



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki kar
Műszaki Mechanikai Tanszék

Káosz szabályozása mechanikai rendszerekben OGY-algoritmus segítségével

Szerző: Sötér Gábor
BSc III. évfolyam

2012



Konzulens:
Dr. Bende Margit
Műszaki Mechanikai Tanszék

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009
"Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben"
című program támogatta

*“A stabil folyamatokat megjósoljuk,
az instabil folyamatokat szabályozni fogjuk.”*

Neumann János, 1950 körül

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	4
2. AZ OGY-MÓDSZER KÉTDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEK ESETÉN.....	6
3. A HARMONIKUSAN GERJESZTETT OSZCILLÁTORON	
PATTOGÓ LABDA MOZGÁSÁNAK SZABÁLYOZÁSA.....	10
3.1 EGYYSZERŰSÍTETT ELMÉLETI MODELL	10
3.2 A KAOTIKUS MOZGÁS ELEMZÉSE	12
3.3 A SZABÁLYOZÁSHOZ SZÜKSÉGES MENNYISÉGEK KISZÁMÍTÁSA.....	15
3.4 A SZABÁLYOZÁS.....	18
4. AZ OGY-MÓDSZER HASZNÁLATA KÉSLELTETETT KOORDINÁTÁK	
SEGÍTSÉGÉVEL.....	25
5. A GERJESZTETT DUFFING-OSZCILLÁTOR SZABÁLYOZÁSA.....	29
5.1 A REZGŐRENDSZER BEMUTATÁSA	29
5.1.1 FÁZISTÉR, POINCARÉ-METSZET	31
5.1.2 RUNGE-KUTTA-ALGORITMUS	33
5.2 A SZABÁLYOZÁSHOZ SZÜKSÉGES MENNYISÉGEK	
MEGHATÁROZÁSA	35
5.2.1 A FIXPONTOK MEGHATÁROZÁSA.....	35
5.2.2 AZ $\underline{A}$ MÁTRIX MEGHATÁROZÁSA	36
5.2.3 A $\underline{B}$ VEKTOROK KISZÁMÍTÁSA	38
5.2.4 A PÓLUSÁTHELYEZÉSES MÓDSZER	40
5.2.5 A SZABÁLYOZÁS	42
6. NUMERIKUS GYÖKKERESÉS	45
7. MAGYARÁZAT A CD-MELLÉKLETEN TALÁLHATÓ PROGRAMOKHOZ	49
8. ÖSSZEFOGALALÁS	50
9. IRODALOMJEGYZÉK.....	51

1. BEVEZETÉS

A káoszelmélet olyan nemlineáris dinamikai rendszerekkel foglalkozik, melyek viselkedése hosszú távon megjósolhatatlan. A káosz, mint tudományterület az 1900-as évek második felében fejlődött ki. Számos területen (mechanika, elektronika, gazdaságtudomány stb.) sikerült különböző rendszerekben kimutatni a kaotikus viselkedést, viszont e mozgások szabályozása egészen 1990-ig megoldatlan maradt.

Ebben az évben a University of Maryland három kutatója (név szerint: Edward Ott, Celso Grebogi és James A. Yorke) *Controlling Chaos* című cikkével áttörést ért el ezen a területen. Módszerük igazi előnye, hogy nem csupán modellszámításoknál működik, hanem valós, kísérleti rendszerekre is alkalmazható. Munkájuknak köszönhetően a kilencvenes évek illetve a huszonegyedik század kutatóinak széles tábora kezdett el foglalkozni a káosz szabályozásával (1. ábra).

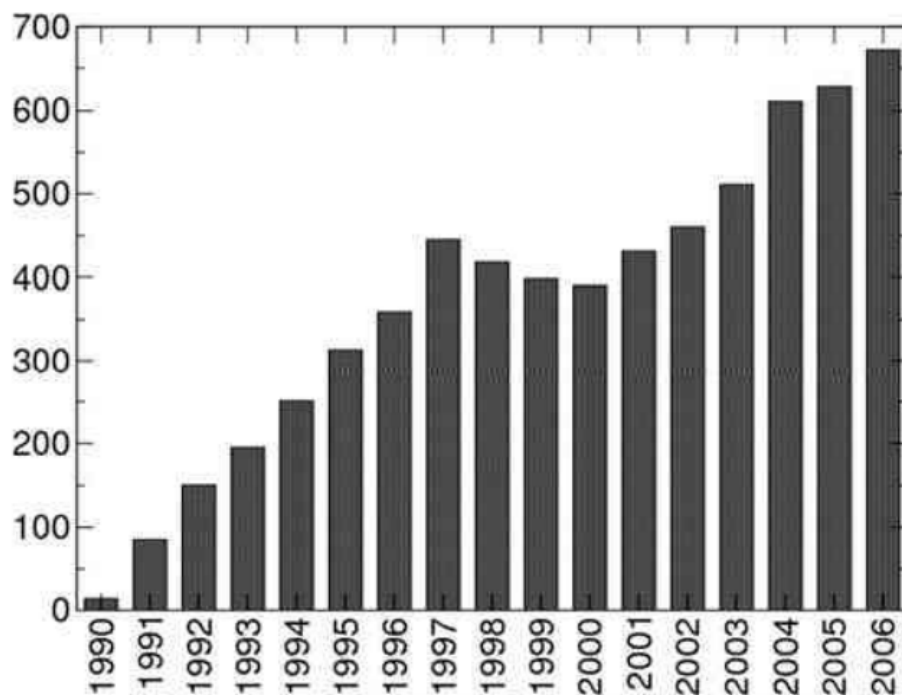
A dolgozatban két különböző kaotikus rendszer szabályozását végeztük el. Elsőként egy harmonikusan gerjesztett oszcillátoron pattogó labda kaotikus mozgását „szelídítettük meg”. Az általunk írt algoritmus az oszcillátor gerjesztésének frekvenciáját változtatja úgy, hogy periodikus mozgás jöjjön létre, tehát a labda minden ütközés után ugyanabba a magasságba pattanjon vissza. A rendszer egyszerűsített modelljét egy kétdimenziós differenciaegyenlet írja le, melyből meghatározhatók a szabályozáshoz szükséges mennyiségek, illetve a fixpontok. A dolgozatban leírjuk a szabályozás menetét, példánkon keresztül bemutatjuk az OGY-módszer előnyeit és hátrányait leképezések esetén, továbbá kitérünk a szabályozó program megírásakor felmerült problémákra.

Második kaotikus rendszernek a harmonikusan gerjesztett Duffing-oszcillátort választottuk, mozgását numerikusan szimuláltuk. Az OGY-módszert kombinálva a késleltetett koordináták elméletével, a szabályozáshoz nem szükséges a rendszert leíró egyenletek pontos ismerete. Csupán egyetlen jel (jelen esetben: pozíció) mérésének segítségével rekonstruálható a rendszer kaotikus attraktora, majd mérési adatokból megállapíthatók a rendszer fixpontjai. A szabályozáshoz szükséges egyéb mennyiségeket szintén mérés segítségével határoztuk meg. (Nem klasszikus értelemben vett mérésről beszélünk: az egyik számítógépes program a rendszert szimulálta, míg a másik „mérte” a kiadott jelet). Végül a pólusáthelyezéssel

módszerrel sikeresen szabályoztuk a rezgőrendszert. Mint az első példában, úgy itt is több problémás kérdés merült fel a szabályozás során, melyeket igyekeztünk megválaszolni.

Kaotikus rendszerek esetében sokszor nem elég egy adott paraméterkombinációhoz tartozó attraktort ábrázolni, mert az nem ad elegendő információt a rendszer viselkedéséről. Ezen okból tartozik a dolgozathoz egy CD-melléklet, mely tartalmazza a fontosabb ábrák és programok interaktív változatát, melyeknél a felhasználónak lehetősége van a paraméterek beállítására. Ha a dolgozatban lehetőség van egy adott ábra, vagy program interaktív használatára, akkor azt egy piros csillagszerű alakzattal és egy sorszámmal jelöltük. Utóbbi segítségével megkereshető a dolgozat végén található 7. fejezetben a programhoz tartozó instrukció. A programok megnyitásához Wolfram Mathematica 7 (vagy újabb) szükséges.

A dolgozatban ismertetünk egy saját elgondoláson alapuló gyökkereső algoritmust, melyet munkánk során többször felhasználtunk.



1. ábra – A káosz szabályozásával foglalkozó publikációk száma 1990-től 2006-ig. [1]

2. AZ OGY - MÓDSZER KÉTDIMENZIÓS LEKÉPEZÉSEK ESETÉN [2]

Hasonlóan a többi szabályzáshoz a cél az, hogy a rendszer szabályzó paraméterének kis mértékű változtatásával a kaotikus mozgás periodikussá alakuljon át. Fontos kiemelni az előző mondat "kis mértékű" tagját, ugyanis káosz szabályzásról csak akkor beszélhetünk, ha a szabályzó paraméter értéke a szabályzás ideje alatt a kaotikus tartományban marad, tehát nem módosítható a paraméter úgy, hogy olyan paraméterkombináció álljon elő, amely esetén a rendszer mozgása eleve periodikus. Tehát, ha $\bar{p}$ az eredeti, továbbá p a "megszelídített" rendszer módosított szabályzó paramétere, akkor teljesülnie kell a

$$|\Delta p| = |p - \bar{p}| < \delta \quad (1)$$

feltételnek, ahol δ a szabályzó paraméter módosításának legnagyobb megengedett értéke, melyre igaz, hogy

$$\delta \ll 1 \quad (2)$$

Az OGY-módszer a Poincaré-térkép fixpontjainak lineáris közelítésén alapszik. Legyen $\underline{x}_F(\bar{p})$ a rendszer fázisterének előre meghatározott fixpontja, $\underline{x}_F(p)$ pedig a rendszer aktuális helyzete a fázistérben, melyekre igaz, hogy

$$|\underline{x}_F(\bar{p}) - \underline{x}_F(p)| < \varepsilon \quad (3)$$

ahol ε az a környezet, amelyen belül a linearizálás érvényes. Ha az (1)-es és (3)-as feltétel is teljesül, akkor linearizálás után:

$$\underline{x}_F(p) \approx \underline{x}_F(\bar{p}) + \underline{w} \cdot \Delta p \quad (4)$$

ahol

$$\underline{w} = \left. \frac{\partial \underline{x}_F}{\partial p} \right|_{p=\bar{p}} \approx \frac{\underline{x}_F(p) - \underline{x}_F(\bar{p})}{\Delta p} \quad (5)$$

A $\underline{w}$ vektort minden esetben a szabályozás előtt kell meghatározni.

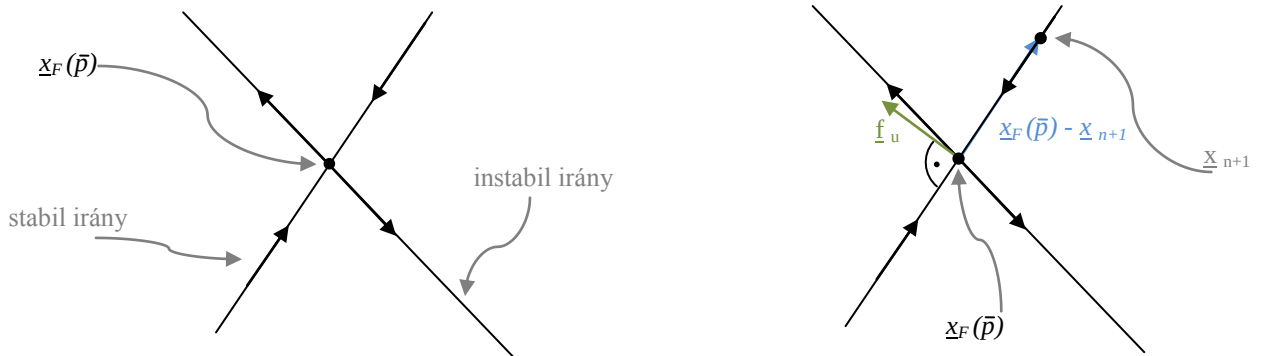
A fázistér fixpontjainak lineáris közelítését követően:

$$\left(\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_F(p) \right) \approx \underline{J} \left(\underline{x}_F(p) \right) \cdot \left(\underline{x}_n - \underline{x}_F(p) \right) \quad (6)$$

ahol a $\underline{J}$ mátrix a leképezés Jacobi-mátrixa (a szabályozandó leképezés fixpontjaiban értelmezve), melynek definíciója :

$$\underline{J} \left(\underline{x}_F(p) \right) \approx \underline{J} \left(\underline{x}_F(\bar{p}) \right) + \left. \frac{\partial \underline{J}}{\partial p} \right|_{p=\bar{p}} \cdot \Delta p \quad (7)$$

A $\underline{J} \left(\underline{x}_F(\bar{p}) \right)$ mátrixnak az egyik sajátvektora mindig a stabil, míg a másik az instabil irányba mutat. A cél az, hogy a kontroll paramétert úgy módosítsuk, hogy az iteráció következő pontja a stabil irányba essen. Nyeregpont típusú fixpont esetén ezt így lehet ábrázolni:



2. ábra – OGY-módszer megértését segítő ábra nyeregpont típusú fixpont esetében.

Látható, hogy az iteráció $(n+1)$ -edik pontja akkor fog a stabil irányba esni, ha az iterációs pontot a fixponttal összekötő vektor párhuzamos a stabil iránnyal. Ezt szeretnénk képlettel is kifejezni, hogy a számítási algoritmusba be lehessen építeni. Ehhez meg kell határozni a sajátvektorok által kifeszített tér kontravariáns bázisvektorait: (az s index a stabil, míg u az instabilt jelöli):

$$\begin{aligned} \underline{e}_s \cdot \underline{f}_s &= 1 & \underline{e}_u \cdot \underline{f}_u &= 1 \\ \underline{e}_s \cdot \underline{f}_u &= 0 & \underline{e}_u \cdot \underline{f}_s &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Így belátható, hogy az iteráció következő pontja akkor fog a stabil irányba esni, ha $\underline{f}_u$ merőleges az iteráció aktuális pontját és a kiválasztott fixpontot összekötő vektorra, tehát:

$$\underline{f}_u \cdot (\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_F(\overline{p})) = 0 \quad (9)$$

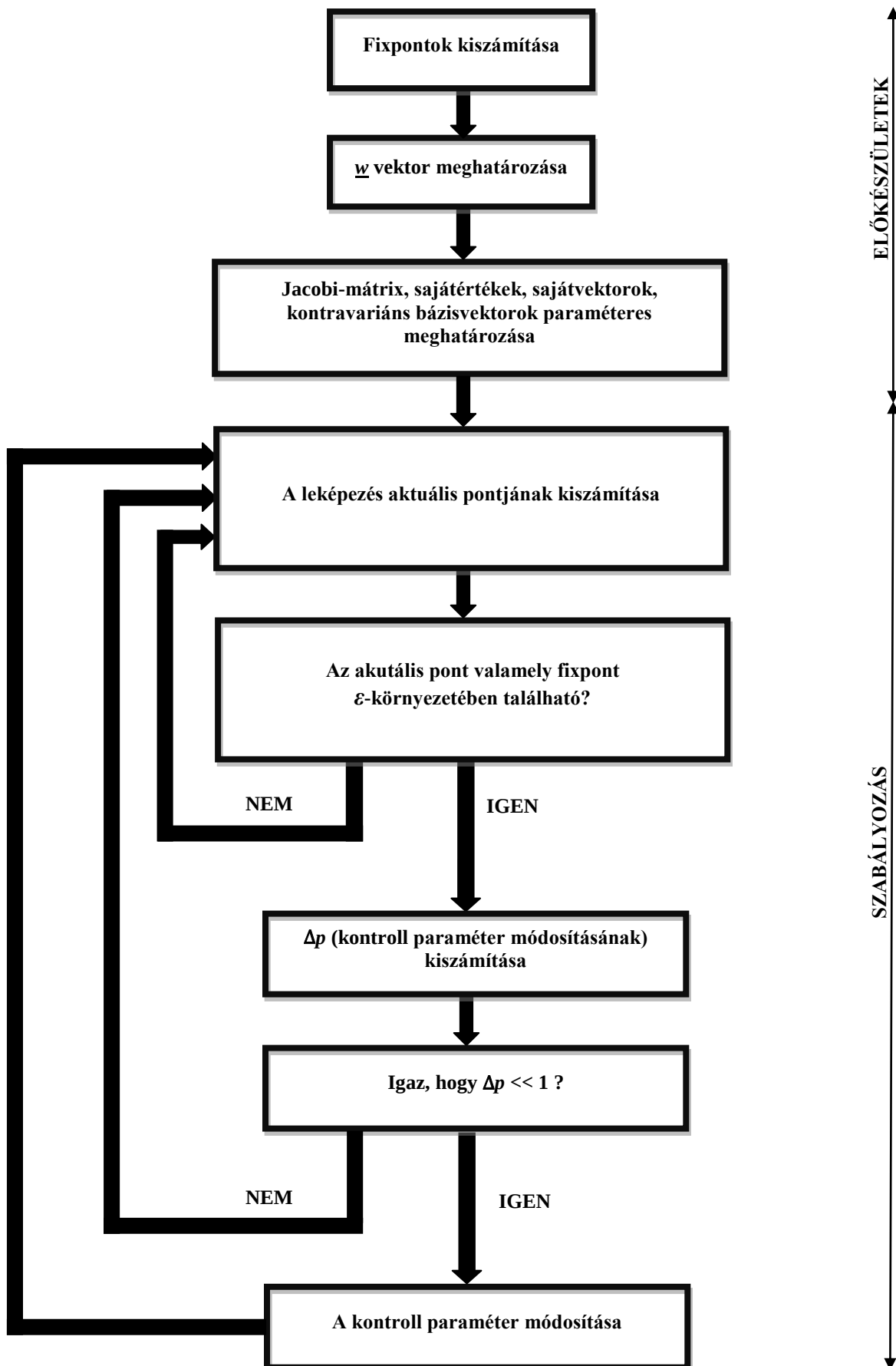
Az (6)-os és (7)-es egyenletet összevonva:

$$\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_F(\overline{p}) \approx \underline{w} \cdot \Delta p (\underline{x}_F(\overline{p})) \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_F(\overline{p}) - \underline{w} \cdot \Delta p) \quad (10)$$

Ezt beírva a (9)-es egyenletbe, majd Δp -re rendezve:

$$\Delta p = \frac{\lambda_u \cdot \underline{f}_u \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_F(\overline{p}))}{(\lambda_u - 1) \cdot \underline{f}_u \cdot \underline{w}} \quad (11)$$

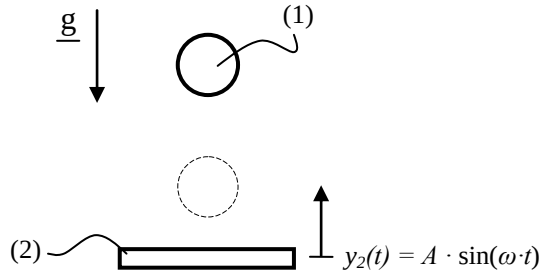
ahol a λ_u a $\underline{J}(\underline{x}_F(\overline{p}))$ mátrix instabil sajátértéke. Az így kapott perturbációs érték alkalmazásánál azonban nem szabad elfelejtenni az (1)-es feltételről. Ha ennek nem tesz eleget a Δp értéke, akkor nem szabad módosítani a kontroll paraméter értékén, hiszen a rendszer ekkor "eltorzul", a szabályozás később pedig problémássá válhat. A következő oldalon az OGY-módszer kétdimenziós leképezésekre való alkalmazásának folyamatábrája látható.



3. ábra – Az OGY-módszer folyamatábrája kétdimenziós leképezések esetén

3. A HARMONIKUSAN GERJESZTETT OSZCILLÁTORON PATTOGÓ LABDA MOZGÁSÁNAK SZABÁLYOZÁSA

3.1 EGYSZERŰSÍTETT ELMÉLETI MODELL [3]



4. ábra - A rendszer sematikus modellje

Két test egyenes centrikus ütközésekor az alábbi összefüggés áll fenn az ütközés előtti, illetve ütközés utáni sebességekre:

$$-e \cdot (v_2 - v_1) = V_2 - V_1 \quad (12)$$

ahol v_1 és v_2 a testek ütközés előtti, V_1 és V_2 a testek ütközés utáni sebességét, e pedig az ütközési tényezőt jelöli, melyre a vizsgált esetben igaz, hogy $0 < e \leq 1$.

Ha a rezgő test mozgásának amplitúdója kicsi a labda mozgásához képest, akkor a két egymást követő ütközés között eltelt időt a következő képlet írja le (példánkban a közegellenállást elhanyagoljuk, illetve további egyszerűsítés, hogy a labda csak függőleges irányú mozgást végezhet):

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2 \cdot V_1(t_n)}{g} \quad (13)$$

Az egyenlet dimenziótlánításához mindkét oldalt ω -val (a rezgő test körfrekvenciája) megszorozva:

$$\omega \cdot t_{n+1} - \omega \cdot t_n = \frac{\omega \cdot 2 \cdot V_1(t_n)}{g} \quad (14)$$

Az egyenletet átrendezve, illetve az $\omega \cdot t$ szorzatot φ -vel (a rezgő test fázisával) helyettesítve:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\omega \cdot 2 \cdot V_1(t_n)}{g} \quad (15)$$

Ez a differenciaegyenlet önmagában még nem elég a rendszer leírásához, hiszen $V_1(t_n)$ nem ismert. Ennek meghatározásához a (12)-es egyenlet átalakítása szükséges, melynél felhasználjuk, hogy az oszcillátor sebessége nem változik az ütközés hatására, tehát

$$v_2(t_n) = V_2(t_n) \quad (16)$$

illetve az oszcillátor amplitúdója elhanyagolható a labda legnagyobb elért magasságához képest:

$$V_1(t_{n-1}) = -v_1(t_n) \quad (17)$$

továbbá, a rezgő test mozgástörvényének idő szerinti első deriváltjából $v_2(t)$ kifejezhető:

$$v_2(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (18)$$

Mindezt beírva a (12)-es egyenletbe és $V_1(t_n)$ -t kifejezve

$$V_1(t_n) = (1 + e) \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_n) + e \cdot V_1(t_{n-1}) \quad (19)$$

Az egyenlet dimenziótlantításához a $2\omega/g$ hányadost felhasználva (a dimenziótlantított sebességet V^* -al jelölve):

$$V_1^*(t_n) = \frac{2 \cdot (1 + e) \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t_n)}{g} + e \cdot V_1^*(t_{n-1}) \quad (20)$$

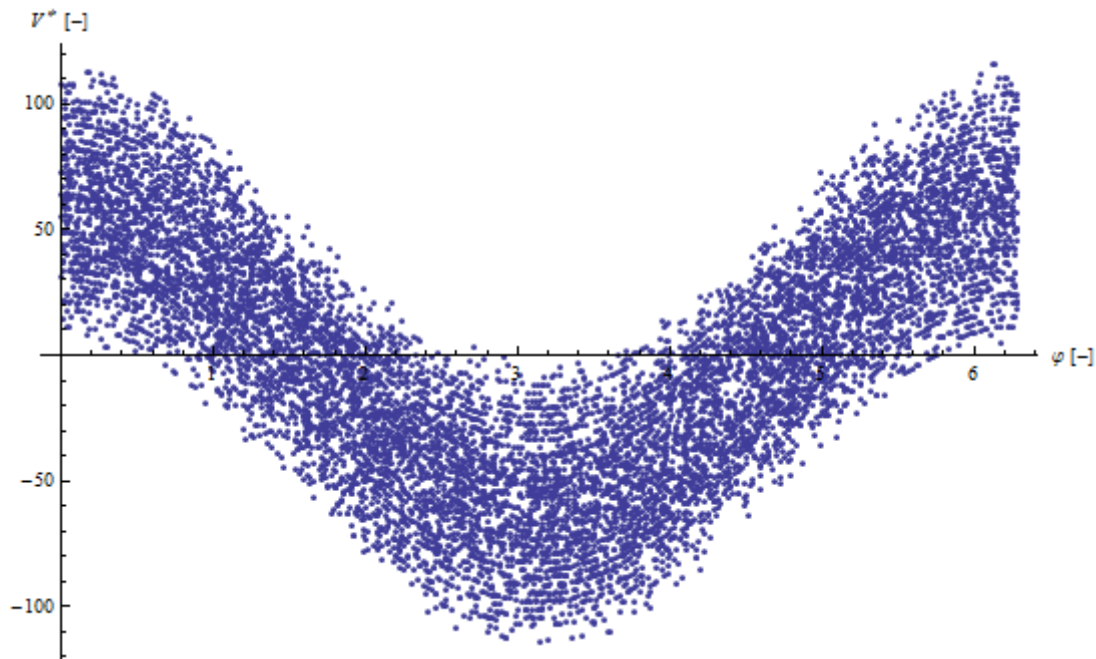
Így a rendszert leíró két differenciaegyenlet (felhasználva, hogy $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$):

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + V_n^* \quad (21)$$

$$V_{n+1}^* = \frac{(1 + e) \cdot 2 \cdot A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot \cos(\varphi_{n+1})}{g} + e \cdot V_n^* \quad (22)$$

3.2 A KAOTIKUS MOZGÁS ELEMZÉSE

A mozgást leíró differenciaegyenletek segítségével egyszerű iterációs algoritmus írható, melynek eredménye a következő ábrán látható:

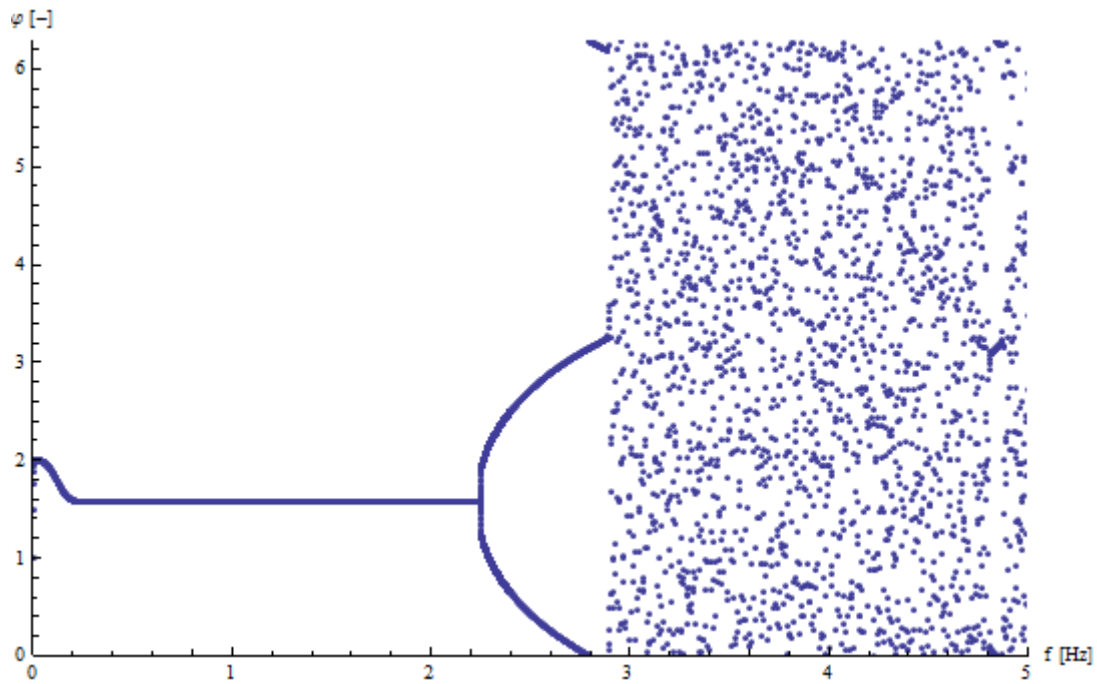


5. ábra – A rendszer kaotikus attraktora. Az ábrázolásnál felhasználtuk, hogy a φ fázis értékei eltolhatók a $[0, 2\pi]$ intervallumba. A rendszerparaméterek értékei: $A = 0.05$ [m], $e = 0.5$ [-], $f = 4$ [Hz], $n = 20000$

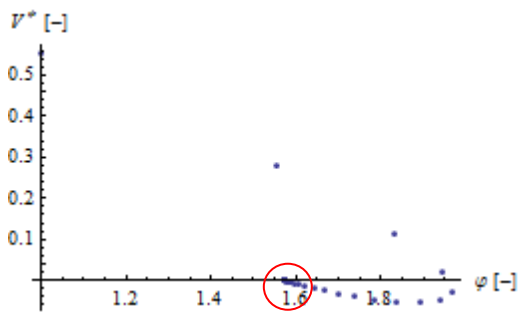
A 5. ábrán látható a rendszer jellegzetes fázistere, melyből látszik, hogy a beállított paraméterértékeknél a labda pattogása kaotikus [5]. Felvetődik a kérdés, hogy vajon más paraméterkombinációkkal előállhat-e periodikus mozgás?

A válasz a bifurkációs diagramon látható (6. ábra). Ez alapján a vizsgált rendszer a $[0, 5]$ Hz frekvenciatartományban három részre osztható: a $[0, 2.23]$ tartományban periodikus, a $[2.23, 2.85]$ intervallumon dupla periódusú, az $] 2.85, 5]$ tartományban pedig kaotikus mozgás jön létre. Utóbbi magyarázza az 5. ábrán látható kaotikus attraktort. (Tapasztalataink szerint $f > 5$ Hz esetén szintén kaotikus mozgás jön létre, de az ábrán csak a $[0, 5]$ Hz tartományt tüntettük fel.)

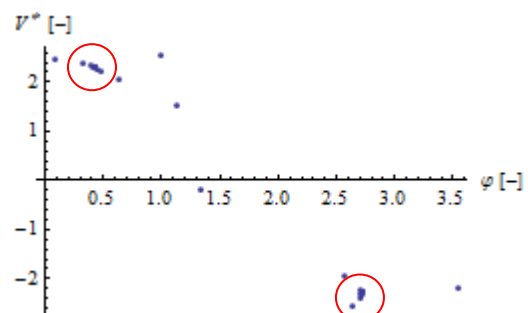
A rendszer különböző mozgásai a fázistérben a 7.a és a 7.b ábrán láthatók.



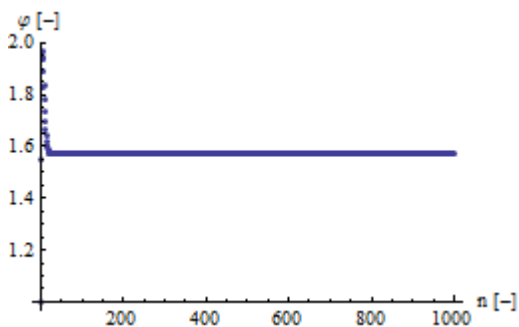
6. ábra – Bifurkáció a frekvencia változtatásával. A frekvencia kivételével a paraméterek változatlanok maradtak ($A = 0.05$ [m], $e = 0.5$ [-]).



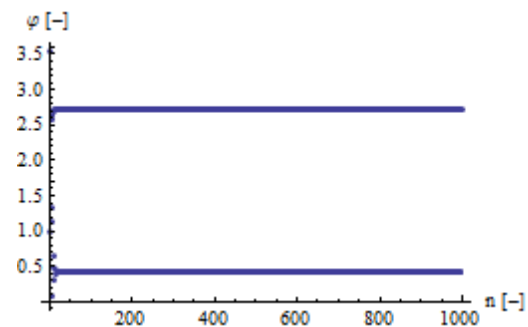
7.a



7.b



7.c

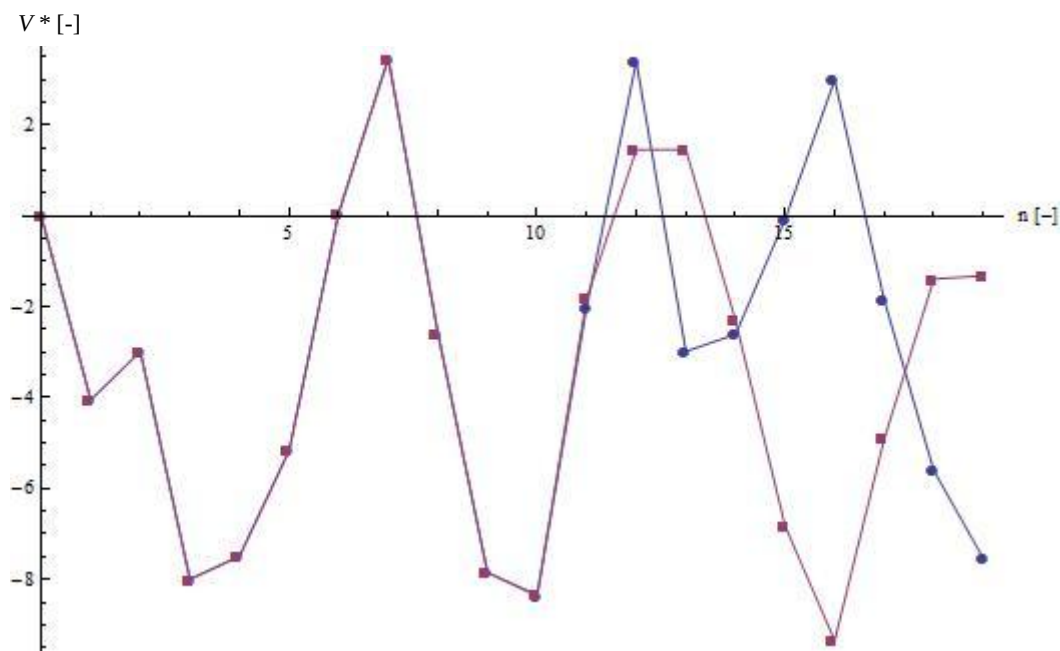


7.d

7.a – Fázistér $f = 0.4$ [Hz] beállítással. 7.b – Fázistér $f = 2.5$ [Hz] beállítással. 7.c – $f = 0.4$ [Hz] esetén periodikus pályára lép a rendszer. 7.d – $f = 2.5$ [Hz] esetén dupla periódusú pályára lép a rendszer.

A stabilitásvizsgálat rendkívül fontos a szabályzás előtt, ugyanis eredményei megmutatják, hogy milyen paraméterbeállítások szükségesek ahhoz, hogy a rendszer ne önmagától, hanem a káosz szabályzó algoritmus miatt térjen periodikus pályára. Tehát a rendszer szimulációját olyan beállításokkal kell elvégezni, amelyekkel biztosan kaotikus mozgás alakul ki, hiszen a későbbiekben a cél az, hogy bármilyen frekvenciánál, annak csupán kis változtatásával szabályozni tudjuk a kaotikus mozgást.

A kaotikus rendszerek nagyon érzékenyek a kezdeti értékekre (pillangóeffektus), s ez megfigyelhető a vizsgált esetben is. Két egymáshoz nagyon közeli, de különböző indítási feltétel (a vizsgált esetben: az oszcillátor fázisa az első ütközés pillanatában illetve a golyó sebessége az első ütközés után) esetén jól látható, hogy a kezdeti együtt haladás után a trajektóriák szétválnak.



8. ábra – Érzékenység a kezdeti értékekre. A két rendszert ugyanazokkal a paraméterekkel, viszont eltérő kezdeti értékekkel indítottuk el, az eltérés 10^{-11} nagyságrendű.

3.3 A SZABÁLYOZÁSHOZ SZÜKSÉGES MENNYISÉGEK KISZÁMÍTÁSA

A 2. fejezetben leírtakat figyelembe véve, az OGY-módszer alkalmazásához szükség van a leképezés fixpontjaira, a leképezés Jacobi-mátrixára, illetve a $\underline{w}$ vektor meghatározására (lásd (5)). Ebben a fejezetben e mennyiségek kerülnek meghatározásra.

A rendszer fixpontjai egyszerűen felderíthetők [3], a (21)-es és (22)-es egyenlet segítségével. A fixpontok meghatározásához felhasználható, hogy

$$V_{n+1}^* = V_n^* \quad (23)$$

illetve

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2 \cdot k \cdot \pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm K \quad (24)$$

ahol

$$K < \frac{(1+e) \cdot A \cdot \omega^2}{(1-e) \cdot g \cdot \pi} \quad (25)$$

Így a (21)-es egyenlet a következőképpen néz ki:

$$\varphi_n + 2 \cdot k \cdot \pi = \varphi_n + V_n^* \quad (26)$$

Tehát a fixpont egyik koordinátája:

$$\bar{V}^* = 2 \cdot k \cdot \pi \quad (27)$$

Hasonlóképpen a (22)-es egyenlet is átalakítható:

$$V_n^* = \frac{2 \cdot (1+e) \cdot A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot \cos(\varphi_n)}{g} + e \cdot V_n^* \quad (28)$$

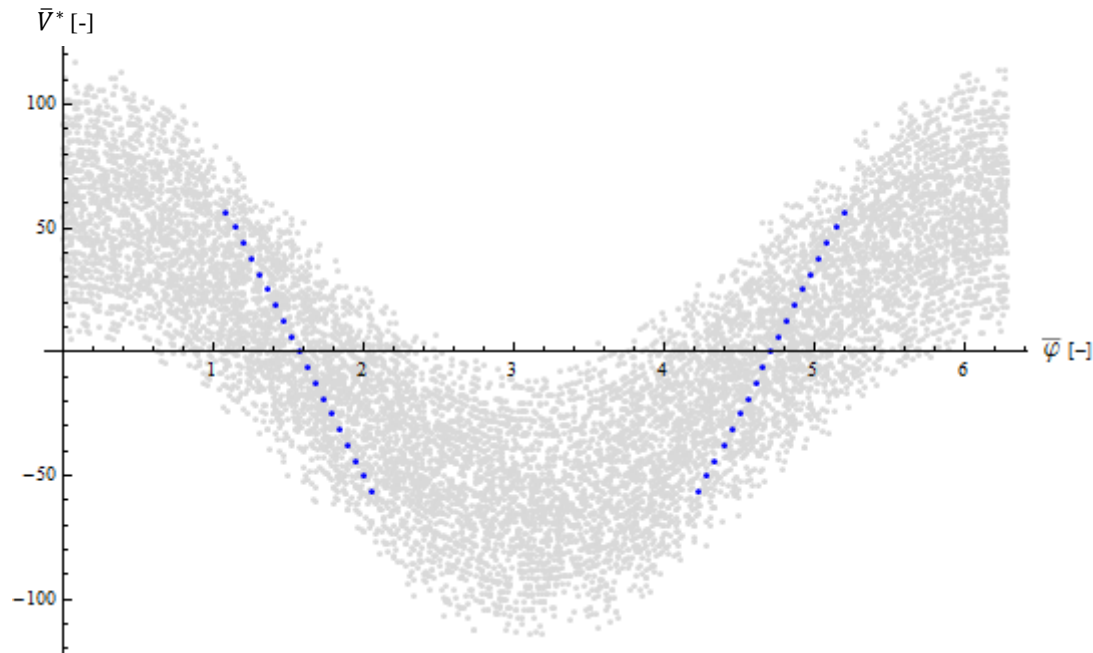
V_n^* helyére az imént megkapott fixpont koordinátát írva, illetve a fázist kifejezve:

$$\bar{\varphi} = \arccos\left(\frac{g \cdot (1-e) \cdot k}{(1+e) \cdot A \cdot 4 \cdot \pi \cdot f^2}\right) \quad (29)$$

Így a rendszer fixpontjai:

$$(\bar{\varphi}, \bar{V}^*) = \left(\arccos \left(\frac{g \cdot (1 - e) \cdot k}{(1 + e) \cdot A \cdot 4 \cdot \pi \cdot f^2} \right), 2 \cdot k \cdot \pi \right) \quad (30)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm K$$



9. ábra – A leképezés fixpontjai a $[0, 2\pi]$ intervallumban. Paraméterbeállítások: $f = 10$ [Hz], $A = 0.05$ [m], $e = 0.5$ [-]

A szabályozáshoz szükség van a leképezés Jacobi-mátrixára, mely jelen esetben:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{n+1}(\varphi_n, V_n^*)}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}(\varphi_n, V_n^*)}{\partial V_n^*} \\ \frac{\partial V_{n+1}^*(\varphi_n, V_n^*)}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial V_{n+1}^*(\varphi_n, V_n^*)}{\partial V_n^*} \end{bmatrix} \quad (31)$$

melynek egyes értékei a következők:

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\varphi_n, V_n^*)}{\partial \varphi_n} = 1 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\varphi_n, V_n^*)}{\partial V_n^*} = 1 \quad (33)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}^*(\varphi_n, V_n^*)}{\partial \varphi_n} = -\frac{(1+e) \cdot 2 \cdot A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}{g} \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*) \quad (34)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}^*(\varphi_n, V_n^*)}{\partial V_n^*} = -\frac{(1+e) \cdot 2 \cdot A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}{g} \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*) + e \quad (35)$$

A karakterisztikus egyenletet felhasználva a Jacobi-mátrix sajátértékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1+e-d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*) \pm \sqrt{-4 \cdot e + (-1-e+d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*))^2}) \quad (36)$$

ahol

$$d = \frac{(1+e) \cdot 2 \cdot A \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2}{g} \quad (37)$$

Ennek segítségével a mátrix sajátvektorai:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin(\varphi_n + V_n^*)}(1-e+d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*) - \sqrt{-4e + (-1-e+d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*))^2}) \\ 2d \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin(\varphi_n + V_n^*)}(1-e+d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*) + \sqrt{-4e + (-1-e+d \cdot \sin(\varphi_n + V_n^*))^2}) \\ 2d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Adott paraméterek mellett a fázistér stacionárius pontjaiban (fixpontok) eldönthető, hogy az előző két vektor közül melyik a stabil, melyik az instabil irány, ennek segítségével pedig megadható a stabil illetve az instabil sajátérték. Ezeket a szabályozáshoz minden iterációnál külön kell meghatározni. Ha a rendszer olyan paraméterekkel fut, melyek kaotikus mozgást idéznek elő, akkor jelen esetben igaz, hogy

$$|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2| \quad (38)$$

A stabil az egynél kisebb, míg az instabil az egynél nagyobb sajátérték, melyekhez hozzárendelhetők a stabil és instabil sajátvektorok, továbbá ezek segítségével meghatározhatók a stabil és instabil kontravariáns sajátvektorok.

A sorfejtés miatt a $\underline{w}$ vektor meghatározása is szükséges a szabályozás előtt [2]. Definíció szerint:

$$\underline{w} = \frac{\partial \underline{x}_F}{\partial p} \Big|_{p=\bar{p}} \quad (39)$$

ahol az $\underline{x}_F$ a fixpontot, a p pedig azt a rendszerparamétert jelöli, melyet kontroll paraméternek választunk. Ennek változtatásával kívánjuk elérni, hogy a kaotikus mozgás periodikussá alakuljon át. Az oszcillátor gerjesztésének frekvenciája kézenfekvő választás. Így a $\underline{w}$ vektor elemei:

$$w_1 = \frac{\partial \bar{\varphi}(f)}{\partial f} \Big|_{f=\bar{f}} = \frac{(1-e) \cdot g \cdot k}{2 \cdot A \cdot (1+e) \cdot \bar{f}^3 \sqrt{1 - \frac{(1-e)^2 \cdot g^2 \cdot k^2}{16 \cdot A^2 \cdot (1+e)^2 \cdot \bar{f}^4 \cdot \pi^2}}} \quad (40)$$

$$w_2 = \frac{\partial \bar{V}^*(f)}{\partial f} \Big|_{f=\bar{f}} = 0 \quad (41)$$

A fejezetben meghatározott vektorok, mátrixok illetve más egyéb mennyiségek kiszámítása alapfeltétele a mozgás szabályozásának.

A következő fejezetben ismertetjük a rendszer mozgásának szabályozását, s igazán majd itt lehet látni az OGY-módszer előnyeit, s hátrányait leképezések esetén.

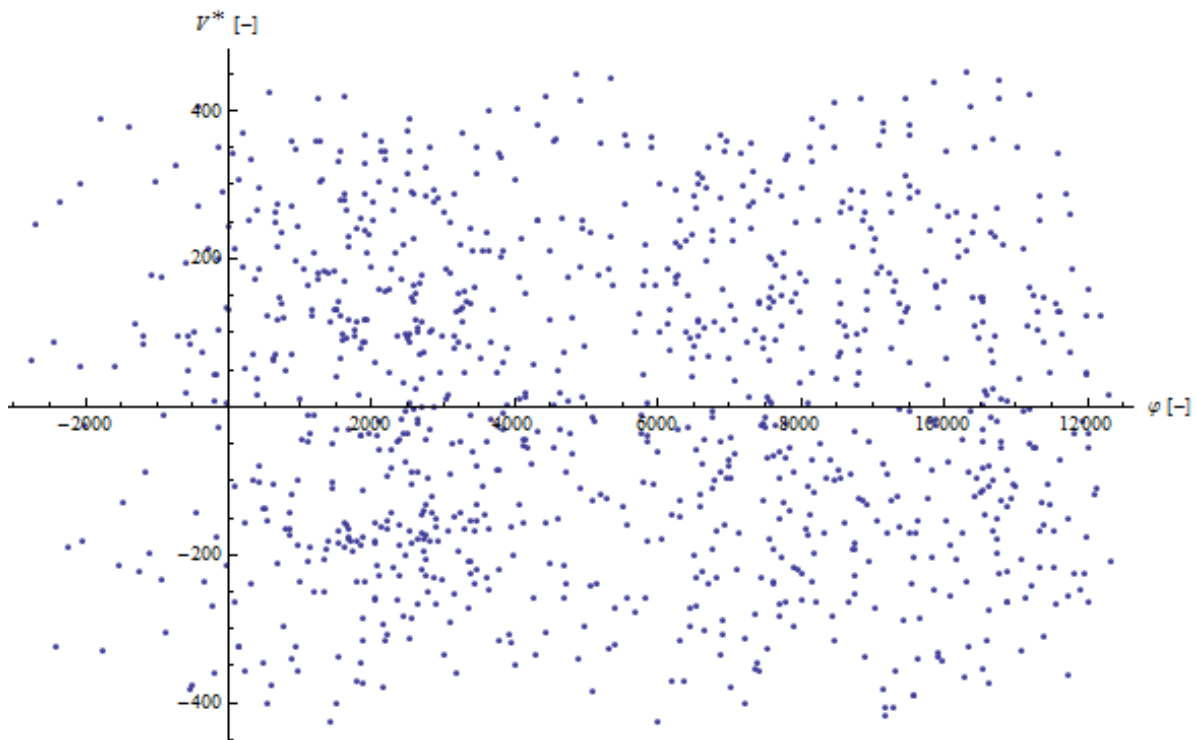
3.4 A SZABÁLYOZÁS

A fejezetben található példák mindegyikét $f = 10$ [Hz], $A = 0.05$ [m] és $e = 0.5$ [-] paraméterbeállításokkal számoltuk ki.

A szabályozó algoritmus elméletben nagyon egyszerű. A programot a 3. ábra alapján kell megírni, viszont a tárgyalt példában több helyen nehézségek lépnek fel. Az első megoldásra váró probléma a fixpontok biztos detektálása volt.

A szabályozáshoz szükség van a φ_n illetve V_n^* értékekre, hiszen ezeket hasonlítjuk össze az előre meghatározott fixpontokkal, viszont a fázis értékeit nem szabad eltolni a $[0, 2\pi]$ intervallumba, hiszen ekkor nem az aktuális φ_n érték szerepel a leképezés Jacobi-mátrixának számításában.

Ekkor viszont a probléma az, hogy nem csak a $[0, 2\pi]$ intervallumhoz tartozó fixpontokat kell meghatározni, hanem a fázisnak a $[0, 2\pi]$ tartományon kívül eső értékeihez tartozókat is. Az első szabályzó programot úgy írtuk meg, hogy először egy előzetes szimulációval megfigyeltük, hogy a leképezés pontjai a fázisteret mennyig járják be (egy bizonyos iterációig), majd ebben a tartományban kiszámoltuk az összes fixpontot, egy tömbbe helyeztük őket, s a szabályzó program ezzel a tömbbel hasonlította össze az aktuális értékeket. Ez a megoldás nem előnyös, hiszen egyrészt egy előzetes szimuláció szükséges hozzá, továbbá előállhat olyan eset, hogy hiába van az aktuális pont közel egy fixponthoz, a szabályzás nem történik meg, hiszen az aktuális pont „kivándorol” abból a tartományból, melyben meghatároztuk a fixpontokat. Ezen okok miatt írtunk egy új fixpont-detektáló algoritmust.



10. ábra – A rendszer fázistere. Az ábrázolásnál nem töltük el a fázis értékeit a $[0, 2\pi]$ intervallumba.

A módszer lényege az, hogy a szabályzás előtt a program kiszámítja a rendszer fixpontjait a $[0, 2\pi]$ intervallumon, majd szabályzás közben az aktuális pontot eltolja ugyanebbe az

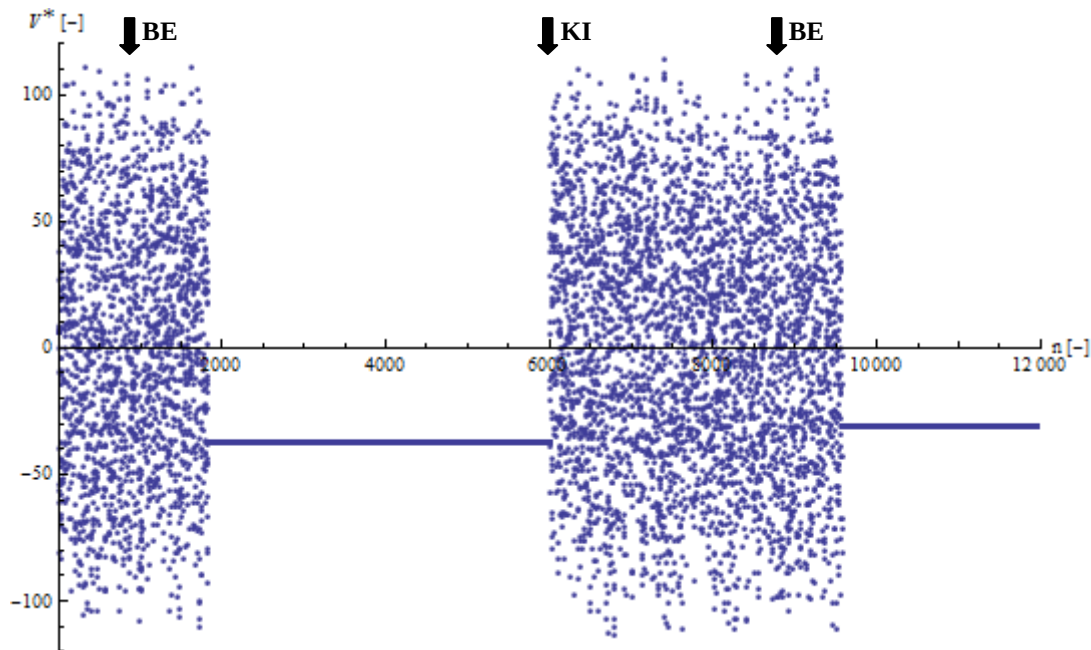
intervallumba. Ha az eltolt érték valamely fixpont ε -környezetében található, akkor a fixpontot eltolja abba a $[2 \cdot q \cdot \pi, 2 \cdot (q+1) \cdot \pi]$ intervallumba ($q \in \mathbb{Z}$), melyben az eredeti, aktuális pont tartózkodik, s ezután ezzel a két értékkel számol tovább. Ily módon sikerült megoldani a fixpont-detektálás kérdését, hiszen a továbbiakban a szabályzáshoz nincs szükség előzetes szimulációra, a nagyszámú fixpont nagy méretű tömbbe pakolására, továbbá ez a módszer biztosan működik, akármilyen értéket vesz fel az iterációs pont.

Az ε illetve Δp_{max} értékeinek számszerű meghatározása további problémát okoz. Az ε értéknek meghatározásánál két dolgot kell figyelembe venni: nem lehet túl nagy, hiszen akkor a linearizálás érvényét veszti (a szabályozás ugyan elkezdődik, de gyakran már az első iteráció után összeomlik), viszont nem ajánlatos túl kicsi értéket sem beállítani, hiszen akkor a szabályzás megkezdéséhez szükséges idő megnő. Ezt általában az határozza meg, hogy a leképezés által kapott pontok koordinátáinak az értéke milyen nagyságrendekbe esik. Példánkban $\varepsilon = 0.5$ értéket alkalmaztunk. A Δp_{max} esetében figyelembe kell venni azt, hogy a kontroll paramétert csak kis mértékben szabad megváltoztatni ((2)-es összefüggés). Példánkban a kontroll paraméter ($f = 10$ [Hz] esetén) maximum 1%-os változtatását engedélyeztük.

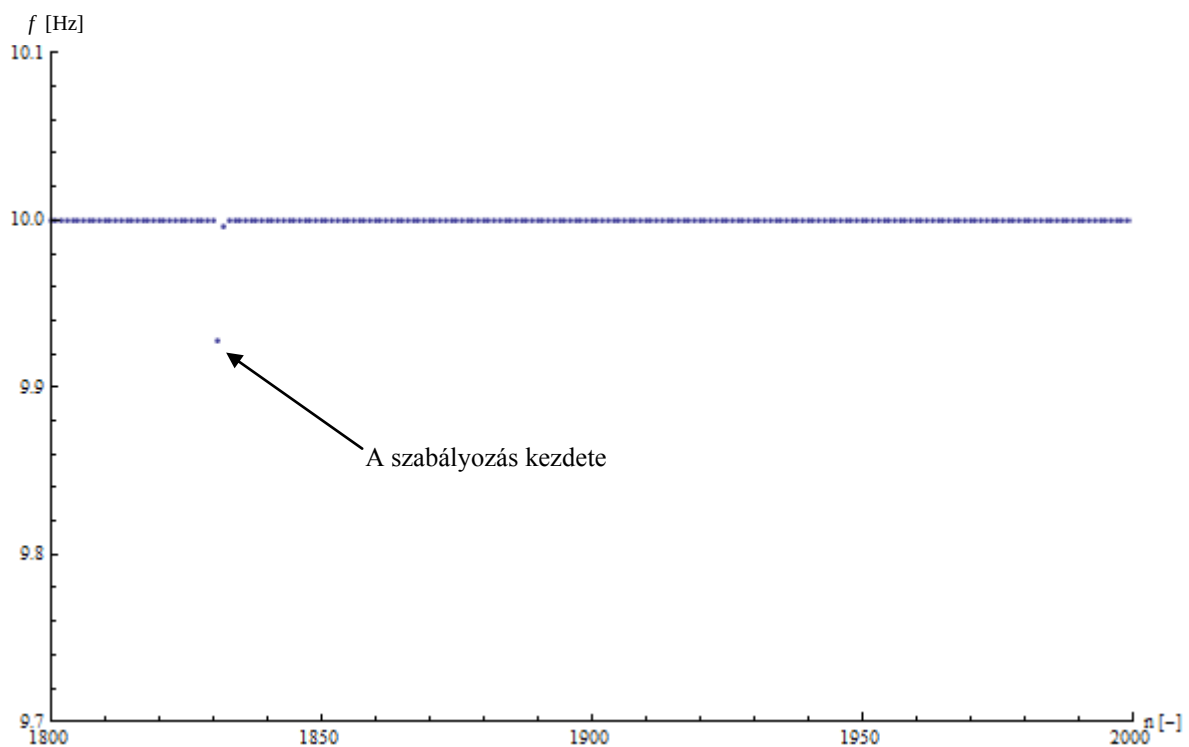
A következő ábrákon bemutatjuk a szabályozás eredményét.



11. ábra – Ábra a szabályzásról. A leképezést egy fixpontból indítottuk el, a szabályzó programot pedig már az első iterációnál bekapcsoltuk. Látható, hogy az első 50000 iterációig működik a szabályozás.

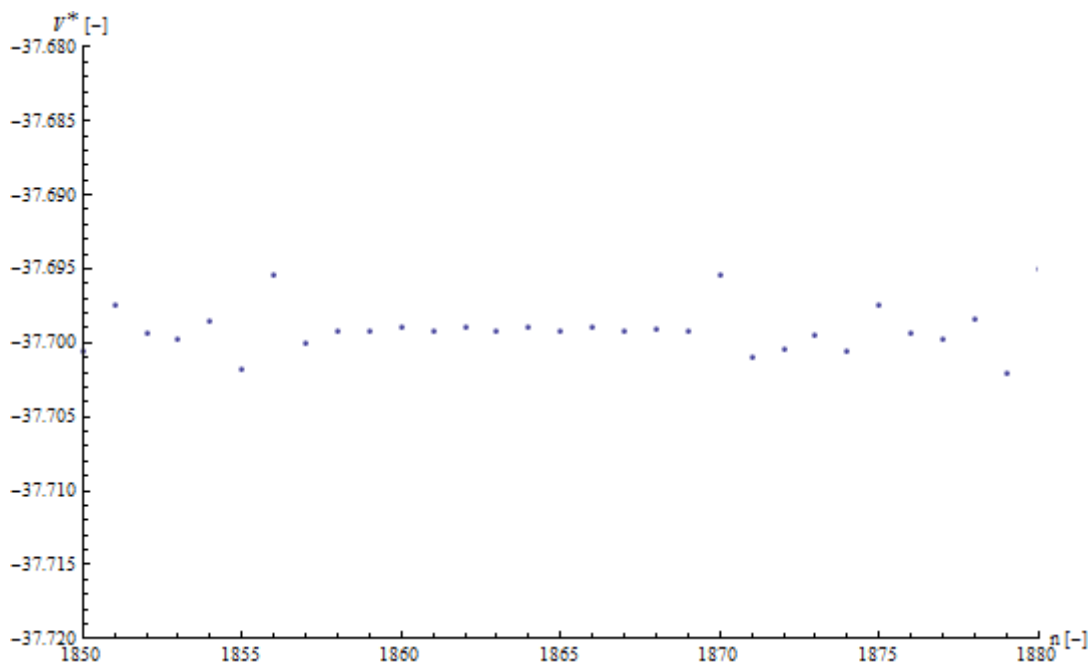


12. ábra – Ábra a szabályzásról 2. A program futása során be- illetve kikapcsoltuk a szabályozást. Látható, hogy a tényleges szabályozáshoz szükséges iteráció szám a példában az ezret is meghaladhatja.

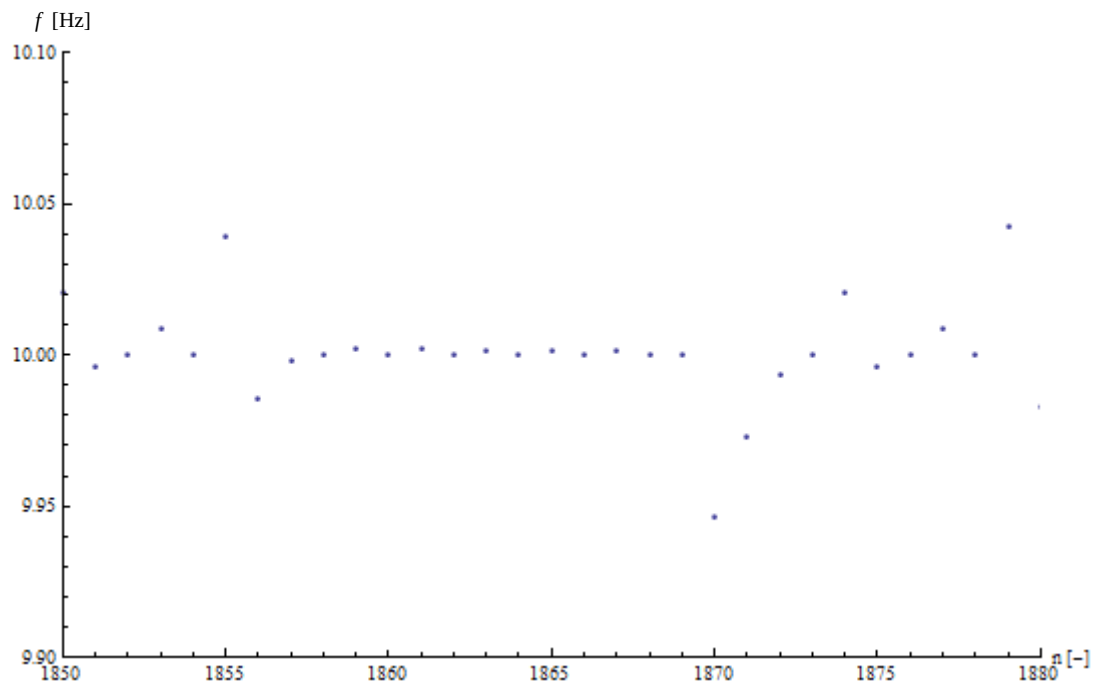


13. ábra – A kontroll paraméter értékének változása az előző példában. Megfigyelhető, hogy a szabályozás elején egy-két iterációig a kontroll paraméter értéke "nagyinak" mondható (kb. 0.1-1%-os változás), a szabályozás előrehaladtával viszont ez radikálisan lecsökken, a változtatás átlagosan 10^{-10} nagyságrendű.

Tapasztalat alapján, példánkban az OGY-algoritmus segítségével számolt perturbációk a szabályozás előrehaladtával átlagosan 10^{-10} nagyságrendűek, s ilyen kicsi változtatást a gyakorlatban legtöbbször nem lehet megvalósítani. Ezért át kellett írni az algoritmust. A perturbáció értékére nem csak felső, hanem alsó korlátot is meghatároztunk. Így, amikor elindul a szabályozás, az aktuális pont folyamatosan közelít a fixponthoz, majd ha a kontroll paraméter változtatásának értéke eléri a megengedett minimumot, akkor a szabályozás kikapcsol, ezáltal az iterációs pont távolodik a fixponttól. A kontroll paraméter értékét legközelebb akkor módosítjuk, amikor az aktuális pont elég távol van a fixponttól ahhoz, hogy a perturbáció értéke nagyobb legyen a beállított minimumnál (viszont ne legyen nagyobb az előre meghatározott maximumnál). A 14., a 15. és a 16. ábrákon látható, hogy a gyakorlatban hogyan működik ez az elképzelés.

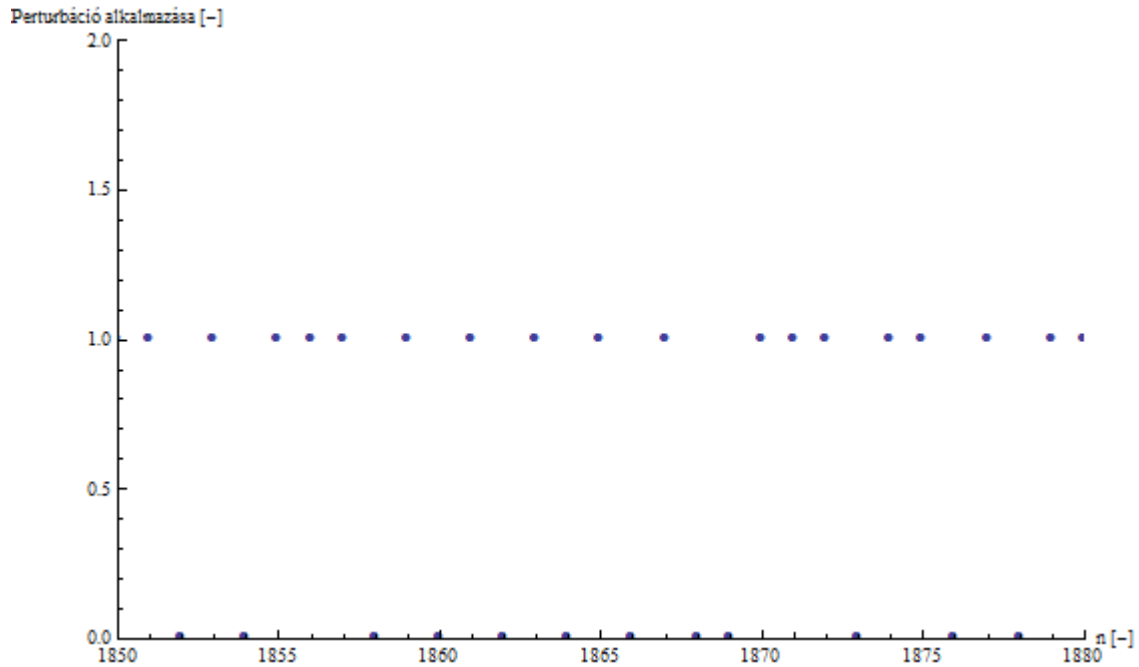


14. ábra – Szabályozás a perturbáció előre meghatározott alsó korlátjának segítségével – Az alsó korlát értéke: $\Delta f_{min} = 0.01$ [Hz]



15. ábra – Szabályozás előre meghatározott perturbáció alsó korlát segítségével 2 – Alsó korlát értéke:

$$\Delta f_{\min} = 0.01 \text{ [Hz]}$$



16. ábra – Szabályozás előre meghatározott perturbáció alsó korlát segítségével 3 – Alsó korlát értéke:

$\Delta f_{\min} = 0.01 \text{ [Hz]}$, ha a kontroll paraméter módosítva van, akkor a "Perturbáció alkalmazása" tengelyen az aktuális pont értéke 1.

Az OGY-módszer kétdimenziós leképezésekre való alkalmazásának előnyeit és hátrányait egyaránt bemutatja a feldolgozott példa. Az algoritmus előnye az egyszerűség: viszonylag kevés számítással meghatározhatók a szabályozáshoz szükséges mennyiségek. Hátrányként három dolgot kell megemlíteni. Az egyik ezek közül a tényleges szabályozáshoz szükséges hosszú várakozási idő. Mint láttuk, hiába van a szabályozás bekapcsolva, meg kell várni, míg az iterációs pont egy fixpont közelébe érkezik, s előállhat olyan eset is, mikor ez több ezer iteráción keresztül sem következik be. Ez a szakirodalomban vizsgált szabályozni kívánt kétdimenziós leképezések esetén sokszor nem mutatkozik meg.

Az OGY-algoritmus másik hátránya a rendkívül kicsi perturbációs érték. Ezt a problémát a dolgozatban orvosoltuk. A harmadik probléma a $\underline{w}$ vektorhoz köthető, s ugyan nem minden rendszerben fordul elő, de amelyikben igen, ott át kell gondolni a használatát (Az általunk vizsgált esetben éppen előfordul). Látható, hogy ha $k = 0$ (k magyarázata: (24)-es összefüggés), akkor a $\underline{w}$ vektor mindkét koordinátája a nulla értéket veszi fel ((40)-es és (41)-es egyenletek). Viszont ha a $\underline{w}$ vektor nullvektor, akkor értelemszerűen bármilyen más vektorral vett skalárszorzatának értéke nulla, s ekkor a (11)-es egyenlet matematikailag értelmezhetetlenné válik, hiszen a tört nevezőjének értéke szintén nulla lesz. Tehát, ezeket a fixpontokat nem lehet használni a szabályozás során, s ez további plusz időt jelenthet a szabályozás kezdetéig.

4. AZ OGY-MÓDSZER HASZNÁLATA KÉSLELTETETT KOORDINÁTÁK SEGÍTSÉGÉVEL [4]

Kísérletek során sok esetben a szabályozandó kaotikus rendszert leíró egyenletek nem ismertek teljes egészükben, továbbá nincs meg a lehetőség arra, hogy a rendszer állapotát leíró összes jelet mérni tudjuk. Ebben az esetben a szabályozás az ún. késleltetett koordináták használatával megoldható. Legyen $u(t)$ a rendszer egyik állapotváltozójának folyamatosan mért jele. Ekkor egy m -dimenziós késleltetett-koordináta vektor képezhető a következő módon:

$$\underline{x}(t) = (u(t), u(t - t_D), u(t - 2 \cdot t_D), \dots, u(t - (m - 1) \cdot t_D)) \quad (42)$$

ahol m a rekonstruált fázistér dimenzióját, t a folytonos időt, a t_D a célszerűen kiválasztott késleltetési időt jelöli. Ebből Poincaré-metszet készíthető, mely gerjesztett rendszerek esetén legtöbbször ún. stroboszkópikus leképezéssel (a fázistér csak azon pontjai kerülnek megjelenítésre, melyeket a gerjesztés periódusidejének (T) egész számú többszöröseinél vesz fel a rendszer) hozható létre. Egyenletekkel leírva:

$$t_n = n \cdot T + t_0 \quad (43)$$

$$\underline{x}_n = \underline{x}(t_n) \quad (44)$$

Belátható, hogy $\underline{x}_{n+1}$ értéke nem csak a kontroll paraméter n -dik értékétől, hanem az összes olyan p értéktől függ, mely az $[t_n - (m - 1) \cdot t_D, t_n]$ intervallumban előfordul. Legyen r a legkisebb egész szám, melyre teljesül, hogy

$$m \cdot t_D < r \cdot T \quad (45)$$

Ekkor a $\underline{x}_{n+1}$ vektor értéke a következő mennyiségektől függ: $\underline{x}_n, p_n, p_{n-1}, \dots, p_{n-r}$

Egyszerűsítésként legyen $r = 1$ (A dolgozatban található példában is úgy fogjuk megválasztani a késleltetési időt, hogy r értéke 1 legyen), ekkor:

$$\underline{x}_{n+1} = G(\underline{x}_n, p_n, p_{n-1}) \quad (46)$$

A rekonstruált fázisteret linearizálva:

$$\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_*(\bar{p}) = \underline{A} \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_*(\bar{p})) + \underline{B}_a \cdot (p_n - \bar{p}) + \underline{B}_b \cdot (p_{n-1} - \bar{p}) \quad (47)$$

ahol

$$\begin{aligned} \underline{A} &= D_x \cdot G(\underline{x}, p, p') \\ \underline{B}_a &= D_p \cdot G(\underline{x}, p, p') \\ \underline{B}_b &= D_{p'} \cdot G(\underline{x}, p, p') \end{aligned}$$

ahol a parciális deriváltak értékét az $\underline{x} = \underline{x}_*(\bar{p})$ (a rendszer fixpontjai), illetve $p = p' = \bar{p}$ helyen kell venni.

Lineáris szabályozási törvényt bevezetve:

$$p_n - \bar{p} = -\underline{K}^T \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_*(\bar{p})) - k \cdot (p_{n-1} - \bar{p}) \quad (48)$$

majd ezt a (47)-os egyenlettel kombinálva:

$$\underline{y}_{n+1} - \underline{y}_*(\bar{p}) = (\underline{A} - \underline{B} \cdot \underline{K}^T) \cdot \underline{y}_n - \underline{y}_*(\bar{p}) \quad (49)$$

ahol

$$\underline{y}_{n+1} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{n+1} \\ p_n \end{bmatrix} \quad \underline{y}_* = \begin{bmatrix} \underline{x}_* \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_a \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K} \\ k \end{bmatrix}$$

A (49)-es egyenlet pólusáthelyezéssel szabályozással oldható meg, melynek ismertetésével a dolgozatban részletesen nem foglalkozunk. A [4]-es hivatkozásban megtalálható annak leírása, hogy a $\underline{K}^T$ elemei hogyan határozhatók meg.

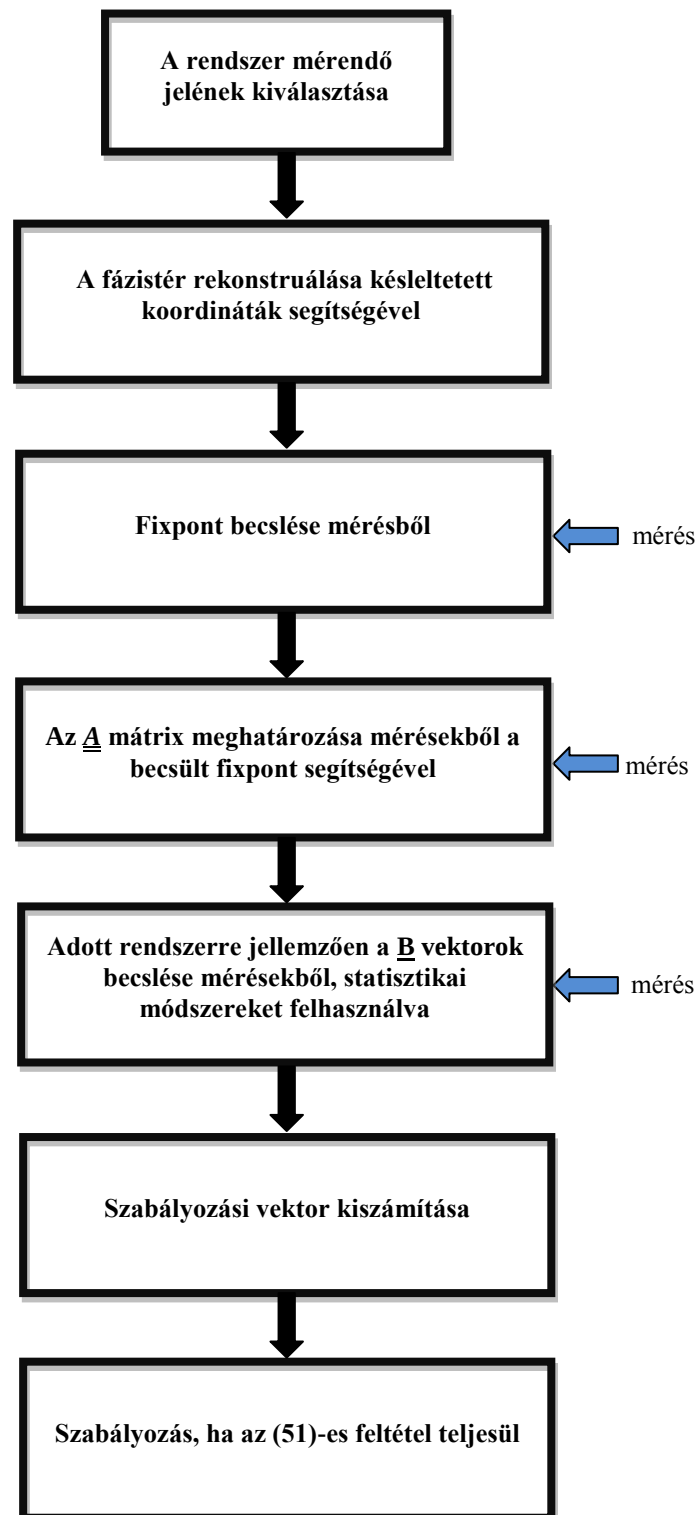
Az így megkapott $\underline{K}^T$ szabályozási vektor segítségével a szabályozó paraméter megváltoztatása kiszámolható:

$$\Delta p = -\underline{K}^T \cdot (\underline{y}_{n+1} - \underline{y}_*(\overline{p})) \quad (50)$$

Ez viszont csak akkor alkalmazható, ha

$$|\Delta p| \ll 1 \quad (51)$$

A fejezet elején említettük, hogy a szabályozás megvalósításához nem szükséges a rendszert leíró egyenletek ismerete. Viszont ha ezeket nem ismerjük, akkor az $\underline{\underline{A}}$ mátrix, a $\underline{B}_a$ illetve a $\underline{B}_b$ vektor pontos meghatározása nem lehetséges. A következő fejezetben azok a különböző módszerek kerülnek bemutatásra, melyek segítségével nagyon pontos becslés adható ezen mennyiségekre.

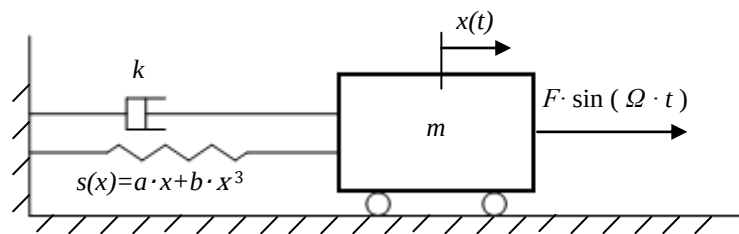


17. ábra – OGY-módszer folyamatábrája késleltetett koordináták használatával.
Ha a folyamat valamely fázisában mérés szükséges, akkor ezt nyíllal jelöltük.

5 . A GERJESZTETT DUFFING-OSZCILLÁTOR SZABÁLYOZÁSA

5.1 A REZGŐRENDSZER BEMUTATÁSA

A gerjesztett Duffing-oszcillátor a kaotikus mozgás egyik tipikus példája. A rendszer egy nemlineáris karakterisztikájú rugóból, lineáris csillapításból, és egy harmonikusan gerjesztett m tömegű pontszerű testből áll (18. ábra).

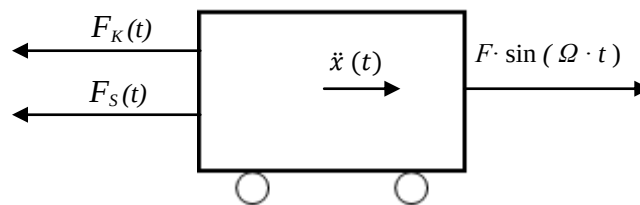


18. ábra – A gerjesztett Duffing-oszcillátor

A rendszer egy szabadságfokú. Általános koordinátának a tömeg elmozdulását választva, a teljesítmény-tételt alkalmazva:

$$P(t) = \dot{E}_{\text{kin}}(t) \quad (52)$$

ahol $P(t)$ a rendszerre ható erők és nyomatékok teljesítményének összege az idő függvényében, $\dot{E}_{\text{kin}}(t)$ pedig a rendszer kinetikus energiájának idő szerinti első deriváltja az idő függvényében.



Így esetünkben (mivel a tömeg csak vízszintes irányú mozgást végezhet, ezért a vektorjelöléstől eltekintünk):

$$P(t) = F \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot \dot{x}(t) - F_S(t) \cdot \dot{x}(t) - F_K(t) \cdot \dot{x}(t) \quad (53)$$

illetve

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2(t) \quad (54)$$

$$\dot{E}_{\text{kin}}(t) = m \cdot \dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) \quad (55)$$

Ezeket a (52)-es egyenletbe beírva:

$$m \cdot \dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) = F \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot \dot{x}(t) - F_S(t) \cdot \dot{x}(t) - F_K(t) \cdot \dot{x}(t) \quad (56)$$

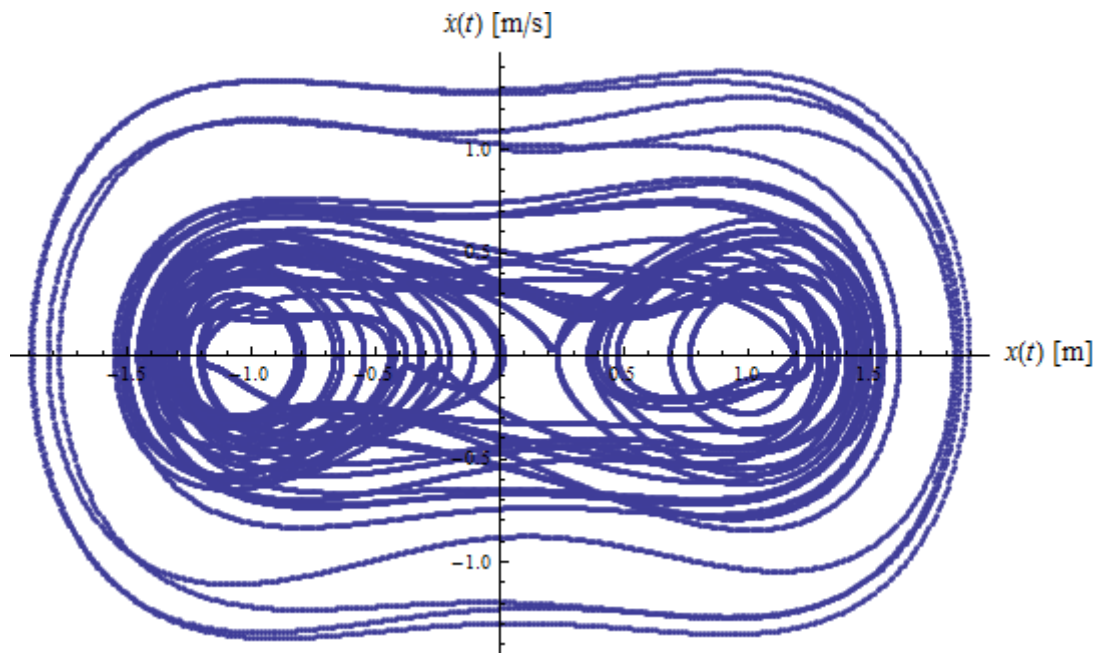
A rugóerőt és a csillapításból származó erőt behelyettesítve és átrendezve:

$$m \cdot \dot{x}(t) \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) + (a \cdot x(t) + b \cdot x^3(t)) \cdot \dot{x}(t) = F \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot \dot{x}(t) \quad (57)$$

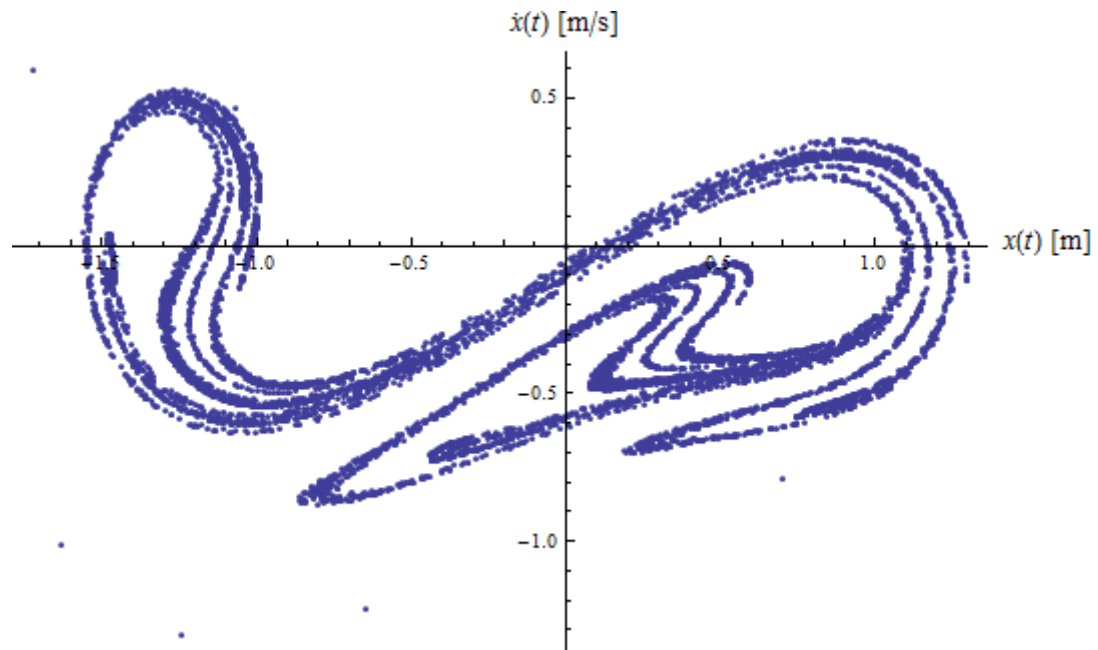
Mivel az $\dot{x}(t)$ függvény diszkrét helyektől eltekintve nem nulla, egyszerűsíteni lehet vele:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + a \cdot x(t) + b \cdot x^3(t) = F \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (58)$$

5.1.1 FÁZISTÉR, POINCARÉ-METSZET



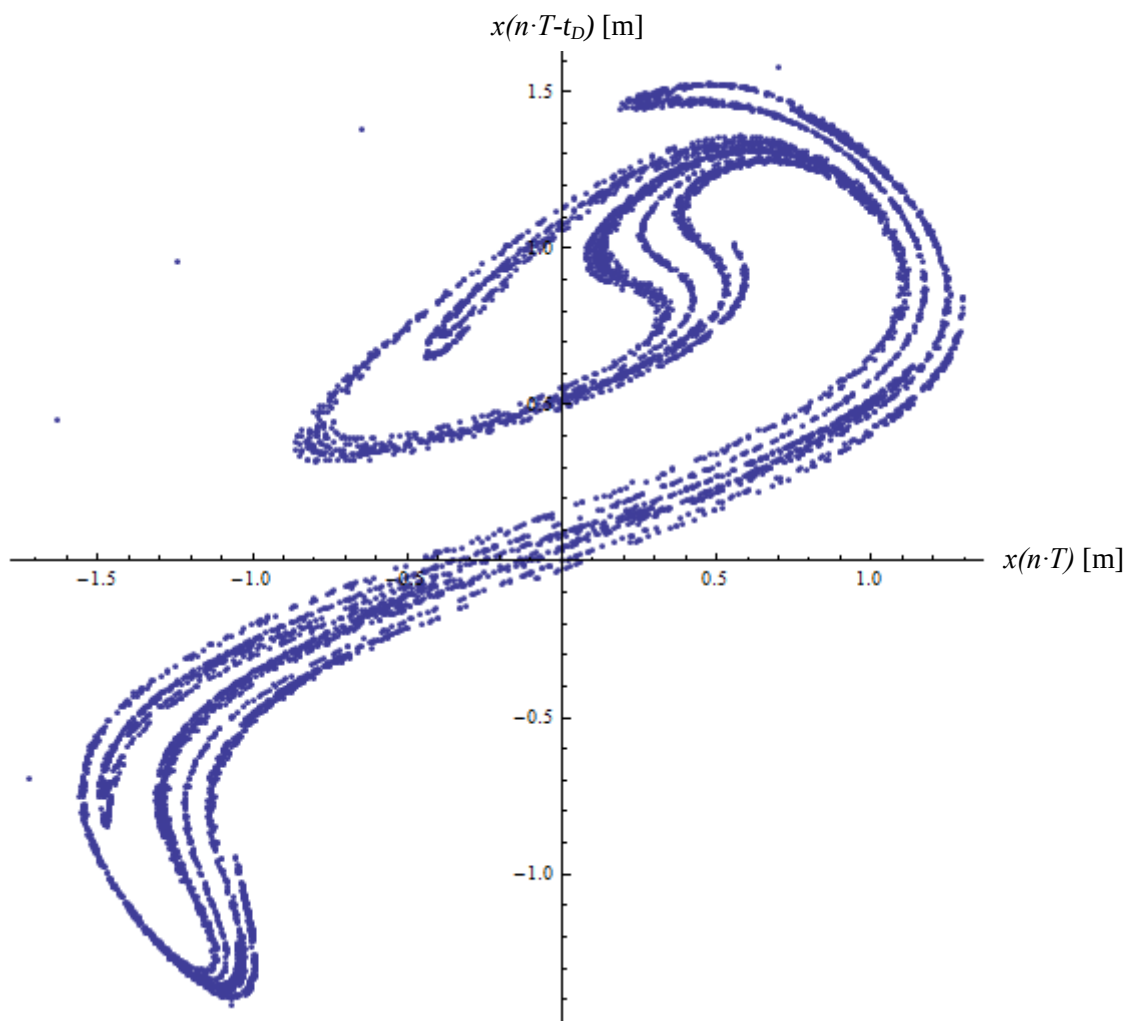
19. ábra – A gerjesztett Duffing-oszcillátor jellegzetes fázistere. Az ábrázoláshoz $m = 1$ [kg], $a = -1$, $b = 1$, $k = 0.1$ [Ns/m], $F = 0.23$ [N], $\Omega = 0.95$ [rad/sec] értékeket használtunk, melyek kaotikus mozgást idéztek elő. A dolgozat többi ábrája, illetve a szabályozás is ezzel a paraméterkombinációval történt.



20. ábra – A gerjesztett Duffing-oszcillátor fázisterének stroboszkópikus leképezése

A fázistérből a (43)-as egyenlet segítségével Poincaré-metszet készíthető, vagyis csak azokat a pontokat jelenítjük meg a fázistérben, melyeket a rendszer a gerjesztés periódusidejének egész számú többszöröseinél vesz fel. Az így kapott metszet (20. ábra) kaotikus jelenségre utal.

Késleltetett koordináták segítségével a kaotikus rendszerek szabályozhatók. Ekkor elegendő csupán egyetlen jel folyamatos mérése, s ebből a méréssorozatból stroboszkópikus leképezéssel rekonstruálható a Duffing-oszcillátor fázistere.



21. ábra – A gerjesztett Duffing-oszcillátor fázistérének rekonstruálása késleltetett koordináták segítségével, stroboszkópikus leképezés után. A késleltetés értéke: $t_D = T/4$, ahol T a gerjesztés periódusideje.

5.1.2 RUNGE-KUTTA-ALGORITMUS

A Duffing-oszcillátort leíró differenciálegyenlet nemlineáris tagot is tartalmaz, ezért numerikusan kell megoldani. Példánkban a rezgőrendszer szimulációját Runge-Kutta algoritmus segítségével végeztük el. Ehhez először a másodrendű differenciálegyenletet két elsőrendű egyenletből álló rendszerré alakítottuk át. A következő jelölések bevezetése átláthatóbbá teszi a megoldást:

$$X_0 = x(t) \quad (59)$$

$$X_1 = \dot{x}(t) \quad (60)$$

Az új jelöléseket beírva az eredeti egyenletbe:

$$m \cdot \dot{X}_1 + k \cdot X_1 + a \cdot X_0 + b \cdot X_0^3 = F \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (61)$$

$\dot{X}_1$ –et kifejezve:

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{m} \cdot (F \cdot \sin(\Omega \cdot t) - a \cdot X_0 - b \cdot X_0^3 - k \cdot X_1) \quad (62)$$

Továbbá igaz, hogy

$$\dot{X}_0 = X_1 \quad (63)$$

Utóbbi két egyenlet segítségével elkészíthető a negyedrendű Runge-Kutta-algoritmus.

További egyszerűsítés érdekében jelölje $g(u, v, w)$ a következő függvényt:

$$g(u, v, w) = \frac{1}{m} \cdot (F \cdot \sin(\Omega \cdot u) - a \cdot v - b \cdot v^3 - k \cdot w) \quad (64)$$

Ekkor az iterációs eljárásnál a következő egyenletekre van szükség:

$$\begin{aligned}
 k_{x_0,1} &= \Delta t \cdot X_1 & k_{x_1,1} &= \Delta t \cdot g(t, X_0, X_1) \\
 k_{x_0,2} &= \Delta t \cdot \left(X_1 + \frac{k_{x_1,1}}{2} \right) & k_{x_1,2} &= \Delta t \cdot g\left(t + \frac{\Delta t}{2}, X_0 + \frac{k_{x_0,1}}{2}, X_1 + \frac{k_{x_1,1}}{2}\right) \\
 k_{x_0,3} &= \Delta t \cdot \left(X_1 + \frac{k_{x_1,2}}{2} \right) & k_{x_1,3} &= \Delta t \cdot g\left(t + \frac{\Delta t}{2}, X_0 + \frac{k_{x_0,2}}{2}, X_1 + \frac{k_{x_1,2}}{2}\right) \\
 k_{x_0,4} &= \Delta t \cdot (X_1 + k_{x_0,3}) & k_{x_1,4} &= \Delta t \cdot g(t + \Delta t, X_0 + k_{x_0,3}, X_1 + k_{x_1,3})
 \end{aligned}$$

Ezen kifejezések felhasználásával:

$$\Delta X_0 = \frac{k_{x_0,1} + 2 \cdot k_{x_0,2} + 2 \cdot k_{x_0,3} + k_{x_0,4}}{6} \quad (65)$$

$$\Delta X_1 = \frac{k_{x_1,1} + 2 \cdot k_{x_1,2} + 2 \cdot k_{x_1,3} + k_{x_1,4}}{6} \quad (66)$$

Így X_0 , X_1 és t új értékei:

$$X_{0n+1} = X_{0n} + \Delta X_0 \quad (67)$$

$$X_{1n+1} = X_{1n} + \Delta X_1 \quad (68)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (69)$$

ahol az n illetve $n+1$ indexek az iterációra utalnak, továbbá Δt az iteráció lépésköze, ennek értéke szimulációink során $2 \cdot \pi / (600 \cdot 0.95)$.

5.2 A SZABÁLYOZÁSHOZ SZÜKSÉGES MENNYISÉGEK MEGHATÁROZÁSA

A Duffing-oszcillátor egyenlete ugyan ismert, de a módszer bemutatásához ezt az ismeretet figyelmen kívül hagyjuk, mert a szabályozáshoz szükséges mennyiségeket mérések segítségével szeretnénk meghatározni. Ebben a fejezetben különböző, a szakirodalomban fellelhető eljárások bemutatása következik.

5.2.1 A FIXPONTOK MEGHATÁROZÁSA

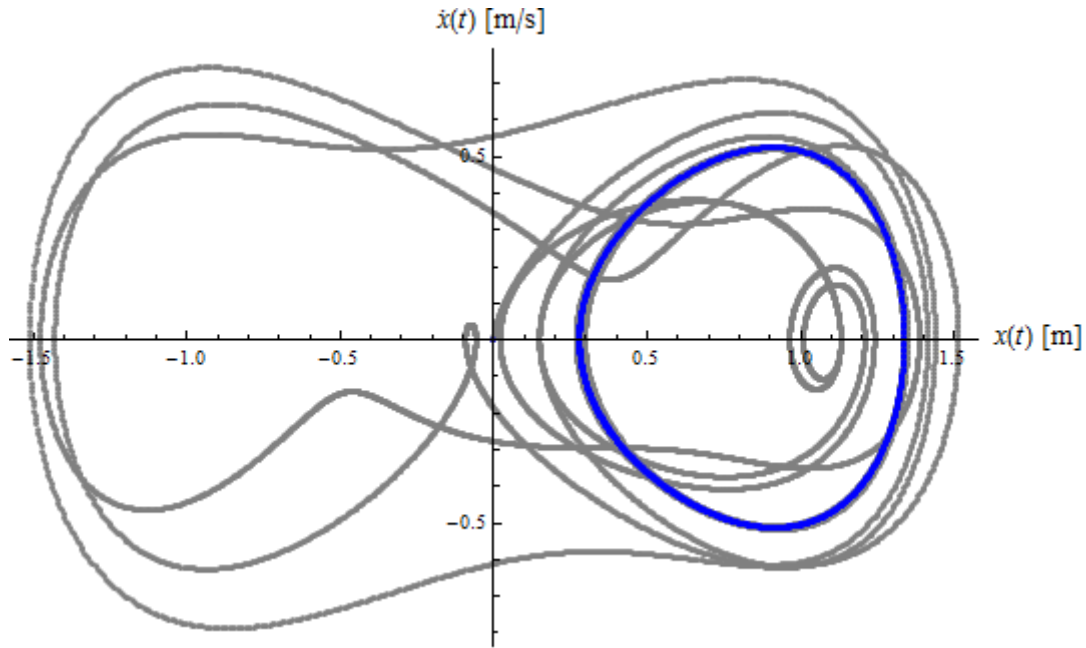
A stroboszkópikus leképezés fixpontjainak a meghatározásához szükséges a rendszer (mindenféle szabályozástól független) vizsgálata. Nyomon kell követni a leképezés által kirajzolódó trajektóriát, majd ha két egymást követő pont nagyon közel (ε_2 környezetben) van egymáshoz, akkor azt kivenni, és egy tömbbe belehelyezni. Tehát, ha a következő összefüggés igaz:

$$|\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_n| < \varepsilon_2 \quad (70)$$

akkor az aktuális pont belekerül az esetleges fixpontokat tartalmazó tömbbe. A mérést (példánkban: $\varepsilon_2 = 0.02$, illetve $t = 100\,000$ sec) az előbb említett módon megkapott tömb elemzése követi. Ekkor látható, hogy a tömbben ugyanaz a fixpont – kisebb eltérésekkel – többször is előfordul. Ezeket átlagolva a rendszer fixpontjának koordinátáinak becült értéke megkapható.

Így a példában a következő fixpontot határoztuk meg:

$$\underline{x}_F = \begin{bmatrix} 0.579714 \\ 1.30883 \end{bmatrix} \quad (71)$$



22. ábra – Mivel a késleltetett koordináták által kirajzolt trajektória stroboszkópikus leképezésének fixpontját határoztuk meg, belátható, hogy ez a fázis térben egy periodikus pályának (kék színnel jelölve) feleltethető meg.

5.2.2 AZ $\underline{\underline{A}}$ MÁTRIX MEGHATÁROZÁSA

A vizsgált fázisteret linearizálva:

$$\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_F = \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_F) \quad (72)$$

ahol az $\underline{x}_{n+1}$ és az $\underline{x}_n$ vektorok a leképezés két egymást követő pontjainak a koordinátái, $\underline{x}_F$ az előző fejezetben kiszámolt fixpont, $\underline{\underline{A}}$ a leképezés Jacobi-mátrixa, mely kétdimenziós esetben:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Kétdimenziós esetben a (72)-es egyenlet két egymástól független egyenletre bontható fel:

$$x_{n+1,1} - x_{F,1} = a_{11} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{12} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) \quad (74)$$

$$x_{n+1,2} - x_{F,2} = a_{21} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{22} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) \quad (75)$$

A két egyenlet összesen négy ismeretlent tartalmaz (az $\underline{A}$ mátrix elemei). Ezek meghatározására először *M.L. Spano*, *S.N. Rauseo* és *W.L. Ditto* [6] együtt dolgoztak ki módszert.

Akár csak a fixpontok kiszámításánál, itt is folyamatosan figyelni kell a leképezés aktuális pontját, s ha a már meghatározott fixpont ε_2 környezetébe kerül, továbbá ez nem csak az iteráció aktuális ($\underline{x}_n$), hanem következő pontjára ($\underline{x}_{n+1}$) is igaz, akkor ezeket az értékeket fel kell jegyezni. A mátrix egyes elemei ezután a legkisebb négyzetek módszerével (más néven: Fitting, részletes leírás a [10]-es hivatkozásban) már könnyen meghatározhatóak. A mért adatokon függvényillesztést kell végrehajtani, tehát megkeresni azt a függvényt, mely legjobban illeszkedik a mért pontokra. Jelen esetben a linearizálás miatt a következő alakú függvény paramétereit kell meghatározni:

$$z(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c \quad (76)$$

Látható, hogy ennek a függvénynek az alakja megegyezik a (74)-es és (75)-ös egyenletekével, annyi különbséggel, hogy szerepel benne egy c konstans. Ez optimális esetben a nulla értéket veszi fel, viszont mivel most a fixpont ε_2 környezetében keresünk pontokat, ennek a konstansnak az értéke valamilyen nullától különböző kis (a nagyságrendje függ ε_2 értékétől) szám lesz.

Példánkban $\varepsilon_2 = 0.02$ és $t = 100\,000$ sec esetén:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3.8319 & 4.6617 \\ -0.1240 & 0.0501 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0.00011035 \\ -0.0003531 \end{bmatrix} \quad (78)$$

5.2.3 A $\underline{B}$ VEKTOROK MEGHATÁROZÁSA

A $\underline{B}$ vektorok meghatározására több módszer is létezik, attól függően, hogy hány ilyen vektort kell meghatározni ((45)-ös összefüggés). Esetünkben a *Paul So* és *Edward Ott* [7] által publikált módszert használtuk. Az eljárással vizsgálható a fázistérbeli trajektória módosulása a szabályozási paraméter változtatásának következtében. Ebben a példában szabályozási paraméternek a gerjesztés erőamplitúdóját (F) választottuk.

Először is a $\underline{B}$ vektorok számának pontos meghatározása szükséges. Ezt a (45)-ös képlet írja le. A késleltetési időt úgy választottuk meg, hogy elég legyen csupán két $\underline{B}$ vektort meghatározni. Ezen elgondolás alapján:

$$t_D = \frac{T}{4} \quad (79)$$

ahol t_D a késleltetési idő, T pedig a gerjesztés periódusideje. Mivel

$$m \cdot t_D < r \cdot T \quad (80)$$

illetve $m = 3$ (lásd (45)):

$$3 \cdot \frac{1}{4} < r \quad (81)$$

A legkisebb egész szám, melyre az összefüggés teljesül: $r = 1$. Tehát esetünkben két $\underline{B}$ vektor meghatározása szükséges.

Mivel jelen esetben is mérési adatokból kell kiszámolni az egyes vektorokat, ismét az előző fejezetben említett legkisebb négyzetek módszerének használata szükséges. Ha a szabályozó paraméter aktuális értéke (p_n) nagyon közel van eredeti ($\bar{p}$) értékéhez ((51)-es egyenlet), a leképezés aktuális pontja a fixpont ε_2 környezetében található, illetve $r = 1$, akkor linearizálás után:

$$\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_F = \underline{A} \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_F) + \underline{B}_1 \cdot (p_n - \bar{p}) + \underline{B}_2 \cdot (p_{n-1} - \bar{p}) \quad (82)$$

A két vektor meghatározása külön-külön, egymás után kell hogy történjen. A $\underline{B}_1$ vektor kiszámításához a $\underline{B}_2$ vektor legyen nullvektor. Ekkor két egymástól független egyenlet írható fel:

$$x_{n+1,1} - x_{F,1} = a_{11} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{12} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) + b_{11} \cdot (p_n - \bar{p}) \quad (83)$$

$$x_{n+1,2} - x_{F,2} = a_{21} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{22} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) + b_{12} \cdot (p_n - \bar{p}) \quad (84)$$

Az egyenleteket $(p_n - \bar{p})$ -vel leosztva:

$$\frac{x_{n+1,1} - x_{F,1}}{(p_n - \bar{p})} = \frac{a_{11} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{12} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2})}{(p_n - \bar{p})} + b_{11} \quad (85)$$

$$\frac{x_{n+1,2} - x_{F,2}}{(p_n - \bar{p})} = \frac{a_{21} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{22} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2})}{(p_n - \bar{p})} + b_{12} \quad (86)$$

Mivel a $\underline{B}_1$ és $\underline{B}_2$ vektorok a szabályzó paraméter változtatásának hatását határozzák meg, így a szimulációnál a szabályzó paramétert a gerjesztés periódusidejének egész számú többszöröseinél változtatni kell, tehát a rendszert egy periódusidőnyi ideig változatlan, két periódusidőnyi ideig pedig változtatott szabályzó paraméterrel kell futtatni, majd a fixpont ε_2 környezetében található értékeket összegyűjteni. Ezután már alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere, melynél most a függvényt a következő alakban kell keresni:

$$z(x) = a \cdot x + b \quad (87)$$

Látható, hogy a függvény alakja megegyezik a (85)-ös és (86)-os egyenlet alakjával. Az a és b paraméterek így már meghatározhatók. Ideális esetben a értéke 1, viszont mivel a mért adatok a fixpont ε_2 környezetében találhatóak, a értéke kis mértékben el fog térni 1-től, b értéke pedig a keresett b_{11} vagy b_{12} lesz.

A $\underline{B}_1$ vektor után a $\underline{B}_2$ vektor kiszámítása következik. Az (82)-es egyenletet kibontva:

$$\frac{x_{n+1,1} - x_{F,1}}{(p_{n-1} - \bar{p})} = \frac{a_{11} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{12} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) + b_{11} \cdot (p_n - \bar{p})}{(p_{n-1} - \bar{p})} + b_{21} \quad (88)$$

$$\frac{x_{n+1,2} - x_{F,2}}{(p_{n-1} - \bar{p})} = \frac{a_{21} \cdot (x_{n,1} - x_{F,1}) + a_{22} \cdot (x_{n,2} - x_{F,2}) + b_{21} \cdot (p_n - \bar{p})}{(p_{n-1} - \bar{p})} + b_{22} \quad (89)$$

A b_{21} és a b_{22} mennyiségek meghatározása hasonlóképpen történik, mint a $\underline{B}_1$ vektor elemeinek a számítása.

Példánkban $\varepsilon_2 = 0.02$ és $t = 100\,000$ sec esetén:

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} -5.58503 \\ -0.07813 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.672123 \\ 0.022359 \end{bmatrix} \quad (90)$$

5.2.4 A PÓLUSÁTHELYEZÉSES MÓDSZER

A (50)-es egyenletben található $\underline{K}^T$ szabályozó vektor meghatározásához pólusáthelyezéSES módszer használata szükséges. A módszer elvi lényegét dolgozatunkban részletesen nem tárgyaljuk, a [4]-es hivatkozásban teljes egészében megtalálható. Itt csak azokat a vonatkozásokat említjük meg, melyek az OGY-módszerhez való alkalmazásakor merülnek fel.

A pólusáthelyezéSES módszerhez szükség van a kijelölt pólusokra. Ezen mennyiségek megadásához a szakirodalomban közölt lehetőségek közül próbáltunk ki kettőt ([8]-as és [9]-es hivatkozás). Ehhez a példához a [8]-as hivatkozásban közölt módszer bizonyult használhatónak.

Legyen $\underline{\lambda}$ egy oszlopvektor, mely az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit tartalmazza:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Belátható, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak n_s darab stabil és n_u darab instabil sajátértéke van. A kijelölt pólusokat tartalmazó $\underline{o}$ vektor i -dik eleme a következő képzési szabállyal határozható meg:

$$o_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } \lambda_i \geq 1 \\ \lambda_i, & \text{ha } \lambda_i < 1 \end{cases} \quad (92)$$

Tehát míg a $\underline{\lambda}$ vektorban található instabil sajátértékeket nullával helyettesítettük, addig a stabil sajátértékek változatlanok maradtak.

Példánkban:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} -3.6769 \\ -0.1049 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1049 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Mivel $\underline{\bar{A}}$, $\underline{\bar{B}}$ illetve $\underline{o}$ mennyiségek ismertek, a $\underline{K}^T$ vektor meghatározható *:

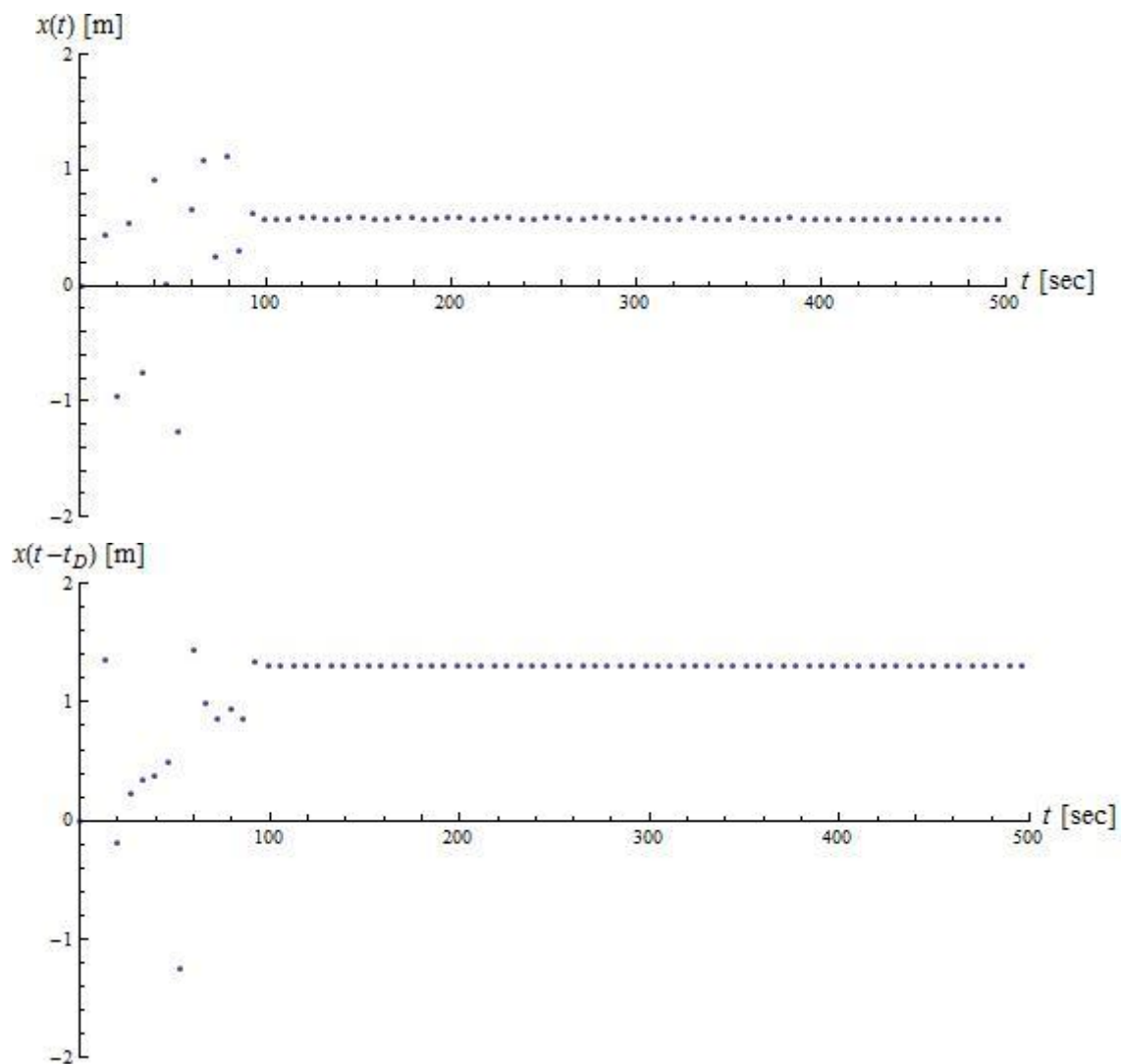
$$\underline{K}^T = \begin{bmatrix} 0.6493 \\ -0.8122 \\ -0.1138 \end{bmatrix} \quad (94)$$

* Megjegyzés: a Wolfram Mathematica 8, illetve a MatLab 7.10 is tartalmaz beépített függvényt a pólusáthelyezési szabályozáshoz szükséges mennyiségek kiszámítására. Előbbinél a StateFeedbackGains[] , míg utóbbinál az acker() függvény segítségével határozható meg a $\underline{K}^T$ vektor.

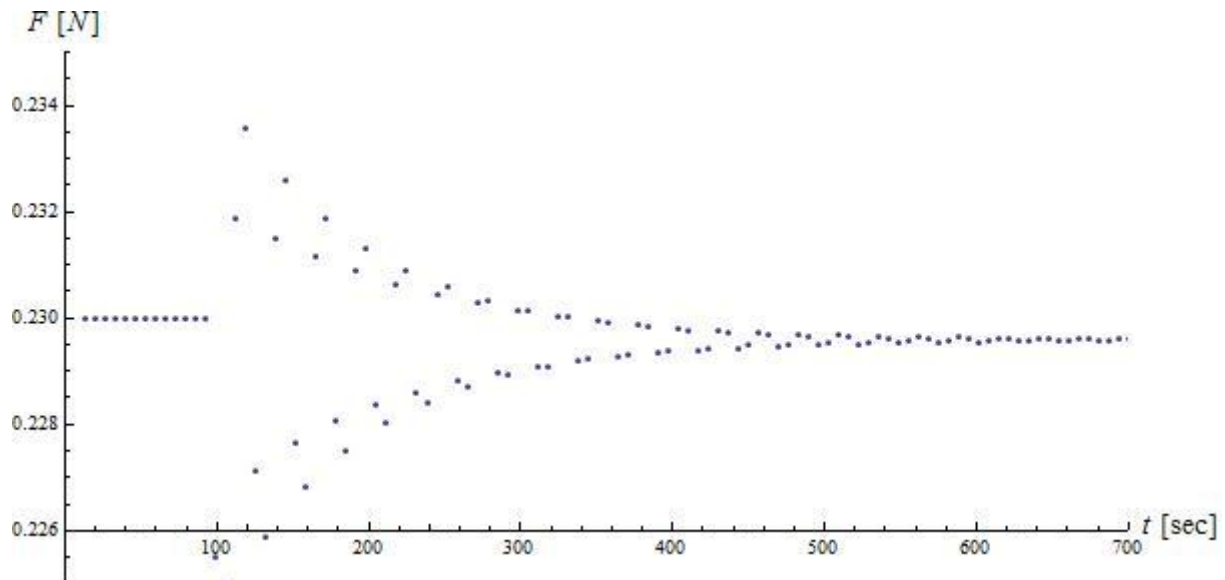
5.3 A SZABÁLYOZÁS

A szabályozást az előző fejezetben kiszámolt mennyiségek felhasználásával végeztük el.

Látható, hogy a szabályozás sikerült. A gerjesztett oszcillátoron pattogó labda példájához hasonlóan itt is megjelenik az OGY-módszer legnagyobb hátránya: a szabályozás bizonyos esetekben nagyon későn kezdődik el. Ennek két oka van: először is meg kell várni, míg a leképezés aktuális pontja a fixpont egy kijelölt környezetébe kerül, illetve ha ez teljesül, akkor sem biztos, hogy elkezdődik a szabályozás, hiszen a szabályozó paraméter változtatásának értéke korlátozva van ((51)-es egyenlet). Ugyanazon paraméterekkel, viszont két különböző kezdeti feltételből indítottuk el a rendszert, s meglepő dolgot tapasztaltunk: az egyiknél kb. 100 másodperc, míg a másiknál kb. három és fél óra után kezdődött el a szabályozás.

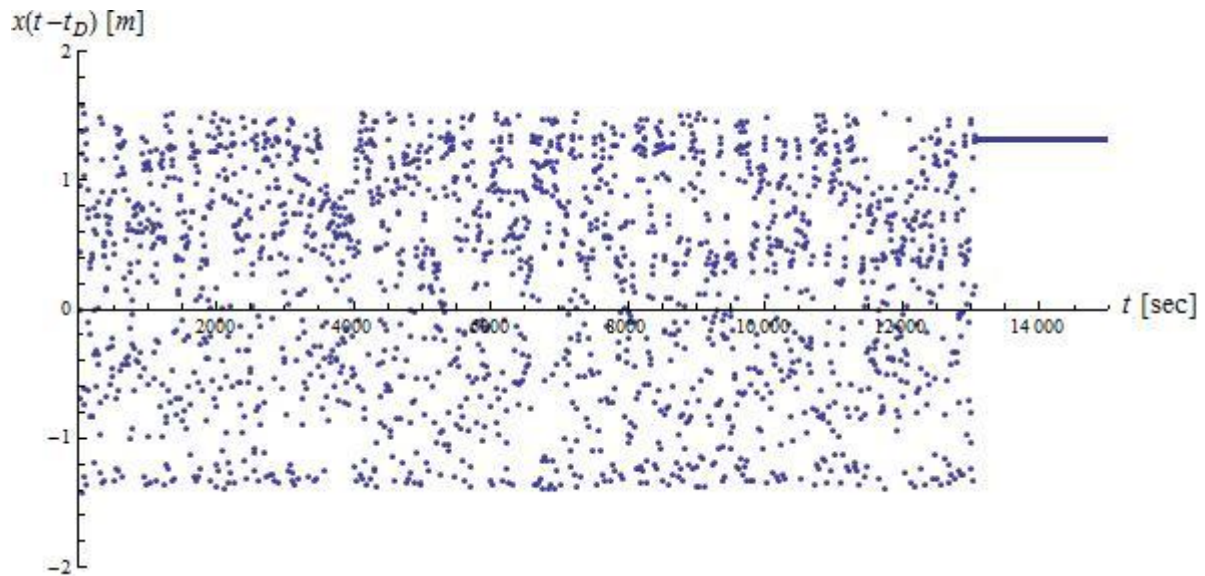
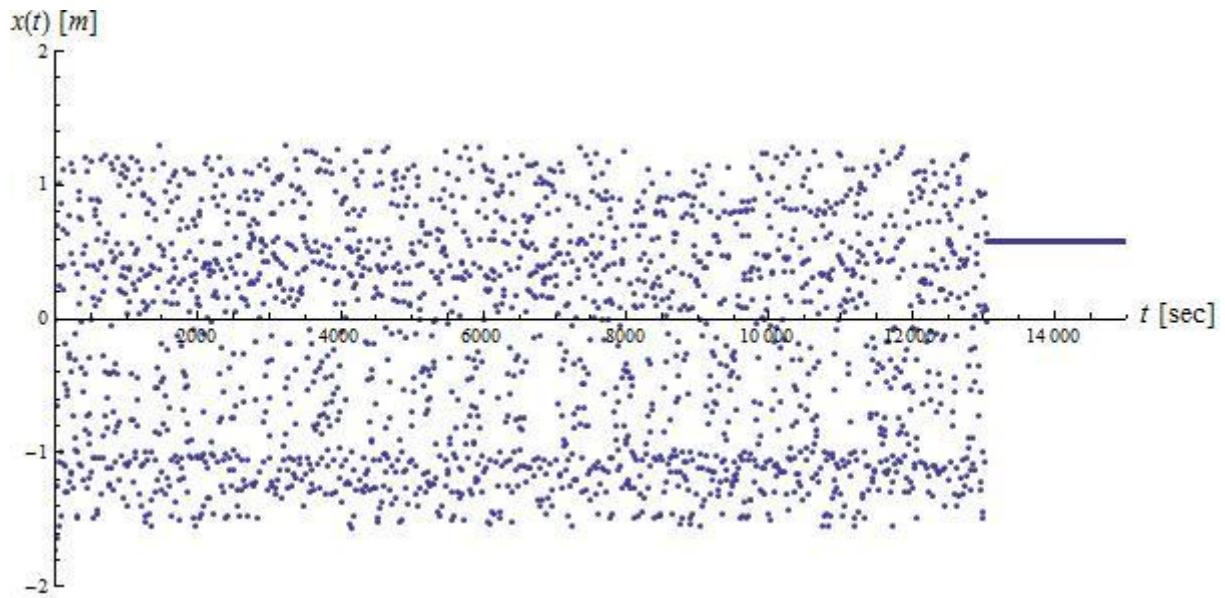


23. ábra – Szabályozás $x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=0$ kezdeti feltételekkel. A szabályozás kb. 100 másodperc után kezdődik el. Az ábrán csak a késleltetett-koordináta vektor két értékét ábrázoltuk az idő függvényében.



24. ábra – A kontroll paraméter változása a szabályozás során. Látható, hogy a szabályozási paraméter értéke folyamatosan közelít egy konstans értéket.

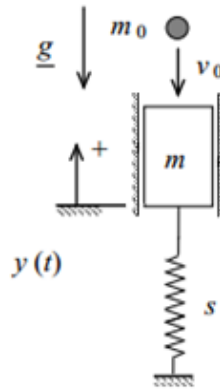
Megjegyezzük, hogy a szabályozás nem mindig valósítható meg. Ennek oka a következő: előállhat olyan eset, amikor a $\underline{K}^T$ szabályozási vektor elemeinek értékei olyan nagyok, hogy hiába esik a stroboszkópikus leképezés aktuális pontja a rendszer fixpontjának egy bizonyos környezetébe, nem fog elkezdődni a szabályozás, hiszen a perturbációs érték olyan nagy, hogy ezt a szabályzó program letiltja ((51)-es összefüggés). Ekkor a szabályzás nem jön létre. A Duffing-oszcillátor szabályozásánál az egyenleteket nem dimenziótlanítottuk, ezért a $\underline{B}$ vektorok $[m/N]$ dimenziójú elemeket tartalmaznak. A $\underline{K}^T$ vektor és a $\underline{\lambda}$ vektor elemei különböző dimenziójúak annak megfelelően, hogy a kitérés $[m]$ -ben, az erő pedig $[N]$ -ban van megadva.



25. ábra – Szabályozás $x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=1$ kezdeti feltételekkel. A szabályozás kb. 13000 másodperc (kicsivel több, mint három és fél óra) után kezdődik el. Az ábrán csak a késleltetett-koordináta vektor két értékét ábráztuk az idő függvényében.

6. NUMERIKUS GYÖKKERESÉS

A műszaki gyakorlatban, különböző problémák megoldása során előfordul, hogy két függvény metszéspontját kell meghatározni. Erre léteznek numerikus megoldások, mint például a Newton-Raphson-módszer, a szelőmódszer, az intervallumfelező módszer. Ezek a legtöbb esetben alkalmazhatók. Viszont két függvénynek nem csak egy metszéspontja lehet, s az, hogy az algoritmus melyik megoldást találja meg, a kezdeti értéktől függ. Ha ismerjük a két függvény képét, akkor ez nem is jelent akadályt, hiszen ha látjuk, hogy az algoritmus egy másik megoldást vett célba, akkor egyszerűen csak újraindítjuk azt egy jobb kezdeti értékből. Hosszú iterációk során ez igencsak kellemetlen, hiszen állandó felügyelet szükséges a gyökkereső algoritmus mellé. A problémát a következő rezgéstani alappéldával lehet bemutatni:

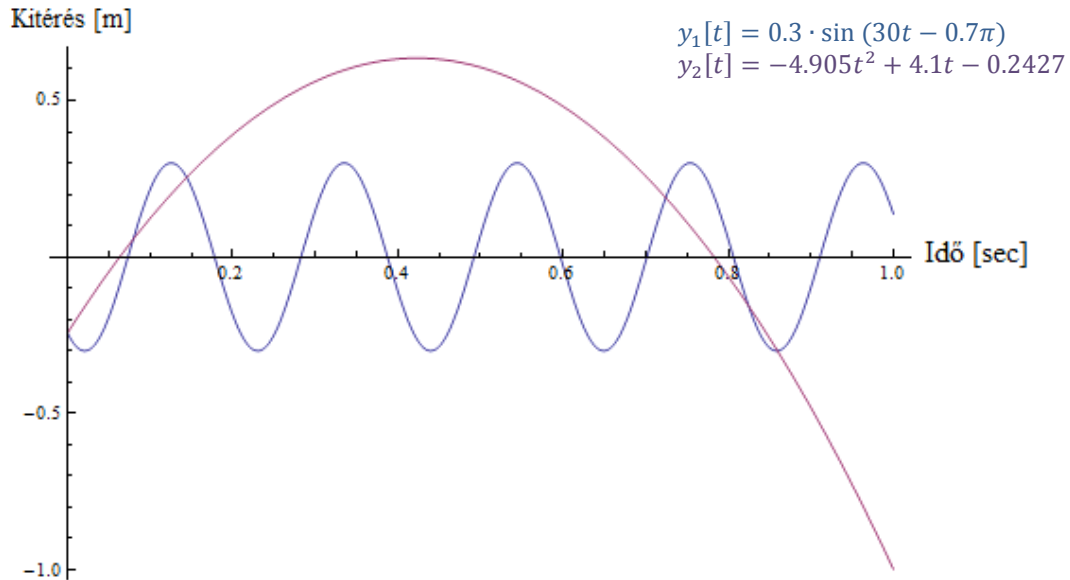


26. ábra – A feladat sematikus modellje

Egy m_0 tömegű golyó szabadon esik, majd ütközik egy s merevségű rugóra rögzített m tömegű testtel, ami az ütközés hatására függőleges irányú rezgésbe kezd, a golyó pedig visszapattan, s ez a folyamat ismétlődik. A feladat a következő: keressük meg, hogy mely időpillanatban ütköznek a testek. Az analitikus megoldás menete egy ciklusra lebontva:

- ütközés utáni sebességek kiszámítása a kezdőértékekből
- mozgástörvények felírása és ezen egyenletek paramétereinek kiszámolása
- az így kapott két függvény első pozitív metszéspontjának megkeresése (ebben az időpillanatban fog ütközni a két test)
- ezen metszéspontban a sebesség értékek kiszámítása a következő ciklus számára

A harmadik pontban leírtak elvégzéséhez szükség van egy gyökkereső algoritmusra. A probléma viszont az, hogy előállhat olyan eset is, amikor a golyó kitérés- függvénye több helyen metszi a rezgő test kitérésfüggvényét. Ezt szemlélteti a következő ábra:



27. ábra – A két test kitérésfüggvényének ábrázolása

Látható, hogy ebben az esetben öt metszéspontja is van a két függvénynek, s az említett gyökkereső algoritmusok egyike sem használható jól ennél a példánál, hiszen arról nincs információnk, hogy adott n -dik ciklusban hol lesz az első metszéspont, tehát nem állítható be megfelelő kezdőérték. Ezen ok miatt volt szükség egy saját gyökkereső algoritmus kifejlesztésére, aminél alapvető kritérium volt a megbízhatóság, a gyorsaság, és a megfelelő pontosság. A módszer alap gondolata a következő:

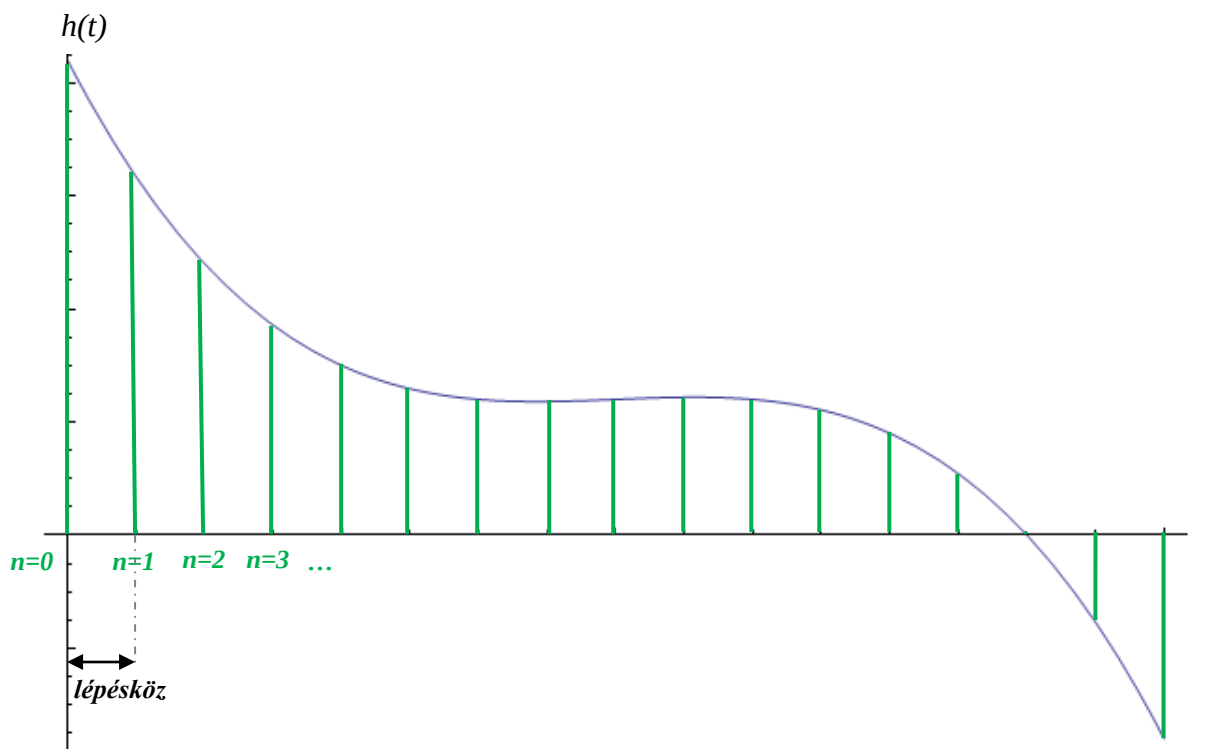
Legyen adva $f(t)$ és $g(t)$ függvény, s a feladat a két függvény legkisebb pozitív metszéspontjának a meghatározása. Tehát,

$$f(t) = g(t) \quad (94)$$

Kivonással képezzünk egy függvényt a kettőből:

$$\underbrace{f(t) - g(t)}_{h(t)} = 0 \quad (95)$$

Ekkor a metszéspont keresés zérushely kereséssé alakul át. Induljunk ki az $t = 0$ kezdőértékből, majd tetszőlegesen beállított lépésközzel előre haladva vizsgáljuk a $h(t)$ függvény előjelét:



28. ábra –Az algoritmus megértését segítő ábra.

Az így felépített iterációs eljárás folyamatosan összehasonlítja az n -dik ciklusban mintavételezett előjelet az $(n-1)$ ciklusban mintavételezettel, s ha előjelváltást tapasztal, akkor leáll, s az $(n-1)$ -dik ciklusban felvett t értéket adja eredményül. Így természetesen mindig lesz valamennyi hiba, mely azonban kisebb lépésköz választásával csökkenthető.

A módszer nem csak a legkisebb pozitív metszéspont megtalálására használható, hanem képes arra, hogy adott intervallumon belül megkeresse az összes megoldást.

Az algoritmus teszteléséhez kiszámítottuk a fentebb említett két függvény első pozitív metszéspontját. A lépésköz változtatásával többször lefuttattuk a programunkat, s a következő eredményekre jutottunk:

Lépésköz	Eredmény	Számítási idő**
10^{-5}	0.07964	kb. 1 másodperc
10^{-6}	0.079641	kb. 2-3 másodperc
10^{-7}	0.0796414	kb. 10 másodperc
10^{-8}	0.07964146	kb. 2 perc

** Az eredményeket személyi számítógéppel számítottuk.

Az eredményt a *Wolfram Mathematica 7* FindRoot[] függvényével ellenőriztük, mely $t_0 = 0.08$ kezdőértékkel

$$t = 0.07964147$$

eredményt adott, ami megegyezik az általunk kiszámolt értékkel.

Elmondhatjuk tehát, hogy sikerült egy megbízható és pontos gyökkereső algoritmust írni, melynél a felhasználó dönthet arról, hogy megelégszik a pontatlanabb, de pillanatok alatt megkapott eredménnyel, vagy a lépésközt tovább növelve minél pontosabb eredményt szeretne. Hangsúlyozzuk, hogy ez a számítási módszer csak akkor előnyös, ha nem ismerjük a függvények képét és nem tudunk megfelelő kezdeti értéket megadni, ha mindez azonban teljesül, a hagyományos módszerek sokkal gyorsabban számolják ki a metszéspontokat.

7. MAGYARÁZAT A CD-MELLÉKLETEN TALÁLHATÓ PROGRAMOKHOZ



1.

Fájlnév: 1.nb

A megnyitás után a programkód első sorába bele kell kattintani, majd a Shift+Enter billentyűkombinációval elindítani a programot. A gerjesztési frekvencia a $[0,10]$ Hz tartományban, az ütközési tényező a $[0,1]$ tartományban, a gerjesztési amplitúdó a $[0.03,0.07]$ intervallumban állítható.



2.

Fájlnév: 2.nb

A megnyitás után a programkód első sorába bele kell kattintani, majd a Shift+Enter billentyűkombinációval elindítani a programot. A gerjesztési frekvencia a $[0,10]$ Hz tartományban, az ütközési tényező a $[0,1]$ tartományban, a gerjesztési amplitúdó a $[0.03,0.07]$ intervallumban állítható. A fixpontokat késsel jelöltük.



3.

Fájlnév: 3a.nb és 3b.nb

Először a 3a.nb fájl megnyitása szükséges. A programkód első sorába bele kell kattintani, majd a Shift+Enter billentyűkombinációval elindítani a programot. Ezután a 3b.nb programot kell megnyitni. Hasonlóan az eddigiekhez, a program első sorába bele kell kattintani és Shift+Enter billentyűkombinációval elindítani. Ezután a 3a.nb fájlban látható a gerjesztett Duffing-oszcillátor mozgása, továbbá egy nyomógomb segítségével a szabályozás be- illetve kikapcsolható. A szaggatott vonal az egyensúlyi helyzetet, míg a késsel befestett terület az elérni kívánt periodikus pályát jelöli.

8. ÖSSZEFOGALALÁS

A dolgozatban két kaotikus mechanikai rendszer szabályozását végeztük el, OGY-algoritmus segítségével. Először egy kétdimenziós leképezést, majd egy folytonos rendszer kaotikus mozgását változtattuk periodikus mozgássá valamely kiválasztott rendszerparaméter nagyon kicsi változtatásával.

Az első esetben rendelkezésre állt a rendszert leíró leképezés, amelyből a szabályozáshoz szükséges mennyiségek kiszámíthatók voltak. Kitértünk a szabályozó program megírásakor jelentkező nehézségekre, illetve megoldást, vagy megoldásokat közöltünk. A másik esetben is ismert volt a rendszert leíró mozgásegyenlet, de ezt a szabályozáshoz csak arra használtuk fel, hogy a rendszer egy paraméterének jelként való mérését szimuláljuk. Késleltetett koordináták segítségével rekonstruáltuk a rendszer fázisterét, majd a mért jel segítségével határoztuk meg a szabályozáshoz szükséges mennyiségeket. Ennek hátránya az, hogy így csupán egy becslés (bár igen pontos) adható a különböző mennyiségekre, s ez azt eredményezi, hogy a szabályzás nem pontosan a kijelölt fixpontra fogja ráhúzni a trajektóriát, hanem egy tőle nagyon kicsivel eltérőre (példánkban az eltérés az ötödik tizedesjegy után jelentkezett).

Noha a két rendszer szabályozásához ugyanazt az elméletet használtuk fel, mégis különbözik a szabályzás által adott eredmények jellege. A legszembevetőbb különbség a szabályozó paraméter változása (13. és 24. ábra). Az első feladatban látható, hogy egy-két iterációig ugyan viszonylag nagy a perturbáció értéke, utána viszont átlagosan kb. 10^{-10} nagyságrendű. A másik esetben teljesen mást tapasztaltunk: kezdeti tranziens jelenség után a szabályzó paraméter nem az eredeti értékét közelíti meg, hanem tőle egy kb. 10^{-4} -el eltérőt. Ez valószínűleg a mérés pontatlansága miatt jelentkezett.

A második példánkban az OGY-módszert pólusáthelyezéses szabályozással kombináltuk. A kiválasztott pólusok meghatározására a szakirodalomban két különböző ajánlást találtunk: a cikkek egyik táborá szerinti (pl.: [9]-es hivatkozás) az összes pólusnak nullával kell egyenlőnek lenni, míg a másik a dolgozatban alkalmazott módszert írja le. Mind a kettőt kipróbáltuk és azt tapasztaltuk, hogy esetünkben csak az utóbbival működött a szabályzás.

A dolgozathoz készítettünk egy CD-mellékletet, mely a legfontosabb, a megértést segítő programokat, illetve interaktív ábrákat tartalmazza.

9. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Eckehard Schöll and Heinz Georg Schuster (Eds): Handbook of Chaos Control
Wiley-VCH; 2nd Revision, Enlarged edition (2007) Weinheim.
- [2] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke: Controlling Chaos
Phys. Rev. Lett. 64 (1990)
- [3] P.J. Holmes: The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table
Journal of Sound and Vibration (1982) 84(2), 173-189
- [4] S.Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, D. Maza: The control of chaos:
Theory and applications,
Physics Reports 329 (2000) 103-197
- [5] Francis C. Moon: Chaotic Vibrations
Wiley-VCH; 2004
- [6] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano: Experimental Control of Chaos
Phys. Rev. Lett 65, 3211-3214 (1990)
- [7] Paul So, E.Ott : Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates via Stabilization
of Periodic Orbits
Phys. Rev. E 51,2955 (1995)
- [8] Erik M. Bollt: Controlling Chaos, Targeting, and Transport 1995
- [9] V.M. Mendes, D.A.Mendes: Controlling Endogenous Cycles in an OLG Economy
by the OGY Method
- [10] Halász Gábor, Huba Antal: Műszaki mérések
Műegyetemi Kiadó, 2003