-Voss egyenletek a következőképpen néznek ki:

q_1 :

$$M_0 \ddot{u} - \frac{1}{2} M_1 (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) = -s_u u - \mu_2 , \quad (29)$$

q_2 :

$$M_0 \ddot{w} + \frac{1}{2} M_1 (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) = -s_w w + \mu_1 , \quad (30)$$

q_3 :

$$\frac{1}{2} M_1 (\ddot{w} \cos \psi - \ddot{u} \sin \psi) + M_2 \ddot{\psi} = -k_t \dot{\psi} + \mu_1 l_s \cos \psi + \mu_2 l_s \sin \psi , \quad (31)$$

q_4 :

$$\theta_{s\xi} \ddot{\phi} = \mu_1 R \sin \psi - \mu_2 R \cos \psi . \quad (32)$$

A kinematikai kényszerekből ((8), (9)) felírható a többi általános koordináta segítségével a kerék gurulásának szögsebessége:

$$\dot{\phi} = -\frac{\dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi}{R \sin \psi}, \quad (33)$$

és

$$\dot{\phi} = \frac{v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi}{R \cos \psi}. \quad (34)$$

A $\dot{\phi}$ -ot a továbbiakban a (34) egyenlettel helyettesítem, mert az $\psi = 0$ esetén is értelmezett, és a lineáris stabilitásvizsgálathoz erre lesz majd szükség. Ezt idő szerint deriválva megkapjuk a kerék gurulásának szöggyorsulását:

$$\ddot{\phi} = \frac{(v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi) \ddot{\psi} \tan \psi + l_s \ddot{\psi} \sin \psi + l_s \dot{\psi}^2 \cos \psi - \ddot{u}}{R \cos \psi}. \quad (35)$$

Ha a (33) és (34) egyenleteket egyenlővé tesszük, kifejezhető $\dot{w}$:

$$\dot{w} = -(v - \dot{u}) \tan \psi - \frac{l_s \dot{\psi}}{\cos \psi}. \quad (36)$$

Ha a (36) egyenletet idő szerint deriváljuk, megkapjuk a $\ddot{w}$ -t:

$$\ddot{w} = -\frac{(v - \dot{u})}{\cos^2 \psi} \ddot{\psi} + \ddot{u} \tan \psi - l_s \ddot{\psi} \frac{1}{\cos \psi} - l_s \dot{\psi}^2 \frac{\tan \psi}{\cos \psi}. \quad (37)$$

Kifejezzük a μ_1 -t a (30) egyenletből:

$$\mu_1 = M_0 \ddot{w} + \frac{1}{2} M_1 (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) + s_w w, \quad (38)$$

és a μ_2 -t a (29) egyenletből:

$$\mu_2 = -M_0 \ddot{u} + \frac{1}{2} M_1 (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) - s_u u. \quad (39)$$

Most a (31) és (32) egyenletekbe behelyettesítjük a Lagrange multiplikátorokat ((38), (39)), és kiküszöböljük $\dot{w}$ -t a (36), $\ddot{w}$ -t a (37) és a $\ddot{\varphi}$ -t a (35) egyenletek segítségével. Így a következő mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} & (M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2) \ddot{\psi} + (M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s) \dot{\psi}^2 \tan \psi \\ & + \left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - \dot{u}}{\cos \psi} \right) \dot{\psi} - s_w l_s w \cos \psi + s_u l_s u \sin \psi = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} \right) \ddot{u} - \left(\frac{\theta_{s\xi} + R^2 M_0}{R^2 \cos^2 \psi} l_s \sin \psi \right) \dot{\psi} \\ & - \left(\frac{\theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} l_s + \frac{M_1}{2 \cos \psi} + M_0 l_s \frac{\tan^2 \psi}{\cos \psi} \right) \dot{\psi}^2 \\ & - \left(\frac{\theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} + \frac{M_0}{\cos^2 \psi} \right) (v - \dot{u}) \dot{\psi} \tan \psi + s_u u + s_w w \tan \psi = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{w} = -(v - \dot{u}) \tan \psi - \frac{l_s \dot{\psi}}{\cos \psi}, \quad (42)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi}{R \cos \psi}. \quad (43)$$

A négy egyenlet közül kettő ((40), (41)) másodrendű differenciálegyenlet, melyek a rendszer dinamikai viselkedését írják le. A másik kettő (42), (43), elsőrendű differenciálegyenletek, melyek a rendszer kinematikai kényszerei. Az utolsó egyenlettől (43) nem függ a másik három, ezért az a további vizsgálatokhoz nem szükséges, elhagyható (φ ciklikus koordináta).

2.3. LINEÁRIS STABILITÁSVIZSGÁLAT

2.3.1. CAUCHY² ÁTÍRÁS

A további vizsgálatokhoz vezessünk be egy $\mathbf{x}$ vektort amely a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \dot{u} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

² Cauchy, Augustin Louis (1789-1857) Francia matematikus. 18 éves korában kiváló eredménnyel fejezte be tanulmányait az École Polytechnique intézetben, 27 éves korától a Francia Akadémia tagja. 24 éves korától Lagrange és Laplace hatására matematikával foglalkozott, és jelentős eredményeket ért el a differenciál elméletében. Többek között megalapozta a síkáramlások leírására is használt komplex függvénytant és lefektette a rugalmasságtan matematikai alapjait. [4]

Ezt idő szerint deriválva megkapjuk az $\dot{\mathbf{x}}$ vektort, melynek öt koordinátája közül az első kettő az $\mathbf{x}$ vektor utolsó két koordinátája, a harmadikat a (42) egyenlet írja le, az utolsó kettő mennyiséget a (40), (41) egyenletekből fejezzük ki: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

A (40), (41) egyenletek felírhatóak mátrixos formában, a következőképpen:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{c} , \quad (45)$$

ahol:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_2 + M_0 l_s^2 - M_1 l_s \\ \frac{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} & -\frac{\theta_{s\xi} + R^2 M_0}{R^2 \cos^2 \psi} l_s \sin \psi \end{bmatrix} , \quad (46)$$

és

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -(M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s) \dot{\psi}^2 \tan \psi - \left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - \dot{u}}{\cos \psi} \right) \dot{\psi} + s_w l_s w \cos \psi - s_u l_s u \sin \psi \\ \left(\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2 \sin \psi}{R^2 \cos^3 \psi} l_s + \frac{M_1}{2 \cos \psi} \right) \dot{\psi}^2 + \left(\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2}{R^2 \cos^2 \psi} \right) (v - \dot{u}) \dot{\psi} \tan \psi - s_u u - s_w w \tan \psi \end{bmatrix} . \quad (47)$$

Innen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{c} . \quad (48)$$

A (46) mátrixot invertálva:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l_s \sin \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} & \frac{R^2 \cos^2 \psi}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} \\ \frac{1}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} & 0 \end{bmatrix} . \quad (49)$$

A (47), (49) egyenleteket behelyettesítve a (48) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & - \left(\frac{s_u R^2 \cos^2 \psi}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} + \frac{s_u l_s^2 \sin^2 \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \right) u + \left(\frac{s_w l_s^2 \sin 2\psi}{2(M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2)} - \frac{s_w R^2 \sin 2\psi}{2(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} \right) w \\ & + \left(\frac{\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2 \sin \psi}{R^2 \cos^3 \psi} l_s + \frac{M_1}{2 \cos \psi}}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} R^2 \cos^2 \psi - \frac{\left(M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s \right) l_s \sin \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \tan \psi \right) \dot{\psi}^2 \\ & + \left(\frac{\left(\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2}{R^2 \cos^2 \psi} \right) (v - \dot{u})}{2(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} R^2 \sin 2\psi - \frac{\left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - \dot{u}}{\cos \psi} \right)}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} l_s \sin \psi \right) \dot{\psi} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & - \frac{s_u l_s \sin \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} u + \frac{s_w l_s \cos \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} w \\ & - \frac{\left(M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s \right) \tan \psi}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \dot{\psi}^2 - \frac{\left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - \dot{u}}{\cos \psi} \right)}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (51)$$

Beírva (36), (50), (51) egyenleteket az $\dot{\mathbf{x}}$ vektorba és a változókat az $\mathbf{x}$ vektor koordinátáira átírva, az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= -(v - x_4) \tan x_2 - \frac{l_s x_5}{\cos x_2} \\ \dot{x}_4 &= - \left(\frac{s_u R^2 \cos^2 x_2}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} + \frac{s_u l_s^2 \sin^2 x_2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \right) x_1 \\ &+ \left(\frac{s_w l_s^2 \sin 2x_2}{2(M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2)} - \frac{s_w R^2 \sin 2x_2}{2(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} \right) x_3 \\ &+ \left(\frac{\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2 \sin x_2}{R^2 \cos^3 x_2} l_s + \frac{M_1}{2 \cos x_2}}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} R^2 \cos^2 x_2 - \frac{\left(M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s \right) l_s \sin x_2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \tan x_2 \right) x_5^2 \\ &+ \left(\frac{\left(\frac{\theta_{s\xi} + M_0 R^2}{R^2 \cos^2 x_2} \right) (v - x_4)}{2(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} R^2 \sin 2x_2 - \frac{\left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - \dot{u}}{\cos x_2} \right)}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} l_s \sin x_2 \right) x_5 \\ \dot{x}_5 &= - \frac{s_u l_s \sin x_2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} x_1 + \frac{s_w l_s \cos x_2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} x_3 \\ &- \frac{\left(M_0 l_s^2 - \frac{1}{2} M_1 l_s \right) \tan x_2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} x_5^2 - \frac{\left(k_t - \frac{1}{2} (M_1 - 2M_0 l_s) \frac{v - x_4}{\cos x_2} \right)}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} x_5 \end{aligned} \quad (52)$$

Az x_i az $\mathbf{x}$ vektor i -edik elemét jelöli a (44)-ben megadott módon. Ezekre az átalakításokra a lineáris stabilitásvizsgálat miatt volt szükség, melynek menetét a következő fejezetben ismertetem.

2.3.2. TAYLOR³ SORBA FEJTÉS

Az első lépés az, hogy a stacionárius megoldás (matematikai egyensúlyi helyzet - $\mathbf{x}_0$) körül Taylor sorba fejtjük az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ -et, és csak az elsőrendű tagban szereplő Jacobi mátrixot vizsgáljuk:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{x}_0 + \mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + HOT . \quad (53)$$

A *HOT* (Higher Order Terms) a magasabb rendű tagokat jelöli, $\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0}$ az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi mátrixa az $\mathbf{x}_0$ pedig a következő:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ \psi_0 \\ w_0 \\ \dot{u}_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Ez a rendszer triviális megoldása, egy egyenes pályán való gördülés, ahol:

$$\dot{u} = 0, \dot{w} = 0, \dot{\psi} = 0, \text{ így az } u \equiv 0, w \equiv 0, \psi \equiv 0 \text{ és } \varphi = \frac{v}{R}t + \varphi_0 .$$

A Jacobi mátrix, ahol az f_i az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor i -edik eleme:

$$\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{array} \right]_{5 \times 5} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \quad (55)$$

A differenciál-egyenletrendszer Jacobi mátrixa $\mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -v & 0 & 0 & -l_s \\ -\frac{s_u R^2}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_s s_w}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} & 0 & \frac{-k_t + \frac{1}{2} M_1 v - M_0 l_s v}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

³Taylor, Brook (1685-1731) Angol matematikus. Matematikai analízissel foglalkozott, legjelentősebb eredménye a Taylor-tétel, amely a függvények hatványsorba fejtését fogalmazza meg. Akusztikai vizsgálatain során a rezgő húrok alakját, valamint a húr által keltett hang magasságát vizsgálta. Megalapozta a véges differenciák módszerét és a lineáris perspektíva elméletét. [8]

2.3.3. A KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

A karakterisztikus egyenlet a következő módon kapható meg:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}) = 0, \quad (57)$$

amely egy ötödfokú polinommal bontható ki:

$$\begin{aligned} & \lambda^5 + \underbrace{\left(\frac{k_t - \frac{1}{2} M_1 v + M_0 l_s v}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} \right)}_{= a_4} \lambda^4 + \underbrace{\left(\frac{s_w l_s^2}{M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2} + \frac{s_u R^2}{M_0 R^2 + \theta_{s\xi}} \right)}_{= a_3} \lambda^3 \\ & + \underbrace{\left(\frac{\left(k_t s_u + \left(-\frac{1}{2} M_1 + M_0 l_s \right) s_u + M_0 l_s s_w \right) v}{(M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2)(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} \right)}_{= a_2} \lambda^2 \\ & + \underbrace{\left(\frac{l_s^2 R^2 s_u s_w}{(M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2)(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} \right)}_{= a_1} \lambda + \underbrace{\left(\frac{l_s R^2 s_u s_w v}{(M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2)(M_0 R^2 + \theta_{s\xi})} \right)}_{= a_0} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Az (25) egyenletben bevezetett tehetetlenségi mennyiségeket visszahelyettesítve:

$$M_2 - M_1 l_s + M_0 l_s^2 = \theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2, \quad (59)$$

$$-\frac{1}{2} M_1 + M_0 l_s = m_c (l_s - l_c). \quad (60)$$

Így az együtthatók:

$$\begin{aligned} a_5 &= 1 \\ a_4 &= \frac{k_t + m_c (l_s - l_c) v}{m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{s\xi} + \theta_{cz}} \\ a_3 &= \frac{s_w l_s^2}{\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2} + \frac{s_u R^2}{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}} \\ a_2 &= \frac{(k_t s_u + (m_c (l_s - l_c) s_u + (m_s + m_c) l_s s_w) v) R^2 + l_s s_w \theta_{s\xi} v}{(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2)((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi})} \\ a_1 &= \frac{l_s^2 R^2 s_u s_w}{(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2)((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi})} \\ a_0 &= \frac{l_s R^2 s_u s_w v}{(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2)((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi})} \end{aligned} \quad (61)$$

2.3.4. EGYÜTTHATÓK VIZSGÁLATA

A stabilitásvizsgálatra a Liénard⁴-Chipart kritériumot alkalmazom ([2] – 199. oldal). Ez azt mondja ki, hogy ha a az együtthatók mind pozitívak:

$$a_i > 0, i = 0...5, \quad (62)$$

és:

$$D_{n-1} > 0, D_{n-3} > 0, \dots, \quad (63)$$

akkor az egyenletnek olyan komplex számok a megoldásai, melyben a valós rész negatív. Ekkor a rendszer megoldása aszimptotikusan stabil, tehát tart az egyensúlyi helyzetéhez. Az n a karakterisztikus egyenlet fokszáma, D_j pedig az egyenlet együtthatóinak j -edik rendű Hurwitz⁵ determinánsát jelöli:

$$D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \dots \quad (64)$$

A továbbiakban külön vizsgáljuk a csillapítatlan ($k_t = 0$), és a csillapított ($k_t \neq 0$) eseteket.

2.3.4.1. Csillapítatlan eset

Először vizsgáljuk az együtthatókat. Az $a_5 = 1$ minden esetben, tehát az mindig pozitív. Az a_4 :

$$a_4 = \frac{m_c (l_s - l_c) v}{m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{s\zeta} + \theta_{c\zeta}} > 0. \quad (65)$$

Ebben az esetben elég csupán a számlálót vizsgálni, mivel a nevező a benne lévő mennyiségek fizikai jelentéséből adódóan, mindig pozitív. A számláló:

$$m_c (l_s - l_c) v > 0. \quad (66)$$

Ha a v sebesség pozitív előjelű, akkor ez teljesül abban az esetben, ha

$$l_s > l_c. \quad (67)$$

Ez azt jelenti, hogy a vontatórúd tömegközéppontjának a kerék tömegközéppontja, és a vontatórúd csapágyszáma közé kell esnie.

Az a_3 :

$$a_3 = \frac{s_w l_s^2}{\theta_{c\zeta} + \theta_{s\zeta} + m_c (l_s - l_c)^2} + \frac{s_u R^2}{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\zeta}} > 0. \quad (68)$$

⁴ Liénard, Alfred, Marie (1869- 1958) Francia fizikus és mérnök. Főbb kutatási területei voltak az elektromosság, mágnesesség és a mechanika. [6]

⁵ Hurwitz, Adolf (1859- 1919) Német matematikus. Legfontosabb eredményeit a Riemann-felületek vizsgálatának területén, a komplex függvénytanban és az algebrai számelméletben érte el. Az ő nevéhez is kötődik a rendszerek stabilitásának feltétele is, a Routh-Hurwitz kritérium. [7]

Ez nem ad új kritériumot, mivel ez akkor pozitív, ha a rugómerevségek pozitívak, és ez mindig igaz.

Az a_2 :

$$a_2 = \frac{v \left((m_c (l_s - l_c) s_u + (m_s + m_c) l_s s_w) R^2 + l_s s_w \theta_{s\xi} \right)}{\left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2 \right) \left((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi} \right)} > 0 \quad (69)$$

Ha a (67) feltétel teljesül, akkor ez biztosan pozitív akkor, ha a v sebesség pozitív előjelű. Ekkor l_s -re a következő feltétel kell teljesüljön:

$$l_s > \frac{l_c m_c s_u R^2}{m_c s_u R^2 + (m_c + m_s) s_w R^2 + s_w \theta_{s\xi}} . \quad (70)$$

Ennél a (67) kritérium pozitív l_c esetén erősebb, mivel ez mindig kisebb, mint l_c , mert mindig nagyobb számmal osztjuk az l_c -t, mint szorozzunk.

Az a_1 :

$$a_1 = \frac{l_s^2 R^2 s_u s_w}{\left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2 \right) \left((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi} \right)} > 0 \quad (71)$$

Ez sem ad új kritériumot, mert mindig pozitív.

Az a_0

$$a_0 = \frac{l_s R^2 s_u s_w v}{\left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2 \right) \left((m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi} \right)} > 0 \quad (72)$$

Az a_0 akkor pozitív, ha az l_s és a v azonos előjelű, tehát a kerék „S”súlypontja a haladási irányt tekintve a csapágyazás mögött van. Pozitív l_c esetén ez a kritérium a (67) (70) feltétel teljesülése esetén biztos, hogy igaz.

Most vizsgáljuk a Hurwitz determinánsokat:

$$D_{n-1} > 0, D_{n-3} > 0 . \quad (73)$$

A D_2 :

$$D_2 = \frac{-v \left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} - m_c l_c (l_s - l_c) \right) l_s R^4 s_u^2 s_w}{\left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c)^2 \right)^2 \left((m_c + m_s) R^2 + \theta_{s\xi} \right)^2} > 0 . \quad (74)$$

Pozitív v esetén a következő igaz:

$$l_c (l_s - l_c) > \frac{\theta_{cz} + \theta_{s\zeta}}{m_c} \quad (75)$$

Mivel a jobboldal pozitív, ezért a baloldalnak is egy pozitív számnak kell lennie, még hozzá nagyobbak, mint a jobb oldalnak. Ez úgy lehetséges, hogy az l_c és az $l_s - l_c$ különbség is pozitív, továbbá a kettő szorzata nagyobb, mint a jobb oldal. Ez akkor teljesül, ha a következő igaz l_s -re:

$$l_s > \frac{(\theta_{cz} + \theta_{s\zeta} + m_c l_c^2)}{m_c l_c} . \quad (76)$$

Ez a kritérium erősebb, mint a (67)-ben megfogalmazott, mert a számláló mindig nagyobb értékű, mint a nevező. Továbbá láthatjuk azt is, hogy az l_s -re vonatkozó erős kritériumok közül ((67), (70), (76)) egyik sem függ a sebesség nagyságától, csupán az irányától. A csillapított esetben ez már nem így lesz.

Negatív l_c esetén azért nem teljesül a (75) egyenlet, mert az $l_s - l_c$ különbség nem lesz negatív, mert az l_s -nek a (72) egyenlet értelmében a v -hez hasonlóan, szintén pozitívnak kell lennie, és ekkor az $l_s - l_c$ különbség csak pozitív lehet. Ha a v sebesség negatív előjelű, akkor a relációs jelek megfordulnak, és az l_s és l_c is előjelet vált. Ez azzal egyenértékű, mintha a koordináta-rendszer irányait megfordítottuk volna.

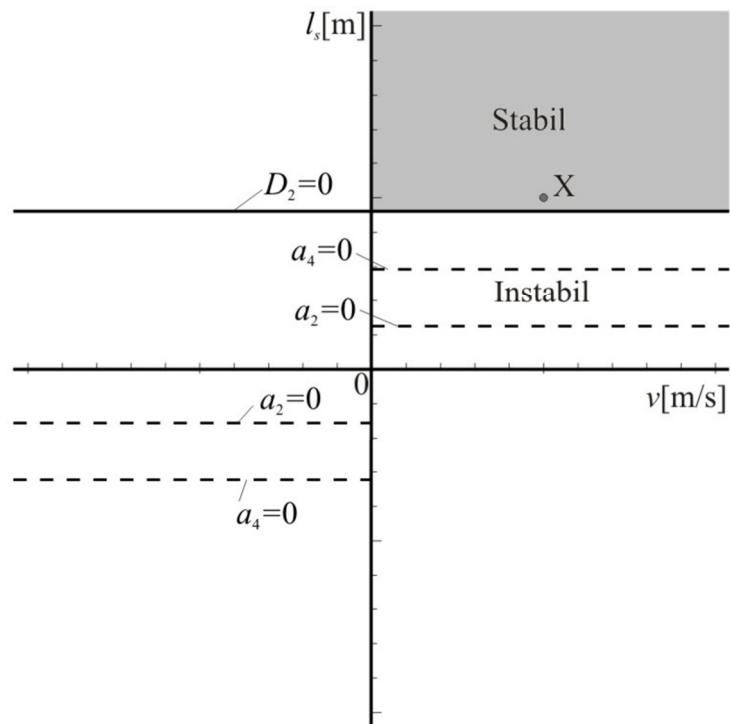
A D_4 :

$$D_4 = 0 . \quad (77)$$

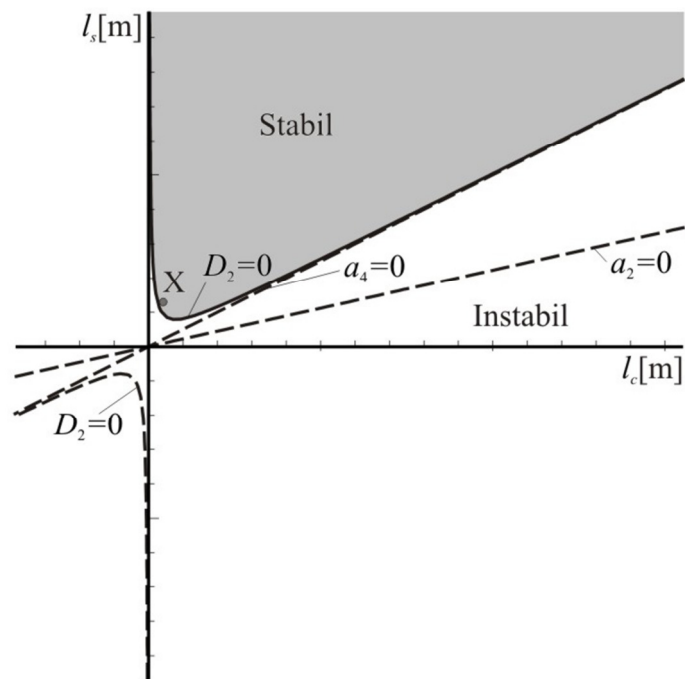
Ez azt jelenti, hogy van olyan szabadsági foka a rendszernek, amelyre a rendszer sosem lesz aszimptotikusan stabil. A 4.1. fejezetben lévő numerikus szimulációkból láthatjuk, hogy ez az $u(t)$ általános koordináta. Míg a többi koordináta aszimptotikusan csillapodó, addig ez utóbbi egy állandó amplitúdójú rezgést mutat. Az $u(t)$ koordinátának az időbeli lefutása nincs hatással a másik két koordináta időbeli lefutására egyenes gördülés esetén, így ennek a feltételnek a hatásától a stabilitásvizsgálatnál eltekintünk.

Ha ezt összehasonlítjuk egy irodalomban fellelhető hasonló modellel, melynél az „A” pontnak kizárólag oldalirányú elmozdulása lehetséges (most w), láthatjuk, hogy az így kapott stabilitási kritérium - a (77)-ben kapott feltételtől eltekintve - megegyezik azzal ([1] – 28, 35. oldal, [3]). Ez alapján elmondható, hogy egyenes gördülésnél a lineáris stabilitás nem függ a felfüggesztés menetiránnyal párhuzamos merevségétől, sőt egyáltalán nem függ a felfüggesztés merevségétől, mindaddig, amíg van felfüggesztés, azaz $s_u, s_w > 0$.

2.3.4.2. Csillapítatlan eset stabilitástérképei



2. ábra: A csillapítatlan rendszer v - l_s stabilitástérképe



3. ábra: A csillapítatlan rendszer l_c - l_s stabilitástérképe

A 3. ábra azt mutatja meg, hogy adott paraméterek mellett hol legyen a vontatórúd súlypontja, hogy a lehető legrövidebb vontatási hossz adódjon ki. A rövidebb vontatási hosszak a kisebb helyigény mellett további előnye, hogy közelebb van a talajjal érintkező pontban ébredő z irányú erő hatásvonala az „A”-val jelölt (1. ábra) vontatórúd csapágyszárhoz, így kisebb az ott ébredő járulékos nyomaték is.

Ezt a minimumpontot a következő módon határozhatjuk meg:

A kritikus l_{skr} hossz – amikor még éppen stabil a kerék – felírható a (76) összefüggés segítségével:

$$l_{skr} = f(l_c) = \frac{(\theta_{cz} + \theta_{s\zeta} + m_c l_c^2)}{m_c l_c} \quad (78)$$

Ennek l_c szerinti minimuma ott van, ahol $\frac{\partial}{\partial l_c} f(l_c) = 0$ feltétel teljesül:

$$l_c = \sqrt{\frac{\theta_{cz} + \theta_{s\zeta}}{m_c}} \quad (79)$$

Mivel a θ_{cz} nem független az l_c -től, ezért a kritikus hosszt iterációval határozhatjuk meg, de ennek konvergenciája további vizsgálatokat igényel. Sajnos a sokféle vontatórúd kialakítás miatt nem lehet konkrét összefüggést adni θ_{cz} és l_c kapcsolatára, de egy optimalizálási módszert érdemes lenne kidolgozni, amely akár az ipari gyakorlatban is jól hasznosítható.

A stabilitástérképeken „X”-szel jelölt pont a 4.1. fejezetben lévő szimulációhoz tartozó paraméterpárosokat jelöli, ha a többi paramétert a (147)-ben megadott szerint választjuk.

2.3.4.3. Csillapított eset

Itt is először az együtthatókat vizsgáljuk. Az $a_5 = 1$ változatlan. Az a_4 :

$$a_4 = \frac{k_t + m_c (l_s - l_c) v}{m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{s\zeta} + \theta_{cz}} > 0. \quad (80)$$

A nevező mindig pozitív, így elég a számlálót vizsgálni, melyre igaz, hogy:

$$k_t + m_c (l_s - l_c) v > 0. \quad (81)$$

Pozitív v sebesség esetén ez akkor teljesül, ha:

$$l_s > l_c - \frac{k_t}{m_c v} \quad (82)$$

Az a_3 nem függ a csillapítástól, így ugyanolyan hatással van a csillapított rendszerre, mint a csillapítatlanra volt. Nem ad nekünk újabb kritériumot, mivel akkor pozitív, ha rugómerevségek pozitívak, és ez továbbra is biztos, hogy teljesül.

Az a_2 -nek csupán a számlálója változik, így elég csupán azt vizsgálni (a nevező mindig pozitív):

$$\left(k_t s_u + (m_c (l_s - l_c) s_u + (m_s + m_c) l_s s_w) v\right) R^2 + l_s s_w \theta_{s\xi} v > 0 . \quad (83)$$

Ez akkor teljesül, hogy ha $v > 0$ esetén l_s -ről elmondhatjuk, hogy:

$$l_s > \frac{(l_c m_c s_u v - k_t s_u) R^2}{v \left((m_c s_u + (m_c + m_s) s_w) R^2 + s_w \theta_{s\xi} \right)} . \quad (84)$$

Az a_1 és az a_0 sem függ a csillapítástól. Az a_1 mindig pozitív, az a_0 továbbra is akkor nagyobb nullánál ha v és l_s azonos előjelű.

Most vizsgáljuk a Hurwitz determinánsokat:

$$D_4 = 0 \quad (85)$$

A D_4 továbbra is minden esetben 0.

$$D_2 = \frac{l_s R^4 s_u^2 s_w \left(k_t l_s - v (\theta_{cz} + \theta_{s\xi} - m_c l_c (l_s - l_c)) \right)}{\left(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c (l_s - l_c) \right)^2 \left((m_c + m_s) R^2 + \theta_{s\xi} \right)^2} > 0 \quad (86)$$

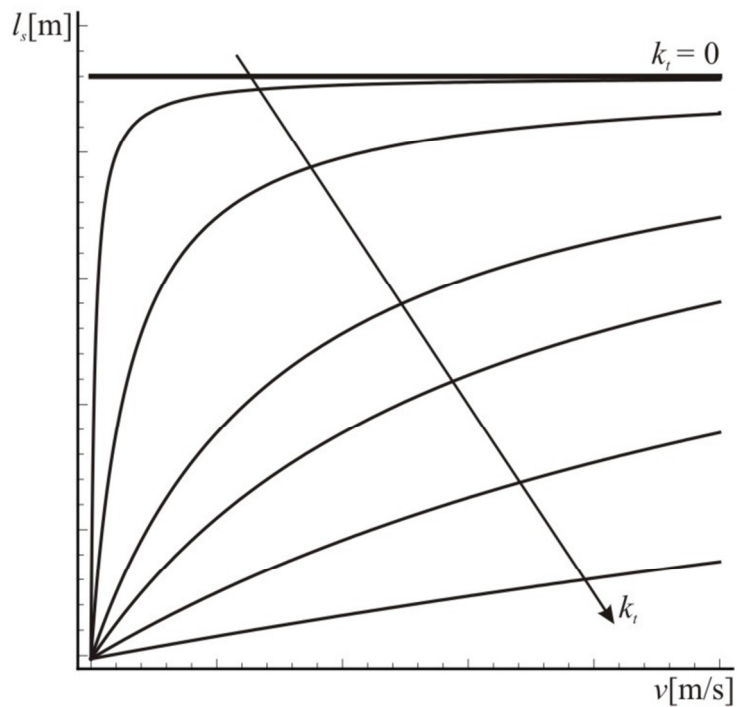
Ez akkor teljesül, ha l_s -re a következő igaz:

$$l_s > \frac{(\theta_{cz} + \theta_{s\xi} + m_c l_c^2) v}{k_t + m_c l_c v} \quad (87)$$

Láthatjuk, hogy az l_s -re kapott kritériumokat minden esetben gyengíti a csillapítás.

2.3.4.4. Csillapított eset stabilitástérképe

A csillapított esetben csak a D_2 szolgáltatott stabilitási kritériumot ábrázolom, mert ebben az esetben is ez a legerősebb kritérium. A görbektől fölfelé az adott csillapításhoz tartozó stabil tartomány található. A nyíl a paraméter – az „A” pontban található torziós csillapítási tényező – növekedési irányát mutatja.

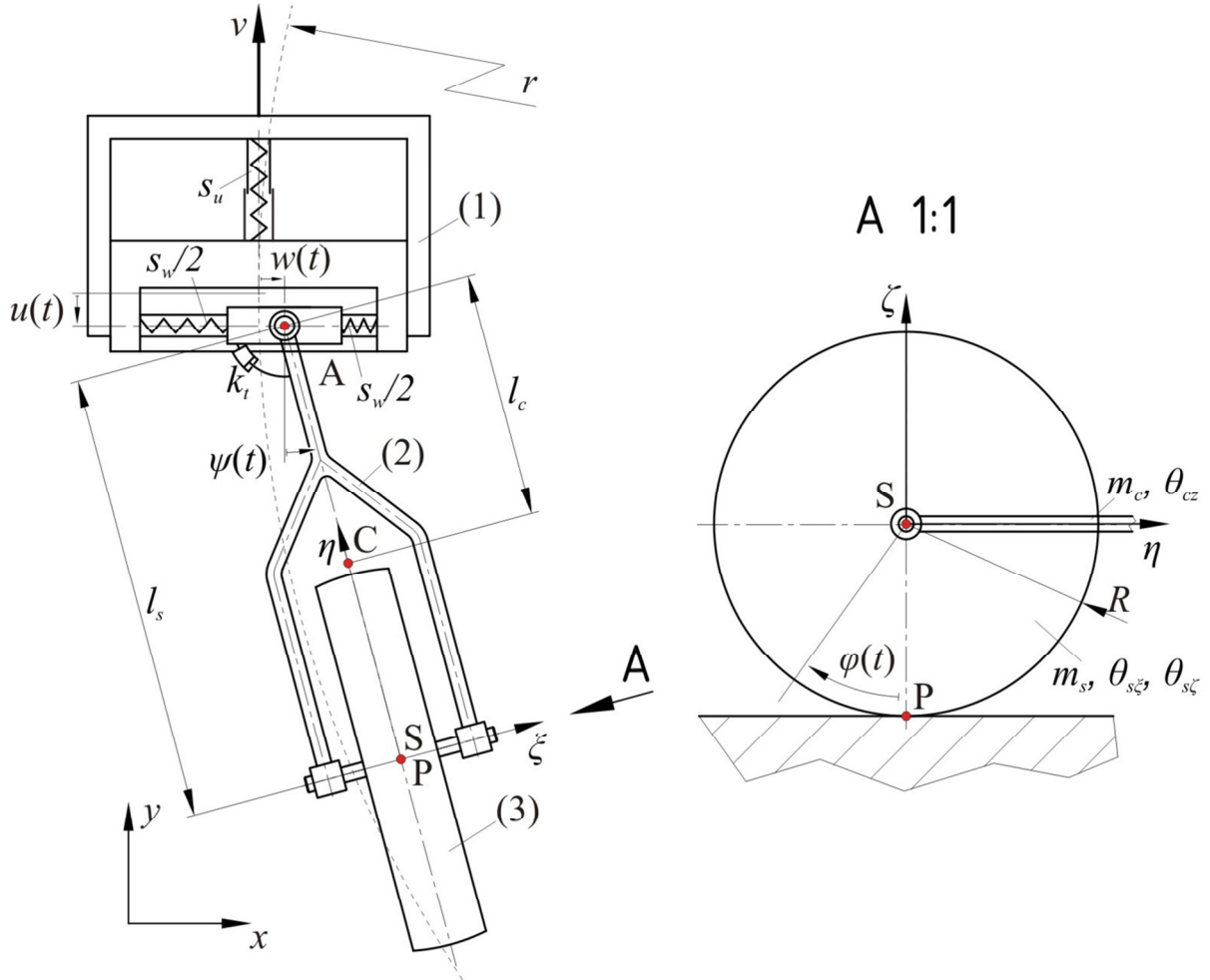


4. ábra: D_2 stabilitási határok csillapított esetben

3. ÁLLANDÓ SUGARÚ KANYARÍVEN VONTATOTT KERÉK

3.1. MECHANIKAI MODELL

Ebben az esetben a kerék egy állandó sugarú körív mentén van vontatva. Ezt sem abszolút koordinátarendszerben, hanem egy relatív rendszerben vizsgáljuk. Ez esetben a relatív koordinátarendszer origója az r sugarú kanyarív görbületi középpontjában van, melyet nevezzünk el „O” pontnak, és ω_{10} szögsebességgel forog. Ebben az esetben is az (1)-ben megadott általános koordinátavektort használom a szabadságfokok leírására.



5. ábra: Köríven vontatott kerék geometriai modellje

3.1.1. KINEMATIKAI MODELL

Ez esetben a kinematikai kényszeregyenlet a (2) képest a következőképpen módosul:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P10} + \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{v}_{P32} = \mathbf{0} . \quad (88)$$

A $\mathbf{v}_{P10}$ a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{v}_{P10} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{OS} . \quad (89)$$

Ahol:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{0} , \quad (90)$$

$$\mathbf{r}_{OS} = \begin{bmatrix} -r + w + l_s \sin \psi \\ -u - l_s \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (91)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{r} \end{bmatrix} , \quad (92)$$

ahol a v a kanyarodás kerületi sebessége, r a pálya sugara. A műveleteket elvégezve:

$$\mathbf{v}_{P10} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{r}(l_s \cos \psi + u) \\ v - \frac{v}{r}(l_s \sin \psi + w) \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (93)$$

A $\mathbf{v}_{P21}$ a kerék „S” súlypontjának relatív sebessége az (1) vonatkoztatási rendszerhez képest:

$$\mathbf{v}_{P21} = \mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS} , \quad (94)$$

ahol az „A” pont sebessége:

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ -\dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (95)$$

Kifejtve a (94) egyenletet:

$$\mathbf{v}_{P21} = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ l_s \sin \psi & -l_s \cos \psi & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi \\ -\dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (96)$$

A $\mathbf{v}_{P32}$ a kerék „P” pontjának az „S” ponthoz képesti sebessége. Ez a (6) összefüggéssel megegyező módon számítható, melynek végeredménye:

$$\mathbf{v}_{P32} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dot{\phi} \cos \psi & -\dot{\phi} \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{\phi} \sin \psi \\ -R\dot{\phi} \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (97)$$

Beírva a (88) egyenletbe a (93), (96) és (97) egyenleteket kapunk kettő kinematikai kényszert. Ezek a kényszerek a (88) egyenlet x , y irányú skalár komponensei:

$$x: \quad -\frac{v}{r}(l_s \cos \psi + u) + \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi + R\dot{\phi} \sin \psi = 0, \quad (98)$$

$$y: \quad v - \frac{v}{r}(l_s \sin \psi + w) - \dot{u} + l_s \dot{\psi} \sin \psi - R\dot{\phi} \cos \psi = 0. \quad (99)$$

Ezt ha a (10) egyenletben történő alakba írjuk át, akkor a következőt kapjuk együtthatóknak:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, & A_{12} &= 1, & A_{13} &= l_s \cos \psi, & A_{14} &= R \sin \psi, & A_{10} &= -\frac{v}{r}(l_s \cos \psi + u), \\ A_{21} &= -1, & A_{22} &= 0, & A_{23} &= l_s \sin \psi, & A_{24} &= -R \cos \psi, & A_{20} &= -\frac{v}{r}(l_s \sin \psi + w). \end{aligned} \quad (100)$$

3.2. MOZGÁSEGYENLETEK

Ismét a Routh⁶-Voss egyenletekkel való felírasmódot alkalmazom:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{\beta=1}^k \mu_{\beta} A_{k,\beta}, \quad (101)$$

ahol:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + Q_k^*. \quad (102)$$

Itt a T a rendszer a forgó koordinátarendszerbeli relatív kinetikus energiáját jelöli, q_k az általános koordinátákat jelöli. A Q_k^* a virtuális teljesítményből számítható általános erőket jelöli, melyek ebben az esetben a szállító-, és Coriolis⁷ erőkből számítható. Az $A_{\beta,k}$ a (100)-ban megadott együtthatók. A többi jelölés megegyezik a (12), (13) egyenleteknél használtakkal.

A kinetikus energiát ebben az esetben is felbontjuk a kerék és a vontatórúd kinetikus energiájára, a (14) szerint. A (15), (16) egyenletek alapján írhatóak fel az energiakomponensek. A forgásból származó energia a (19) (20), és (23) (24) egyenletek alapján áll össze. A $|\mathbf{v}_s|^2$ a (96) egyenlet segítségével, a $\mathbf{v}_c$ a (21)-nél alkalmazott megfontolás alapján a (96)-hoz hasonlóan írható fel, melyből az abszolút értékének négyzete számolható:

$$|\mathbf{v}_s|^2 = \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + l_s^2 \dot{\psi}^2 + 2l_s \dot{\psi} (\dot{w} \cos \psi - \dot{u} \sin \psi), \quad (103)$$

$$|\mathbf{v}_c|^2 = \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + l_c^2 \dot{\psi}^2 + 2l_c \dot{\psi} (\dot{w} \cos \psi - \dot{u} \sin \psi). \quad (104)$$

⁶ Routh, Edward, John (1831-1907) Angol matematikus. Főbb kutatási területei a mechanika, csillagászat és a harmónikus analízis volt. Az ő nevéhez is kötődik a rendszerek stabilitásának feltétele is, a Routh-Hurwitz kritérium. [5]

⁷ Coriolis, Gaspard, Gustave de (1792-1843) Francia mérnök és matematikus. Ő vezette be a munka és a kinetikai energia mai értelmezésünk szerinti fogalmát. 1835-ben ő mutatta ki, hogy forgó koordinátarendszerben a relatív elmozdulás irányára merőleges tehetetlenségi erő hat a tömegre. [4]

A (14) egyenletbe beírva a(15), (16), (19), (20), (23), (24), (103), (104) összefüggéseket, rendezés után a következőt kapjuk a relatív kinetikus energiára:

$$T = \frac{1}{2} \left((m_s + m_c) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + 2(m_s l_s + m_c l_c) (\dot{w} \cos \psi - \dot{u} \sin \psi) \dot{\psi} + (m_s l_s^2 + m_c l_c^2 + \theta_{s\zeta} + \theta_{cz}) \dot{\psi}^2 + \theta_{s\zeta} \dot{\phi}^2 \right) \quad (105)$$

A potenciálfüggvények megegyeznek a (27), (28) összefüggésekben megadottakkal.

A rendszerre két erőnek van teljesítménye: a Coriolis erőnek, és a szállító erőnek. Ezek a következő módon írhatóak fel:

$$\mathbf{F}_{Corr,S} = -2m_s (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_S) , \quad (106)$$

$$\mathbf{F}_{Corr,C} = -2m_c (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_C) , \quad (107)$$

$$\mathbf{F}_{sz,S} = -m_s (\boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{OS})) , \quad (108)$$

$$\mathbf{F}_{sz,C} = -m_c (\boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{OC})) , \quad (109)$$

ahol

$$\mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} -r + w + l_c \sin \psi \\ -u - l_c \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (110)$$

A műveleteket elvégezve, egyszerűsítések után:

$$\mathbf{F}_{Corr,S} = 2m_s \frac{v}{r} \begin{bmatrix} \dot{u} - l_s \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{w} + l_s \dot{\psi} \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (111)$$

$$\mathbf{F}_{Corr,C} = 2m_c \frac{v}{r} \begin{bmatrix} \dot{u} - l_c \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{w} + l_c \dot{\psi} \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (112)$$

$$\mathbf{F}_{sz,S} = -m_s \frac{v^2}{r^2} \begin{bmatrix} r - w - l_s \sin \psi \\ u - l_s \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (113)$$

$$\mathbf{F}_{sz,C} = -m_c \frac{v^2}{r^2} \begin{bmatrix} r - w - l_c \sin \psi \\ u - l_c \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (114)$$

Ezek az erők a kerék súlypontjában („S” – (111), (113)), illetve a vontatórúd súlypontjában („C” – (112), (114)) hatnak.

Ezeket beírva a virtuális teljesítménybe, az „S” pontban ható erők virtuális teljesítménye:

$$\delta P_S = (\mathbf{F}_{Corr,S}^T + \mathbf{F}_{sz,S}^T) \cdot \delta \mathbf{v}_S = (\mathbf{F}_{Corr,S}^T + \mathbf{F}_{sz,S}^T) \cdot \begin{bmatrix} \delta \dot{w} + \delta \dot{\psi} l_s \cos \psi \\ -\delta \dot{u} + \delta \dot{\psi} l_s \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

kifejtve:

$$\begin{aligned} \delta P_S = m_s \frac{v}{r} & \left(2\dot{u} - \frac{v}{r}(r-w) + \left(\frac{v}{r} - 2\dot{\psi} \right) l_s \sin \psi \right) (\delta \dot{w} + \delta \dot{\psi} l_s \cos \psi) \\ & + m_s \frac{v}{r} \left(2\dot{w} - \frac{v}{r}u + \left(2\dot{\psi} + \frac{v}{r} \right) l_s \cos \psi \right) (-\delta \dot{u} + \delta \dot{\psi} l_s \sin \psi) \end{aligned} \quad (116)$$

A „C” pontban ható erők virtuális teljesítménye:

$$\delta P_C = (\mathbf{F}_{Corr,C}^T + \mathbf{F}_{sz,C}^T) \cdot \delta \mathbf{v}_C = (\mathbf{F}_{Corr,C}^T + \mathbf{F}_{sz,C}^T) \cdot \begin{bmatrix} \delta \dot{w} + \delta \dot{\psi} l_c \cos \psi \\ -\delta \dot{u} + \delta \dot{\psi} l_c \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (117)$$

kifejtve:

$$\begin{aligned} \delta P_C = m_c \frac{v}{r} & \left(2\dot{u} - \frac{v}{r}(r-w) + \left(\frac{v}{r} - 2\dot{\psi} \right) l_c \sin \psi \right) (\delta \dot{w} + \delta \dot{\psi} l_c \cos \psi) \\ & + m_c \frac{v}{r} \left(2\dot{w} - \frac{v}{r}u + \left(2\dot{\psi} + \frac{v}{r} \right) l_c \cos \psi \right) (-\delta \dot{u} + \delta \dot{\psi} l_c \sin \psi) \end{aligned} \quad (118)$$

Mivel virtuális teljesítmények lineárisan függenek a virtuális általános koordinátasebességektől, ezért ha a virtuális koordináta sebesség szerint deriváljuk a teljesítményeket, akkor megkapjuk azok együtthatóit, melyek az általános koordinátákhoz tartozó általános erők. Tehát:

$$Q_k^* = \frac{\partial}{\partial (\delta \dot{q}_k)} \delta P, \quad (119)$$

ahol:

$$\delta P = \delta P_S + \delta P_C. \quad (120)$$

Innen a $\mathbf{Q}^*$ általános erővektor:

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \frac{v}{r^2} \left((m_c + m_s)(vu - 2r\dot{w}) + (m_c l_c + m_s l_s)(v - 2r\dot{\psi}) \cos \psi \right) \\ \frac{v}{r^2} \left((m_c + m_s)(v(w - r) + 2r\dot{u}) + (m_c l_c + m_s l_s)(v - 2r\dot{\psi}) \sin \psi \right) \\ -\frac{v}{r^2} (m_c l_c + m_s l_s) \left(((r - w)v - 2r\dot{u}) \cos \psi + (vu - 2r\dot{w}) \sin \psi \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (121)$$

A deriválásokat elvégezve, a (101) összefüggésbe behelyettesítve, a Lagrange multiplikátort tartalmazó tagok kivételével mindent a bal oldalra rendezve, a mozgásegyenletek a következők:

$q_1 :$

$$\begin{aligned} & (m_s + m_c)\ddot{u} - (l_s m_s + l_c m_c)\ddot{\psi} \sin \psi + \left(s_u - (m_s + m_c) \frac{v^2}{r^2} \right) u \\ & + \frac{(m_s + m_c)(2v\dot{w})}{r} - \frac{(l_s m_s + l_c m_c)(v - r\dot{\psi})^2 \cos \psi}{r^2} = -\mu_2 \end{aligned}, \quad (122)$$

$q_2 :$

$$\begin{aligned} & (m_s + m_c)\ddot{w} + (l_s m_s + l_c m_c)\ddot{\psi} \cos \psi + \left(s_w - (m_s + m_c) \frac{v^2}{r^2} \right) w \\ & + \frac{r(m_s + m_c)(v^2 - 2v\dot{u}) - (l_s m_s + l_c m_c)(v - r\dot{\psi})^2 \sin \psi}{r^2} = \mu_1 \end{aligned}, \quad (123)$$

$q_3 :$

$$\begin{aligned} & (l_s m_s + l_c m_c + \theta_{cz} + \theta_{s\zeta})\ddot{\psi} - (l_s m_s + l_c m_c)(\ddot{u} \sin \psi - \ddot{w} \cos \psi) + k_t \dot{\psi} + \\ & + \frac{v}{r^2} (l_s m_s + l_c m_c) \left((r(v - 2\dot{u}) - v w) \cos \psi + (vu - 2r\dot{w}) \sin \psi \right) = l_s \mu_1 \cos \psi + l_s \mu_2 \sin \psi \end{aligned}, \quad (124)$$

$q_4 :$

$$\theta_{s\zeta} \ddot{\phi} = \mu_1 R \sin \psi - \mu_2 R \cos \psi. \quad (125)$$

Ezután a (99) kinematikai kényszerből kifejezzük a $\dot{\phi}$ -ot:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R \cos \psi} \left(v - \frac{v}{r} w - \dot{u} \right) + \frac{l_s}{R} \left(\dot{\psi} - \frac{v}{r} \right) \tan \psi. \quad (126)$$

Ezt behelyettesítve a (98) kinematikai kényszerbe, $\dot{w}$ -ra rendezve:

$$\dot{w} = \frac{v}{r}u + \left(\dot{u} - v + \frac{v}{r}w \right) \tan \psi + \frac{l_s}{\cos \psi} \left(\frac{v}{r} - \dot{\psi} \right). \quad (127)$$

Idő szerint deriválva a (126) összefüggést, és behelyettesítve a (127) egyenletet megkapjuk a kerék gurulási szöggyorsulását:

$$\ddot{\phi} = \frac{(r-w)v - r\dot{u}}{r^2 R} \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} (v + r\dot{\psi}) - \frac{l_s}{R \cos^2 \psi} \left(\frac{v^2}{r^2} - \dot{\psi}^2 \right) - \frac{1}{R \cos \psi} \left(\frac{v^2}{r^2} u + \ddot{u} \right) + \frac{l_s}{R} \ddot{\psi} \tan \psi. \quad (128)$$

A (127) összefüggést deriválva idő szerint, és önmagát a deriváltba helyettesítve:

$$\begin{aligned} \ddot{w} = & \frac{v^2}{r^2 \cos^2 \psi} \left(l_s \sin \psi + (w-r) \sin^2 \psi + \frac{u \sin 2\psi}{2} \right) + \frac{v w}{r \cos^2 \psi} (\dot{\psi} + \dot{u} v) \\ & + \frac{1}{\cos^2 \psi} \left(\dot{u} \dot{\psi} + \frac{\sin 2\psi}{2} \ddot{u} - v \dot{\psi} \right) - \frac{1}{\cos \psi} (l_s \dot{\psi}^2 \tan \psi + l_s \ddot{\psi}) \end{aligned} \quad (129)$$

Kifejezzük a Lagrange multiplikátorokat a (122), (123) egyenletekből, majd behelyettesítjük a (124), (125) összefüggésekbe. Majd kiküszöböljük a $\dot{w}, \ddot{w}, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$ koordinátasebességeket, és gyorsulásokat a (126), (127), (128), (129) egyenletek segítségével, így a mozgásegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} & \left(m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\xi} \right) \ddot{\psi} + m_c (l_s - l_c) \left(l_s \dot{\psi}^2 \tan \psi - \frac{v(2l_s \sin \psi + w) + r(\dot{u} - v)}{r \cos \psi} \dot{\psi} \right) \\ & + k_t \dot{\psi} + \frac{v m_c (l_s - l_c)}{r \cos \psi} \left(\dot{u} + \frac{v}{r} w - \frac{v}{r} (r - l_s \sin \psi) \right) + l_s (s_u u \sin \psi - s_w w \cos \psi) = 0 \\ & \frac{(m_c + m_s) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} (\ddot{u} - l_s \ddot{\psi} \sin \psi) + \left(\frac{m_c (l_s - l_c)}{\cos \psi} - \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} l_s \right) \dot{\psi}^2 \\ & + \left(\frac{v}{r} \left(\frac{2m_c (l_s - l_c)}{\cos \psi} - \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} \sin \psi \right) + \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{r R^2 \cos^3 \psi} (v w + r \dot{u}) \sin \psi \right) \dot{\psi} \\ & + \frac{v (m_c + m_s) R^2 + \theta_{s\xi}}{r R^2 \cos^2 \psi} \ddot{u} \tan \psi + \frac{v^2 (m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{r^2 R^2 \cos^2 \psi} (u + \tan \psi w) + s_u u + s_w w \tan \psi \\ & - \frac{v^2}{r^2} \left(\frac{(l_c m_c - 3l_s m_c - 2l_s m_s) - m_c (l_s - l_c) \cos 2\psi}{2 \cos^3 \psi} - \frac{l_s \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} + \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} r \sin \psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (131)$$

$$\dot{w} = \frac{v}{r}u + \left(\dot{u} - v + \frac{v}{r}w \right) \tan \psi + \frac{l_s}{\cos \psi} \left(\frac{v}{r} - \dot{\psi} \right), \quad (132)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R \cos \psi} \left(v - \frac{v}{r} w - \dot{u} \right) + \frac{l_s}{R} \left(\dot{\psi} - \frac{v}{r} \right) \tan \psi. \quad (133)$$

A (133) egyenlet a további vizsgálathoz jelen esetben sem szükséges, mert φ -tól nem függ a másik három mozgásegyenlet.

3.3. LINEÁRIS STABILITÁSVIZSGÁLAT:

3.3.1. CAUCHY ÁTÍRÁS

Ismét vezessük be az $\mathbf{x}$ vektort:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \dot{u} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Idő szerint deriválva kapjuk az $\dot{\mathbf{x}}$ vektort, melynek elemeit leíró függvényeket a 2.3.1. fejezetben taglalt módhoz hasonlóan kapjuk meg a (130), (131), (132) egyenletekből: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Ennek az utolsó három eleme kifejezhető a mozgásegyenletekből. A $\dot{w}$ -t a (132) összefüggés írja le, $\ddot{u}$ és $\ddot{\psi}$ kifejezhető a (130), (131) egyenletekből a 2.3.1. fejezetben ismertetett módon ((45), (48)). Az eredmény:

$$\ddot{u} = \frac{R^2 \cos^2 \psi}{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}} C_1 + \frac{l_s \sin \psi}{\left(m_c(l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\xi}\right)} C_2 \quad (135)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{C_2}{\left(m_c(l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\xi}\right)} \quad (136)$$

Ahol C_1, C_2 a $\mathbf{c}$ vektor elemeit jelöli:

$$\begin{aligned} C_1 = & - \left(\frac{m_c(l_s - l_c)}{\cos \psi} - \frac{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} l_s \right) \dot{\psi}^2 \\ & - \left(\frac{v}{r} \left(\frac{2m_c(l_s - l_c)}{\cos \psi} - \frac{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} \sin \psi \right) + \frac{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}}{rR^2 \cos^3 \psi} (vw + r\dot{u}) \sin \psi \right) \dot{\psi} \\ & - \frac{v}{r} \frac{(m_c + m_s)R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} \dot{u} \tan \psi - \frac{v^2}{r^2} \frac{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 \psi} (u + \tan \psi w) - s_u u - s_w w \tan \psi \\ & + \frac{v^2}{r^2} \left(\frac{(l_c m_c - 3l_s m_c - 2l_s m_s) - m_c(l_s - l_c) \cos 2\psi}{2 \cos^3 \psi} - \frac{l_s \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} + \frac{(m_s + m_c)R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 \psi} r \sin \psi \right) \end{aligned} \quad (137)$$

$$C_2 = m_c(l_s - l_c) \left(\frac{v(2l_s \sin \psi + w) + r(\dot{u} - v)}{r \cos \psi} \dot{\psi} - l_s \dot{\psi}^2 \tan \psi \right) - k_t \dot{\psi} - \frac{v}{r} \frac{m_c(l_s - l_c)}{\cos \psi} \left(\dot{u} + \frac{v}{r} w - \frac{v}{r} (r - l_s \sin \psi) \right) - l_s (s_u u \sin \psi - s_w w \cos \psi) \quad (138)$$

Most helyettesítsük $\mathbf{x}$ vektor elemeit x_i -vel, amelyben az i a vektor koordinátájának sorszáma, így megkapjuk az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ -et:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_5 \\ \dot{x}_3 &= \frac{v}{r} x_1 + \left(x_4 - v + \frac{v}{r} x_3 \right) \tan x_2 + \frac{l_s}{\cos x_2} \left(\frac{v}{r} - x_5 \right) \\ \dot{x}_4 &= \frac{R^2 \cos^2 x_2}{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\zeta}} C_{1,h} + \frac{l_s \sin x_2}{\left(m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\zeta} \right)} C_{2,h} \\ \dot{x}_5 &= \frac{C_{2,h}}{\left(m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\zeta} \right)}\end{aligned}\quad (139)$$

Ahol:

$$\begin{aligned}
C_{1,h} = & - \left(\frac{m_c (l_s - l_c)}{\cos x_2} - \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_2} l_s \right) x_5^2 \\
& - \left(\frac{v}{r} \left(\frac{2m_c (l_s - l_c)}{\cos x_2} - \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_2} \sin x_2 \right) + \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{r R^2 \cos^3 x_2} (v x_3 + r x_4) \sin x_2 \right) x_5 \\
& - \frac{v}{r} \frac{(m_c + m_s) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 x_2} x_4 \tan x_2 - \frac{v^2}{r^2} \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^2 x_2} (x_1 + x_3 \tan x_2) - s_u x_1 - s_w x_3 \tan x_2 \\
& + \frac{v^2}{r^2} \left(\frac{(l_c m_c - 3l_s m_c - 2l_s m_s) - m_c (l_s - l_c) \cos 2x_2}{2 \cos^3 x_2} - \frac{l_s \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_2} + \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_2} r \sin x_2 \right) \\
C_{2,h} = & m_c (l_s - l_c) \left(\frac{v (2l_s \sin x_2 + x_3) + r (x_4 - v)}{r \cos x_2} x_5 - l_s x_5^2 \tan x_2 \right) - k_t x_5 \\
& - \frac{v}{r} \frac{m_c (l_s - l_c)}{\cos x_2} \left(x_4 + \frac{v}{r} x_3 - \frac{v}{r} (r - l_s \sin x_2) \right) - l_s (s_u x_1 \sin x_2 - s_w x_3 \cos x_2)
\end{aligned} \tag{140}$$

3.3.2. STABILITÁSTÉRKÉPEK

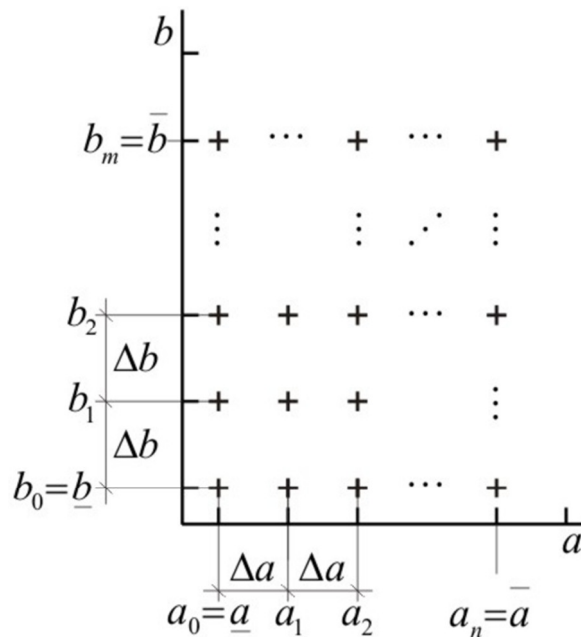
A következő esetekben vizsgálom a rendszert:

- adott sugarú íven, különböző vontatási hosszak mellett mekkora sebességgel,
- adott sebesség mellett, különböző vontatási hosszak mellett mekkora íven,
- adott vontatási hossz mellett, különböző ívű kanyarokba mekkora sebességgel lehet haladni, hogy a kerék stacionárius mozgása ne veszítse el stabilitását.

Az analitikus stabilitásvizsgálat ebben az esetben nem lehetséges az egyenletek bonyolultsága miatt, ezért numerikusan kell előállítani a stabilitástérképeket. Csak a csillapítatlan rendszert vizsgálom. A modell mindvégig tiszta gördülést feltételez, ebből adódóan a nagy v/r arányok esetén a stabilitástérképek nem feltétlenül igazak.

3.3.2.1. Stabilitástérképek előállítása

Először kiválasztjuk a paramétereket, és a paramétertartományt, ami alapján, és amin a rendszert vizsgálni fogjuk. A paramétereket most jelölje a és b , ahol $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$, és $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$, ahol az alsó-, és felső vonás az intervallum alsó-, illetve a felső határát jelöli. Ezután az $[\underline{a}, \bar{a}]$, és $[\underline{b}, \bar{b}]$ intervallumokat felosztjuk n , illetve m darab egyenlő nagyságú részre, ezzel diszkrétizálva a paramétersíkot, amin a vizsgálatot végezzük (ld. 6. ábra).



6. ábra: Paramétersík diszkrétizálása

Ezután kiszámoljuk $P(a_i, b_j)$ ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$) pontokra az egyensúlyi helyzeteket (mechanikai értelemben stacionárius állapotokat/mozgásokat), és ezeknek vizsgáljuk a stabilitását a rendszer Jacobi⁸ mátrixának segítségével.

⁸ Jacobi, Carl, Gustav, Jacob (1804 - 1851) Porosz matematikus. Az elliptikus függvények elméletének egyik megalapozója, a determinánsok eredményes kutatója. Az ő nevét őrzi függvénytanban alapvető fontosságú Jacobi mátrix és annak determinánsa (Jacobi-féle determináns). Dirichlet mellett főként az ő munkásságának köszönhető, hogy a matematikai kutatások centruma áttevődött Franciaországból Németországba. [9]

Az egyensúlyi helyzetet úgy számoljuk, hogy az $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ egyenletet megoldjuk. Ha a (139)-at tekintjük, akkor láthatjuk, hogy ez három megoldandó egyenletet ad ki, melyben a keresett ismeretlenek az x_{10}, x_{20}, x_{30} :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v}{r} x_{10} + \left(-v + \frac{v}{r} x_{30} \right) \tan x_{20} + \frac{l_s}{\cos x_{20}} \frac{v}{r} \\ 0 &= \frac{R^2 \cos^2 x_{20}}{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}} C_{1,h0} + \frac{l_s \sin x_{20}}{(m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\xi'})} C_{2,h0} \\ 0 &= \frac{C_{2,h0}}{(m_c (l_s - l_c)^2 + \theta_{cz} + \theta_{s\xi'})} \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} C_{1,h0} &= -\frac{v^2 (m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{r^2 R^2 \cos^2 x_{20}} (x_{10} + x_{30} \tan x_{20}) - s_u x_{10} - s_w x_{30} \tan x_{20} \\ &+ \frac{v^2}{r^2} \left(\frac{(l_c m_c - 3l_s m_c - 2l_s m_s) - m_c (l_s - l_c) \cos 2x_{20}}{2 \cos^3 x_{20}} - \frac{l_s \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_{20}} + \frac{(m_s + m_c) R^2 + \theta_{s\xi}}{R^2 \cos^3 x_{20}} r \sin x_{20} \right) \end{aligned} \quad (143)$$

$$C_{2,h0} = -\frac{v}{r} \frac{m_c (l_s - l_c)}{\cos x_{20}} \left(\frac{v}{r} x_{30} - \frac{v}{r} (r - l_s \sin x_{20}) \right) - l_s (s_u x_{10} \sin x_{20} - s_w x_{30} \cos x_{20}) \quad (144)$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai adják az egyensúlyi helyzeteket. Ha ezt minden egyes paraméterpárosra elvégezzük, akkor $n \cdot m$ darab $\mathbf{x}_0$ vektort kapunk, ahol:

$$\mathbf{x}_{0,k} = [x_{10,i,j}, x_{20,i,j}, x_{30,i,j}, 0, 0], \quad (145)$$

ahol $k = 1, \dots, n \cdot m$. Az egyensúlyi helyzetekben ez a (134)-ben definiált vektor értéke. Jelen esetben nem számít, hogy rögzített i mentén végigfuttatjuk a j indexet, és csak utána léptetünk az i -n, vagy mindezt fordítva tesszük.

Ezeket behelyettesítjük a rendszer Jacobi mátrixába, amelyet az (55) összefüggés szerint állítottunk elő. Tehát:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{J}|_{\mathbf{x}_{0,k}} \quad (146)$$

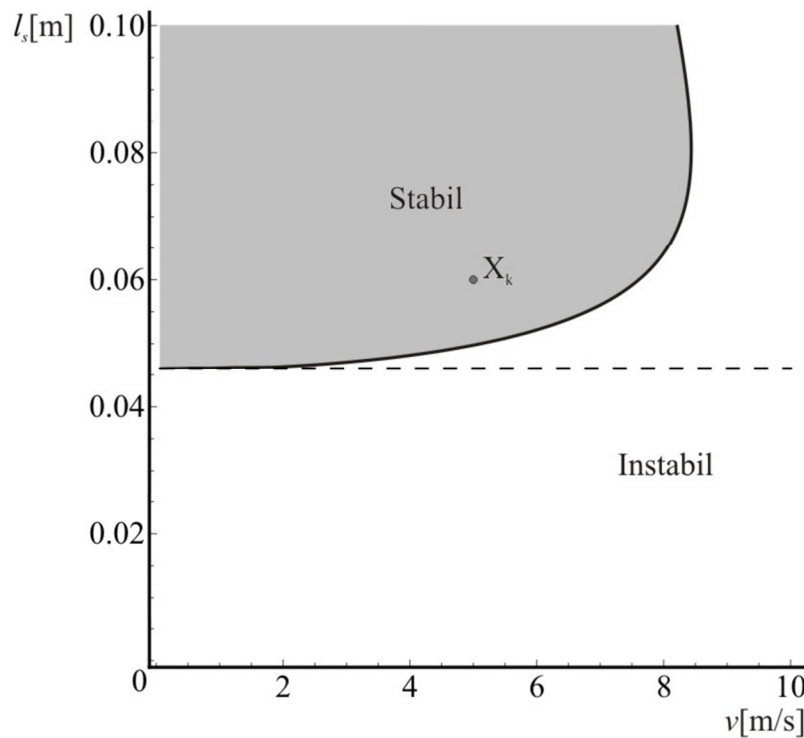
Ennek kiszámoljuk a sajátértékeit, és a sajátértékek valós részének a maximumát vesszük, melyet társítunk a megfelelő paraméterpárhoz. Ezután ábrázoljuk a paraméter, hogy ez mely tartományokon pozitív, illetve negatív.

A stabilitástérképek elkészítéséhez a következő paramétereket minden esetben használom ([1] – 41. oldal alapján):

$$\begin{aligned}
 m_s &= 0,3519 [\text{kg}], \\
 m_c &= 0,0668 [\text{kg}], \\
 \theta_{s\xi} &= 4,6310^{-5} [\text{kgm}^2], \\
 \theta_{s\zeta} &= 2,3810^{-5} [\text{kgm}^2], \\
 \theta_{cz} &= 3,4810^{-6} [\text{kgm}^2], \\
 R &= 0,04 [\text{m}], \\
 s_w &= 100 [\text{N/m}], \\
 l_c &= 0,012 [\text{m}], \\
 k_t &= 0 [\text{Ns}].
 \end{aligned} \tag{147}$$

3.3.2.2. Stabilitás adott sugarú kanyarívén, vontatási hossz – sebesség függvényében

A kereket köríven, $s_u = 100 [\text{N/m}]$ menetirányú csapmerekésséggel, állandó $r = 1 [\text{m}]$ sugáron vontatjuk.

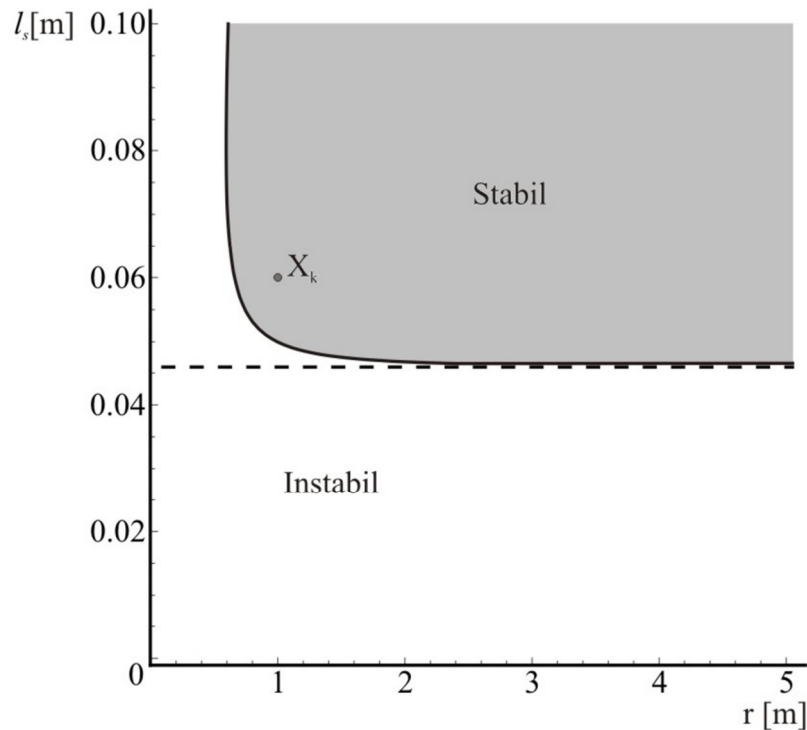


7. ábra: Kanyarban vontatott kerék v - l_s stabilitástérképe

A szaggatott vonal az egyenesen való vontatáshoz tartozó kritikus vontatási hosszt jelöli, azonos paraméterek mellett, amely a (76) összefüggés alapján $l_{skr} = 0,046 [\text{m}]$. Látható, hogy van egy optimális vontatási hossz, amelynél nagyobb választva a kritikus vontatási sebesség csökken.

3.3.2.3. Stabilitás adott sebességnél, kanyarodási sugár - vontatási hossz függvényében

A kereket $s_u = 100 [\text{N/m}]$ menetirányú csapmerevséggel, állandó $v = 5 [\text{m/s}]$ sebességgel vontatjuk.

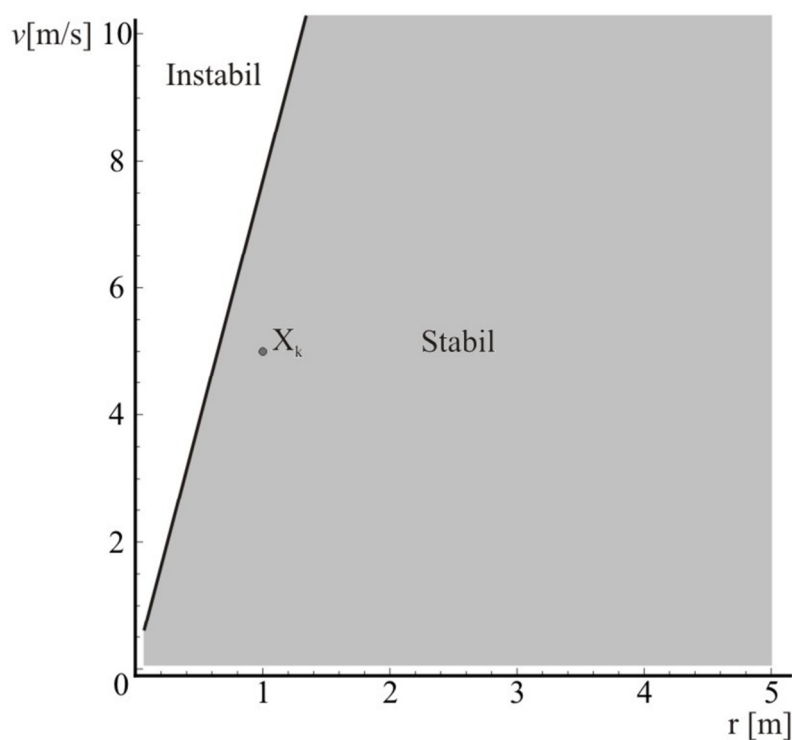


8. ábra: Kanyarban vontatott kerék r - l_s stabilitástérképe

Ebben az esetben is a szaggatott vonal az egyenes vonalú vontatáshoz tartozó kritikus vontatási hossz, azonos paraméterek mellett. Láthatjuk, hogy egy kritikus kanyarodási sugár fölött a rendszer viselkedése stabilitás szempontjából nagyon kis mértékben tér el az egyenes vonalú vontatáshoz képest.

3.3.2.4. Stabilitás adott vontatási hosszal, kanyarodási sugár - sebesség függvényében

A kereket $s_u = 100 [\text{N/m}]$ menetirányú csapmerevséggel, $l_s = 0,06 [\text{m}]$ vontatási hosszon vontatjuk.

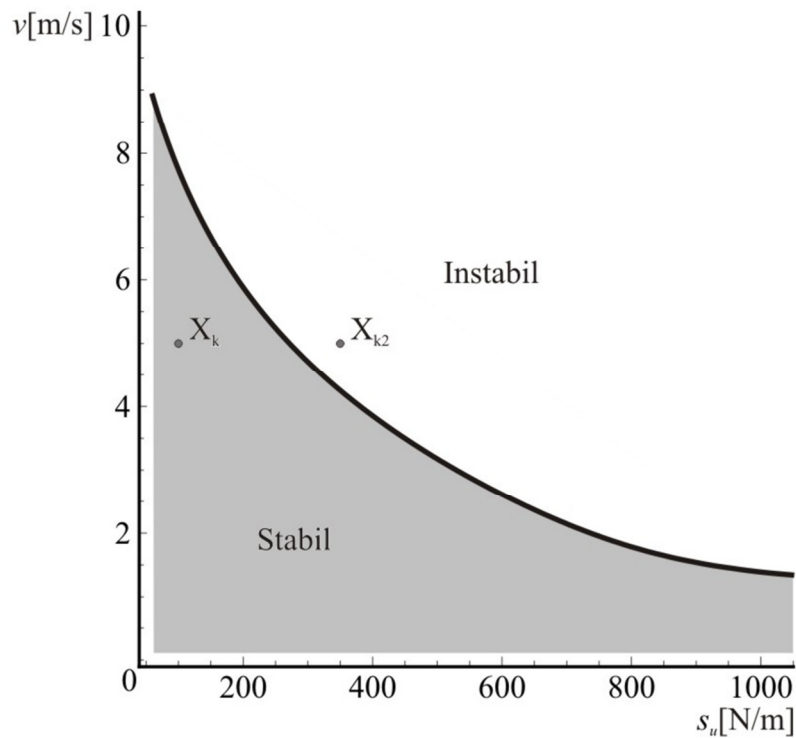


9. ábra: Kanyarban vontatott kerék r - v stabilitástérképe

Megfigyelhető, hogy tiszta gördülés esetén lineáris stabilitás szempontjából a kritikus sebesség a vizsgált tartományon belül lineárisan függ a pályasugártól.

3.3.2.5. Stabilitás adott vontatási hosszal, menetirányú merevség - sebesség függvényében

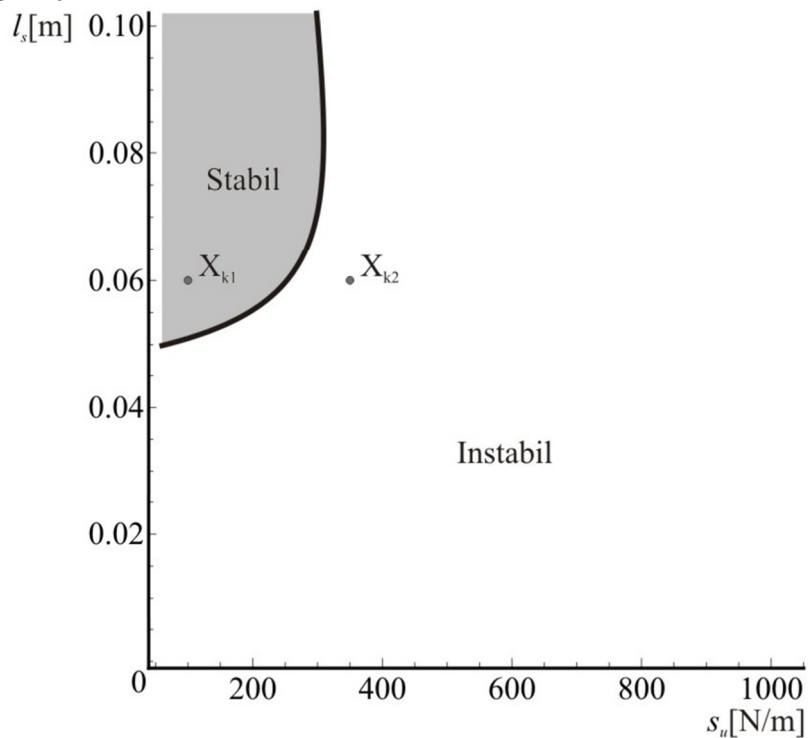
A kereket $r = 1\text{ [m]}$ sugáron, $l_s = 0,06\text{ [m]}$ vontatási hosszon vontatjuk.



10. ábra: Kanyarban vontatott kerék s_u - v stabilitástérképe

Az az érdekes jelenség figyelhető meg, hogy minél nagyobb a menetiránnyal párhuzamos merevség a menetirányra merőleges merevséghez képest, annál kisebb sebességeken veszti el a stabilitását a rendszer.

3.3.2.6. Stabilitás adott sebességnél, menetirányú merevség – vontatási hossz függvényében



11. ábra: Kanyarban vontatott kerék s_u - l_s stabilitástérképe

Ebben az esetben is a nagyobb menetirányú merevség destabilizálja a helyzetet, olyannyira, hogy egy kritikus merevség fölött már mindenképpen instabil a rendszer.

A stabilitástérképeken az „ X_{ks} ” és „ X_{ki} ” pontok a 4.2.-ben szereplő szimulációk paraméterválasztásainak helyét jelöli. Az „ X_{ks} ” a stabil, az „ X_{ki} ” az instabil esethez tartozik. A 7. ábra, 8. ábra, 9. ábra ábrákon ez a két pont egybeesik, így ott ezeket a pontokat egységesen „ X_k ” jelöli.

Az eredményekre a szakirodalomban nem találtam összehasonlítási alapot.

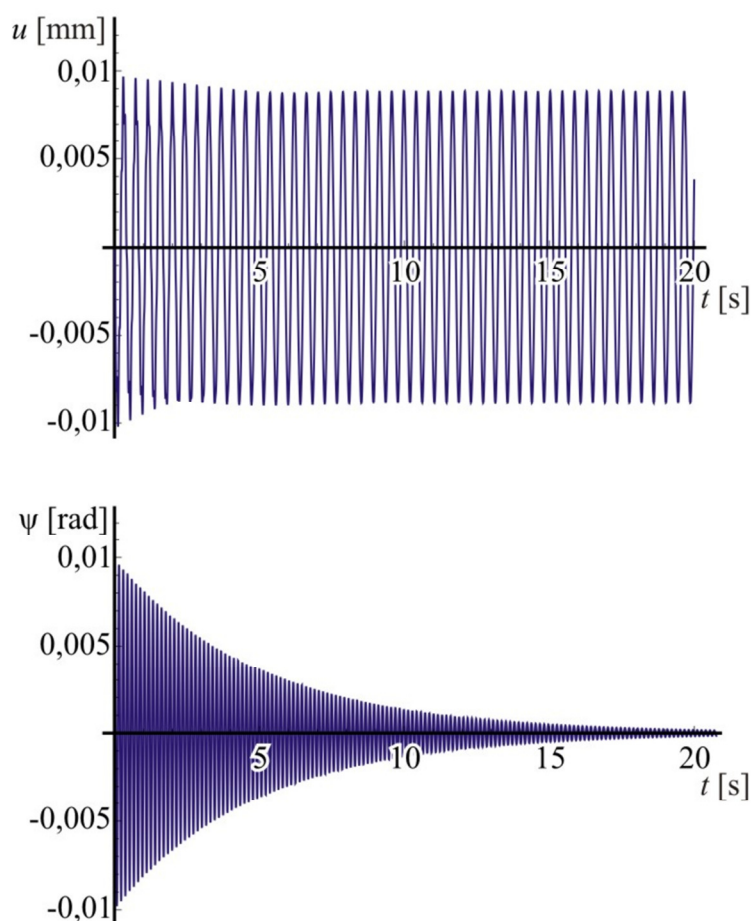
4. SZIMULÁCIÓK

A szimulációkat a (147)-ben megadott paraméterekkel futtattam, a hiányzóakat minden esetre külön megadom.

4.1. EGYENES PÁLYÁN VONTATOTT KERÉK

$$\begin{aligned} s_u &= 100[\text{N/m}] \\ v &= 5[\text{m/s}] \\ l_s &= 0,05[\text{m}] \end{aligned} \quad (148)$$

A stabilitáshoz szükséges minimális rúdhosszt a (76) összefüggés alapján számoltam: $l_{skr} = 0,046[\text{m}]$. Ennél kissé hosszabb vontatási rúdhosszt választottam. Egyenes vonalú gördülés esetén kerék mozgását az u és ψ elmozdulás, illetve szögelfordulás jól jellemzik, így csak azok időbeli lefutását ábrázolom. A szimulációt $\psi(0) = 0,01[\text{rad}]$ kezdeti feltétellel indítottam.



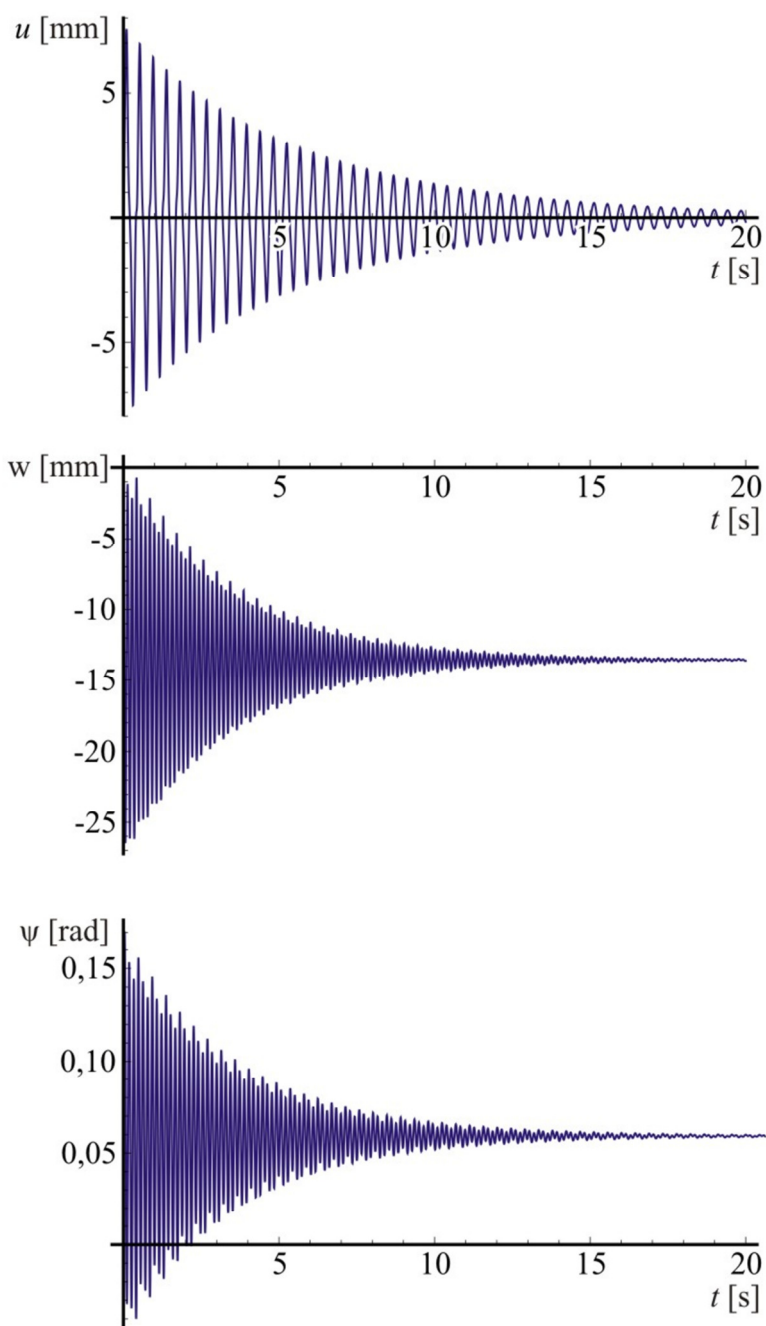
12. ábra: Egyenes vonalon való gördülés stabil esetben

4.2. ÁLLANDÓ SUGARÚ KÖRÍVEN VONTATOTT KERÉK

4.2.1. STABIL ESET

$$\begin{aligned}s_u &= 100 [\text{N/m}] \\ v &= 5 [\text{m/s}] \\ r &= 1 [\text{m}] \\ l_s &= 0,06 [\text{m}]\end{aligned}\tag{149}$$

Kezdeti értéként az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektort adtam meg.



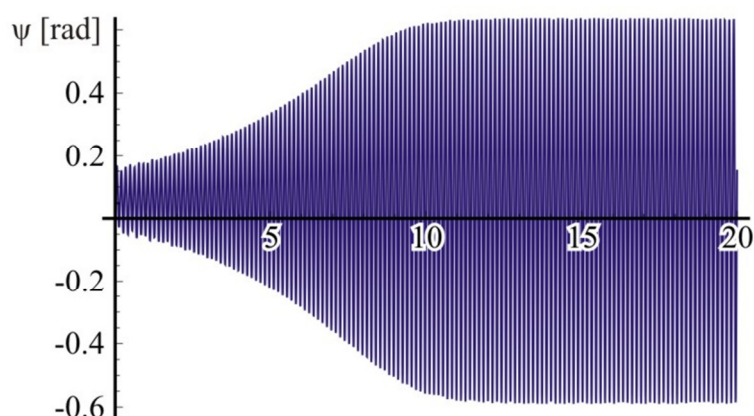
13. ábra: Köríven való vontatás stabil esetben

Az egyenes vonalú gördüléssel ellentétben itt lecsillapodik az u irányú rezgés is. A szimulációból jól látható, hogy a kerék körpályán való stacionárius haladása aszimptotikusan stabil.

4.2.2. INSTABIL ESET

$$\begin{aligned} s_u &= 350[\text{N/m}] \\ v &= 5[\text{m/s}] \\ r &= 1[\text{m}] \\ l_s &= 0,06[\text{m}] \end{aligned} \tag{150}$$

Kezdeti értéként az $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ vektort adtam meg. Csak az ψ állapotváltozó időbeli lefutását ábrázolom. A másik két állapotváltozó időbeli alakulása jellegre megegyezik a ψ -ével, csak még el van tolva a megfelelő általános koordináta-hoz tartozó statikus kitéréssel (u_0, w_0). Jól látszik, hogy ennél a paraméter-együttesnél a kerék egy stabil periodikus mozgásba kezd, míg más vizsgált instabil esetekben ezt nem tapasztaltuk.



14. ábra: Köríven való vontatás instabil esetben

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozatomban egy már meglévő, rugalmas vontatórúd-csapágyazást leíró modellt bővítettem egy szabadságfok hozzáadásával (u irányú), majd az így kapott rendszer lineáris stabilitását vizsgáltam. Egyenes gördülés esetére visszakaptuk a kisebb szabadságfokú modell szolgáltatotta stabilitási kritériumokat.

Ha a stabil egyenes gördülés kritériumait kielégítő paraméterek mellett elkezd kanyarodni a kerék, akkor könnyen instabil tartományba kerülhet. Továbbá érdekes viselkedés figyelhető meg akkor is, ha a csapágyfelfüggesztés u irányú merevségét (s_u) változtatjuk. Instabil tartományból való paraméterválasztás esetén a kerék oly módon veszti el stabilitását, hogy egy kvázi-periodikus mozgás alakul ki.

A rugalmas kerékfelfüggesztés okozza az alábbi képen (15. ábra) szereplő babakocsikerék stabilitásvesztését is, mivel ebben az esetben a kerék a vontatórúd csapágyazásához képest merevnek tekinthető. A kialakításából adódóan (túl rövid vontatási hossz) a szerkezet lineárisan instabil. Kis sebességeknél kizárólag a királycsapnál lévő szárazsúrlódás akadályozza meg a kerékszítálás beindulását. Ez az akadályozó hatás igen kicsi, ezért nagyobb sebességeknél, vagy egy nagyobb zavarásra (pl.: hirtelen irányváltás) a kerék elkezd szítálni.

A dolgozat folytatásaként még vizsgálható a rendszer nemlineáris tartománybeli viselkedése, továbbá a modellt szabadságfokok hozzáadásával is lehet még bővíteni (például a kerék talajra merőleges síkból való kilépés). Mindvégig elegendő súrlódó erőt feltételeztem a gördülés fennmaradásához, így a megcsúszási határokat is érdemes lehet vizsgálni.



15. ábra: Babakocsikerék felfüggesztéssel

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Dénes Takács: Thesis: Dynamics of rolling of elastic wheels, 2005
- [2] F. Gantmacher: Lectures in Analytical Mechanics, *MIR Publishers, Moscow*, 1975
- [3] D. Takács, G. Stépán, S. J. Hogan: Isolated large amplitude periodic motions of towed rigid wheels, *Nonlinear Dyn*, 52: 27–34, Springer Science+Business Media, 2007
- [4] Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai, 4. átdolgozott kiadás, *Budapest*, 2008
- [5] http://hu.wikipedia.org/wiki/Edward_Routh
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Alfred-Marie_Li%C3%A9nard
- [7] <http://www.kfki.hu/physics/historia/historia/egyen.php?nanev=hurwitz&nev5=Hurwitz,+Adolf&s=1>
- [8] <http://www.kfki.hu/physics/historia/historia/egyen.php?nanev=taylorb&nev5=Taylor,+Brook&s=1>
- [9] <http://www.kfki.hu/physics/historia/historia/egyen.php?nanev=jacobi&nev5=Jacobi,+Carl+Gustav+Jacob&s=1>
- [10] <http://www.kfki.hu/physics/historia/historia/egyen.php?nanev=ljapunov&nev5=Ljapunov,+Alekszander&s=1>