



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

TDK DOLGOZAT

Vontatmányok stabilitása

Beregi Sándor
BSc hallgató

Konzulens:
Dr. Takács Dénes
tudományos munkatárs

2012.

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	3
2.	Az alkalmazott mechanikai modell.....	4
2.1.	A személygépjármű-utánfutó rendszer.....	4
2.2.	A rendszer mozgásegyenletei	6
3.	A kerékmodell.....	11
3.1.	A járművekre a kerekekről átvadódó erők meghatározása	11
3.2.	A járművekre a kerekekről átvadódó koncentrált erőpárok	14
3.3.	A kúszási szögek meghatározása	16
3.4.	A kerekek és a talaj között fellépő nyomóerő	18
4.	A személygépjármű-utánfutó rendszer lineáris stabilitásvizsgálata.....	20
4.1.	A kerékdeformációból származó erő és nyomaték karakterisztika linearizálása ...	20
4.2.	Stabilitásvizsgálat.....	21
4.3.	Eredmények.....	24
4.4.	Az utánfutó tehetetlenségi nyomatékának hatása a stabilitásra	25
4.5.	Az utánfutó tömegének hatása a stabilitásra	26
4.6.	A csukló a vontató jármű súlypontjától való távolságának hatása a stabilitásra....	27
4.7.	A kerekek oldalirányú merevségének hatása a stabilitásra	28
5.	Numerikus szimuláció.....	30
5.1.	Szimulációs módszer.....	30
5.2.	Stabil tartomány	31
5.3.	Instabil tartomány (1).....	31
5.4.	Instabil tartomány (2).....	32
5.5.	Következtetések	33
6.	A rendszer nemlineáris vizsgálata AUTO07p szoftverrel.....	35
6.1.	A mechanikai modell implementálása az AUTO07p szoftverben	35
6.2.	Bifurkáció analízis a statikusan instabil tartományban	36
6.3.	Bifurkáció analízis a rezgésesen instabil tartományban.....	37
7.	Kísérleti berendezés tervezése	39
7.1.	A kísérlet célja.....	39
7.2.	A berendezés mechanikai modellje.....	39
7.3.	Stabilitásvizsgálat.....	45
7.4.	A kerekek laterális erő-karakteristikájának meghatározása	47
8.	Összefoglalás	49
9.	Irodalomjegyzék.....	50

1. Bevezetés

A közúti közlekedésnek ma az egyik fontos kérdése a különböző vontatmányok (pl. utánfutók, lakókocsik, kamionok, csuklós buszok) haladás közbeni stabilitása, illetve ezek instabilis viselkedésének megelőzése. Ez indokolja, hogy a járműdinamika e területén napjainkban is számos kutatás zajlik.

A dolgozatban a személygépjárműből és utánfutóból álló járműszerelvény vizsgálatához síkbeli, egymáshoz csuklóval csatlakozó rudakból és a hozzájuk kapcsolódó kerekekből álló (ún. bicikli) modellt alkalmaztunk. Azaz, a járműszerelvény oldalirányú méretét elhanyagolva, az egyes tengelyeken a két kereket egy kerékkal helyettesítettük. A járműdinamikában ez egy általánosan elfogadott módszer a járművek dinamikai vizsgálatának egyszerűsítésére.

A járműre a kerekekről átadódó erők meghatározásához ún. „kefe” kerékmódellet alkalmaztunk, amely szerint a gumiköpenyt úgy képzeljük el, mintha a keréken sugárirányban lineáris gumirugók lennének, a kerekekről átadódó erőt pedig ezek deformációjából származtatjuk. Így meghatározható egy kvázi-statisztikus esetben érvényes erő-karakterisztika, melyet erőszerszerettel alkalmaznak valódi ipari kerékdinamikai problémák vizsgálatára [1].

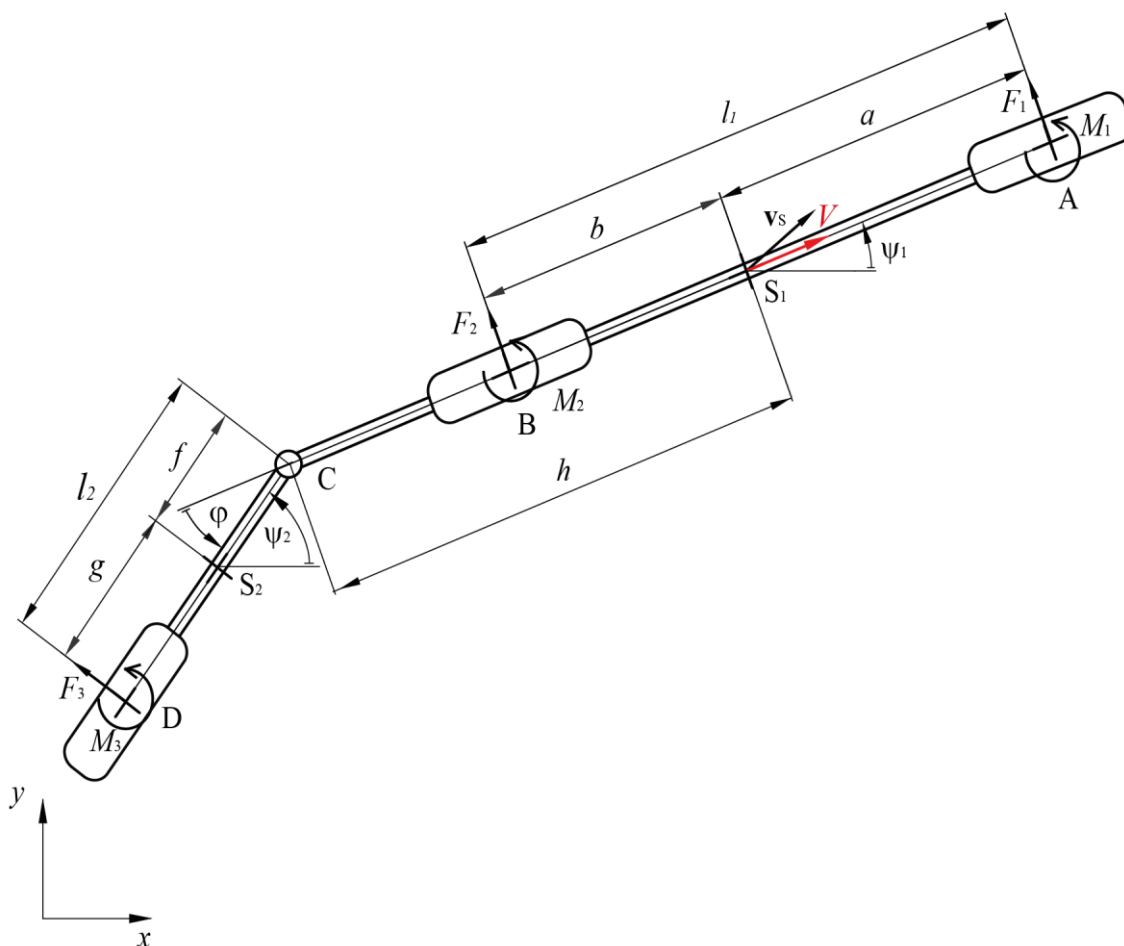
Az anholonom rendszer mozgásegyenleteit Appell–Gibbs-egyenletből [2] segítségével írtuk fel és vizsgáltuk a járműszerelvény egyenes vonalú pályán, állandó sebességgel való haladás közbeni lineáris stabilitását a haladási sebesség, a vontatmány súlypontjának helyzete és a járművek egyéb jellemző paramétereinek függvényében. Ehhez a számítások egyszerűsítése végett linearizáltuk a gumi deformációjából származó laterális erő-, illetve nyomtér karakterisztikát, majd az eredményeket stabilitási térképeken ábrázoltuk. Ezek után numerikus szimulációk segítségével elemeztük a rendszer mozgását, amelyek alátámasztották a lineáris stabilitásvizsgálat során kapott eredményeket. Mindezek mellett AUTO07p szoftver segítségével [5] vizsgáltuk a személygépjármű-utánfutó rendszer nemlineáris viselkedését is.

A dolgozat célja továbbá egy a vontatmányok stabilitásvizsgálatára alkalmas kísérleti berendezés tervezése is, amely lehetőséget adna az analitikus, illetve numerikus számítások validálására illetve az elméleti modell hiányosságainak feltárására. Ennek során módosítottuk a rendszer mechanikai modelljét, úgy hogy a futópádon történő mérés során biztosíthatóak legyenek a rendszerre ható kényszerek. Az eredeti modellel való összehasonlítás céljából elvégeztük a kísérlethez módosított rendszer lineáris stabilitásvizsgálatát is, amely során megállapítottuk, hogy az, az eredeti rendszerrel megegyező viselkedést mutat.

2. Az alkalmazott mechanikai modell

2.1. A személygépjármű-utánfutó rendszer

Járműszerelvények vízszintes talajon végzett mozgásának leírása során a járművek modellezésénél elterjedt megoldás a bonyolult térbeli modell helyett, síkbeli, egymáshoz csuklóval kapcsolódó rudakból, valamint hozzájuk kapcsolódó kerekekből álló ún. „bicikli” modell alkalmazása. Ezzel elhanyagoljuk a járműszerelvény oldalirányú méretét, illetve az egyes tengelyeken a két (vagy több) kereket 1 kerékkel helyettesítjük. [1]



1. ábra, A személygépjármű-utánfutó rendszer

A személygépjárműből és az általa vontatott utánfutóból álló rendszer vizsgálatához alkalmazott síkbeli, négy szabadságfokú modell tehát két l_1 , illetve l_2 hosszúságú (személygépjármű, ill. utánfutó) egymáshoz a C pontban csuklóval kapcsolódó rúdból áll (ld. 1. ábra). A személygépjárművet reprezentáló rúd A és B, míg az utánfutót képviselő rúd D pontban kapcsolódik a kerekekhez. A kocszi első illetve hátsó kerekének távolsága a jármű S_1

súlypontjától a és b , míg az utánfutó S_2 súlypontjának távolsága a C csuklótól, valamint a hátsó keréktől f és g . A személygépjármű S_1 súlypontjának C csuklótól való távolsága h .

A rudak S_1 és S_2 súlypontjainak helyvektorai $\mathbf{r}_{S_1}(t) = [x_1(t), y_1(t), 0]^T$ valamint $\mathbf{r}_{S_2}(t) = [x_2(t), y_2(t), 0]^T$, a rudak hossztengeleyének az x -tengellyel bezárt szöge $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$. A két rúd helyzetét egyértelműen meghatározhatjuk, ha ismerjük a kocsisúlypontjának x_1 és y_1 koordinátáját, valamint ψ_1 és ψ_2 szögeket. Válasszuk ezeket általános koordinátáknak, így tehát az általános koordináta-vektor:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad \text{Equation Section 2(2.1)}$$

Írjuk fel az utánfutó S_2 súlypontjának helyvektorát az általános koordináták függvényében:

$$\mathbf{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - h \cos \psi_1 - f \cos \psi_2 \\ y_1 - h \sin \psi_1 - f \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

A kocsisúlypontjának sebességét, az $\mathbf{r}_{S_1}$ helyvektor idő szerinti deriváltjaként írhatjuk fel:

$$\mathbf{v}_{S_1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

hasonlóképpen határozható meg az utánfutó S_2 súlypontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_{S_2} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + \dot{\psi}_1 h \sin \psi_1 - \dot{\psi}_2 f \sin \psi_2 \\ \dot{y}_1 - \dot{\psi}_1 h \cos \psi_1 - \dot{\psi}_2 f \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Mivel mindkét jármű síkmozgást végez, szögsebességük a mozgás síkjára merőleges z irányú lesz, így a kocsis és az utánfutó ω_1 és ω_2 szögsebességét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

valamint:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A $\mathbf{v}_{S_1}$ és $\mathbf{v}_{S_2}$ sebességek idő szerinti deriváltjaként állítsuk elő az S_1 és S_2 súlypontok $\mathbf{a}_{S_1}$ illetve $\mathbf{a}_{S_2}$ gyorsulását:

$$\mathbf{a}_{S_1} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

illetve:

$$\mathbf{a}_{S_2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 + \dot{\psi}_1^2 h \cos \psi_1 + \ddot{\psi}_1 h \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2^2 f \cos \psi_2 + \ddot{\psi}_2 f \sin \psi_2 \\ \ddot{y}_1 + \dot{\psi}_1^2 h \sin \psi_1 - \ddot{\psi}_1 h \cos \psi_1 + \dot{\psi}_2^2 f \sin \psi_2 - \ddot{\psi}_2 f \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Hasonlóképpen a járművek $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ szöggyorsulását a szögsebességek idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

valamint:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.2. A rendszer mozgásegyenletei

A járműszerelvénny vizsgálatahoz a rendszerre kinematikai kényszert írunk elő, nevezetesen a kocsí S_1 súlypontjának a kocsí irányába eső sebességkomponense minden időpillanatban V , állandó nagyságú, azaz:

$$\dot{x}_1 \cos \psi_1 + \dot{y}_1 \sin \psi_1 = V. \quad (2.11)$$

Mivel a rendszerre így a geometriai kényszerek mellett kinematikai kényszer is érvényes, a rendszer anholonom. Az ilyen rendszerek mozgásegyenleteit az Appell–Gibbs-egyenletből származtathatjuk [2].

Ehhez az általános koordináták helyett vezessünk be ún. pszeudo sebességeket az alábbiak szerint:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.12)$$

ahol:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

általános koordináta sebesség vektor, illetve $\boldsymbol{\sigma}$ a pszeudo sebességeket tartalmazó vektor. Az $\mathbf{A}_0$ mátrix első sorát a kinematikai kényszer (ld. (2.11)) határozza meg, míg a többi sorát

célszerűen, mi határozhatjuk meg. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $\mathbf{A}_0$ mátrix inverzével az általános koordinátasebességek és a pszeudo sebességek közötti összefüggést leíró elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.14)$$

azaz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát deriválva az idő szerint a gyorsulásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_2 V \sin \psi_1 - \beta_1 \beta_2 \cos \psi_1 - \dot{\beta}_1 \sin \psi_1 \\ \beta_2 V \cos \psi_1 - \beta_1 \beta_2 \sin \psi_1 + \dot{\beta}_1 \cos \psi_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Az Appell–Gibbs-egyenleteket az ún. gyorsulási energiából származtatjuk, amelyet merev testre az alábbi összefüggéssel írhatunk fel [2]:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\omega})) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\omega}) \omega^2, \quad (2.17)$$

ahol, m a merev test tömege, $\boldsymbol{\theta}_s$ a test súlypontjára számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa, $\mathbf{a}_s$ a test súlypontjának gyorsulása, a_s pedig a gyorsulásvektor abszolútértéke; $\boldsymbol{\omega}$ a test szögsebessége, ω a szögsebesség vektor abszolútértéke, valamint $\boldsymbol{\varepsilon}$ a test szöggyorsulása. Síkbeli mozgás esetén, kihasználva, hogy mind az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektor, mind az $\boldsymbol{\varepsilon}$ szöggyorsulás vektor merőleges a mozgás síkjára, a fenti kifejezést egyszerűsíthetjük. Ezen túlmenően, mivel az Appell–Gibbs-egyenleteket a gyorsulási energiából a pszeudo gyorsulások szerinti deriválással származtatjuk, és a (2.17) összefüggés utolsó tagjában ezek nem szerepelnek, így az egyszerűség kedvéért ezt a tagot is elhagyhatjuk. Így az alábbi egyszerűbb alakú összefüggéshez jutunk:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \theta_s \varepsilon^2 + \dots \quad (2.18)$$

A fenti összefüggés szerint írjuk fel a vizsgált rendszer gyorsulási energiáját:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m_1 a_{s_1}^2 + \frac{1}{2} \theta_{s_1} \varepsilon_1^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{2} m_2 a_{s_2}^2 + \frac{1}{2} \theta_{s_2} \varepsilon_2^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ahol m_1 és m_2 a személygépjármű és az utánfutó tömege, θ_{s_1} és θ_{s_2} a járművek saját súlyponti, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka, a_{s_1} és

a_{s_2} a járművek súlypontjainak gyorsulásvektorainak, ε_1 és ε_2 pedig szöggyorsulás vektorainak az abszolútértéke.

A gyorsulásokra, illetve szöggyorsulásokra vonatkozó (2.7), (2.8), (2.9) és (2.10) összefüggéseket a gyorsulási energiába behelyettesítve, illetve az általános koordináta sebességek és gyorsulások helyett (2.15) és (2.16) szerint bevezetve a pszeudo sebességeket, illetve pszeudo gyorsulásokat, a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \left(m_1 \left((V^2 + \beta_1^2) \beta_2^2 + 2V \beta_2 \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_1^2 \right) + \theta_{s_1} \dot{\beta}_2^2 + \theta_{s_2} \dot{\beta}_3^2 \right. \\ & + m_2 \left(\left(\beta_2 \sin \psi_1 (h\beta_2 - \beta_1) + \cos \psi_1 (V \beta_2 + \dot{\beta}_1 - h\dot{\beta}_2) + f (\beta_3^2 \sin \psi_2 - \dot{\beta}_3 \cos \psi_2) \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\beta_2 \cos \psi_1 (h\beta_2 - \beta_1) - \sin \psi_1 (V \beta_2 + \dot{\beta}_1 - h\dot{\beta}_2) + f (\beta_3^2 \cos \psi_2 + \dot{\beta}_3 \sin \psi_2) \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Az Appell–Gibbs-egyenlet szerint egy anholonom rendszer mozgásegyenlet-rendszerét az alábbi formulával kaphatjuk meg [2]:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_r} = \Pi_r \quad r = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

ahol Π_1, Π_2, Π_3 az ún. pszeudo erő komponensek. Állítsuk elő a fenti egyenlet baloldalát az S gyorsulási energia egyes pszeudo gyorsulások $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3)$ szerinti deriválásával:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_1} &= m_1 (\dot{\beta}_1 + V \beta_2) + m_2 (\dot{\beta}_1 + V \beta_2 - h\dot{\beta}_2 - f \dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + f \beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)), \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_2} &= \theta_{s_1} \dot{\beta}_2 + m_2 (h^2 \dot{\beta}_2 - hV \beta_2 - h\dot{\beta}_1 + hf \dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) - hf \beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)), \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\beta}_3} &= \theta_{s_2} \dot{\beta}_3 + m (f^2 \dot{\beta}_3 - fV \beta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f \dot{\beta}_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad - f \beta_1 \beta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + hf \dot{\beta}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + hf \beta_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

A Π_1, Π_2, Π_3 pszeudo erőket a δP virtuális teljesítményből határozhatjuk meg az alábbi összefüggés szerint:

$$\delta P = \sum_{r=1}^3 \Pi_r \delta \beta_r, \quad (2.23)$$

ahol $\delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta \beta_3$ a virtuális pszeudo sebességek. A δP virtuális teljesítményt a rendszerre a következő formulával írhatjuk fel:

$$\delta P = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{v}_B + \mathbf{F}_3 \delta \mathbf{v}_D + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \delta \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{M}_3 \delta \boldsymbol{\omega}_2, \quad (2.24)$$

ahol $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ illetve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ a kerekekről a járművekre átadódó erők, illetve koncentrált erőpárok (ld. 1. ábra):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -F_1 \sin \psi_1 \\ F_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -F_2 \sin \psi_1 \\ F_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \sin \psi_2 \\ F_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

valamint:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ A, B valamint D pontok virtuális sebessége, $\delta \boldsymbol{\omega}_1$ és $\delta \boldsymbol{\omega}_2$ pedig a két jármű virtuális szögsebessége.

A virtuális sebességek meghatározásához írjuk fel, A, B és D pont $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, illetve $\mathbf{v}_D$ sebességét:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1A} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - a\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ \dot{y}_1 + a\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1B} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + b\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ \dot{y}_1 - b\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1C} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{CD} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + h\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2\dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ \dot{y}_1 - h\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2\dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Az $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ általános koordináta sebességek helyére (2.15) szerint helyettesítsük be a pszeudo sebességeket:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1A} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 - a\beta_2 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 + a\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1B} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 + b\beta_2 \sin \psi_1 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 - b\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1C} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{CD} = \begin{bmatrix} V \cos \psi_1 - \beta_1 \sin \psi_1 + h\beta_2 \sin \psi_1 + l_2\beta_3 \sin \psi_2 \\ V \sin \psi_1 + \beta_1 \cos \psi_1 - h\beta_2 \cos \psi_1 - l_2\beta_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A $\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ virtuális sebességeket formálisan úgy kaphatjuk meg, ha $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ pszeudo sebességek helyére a $\delta \beta_1, \delta \beta_2, \delta \beta_3$ virtuális pszeudo sebességeket helyettesítjük. Mivel a személygépjármű V hossz tengelyével párhuzamos sebessége állandó, így annak virtuális mennyisége zérus, azaz $\delta V = 0$. A behelyettesítéseket elvégezve a virtuális sebességekre a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_A &= \begin{bmatrix} -\delta\beta_1 \sin \psi_1 - a\delta\beta_2 \sin \psi_1 \\ +\delta\beta_1 \cos \psi_1 + a\delta\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} -\delta\beta_1 \sin \psi_1 + b\delta\beta_2 \sin \psi_1 \\ +\delta\beta_1 \cos \psi_1 - b\delta\beta_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_D &= \begin{bmatrix} -\delta\beta_1 \sin \psi_1 + h\delta\beta_2 \sin \psi_1 + l_2\delta\beta_3 \sin \psi_2 \\ +\delta\beta_1 \cos \psi_1 - h\delta\beta_2 \cos \psi_1 - l_2\delta\beta_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ezzel tehát a rendszerre ható erők, illetve nyomatékok δP virtuális teljesítményét leíró (2.24) egyenletbe behelyettesítve az erőket (2.25) és nyomatékokat (2.26), valamint a virtuális sebességeket (2.29), egyszerűsítések után, a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta P &= (F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1))\delta\beta_1 \\
&+ (aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2)\delta\beta_2 + (M_3 - l_2F_3)\delta\beta_3.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

A fenti összefüggésből $\delta\beta_1, \delta\beta_2, \delta\beta_3$ virtuális pszeudo sebességek együtthatóit kigyűjtve kaphatjuk meg a pszeudo erőket:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1), \\
\Pi_2 &= aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2, \\
\Pi_3 &= M_3 - l_2F_3.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

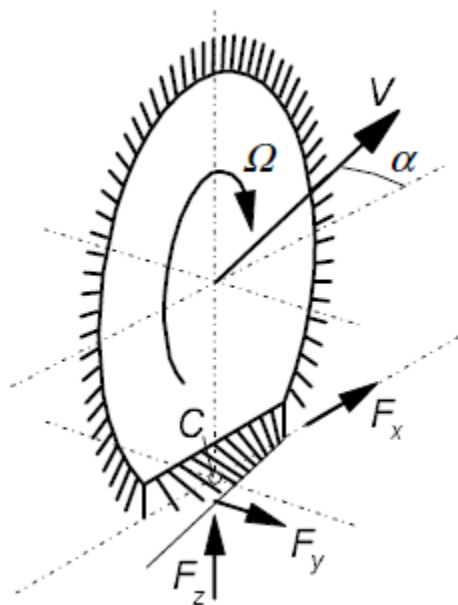
Ezek után az Appell–Gibbs-egyenletbe ((2.21)) (2.23) (2.22) és (2.31) összefüggéseket behelyettesítve felírhatjuk a személygépjármű-utánfutó rendszer mozgásegyenleteit:

$$\begin{aligned}
&m_1(\dot{\beta}_1 + V\beta_2) + m_2(\dot{\beta}_1 + V\beta_2 - h\dot{\beta}_2 - f\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + f\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\
&= F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1), \\
&\theta_{s_1}\dot{\beta}_2 + m_2(h^2\dot{\beta}_2 - hV\beta_2 - h\dot{\beta}_1 + hf\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) - hf\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\
&= aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2, \\
&\theta_{s_2}\dot{\beta}_3 + m(f^2\dot{\beta}_3 - fV\beta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f\dot{\beta}_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f\beta_1\beta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\
&+ hf\dot{\beta}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + hf\beta_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) = M_3 - l_2F_3.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

3. A kerékmodell

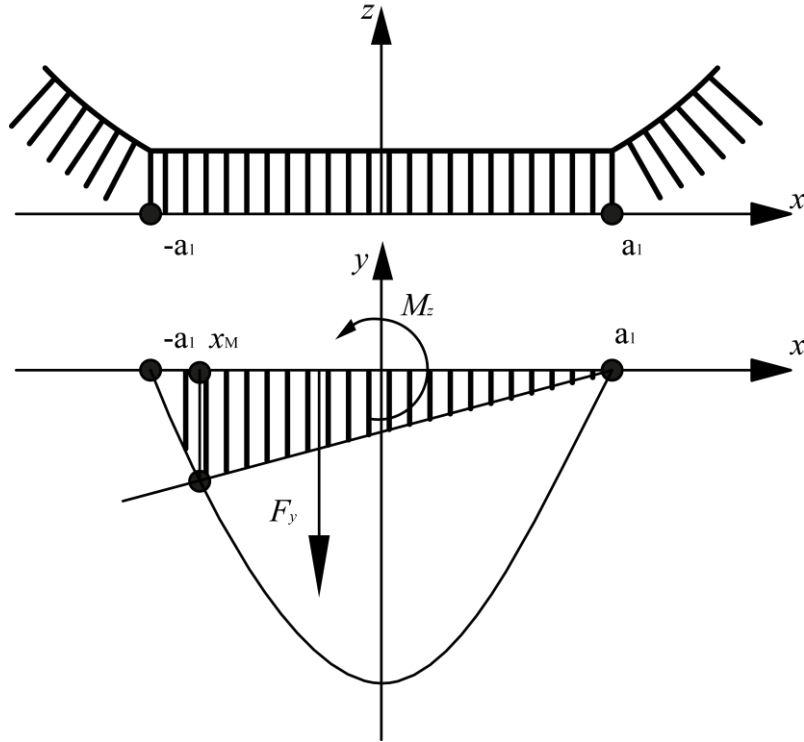
3.1. A járművekre a kerekekről átadódó erők meghatározása

A járművekre a kerekekről átadódó, a kerékdeformációból származó F_1, F_2, F_3 erők illetve M_1, M_2, M_3 forgatónyomatékok modellezéséhez, ún. kefe kerékmodellt alkalmaztunk [1]. Azaz a rugalmas gumiköpenyt úgy képzeljük el, mintha a keréken sugárirányban lineáris gumirugók lennének (ld. 2. ábra).



2. ábra, A kefe modell, forrás: [1]

Ahogy a kerék gördül a talajon ezeknek a rugóknak a szabad vége a kerék-talaj érintkezési tartományban letapad az út felszínére. Az érintkezési tartomány hosszát jelölje $2a_1$. Abban az esetben, ha a kerék oldalirányú sebességgel is rendelkezik (oldalirányban kúszik), azaz a pillanatnyi sebessége és a kerék hossz tengelye által bezárt α szög zérustól különböző, az úthoz letapadt rugók oldalirányban deformálódnak, ennek következtében a kerékre egy oldalirányú F_y erő fog hatni. A kerék oldalirányú deformációját egy egyenessel közelítjük kvázistacionárius állapotok esetén, melynek meredekségét α kúszási szög határozza meg. Azonban a letapadt hossz mentén a lehetséges legnagyobb tapadási súrlódási erőhöz tartozó erőintenzitás másodfokú függvény szerint változik, illetve azzal közelíthető (ld. [1]). Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az α meredekséggel rendelkező egyenes és az x tengely által közbezárt területet, az elméleti maximális súrlódási erőnek megfelelő parabola határolja. Az ezen kívül eső területen a kerék meg fog csúszni, vagyis a letapadt rugó végpontja megcsúszik a talajon és csak korlátozott erőt tud kifejteni a kerékre. A fentieket a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra A gumikerék deformációjából származó erő, illetve nyomaték

Összességében tehát látható, hogy a deformációból származó erő nagysága a parabola és az egyenes illetve az x -tengely által bezárt területtel lesz arányos. A terület meghatározásához integrálnunk kell a határoló görbét a $(-a_1, a_1)$ intervallumon. A határoló görbét a görbék x_M metszéspontjában felbonthatjuk két részre, így az első részen a parabolának majd a másodikon az egyenesnek kell képezni a határozott integrálját, majd a két integrál összege adja majd meg a teljes integrált.

A határológörbe $\alpha > 0$ esetén:

$$q(x) = \begin{cases} \tan \alpha x - a_1 \tan \alpha & x_M \leq x \leq a_1 \\ -\frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s} & -a_1 \leq x \leq x_M \end{cases}, \text{Equation Section (Next)} \quad (3.1)$$

ahol F_z a kerékre a talajra merőleges irányban ható erő, s a kerék hossz mentén megoszló rugómerevsége, μ a tapadási súrlódási együttható.

A metszéspontok helyét az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha = -\frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s}, \quad (3.2)$$

amelyből:

$$x_1 = x_M = -a_1 + \frac{4}{3} \frac{a_1^3 s \tan \alpha}{\mu F_z}, \quad x_2 = a_1. \quad (3.3)$$

A kerékre ható oldalirányú erő nagyságát, úgy számíthatjuk ki, ha a $(-a_1, a_1)$ intervallumon integráljuk a kerék s hossz mentén megoszló rugómerevségének és a határoló görbék szorzatát. Az integrálást elvégezve:

$$F_y = \int_{-a_1}^{a_1} s q(x) dx = \int_{-a_1}^{x_M} s(-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s} dx + \int_{x_M}^{a_1} s(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx, \quad (3.4)$$

ahol az első és a második integrált külön kiszámítva:

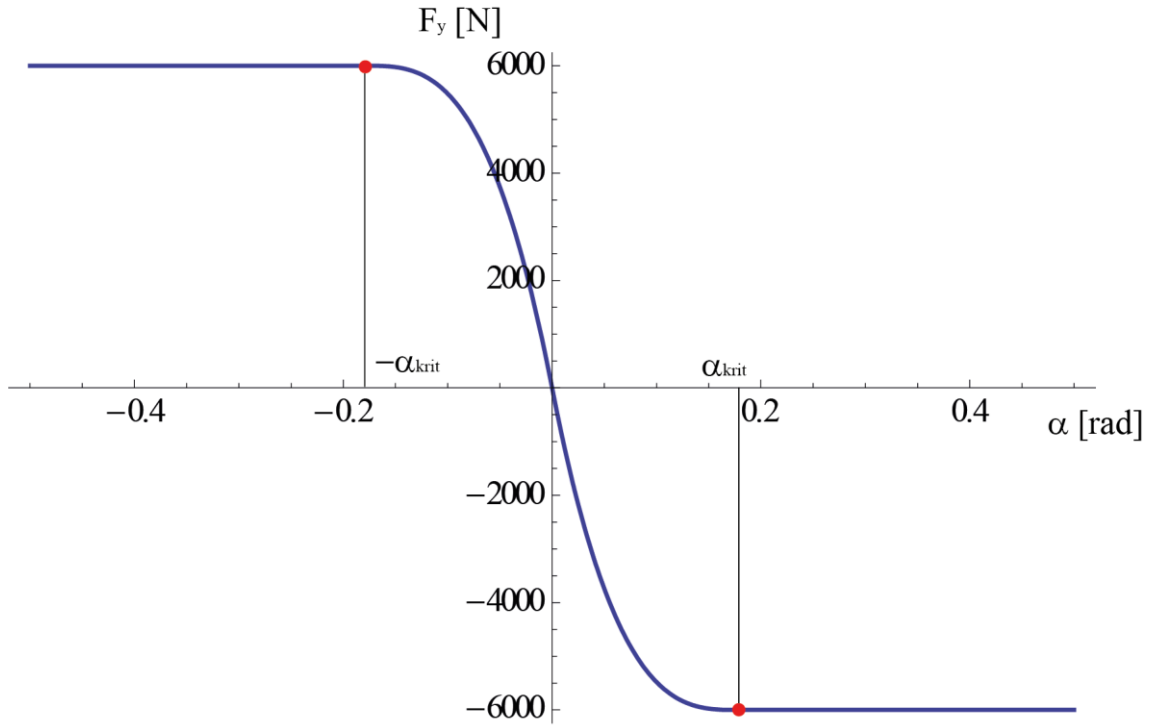
$$\int_{-a_1}^{x_M} s(-1) \frac{3}{4} \frac{F_z}{a_1} \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2}\right) \frac{\mu}{s} dx = \frac{16}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{\tan^2 \alpha a_1^4 s^2}{F_z \mu}, \quad (3.5)$$

$$\int_{x_M}^{a_1} s(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha) dx = -2s a_1^2 \tan \alpha + \frac{8}{3} \frac{a_1^4 s^2 \tan^2 \alpha}{F_z \mu} - \frac{8}{9} \frac{a_1^6 s^3 \tan^3 \alpha}{F_z^2 \mu^2}. \quad (3.6)$$

Ezeket összegezve, valamint a lehetséges összevonások elvégzése után a keréken ébredő laterális irányú erő:

$$F_y = -\frac{8}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} + \frac{4}{3} \frac{\tan^2 \alpha a_1^4 s^2}{F_z \mu} - 2s a_1^2 \tan \alpha. \quad (3.7)$$

Belátható, hogy ha a kerék kúszási szöge, $\alpha < 0$, akkor mindkét görbét tükrözni kell az x tengelyre, tehát az integrálandó görbe alatti terület éppen -1-szeres lesz az $\alpha > 0$ esethez képest, azaz $F_y(-\alpha) = -F_y(\alpha)$.



4. ábra, A kerekekre ható erő nagysága a kúszási szög függvényében

Az alábbi paraméterek esetén oldalirányú erő nagyságát a kúszási szög függvényében a 4. ábra mutatja:

$$\begin{aligned}
s &= 20000000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \\
\mu &= 0,6, \\
a_1 &= 0,05 \text{ m}, \\
F_z &= 10000 \text{ N}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Az előzőekből következik, hogy a modellt csak az ábrán pirossal jelölt α_{krit} kritikus kúszási szög értékig tekinthetjük érvényesnek, amely annak az α kúszási szög értéknek felel meg, amikor az egyenes az a_1 pontban éppen érinti a parabolát, azaz a görbék két metszéspontja (ld. (3.3)) éppen egybe esik, azaz $x_1 = x_2$. Ezek alapján a kritikus kúszási szög nagysága:

$$\alpha_{\text{krit}} = \arctan \frac{3}{2} \frac{\mu F_z}{s a_1^2}. \tag{3.9}$$

Ennél nagyobb kúszási szög esetén, mivel az oldalirányú erő nagysága elérte a lehetséges maximumát, F_y továbbra is a teljes parabola alatti terület nagyságával lesz arányos. Ez az eset megfeleltethető annak, ha úgy tekintjük, hogy az egész kerék megcsúszik, azaz az oldalirányú erő nagysága a csúszási súrlódásnak megfelelően: $F_y = \mu_{\text{cs}} F_z$, és jelen esetben azt tételeztük fel, hogy a tapadási és a csúszási súrlódási együttható azonos, azaz $\mu = \mu_{\text{csúszási}} = \mu_{\text{tapadási}}$, tehát $F_y = \mu F_z$. Összegezve a fentieket a laterális erőre vonatkozó összefüggést a kúszási szögek teljes intervallumán a következőképpen írhatjuk fel:

$$F_y(\alpha) = \begin{cases} \mu F_z, & \alpha < -\alpha_{\text{krit}} \\ -\frac{8}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{\tan^2(-\alpha) a_1^4 s^2}{F_z \mu} - 2s a_1^2 \tan \alpha, & -\alpha_{\text{krit}} \leq \alpha < 0 \\ -\frac{8}{27} \frac{\tan^3 \alpha a_1^6 s^3}{F_z^2 \mu^2} + \frac{4}{3} \frac{\tan^2 \alpha a_1^4 s^2}{F_z \mu} - 2s a_1^2 \tan \alpha, & 0 \leq \alpha < \alpha_{\text{krit}} \\ -\mu F_z, & \alpha_{\text{krit}} < \alpha \end{cases}. \tag{3.10}$$

Ezek alapján tehát az egyes kerekek deformációjából származó F_1, F_2, F_3 laterális erőket meghatározhatjuk, ha (3.7) összefüggésbe a megfelelő kúszási szögeket ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_y(\alpha_1), \\
F_2 &= F_y(\alpha_2), \\
F_3 &= F_y(\alpha_3).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2. A járművekre a kerekekről átadódó koncentrált erőpárok

Belátható, hogy egy általános α kúszási szögnél a hossz mentén megoszló erőintenzitás görbe alatti terület súlypontja nem fog az y tengelyre esni (ld. 3. ábra), így a csúszási erőnek függőleges irányú, M_z nyomatéka lesz a kerék súlypontjára. A forgatónyomaték nagyságát $\alpha > 0$ esetén az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$M_z = \int_{-a_1}^{a_1} sxq(x)dx = \int_{-a_1}^{x_M} sx(-1)\frac{3}{4}\frac{F_z}{a_1}\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}\right)\frac{\mu}{s}dx + \int_{x_M}^{a_1} sx(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha)dx. \quad (3.12)$$

Az integrálokat külön kiszámítva:

$$\int_{-a_1}^{x_M} sx(-1)\frac{3}{4}\frac{F_z}{a_1}\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}\right)\frac{\mu}{s}dx = \frac{16}{27}\frac{a^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} - \frac{16}{9}\frac{a^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} + \frac{4}{3}\frac{a^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu}, \quad (3.13)$$

valamint:

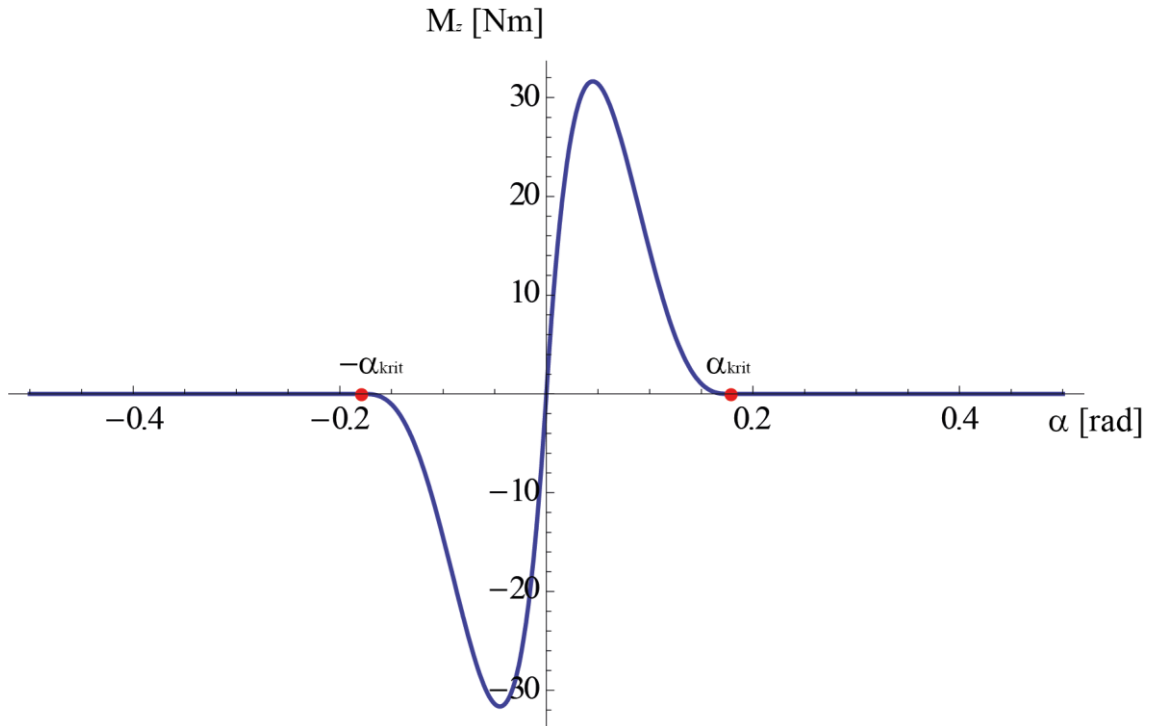
$$\int_{x_M}^{a_1} sx(\tan \alpha x - a_1 \tan \alpha)dx = -\frac{64}{81}\frac{a_1^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{3}\frac{a_1^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{8}{3}\frac{a_1^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} - \frac{2}{3}a_1^3 \tan \alpha s. \quad (3.14)$$

A két integrált összevonva, egyszerűsítések után a következő összefüggésre jutunk:

$$M_z = -\frac{16}{81}\frac{a_1^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{9}\frac{a_1^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3}\frac{a_1^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} + \frac{2}{3}a_1^3 \tan \alpha s \quad (3.15)$$

Az oldalirányú erőkhöz hasonlóan, azok nyomatékra is belátható, hogy $M_z(-\alpha) = -M_z(\alpha)$.

A 3.1. fejezetben megadottakkal azonos paraméterek esetén a nyomaték és a kúszási szög kapcsolatát az 5. ábra mutatja:



5. ábra, A forgatónyomaték nagysága a kúszási szög függvényében

Ebben az esetben is igaz az, hogy a modell csak a kritikus α értékig lesz érvényes, ennél nagyobb kúszási szögek esetén belátható, hogy az oldalirányú erő nyomatéka zérus lesz, hiszen ebben a tartományban az egész parabolát tekintjük érvényesnek, amelynek szimmetria tulajdonságai miatt a súlypontja az y tengelyre esik. A fenti megfontolások után a

kerékdeformációból származó forgatónyomatéokra vonatkozó összefüggést α kúszási szög teljes intervallumán a következőképpen írhatjuk fel:

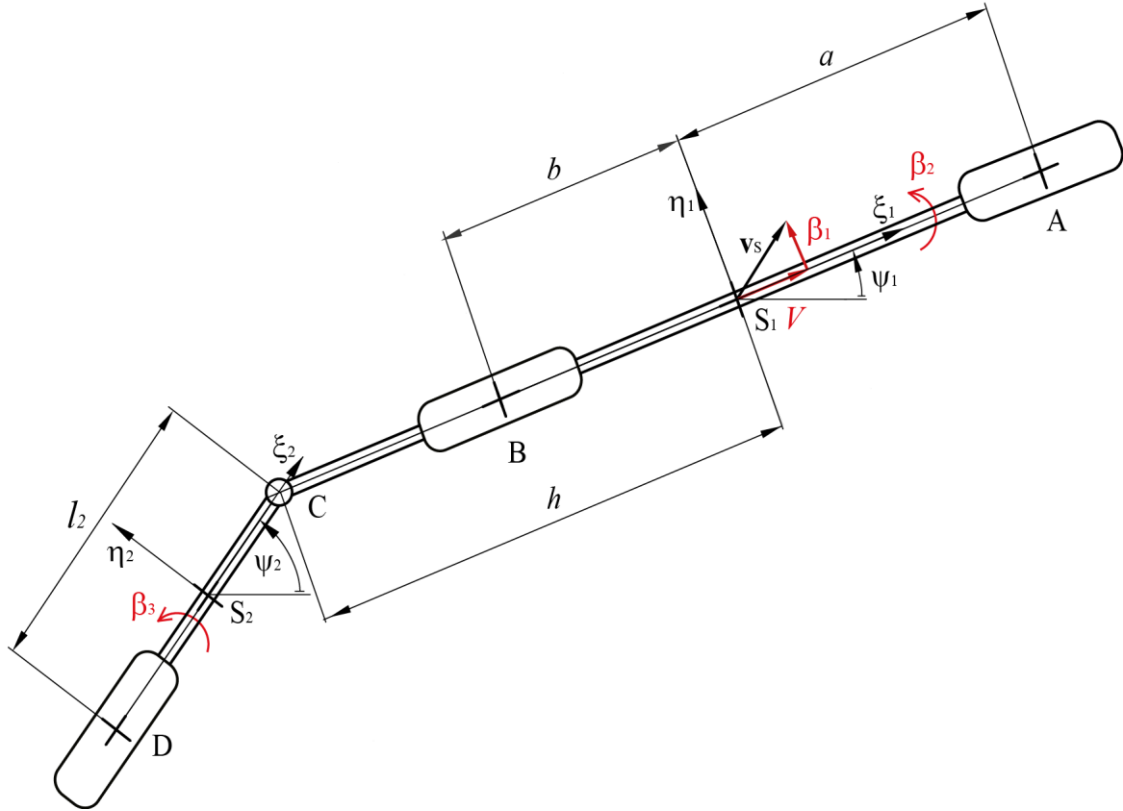
$$M_z(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < -\alpha_{krit} \\ \frac{16}{81} \frac{a_1^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{9} \frac{a_1^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} + \frac{4}{3} \frac{a_1^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} + \frac{2}{3} a_1^3 \tan \alpha s, & -\alpha_{krit} \leq \alpha < 0 \\ -\frac{16}{81} \frac{a_1^9 \tan^4 \alpha s^4}{F_z^3 \mu^3} + \frac{8}{9} \frac{a_1^7 \tan^3 \alpha s^3}{F_z^2 \mu^2} - \frac{4}{3} \frac{a_1^5 \tan^2 \alpha s^2}{F_z \mu} + \frac{2}{3} a_1^3 \tan \alpha s, & 0 \leq \alpha < \alpha_{krit} \\ 0, & \alpha_{krit} < \alpha \end{cases} \quad (3.16)$$

Az oldalirányú erőkhöz hasonlóan az egyes kerekek deformációja során fellépő M_1, M_2, M_3 nyomatékokat úgy kaphatjuk meg, ha (3.15) összefüggésbe a megfelelő kúszási szögeket $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ helyettesítjük:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_z(\alpha_1), \\ M_2 &= M_z(\alpha_2), \\ M_3 &= M_z(\alpha_3). \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3. A kúszási szögek meghatározása

Az egyes kerekek kúszási szöge $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ alatt a rudak illetve a kerekek kapcsolódási pontjainak sebességvektorának ($\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, illetve $\mathbf{v}_D$) a rudak hossztengelyével bezárt szögét értjük. Ezek meghatározásához írjuk fel A, B, valamint D pontok sebességét a megfelelő rudakkal együtt mozgó (ξ_1, η_1, ζ_1) illetve (ξ_2, η_2, ζ_2) koordináta-rendszerben (ld. 6. ábra):



6. ábra, A járművek súlyponti sebességeinek felbontása járműirányú és arra merőleges komponensekre.

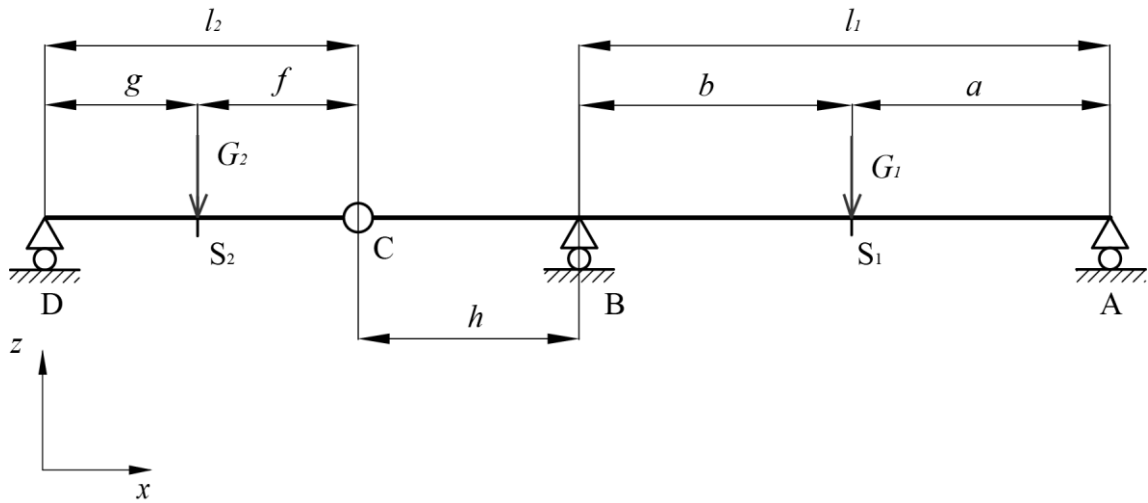
$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_A &= \begin{bmatrix} V \\ \beta_1 + a\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}, \\
 \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} V \\ \beta_1 - b\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}, \\
 \mathbf{v}_D &= \begin{bmatrix} V \cos(\psi_1 - \psi_2) + (h\beta_2 - \beta_1) \sin(\psi_1 - \psi_2) \\ V \sin(\psi_1 - \psi_2) + \beta_1 - h\beta_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) - l_2\beta_3 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ekkor az egyes kerekek kúszási szögének tangensét a megfelelő sebességvektorok a jármű hossz tengelyére merőleges és azzal párhuzamos komponenseiből képzett hányadosa adja meg, ezek alapján a kúszási szögeket a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{\beta_1 + a\beta_2}{V}\right), \\
\alpha_2 &= \arctan\left(\frac{\beta_1 - b\beta_2}{V}\right), \\
\alpha_3 &= \arctan\left(\frac{V \sin(\psi_1 - \psi_2) + \beta_1 - h\beta_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) - l_2\beta_3}{V \cos(\psi_1 - \psi_2) + (h\beta_2 - \beta_1) \sin(\psi_1 - \psi_2)}\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

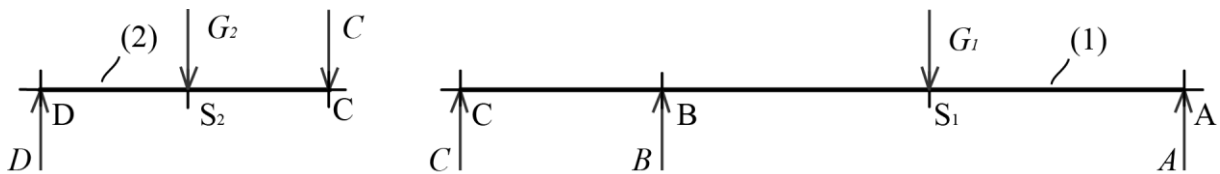
3.4. A kerekek és a talaj között fellépő nyomóerő

A kerekek és a talaj között fellépő nyomóerő meghatározásához, a járműveket modellező két rudat a kerekek helyén görgőkkel támasztjuk alá, közöttük pedig továbbra is csuklós kapcsolatot feltételezünk és ennek a rendszernek a statikai egyensúlyát vizsgáljuk, ezzel elhanyagolva a dinamikus hatásokat.



7. ábra, A kerekre ható függőleges irányú erő meghatározására alkalmazott statikai modell

Az egyes rudakat a saját S_1 , illetve S_2 súlypontjában a $G_1 = m_1 g_0$ és $G_2 = m_2 g_0$ súlyerő terheli, ahol m_1 és m_2 az egyes járművek tömege, g_0 pedig a nehézségi gyorsulás. A kerekek és a talaj között fellépő nyomóerőt az A, B és D pontokban fellépő F_{z1}, F_{z2}, F_{z3} kényszererők fogják megadni. A fentieket a 7. ábra szemlélteti. Bontsuk fel C csuklónál a szerkezetet és a szabadtest ábrák alapján (ld. 8. ábra) írjuk fel a két rúdra külön-külön a statikai egyensúlyi egyenleteket.



8. ábra, A rudak szabadtest ábrái

Az 1. rúd egyensúlyából:

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= 0: F_{z1} + F_{z2} - C - G_1 = 0, \\
\sum M_A &= 0: C(a + h) + G_1 a - F_{z2}(a + b) = 0,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

valamint a 2. rúd egyensúlyából:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0: \quad F_{z3} + C - G_2 &= 0, \\ \sum M_D = 0: \quad Cl_2 + G_1g &= 0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

A fenti (3.20), (3.21) egyenletrendszer megoldásával meghatározhatjuk az F_{z1}, F_{z2}, F_{z3} nyomóerőket, valamint a C csuklóerő is kiadódik:

$$\begin{aligned}F_{z1} &= \frac{m_1g_0bl_2 - m_2g_0(a+h)g}{l_1l_2}, \\ F_{z2} &= \frac{m_1g_0al_2 + m_2g_0(a+h)g}{l_1l_2}, \\ F_{z3} &= \frac{m_2g_0f}{l_2}, \\ C &= \frac{m_2g_0g}{l_2}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

4. A személygépjármű-utánfutó rendszer lineáris stabilitásvizsgálata

4.1. A kerékdeformációból származó erő és nyomaték karakterisztika linearizálása

A lineáris stabilitásvizsgálat során feltételezzük, hogy a rendszer kialakuló állandósult mozgása egyenes vonalú, állandó V sebességgel haladó mozgás, amelyből következik, hogy az állandósult mozgás során x tengellyel bezárt ψ_1 és ψ_2 szöge állandó, valamint minden pszeudo sebesség, illetve a ψ_1 és ψ_2 szögek különbsége zérus lesz: [Equation Section \(Next\)](#)

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &\equiv \psi_{10}, \\ \psi_2(t) &\equiv \psi_{20}, \\ \beta_1(t) &\equiv 0, \\ \beta_2(t) &\equiv 0, \\ \beta_3(t) &\equiv 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

illetve:

$$\psi_{10} - \psi_{20} = 0.\tag{4.2}$$

Ha a fenti értékeket az egyes kerekek kúszási szögére vonatkozó (3.19) összefüggésbe helyettesítve belátható, hogy az állandósult mozgás során ezek értéke is zérus:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &\equiv 0, \\ \alpha_2(t) &\equiv 0, \\ \alpha_3(t) &\equiv 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

A stacionárius mozgás során, a rendszer kis kitérésének hatására a kerekek csúszási szögei is kicsik lesznek ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 0,1$). Ebben az esetben a számítás egyszerűbbé tétele érdekében linearizálhatjuk az oldalirányú erőkre (3.7), illetve nyomatékokra (3.15) vonatkozó összefüggéseket az állandósult mozgás ($\alpha = 0$) körül.

Vegyük az oldalirányú erő erőkre vonatkozó (3.7) összefüggést és linearizáljuk $\alpha = 0$ körül:

$$F_y(\alpha) \cong -2sa_1^2\alpha.\tag{4.4}$$

A fenti összefüggésben α együtthatójának helyére vezessünk be a C_{Fy} paramétert, amelyet, a gumikerek oldalirányú merevségeként értelmezhetünk:

$$\begin{aligned}C_{Fy} &= -2sa_1^2, \\ F_y(\alpha) &\cong C_{Fy}\alpha.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Hasonlóképpen, linearizáljuk a gumideformációból származó forgatónyomatékokra vonatkozó (3.15) összefüggést $\alpha = 0$ körül:

$$M_z(\alpha) \cong \frac{2}{3}a_1^3s\alpha,\tag{4.6}$$

illetve a fenti összefüggésben α kúszási szög együtthatója helyére vezessük be C_{Mz} a gumikerék torziós merevségét jellemző paramétert:

$$C_{Mz} = \frac{2}{3} a_1^3 s, \quad (4.7)$$

$$M_z(\alpha) \cong C_{Mz} \alpha.$$

Összevetve a fentebb értelmezett oldalirányú, illetve torziós rugómerevségre vonatkozó összefüggéseket, látható, hogy a két paraméter egymástól nem független, a közöttük lévő kapcsolatot az alábbi egyenlettel írhatjuk le:

$$C_{Mz} = -\frac{a_1}{3} C_{Fy}. \quad (4.8)$$

Ez megfelel a fizikai modellünknek, ugyanis amennyiben lineáris esetben elhanyagoljuk a kerék esetleges megcsúszását és a kontakttartományban a lineáris gumirugó elemek (ld. 3. ábra) deformációját egy α meredekséggel rendelkező egyenessel közelítjük, akkor az egyenes és az x tengely által közbezárt háromszög tartomány súlypontja éppen $x = -a/3$ helyre esik. Érdekes még megemlíteni, hogy a linearizált formulákban egyes paraméterek, mint a kerekek és a talaj közötti μ súrlódási tényező, valamint a kerek és a talaj közötti függőleges irányú F_z nyomóerő nem jelennek meg, ezek tehát a rendszer lineáris stabilitását nem befolyásolják.

Mivel a modellünkben a személygépjármű és az utánfutó kerekeire azonos s oldalirányú merevséget, valamint a_1 letapadt hosszt feltételeztünk, így az egyes kerekek oldalirányú és torziós merevsége is azonos lesz. Összefoglalva tehát az egyes kerekek deformációjából származó oldalirányú erőkre, illetve nyomatékokra az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$F_{yi}(\alpha_i) \cong C_{Fy} \alpha_i \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

valamint:

$$M_{zi}(\alpha_i) \cong C_{Mz} \alpha_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

A fenti formulákban az α_i kúszási szögeket a (3.19) összefüggés segítségével határozhatjuk meg.

4.2. Stabilitásvizsgálat

A személygépjármű-utánfutó rendszer stabilitásvizsgálatához tekintsük annak mozgásegyenleteit (2.32):

$$\begin{aligned}
& m_1(\dot{\beta}_1 + V\beta_2) + m_2(\dot{\beta}_1 + V\beta_2 - h\dot{\beta}_2 - f\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + f\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\
& = F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2 - \psi_1), \\
& \theta_{s_1}\dot{\beta}_2 + m_2(h^2\dot{\beta}_2 - hV\beta_2 - h\dot{\beta}_1 + hf\dot{\beta}_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) - hf\beta_3^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) \\
& = aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos(\psi_2 - \psi_1) + M_1 + M_2, \\
& \theta_{s_2}\dot{\beta}_3 + m(f^2\dot{\beta}_3 - fV\beta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f\dot{\beta}_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) - f\beta_1\beta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\
& + hf\dot{\beta}_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) + hf\beta_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1)) = M_3 - l_2F_3.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Az egyenlet baloldalából gyűjtsük ki a pszeudo gyorsulások $(\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3)$ együtthatóit és írjuk fel az egyenletet mátrixos alakban az alábbi módon:

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{\Pi}, \tag{4.12}$$

ahol $\mathbf{A}$ a pszeudo gyorsulások együtthatóit tartalmazó mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -hm_2 & -fm_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \\ -hm_2 & h^2m_2 + \theta_1 & fhm_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \\ -fm_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) & fhm_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) & f^2m_2 + \theta_2 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

míg $\mathbf{b}$ az egyenlet baloldalának a pszeudo gyorsulástól nem függő tagjait tartalmazó vektor:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)V\beta_2 - fm_2 \sin(\psi_1 - \psi_2)\beta_3^2 \\ hm_2(-V\beta_2 + f \sin(\psi_1 - \psi_2)\beta_3^2) \\ fm_2\beta_2(-V \cos(\psi_1 - \psi_2) + (\beta_1 - h\beta_2) \sin(\psi_1 - \psi_2)) \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

$\mathbf{\Pi}$ pedig a pszeudo erő vektor:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Rendezzük át a (4.12) vektoregyenletet úgy, hogy a baloldalon csak a $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ pszeudo gyorsulás vektor maradjon, ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{\Pi} - \mathbf{b}). \tag{4.16}$$

Mivel a rendszer mozgásegyenletében a pszeudo sebességek és gyorsulások mellett ψ_1 és ψ_2 általános koordináták is szerepelnek, így egészítsük ki a fenti egyenletet a koci és az utánfutó x tengellyel bezárt szöge, és a pszeudo sebességek közötti összefüggést leíró differenciál-egyenletekkel (ld. (2.15)):

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= \beta_2, \\
\dot{\psi}_2 &= \beta_3.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ezzel egy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ alakú, ötismeretlenes elsőrendű autonóm differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk, amelyet a következő formában írhatunk fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi_1, \psi_2) \\ f_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi_1, \psi_2) \\ f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi_1, \psi_2) \\ f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi_1, \psi_2) \\ f_5(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \psi_1, \psi_2) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Ekkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer az autonóm egyenlet x_0 egyensúlyi helyéhez tartozó variációs rendszere, ahol $\mathbf{J}_0$ az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi-mátrixa, az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}_0 = [j_{0kl}], \quad k, l = 1, \dots, 5, \quad (4.19)$$

ahol:

$$j_{0kl} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (4.20)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ a (4.18) differenciálegyenlet változóinak az állandósult mozgás során felvett értékeit tartalmazó vektor, amely ebben az esetben nullvektor:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \\ \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

A karakterisztikus polinomot a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I}). \quad (4.22)$$

A differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helye (amely esetünkben a stacionárius mozgás) Ljapunov értelemben stabilis, ha $\mathbf{J}_0$ mátrix minden sajátértékének valós része negatív, vagy zérus. Belátható, hogy a $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrixnak paramétereiktől függetlenül mindig lesz egy zérus sajátértéke. Ez a fizikai képünkkel megegyezik, ugyanis az állandósult egyenes vonalú mozgás abszolút rendszerben értelmezett iránya közömbös, kényszerként csak azt írjuk elő, hogy a járműszerelvénnyel állandó V kocsirányú sebességgel haladjon. Ennek köszönhetően a lineáris stabilitás szempontjából elegendő a $\hat{P}(\lambda) = P(\lambda)/\lambda$ polinomot vizsgálnunk. Annak eldöntésére, hogy adott paraméterek esetén a stabilitási feltétel teljesül-e a Routh-Hurwitz kritériumot alkalmaztuk [3].

A $\hat{P}(\lambda)$ esetünkben negyedfokú karakterisztikus polinomot, írjuk fel az alábbi módon:

$$\hat{P}(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4. \quad (4.23)$$

A legmagasabb fokszámú tag együtthatójával (a_0) leosztva vezessünk be új együtthatókat:

$$b_n = \frac{a_n}{a_0}, \quad n = 1, \dots, 4, \quad (4.24)$$

ekkor a karakterisztikus polinomot az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\hat{P}(\lambda) = \lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4. \quad (4.25)$$

A Routh-Hurwitz kritérium [3] szerint a $\hat{P}(\lambda)$ karakterisztikus polinom akkor és csak akkor stabilis, ha a Δ_k Hurwitz determinánsokra teljesül $\Delta_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$ ahol:

$$\Delta_1 = \det[b_1], \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{bmatrix}, \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{bmatrix}, \Delta_4 = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & b_4 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

4.3. Eredmények

A rendszer lineáris stabilitását különböző V jármű irányába eső sebességek, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét leíró dimenzió nélküli p paraméter függvényében vizsgáltuk, a járművek összes többi paraméterének állandó értéke mellett, előző fejezetben ismertetett módszerrel. A p paramétert az utánfutó jellemző adataiból (ld. 2.1. fejezet), a következőképpen számíthatjuk ki:

$$p = \frac{f}{l_2}. \quad (4.27)$$

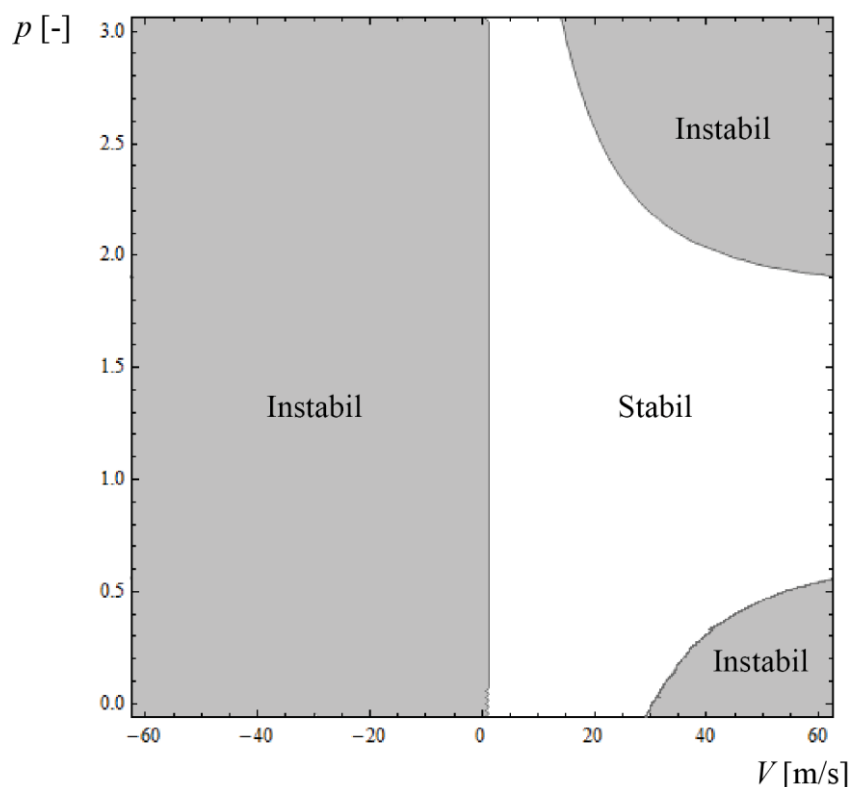
Ebből következik, hogy $p=1$ értéke mellett az utánfutó súlypontja éppen a kerekek tengelyének vonalában, míg $p < 1$ mellett az utánfutó tengelye előtt, $p > 1$ esetén pedig az utánfutó tengelye mögött helyezkedik el. A vizsgálatok során az alábbi paraméterekkel rendelkező járműszerelvényt vizsgáltunk:

$$\begin{aligned} a &= 1,4 \text{ m}, \\ b &= 1,6 \text{ m}, \\ h &= 1,8 \text{ m}, \\ l_2 &= 2 \text{ m}, \\ m_1 &= 1600 \text{ kg}, \\ m_2 &= 400 \text{ kg}, \\ k_1 &= 1,5, \\ k_2 &= 0,5, \\ s &= 20000000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ahol k_1 és k_2 a személygépjármű, illetve az utánfutó alaktényezője. Feltételezzük, hogy a járművek θ_1 , illetve θ_2 saját súlyponti, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka arányos a tömegükkel, valamint a hosszirányú méretük négyzetével, az arányossági tényező pedig k_1 és k_2 :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= k_1 m_1 (a + h)^2, \\ \theta_2 &= k_2 m_2 l_2^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A fenti paraméterek mellett a stabilitásvizsgálat eredményeit stabilitási térképen ábrázoltuk (ld. 9. ábra).



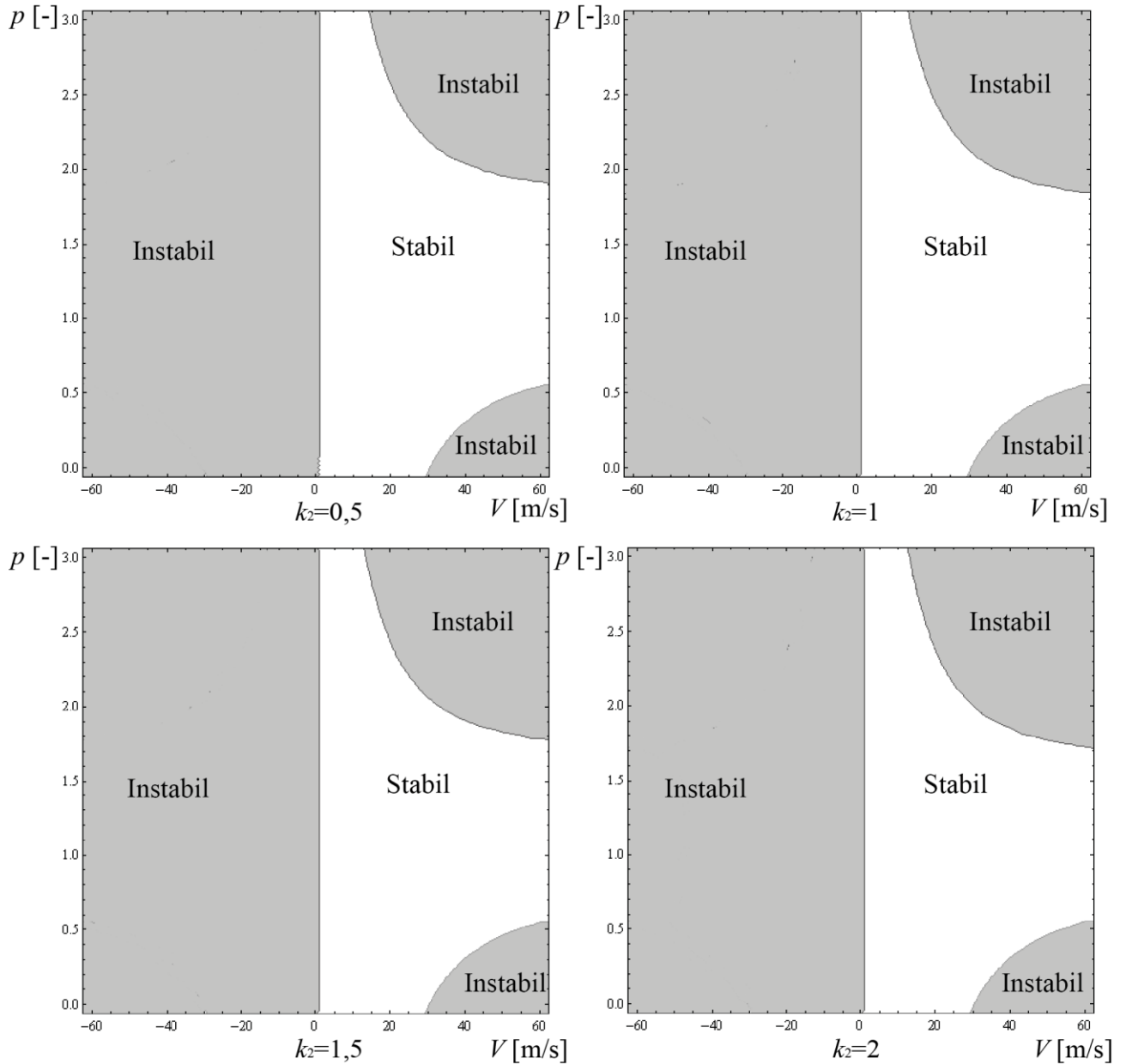
9. ábra, A személygépjármű-utánfutó rendszer stabilitástérképe

Ahogy a fenti ábrán is látható, pozitív V jármű irányú sebesség mellett két instabil tartomány jelenik meg, az egyik abban az esetben, ha $p < 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen előrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest, a másik abban az esetben, ha $p > 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen hátrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest. Ebből következik, hogy stabilitás szempontjából a legkedvezőbb eset, ha az utánfutó terhelése olyan, hogy a súlypontja a kerekek tengelyével egy vonalba esik, azaz $p = 1$. Hátrafelé való haladáskor, azaz $V < 0$ esetén viszont a rendszer mindenképpen instabil.

Ezek után érdemes megvizsgálunk, hogy milyen hatása van a rendszer stabilitására a járművek egyes jellemző paramétereinek megváltoztatása.

4.4. Az utánfutó tehetetlenségi nyomatékának hatása a stabilitásra

Az utánfutó tehetetlenségi nyomatékának a járműszerelvénymozgásának stabilitására gyakorolt hatását az utánfutó k_2 alaktényezőjének megváltoztatásával vizsgáltuk (mint a további hasonló esetekben a rendszer egyéb paramétereinek változatlan értéke mellett). Az egyes k_2 értékek mellett kapott eredményeket az alábbi stabilitási térképeken hasonlíthatjuk össze (10. ábra).

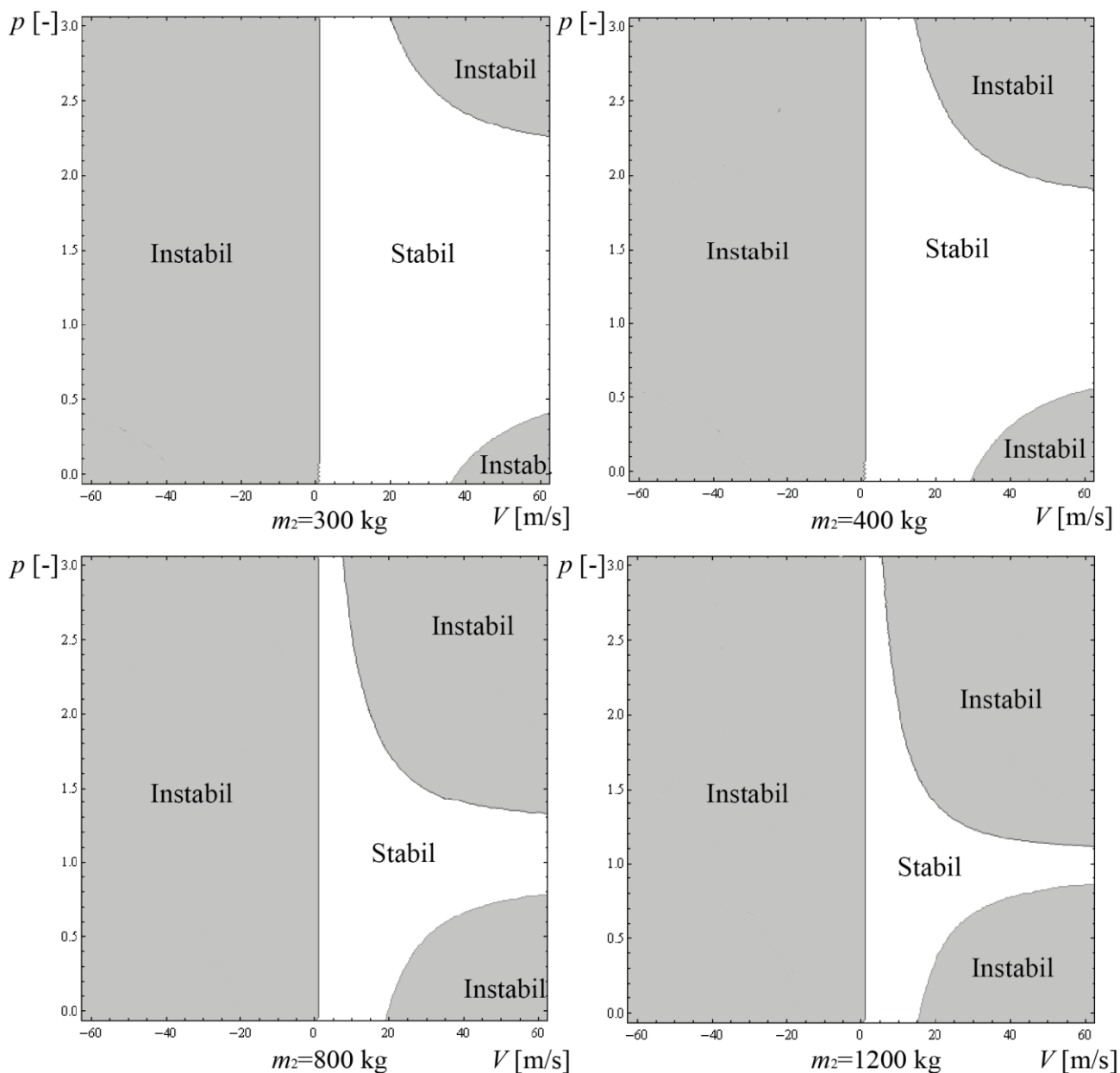


10. ábra, Az utánfutó alaktényezőjének hatása a rendszer lineáris stabilitására

Megállapítható, hogy az utánfutó tehetetlenségi nyomatékának hatása igen kismértékű a rendszer stabilitására nézve, ugyanis még az eredeti $k_2 = 0,5$ -ös értékhez képest négyszer akkora alaktényező is csak kismértékben teszi instabilabbá a rendszert $p > 1$ esetben. Míg $p < 1$ esetben, azaz amikor az utánfutó súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el, a stabilitásvizsgálat során alkalmazott paraméterek (ld. (4.28)) mellett nincs kimutatható hatása.

4.5. Az utánfutó tömegének hatása a stabilitásra

Eltérő eredményre jutunk, ha a rendszer stabilitását az utánfutó eltérő m_2 tömege mellett vizsgáljuk (ld. 11. ábra).

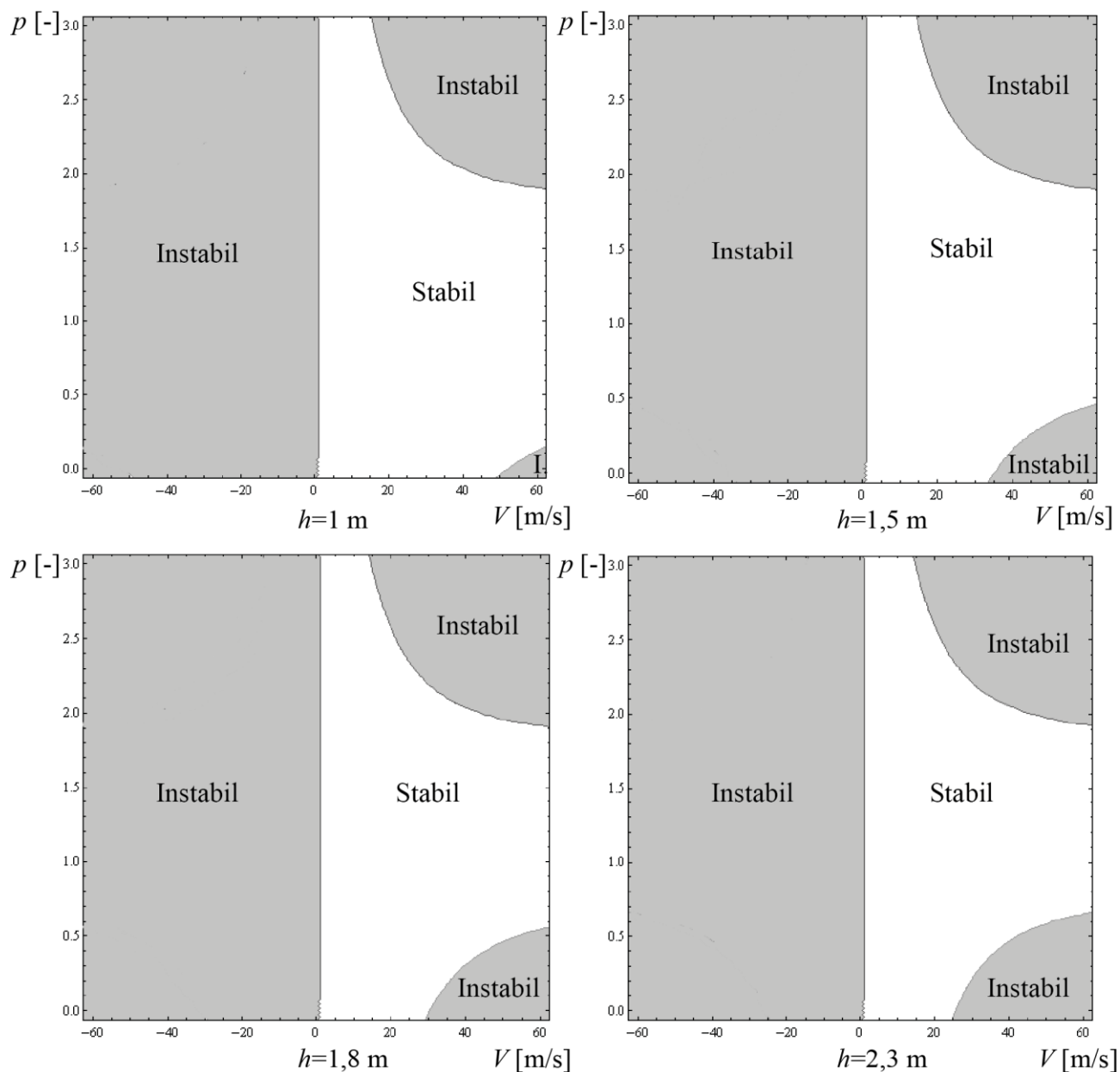


11. ábra, Az utánfutó tömegének hatása a rendszer stabilitására

Látható, hogy az utánfutó tömege lényegesen befolyásolja a járműszerelvény stabilitását, míg kis m_2 tömeg esetén szélesebb p paramétertartományban, nagyobb sebességek mellett is stabil marad a rendszer, addig egy nagyobb tömegű utánfutóval a rendszer sokkal szűkebb p tartományban marad stabil, valamint a stabilitási határhoz tartozó kritikus sebesség értéke is alacsonyabb.

4.6. A csukló a vontató jármű súlypontjától való távolságának hatása a stabilitásra

Az előzőekhez hasonlóan vizsgáltuk a személygépjármű S_1 súlypontjának C csuklótól való h távolságának hatását a rendszer stabilitására, az eredményeket az alábbi stabilitási térképeken szemléltetjük.

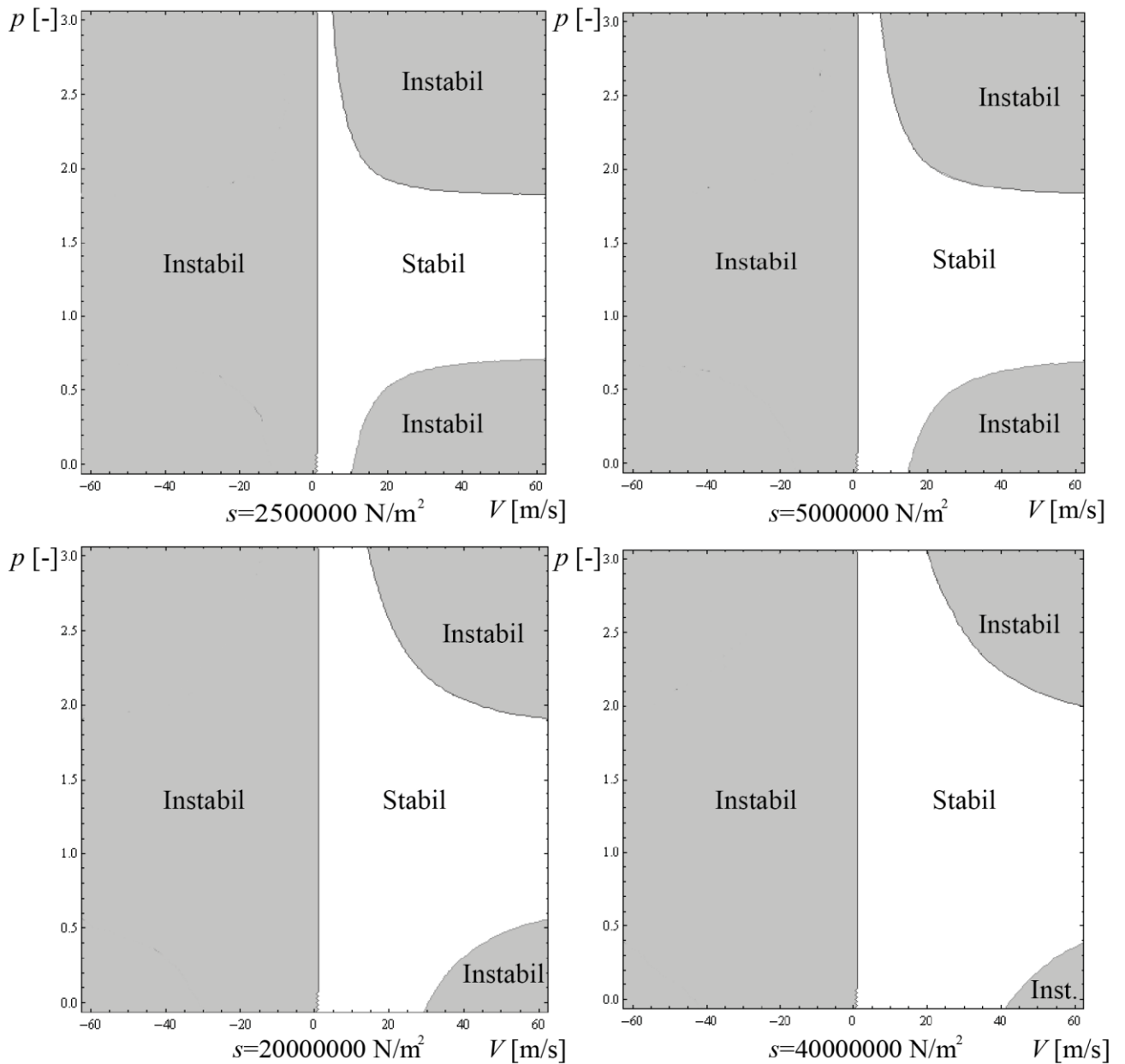


12. ábra, A csukló a vontató jármű súlypontjától való távolságának hatása a rendszer stabilitására

Látható, hogy a csukló a vontató jármű súlypontjától való távolságának megváltoztatása csak a $p < 1$ tartományban, azaz abban az esetben ront a rendszer stabilitásán, ha az utánfutó súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el. Ezzel szemben az utánfutó tengelye mögé eső súlypont ($p > 1$) esetén a h hosszának a vizsgálatok során alkalmazott paraméterek mellett nincs szignifikáns hatása a rendszer viselkedésére.

4.7. A kerekek oldalirányú merevségének hatása a stabilitásra

Ugyancsak érdekes eredményeket szolgáltat annak megvizsgálása, hogy a jármű kerekeinek laterális merevsége miként befolyásolja a rendszer viselkedését. Az előzőekhez hasonlóan az eltérő s hossz mentén megoszló merevségek mellett kapott eredményeket stabilitási térképeken hasonlíthatjuk össze (ld. 13. ábra).



13. ábra, A kerekek oldalirányú merevségének hatása a rendszer stabilitására

Megállapítható, hogy kisebb oldalirányú merevséggel rendelkező kerekek esetén a rendszer stabilitása romlik, azonban megfigyelhető, hogy a kerekek merevsége lényegesen jobban befolyásolja a stabilitási határhoz tartozó kritikus sebesség nagyságát, mint azt a p paramétertartományt, ahol a járműszerelvény instabilis viselkedése kialakulhat.

5. Numerikus szimuláció

5.1. Szimulációs módszer

Az előző fejezetben tárgyalt lineáris stabilitásvizsgálat eredményeinek ellenőrzésére numerikus szimuláció segítségével vizsgáltuk a rendszer mozgását. Ennek során a kerékdeformációból származó F_1, F_2, F_3 erők, illetve M_1, M_2, M_3 forgatónyomatékok meghatározására a 4.1 fejezetben levezetett lineáris (4.9) és (4.10) összefüggéseket, az ezekben szereplő kúszási szögekre vonatkozóan pedig a (3.19) összefüggést alkalmaztuk.

A rendszer mozgását leíró (4.11), (4.17) elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer adott kezdeti feltételek melletti megoldását, numerikus úton, explicit Runge-Kutta formulával határozzuk meg. A kezdeti feltételeket az állandósult mozgáshoz képest kis zavarással adjuk meg:

A szimuláció során a személygépjármű, illetve az utánfutó jellemző paramétereit a stabilitásvizsgálathoz hasonlóan (4.28) szerint adtuk meg, illetve a kocs V jármű irányú sebességét, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét meghatározó p paramétert úgy vettük fel, hogy a rendszer stabilitási térképének (ld. 9. ábra) egy-egy jellegzetes tartományát reprezentálja.

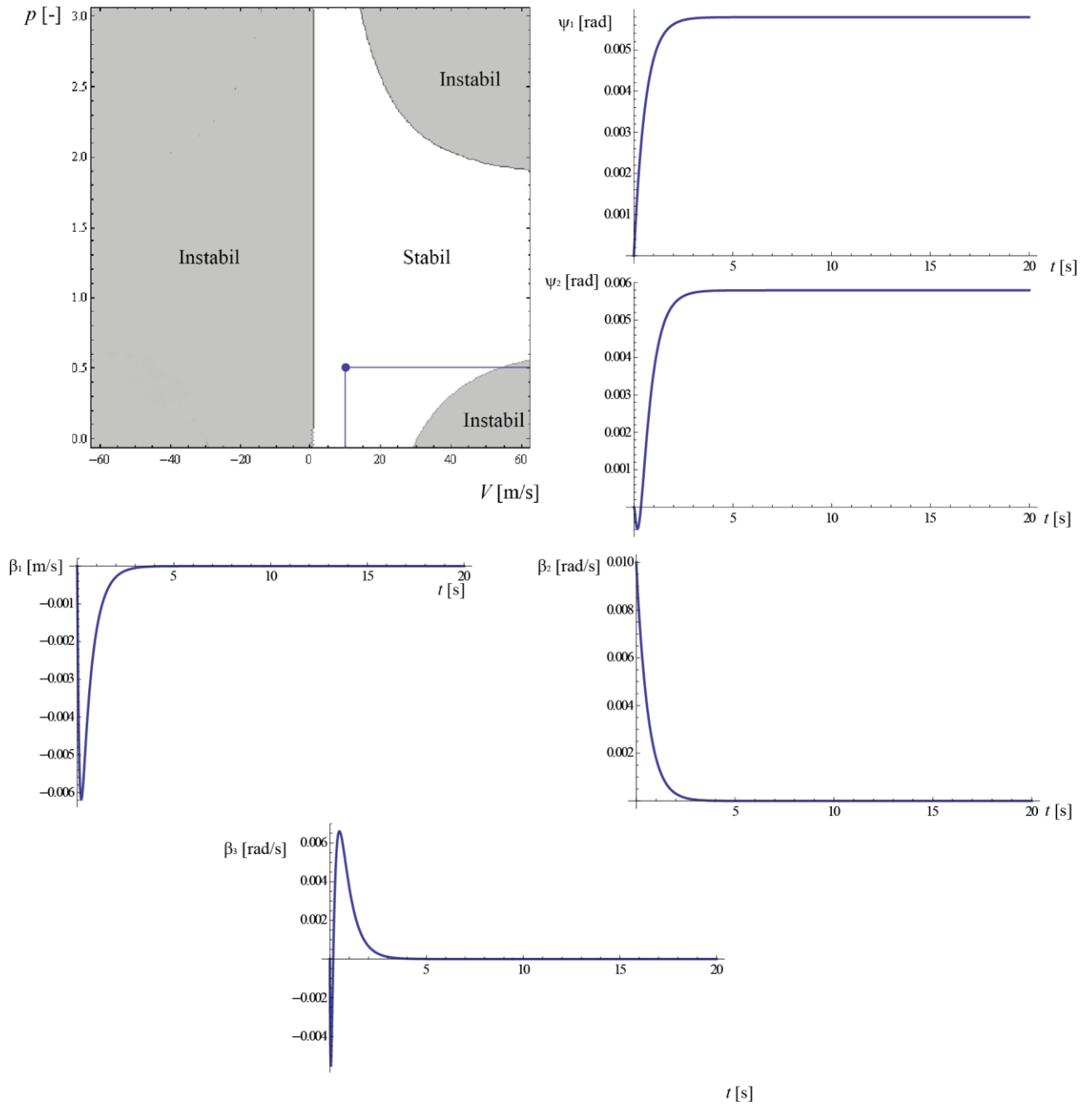
5.2. Stábil tartomány

Adatok:

$$V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 0,5,$$

$$\beta_1(0) = 0, \quad \beta_2(0) = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_3(0) = 0, \text{ Equation Section (Next)(5.1)}$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0.$$



14. ábra

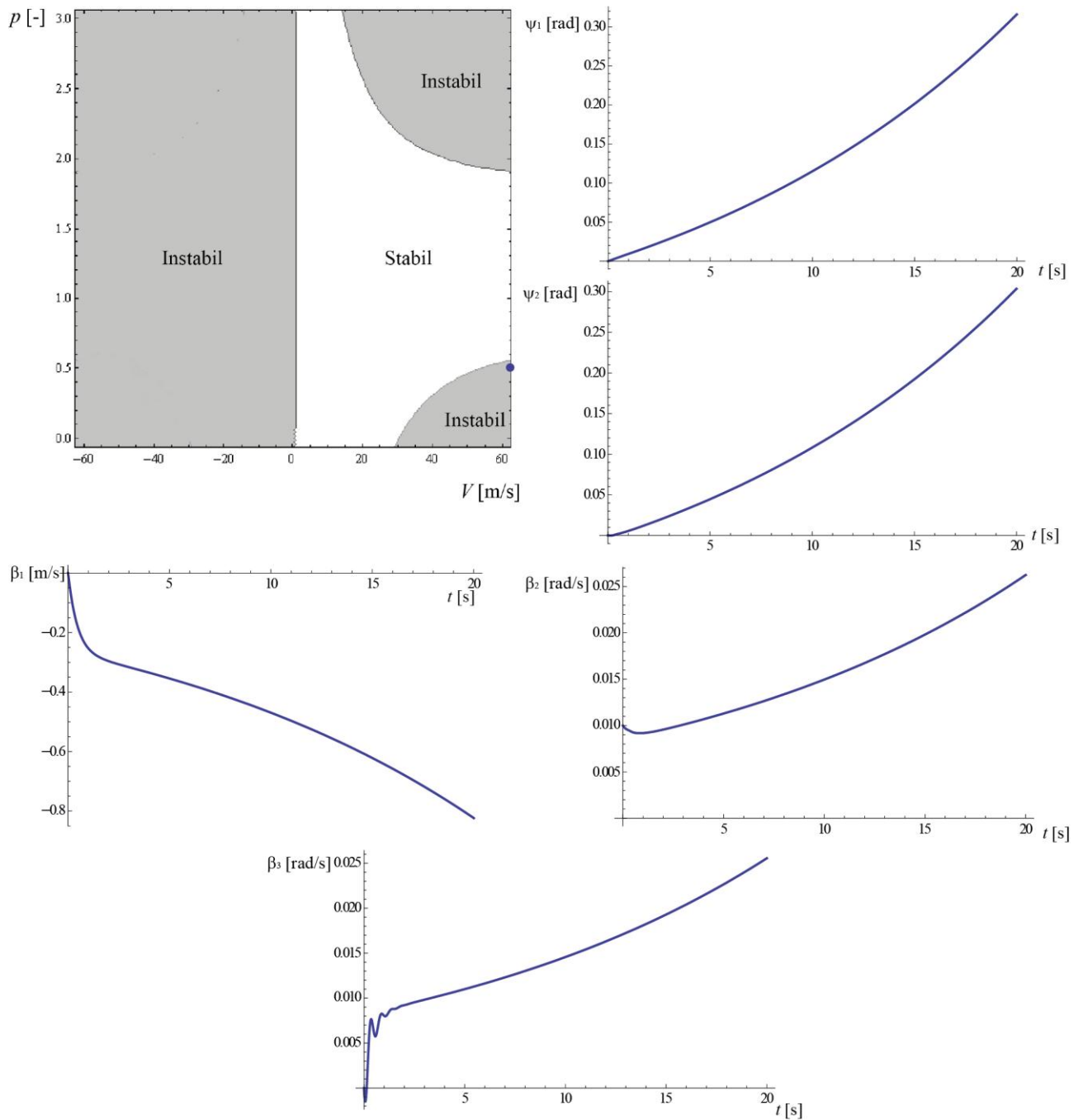
5.3. Instabil tartomány (1)

Adatok:

$$V = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 0,5,$$

$$\beta_1(0) = 0, \quad \beta_2(0) = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_3(0) = 0, \quad (5.2)$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0.$$



15. ábra

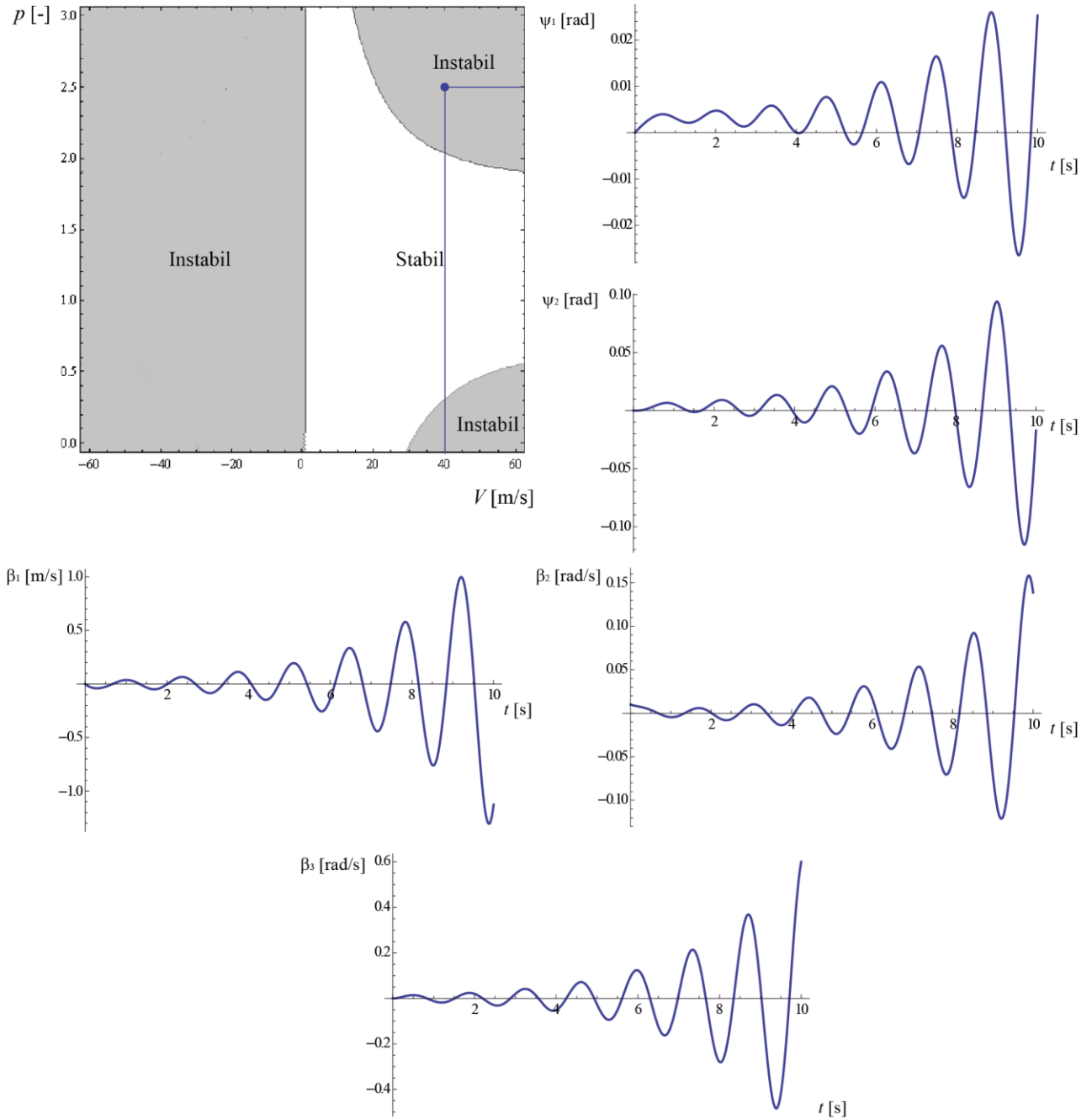
5.4. Instabil tartomány (2)

Adatok:

$$V = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad p = 2,5,$$

$$\beta_1(0) = 0, \quad \beta_2(0) = 0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_3(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0.$$



16. ábra

5.5. Következtetések

Az előzőekben bemutatott szimulációk alátámasztják a stabilitásvizsgálat eredményeit. Megállapítható, hogy a stabilitásvizsgálat szerint stabil tartományból választott paraméterekkel (V jármű irányú sebesség, p a súlypont helyzetét leíró paraméter) rendelkező

járműszerelvénnyel kis zavarás hatására vissza fog térni az állandósult mozgáshoz, ugyanakkor a zavarás hatásának lecsengése után kialakuló, új mozgás iránya (a járművek x tengellyel bezárt ψ_1 , illetve ψ_2 szöge) eltér a kezdeti feltételtől. Ez alátámasztja a 4.2 fejezetben ismertetett stabilitásvizsgálat azon eredményét, amely szerint a rendszer Jacobi mátrixának mindig lesz egy zérus sajátértéke.

Ugyancsak alátámasztja a lineáris stabilitásvizsgálat eredményeit a két instabil paramétertartományban végzett szimuláció is, hiszen a stacionárius mozgáshoz képest kis zavarással indítva a rendszer „letér” a stacionárius mozgásról. Ugyanakkor jól megfigyelhető, hogy a rendszer két instabil paramétertartományán belül a kialakuló mozgások más jellegűek. Míg abban az esetben, amikor az utánfutó súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el ($p < 1$) a rendszer statikusan instabil, addig a tengelye mögött elhelyezkedő súlyponttal ($p > 1$) rendelkező utánfutóval a járműszerelvénnyel folyamatosan növekvő amplitúdójú rezgéssel veszti el a stabilitását.

6. A rendszer nemlineáris vizsgálata AUTO07p szoftverrel

6.1. A mechanikai modell implementálása az AUTO07p szoftverben

Equation Section (Next) A járműszerelvény viselkedéséről pontosabb képet kaphatunk, ha a lineáris stabilitásvizsgálatot követően immár a rendszerben fellépő nemlinearitásokat is figyelembe vesszük. A rendszer nemlineáris vizsgálatához az AUTO07p (a továbbiakban AUTO) programot használtuk [5], amely többek között lehetővé teszi egy közönséges differenciálegyenlet rendszer állandósult és periodikus megoldásainak követését egy adott paraméter mentén.

Ehhez tekintsük a rendszer mozgásegyenlet rendszerét (2.32), amelyben a kerekek deformációjából származó erőkre (F_1, F_2, F_3) és nyomatékokra (M_1, M_2, M_3) vonatkozóan most a (3.10) valamint (3.16) nemlineáris összefüggéseket vesszük figyelembe. Az összefüggésekben szereplő intervallumváltásokat közelítő egységugrás (Heaviside) függvényekkel vesszük figyelembe [4].

Az előzőekben megmutattuk, hogy a kialakuló egyenes vonalú stacionárius mozgás független a járművek ψ_1, ψ_2 x tengellyel bezárt szögétől, ez azonban most problémát okozna a vizsgálatok során, hiszen ez azt jelentené, hogy adott paraméterek mellett a differenciálegyenlet-rendszernek végtelen sok állandósult megoldása létezne. Észrevehetjük azonban, hogy a (2.32) mozgásegyenlet rendszerben minden esetben ψ_1, ψ_2 szögek különbsége szerepel, amelyekről viszont tudjuk, hogy az állandósult mozgás során (mivel az egyenes vonalú) zérus. Vezessük be tehát új változóként a vontatmány a vonatató jármű hossztengelyéhez képest bezárt φ szögét:

$$\varphi = \psi_2 - \psi_1. \quad (6.1)$$

Ezt a (2.32) összefüggésbe helyettesítve a következő formában írhatjuk fel a rendszer mozgásegyenleteit:

$$\begin{aligned} m_1(\dot{\beta}_1 + V\beta_2) + m_2(\dot{\beta}_1 + V\beta_2 - h\dot{\beta}_2 - f\dot{\beta}_3 \cos \varphi + f\beta_3^2 \sin \varphi) \\ = F_1 + F_2 + F_3 \cos \varphi, \\ \theta_{s_1}\dot{\beta}_2 + m_2(h^2\dot{\beta}_2 - hV\beta_2 - h\dot{\beta}_1 + hf\dot{\beta}_3 \cos \varphi - hf\beta_3^2 \sin \varphi) \\ = aF_1 - bF_2 - hF_3 \cos \varphi + M_1 + M_2, \\ \theta_{s_2}\dot{\beta}_3 + m(f^2\dot{\beta}_3 - fV\beta_2 \cos \varphi - f\dot{\beta}_1 \cos \varphi - f\beta_1\beta_2 \sin \varphi \\ + hf\dot{\beta}_2 \cos \varphi + hf\beta_2^2 \sin \varphi) = M_3 - l_2F_3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Deriváljuk az idő szerint a (6.1) összefüggést és az általános koordináta sebességek helyére helyettesítsük be a pszeudo sebességeket (2.15) szerint. Ekkor a φ szögre az alábbi elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{\varphi} = \beta_3 - \beta_2. \quad (6.3)$$

Hozzuk a fenti (6.2), (6.3) egyenletrendszert a 4.2 fejezetben leírtak szerint autonóm differenciálegyenlet-rendszer alakra. Ezzel egy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ alakú, négyismeretlenes elsőrendű

autonóm differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk, amelyet a következő formában írhatunk fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi) \\ f_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi) \\ f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi) \\ f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi) \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Az egyenletrendszer ebben a formában már alkalmas az AUTO szoftverrel történő bifurkáció analízisre [5].

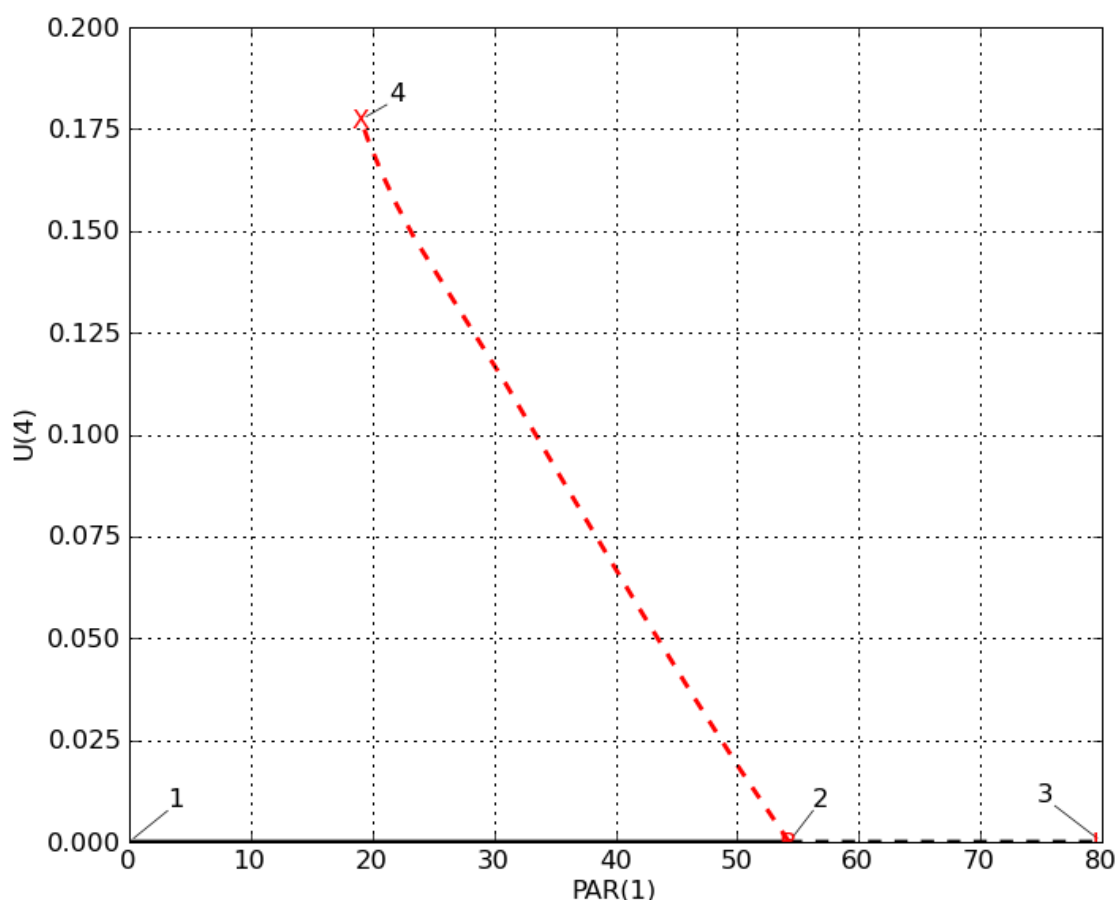
6.2. Bifurkáció analízis a statikusan instabil tartományban

A rendszer AUTO szoftverrel történő bifurkáció analízisét olyan paraméterek mellett végezzük el, amelyek esetén a lineáris stabilitásvizsgálat (ld. 4.2. fejezet) során egy kritikus V sebesség felett instabilis viselkedést tapasztaltunk. A vizsgálat során az AUTO segítségével a V jármű irányú sebesség, mint paraméter függvényében követjük a járműszerelvény mozgását leíró differenciálegyenlet-rendszer stacionárius valamint (ha léteznek) periodikus megoldásait.

Elsőként tekintsünk egy olyan rendszert, amelyben a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye előtt helyezkedik el, legyen: $p = 0,5$. A μ súrlódási tényezőre és a g_0 nehézségi gyorsulásra az alábbi értékeket vettük fel:

$$\begin{aligned} \mu &= 0,6, \\ g_0 &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

A járműszerelvény többi paramétere megegyezik a lineáris stabilitásvizsgálat során alkalmazott értékekkel (ld. (4.28)). Az eredményeket az alábbi bifurkációs diagramon ábrázoltuk.



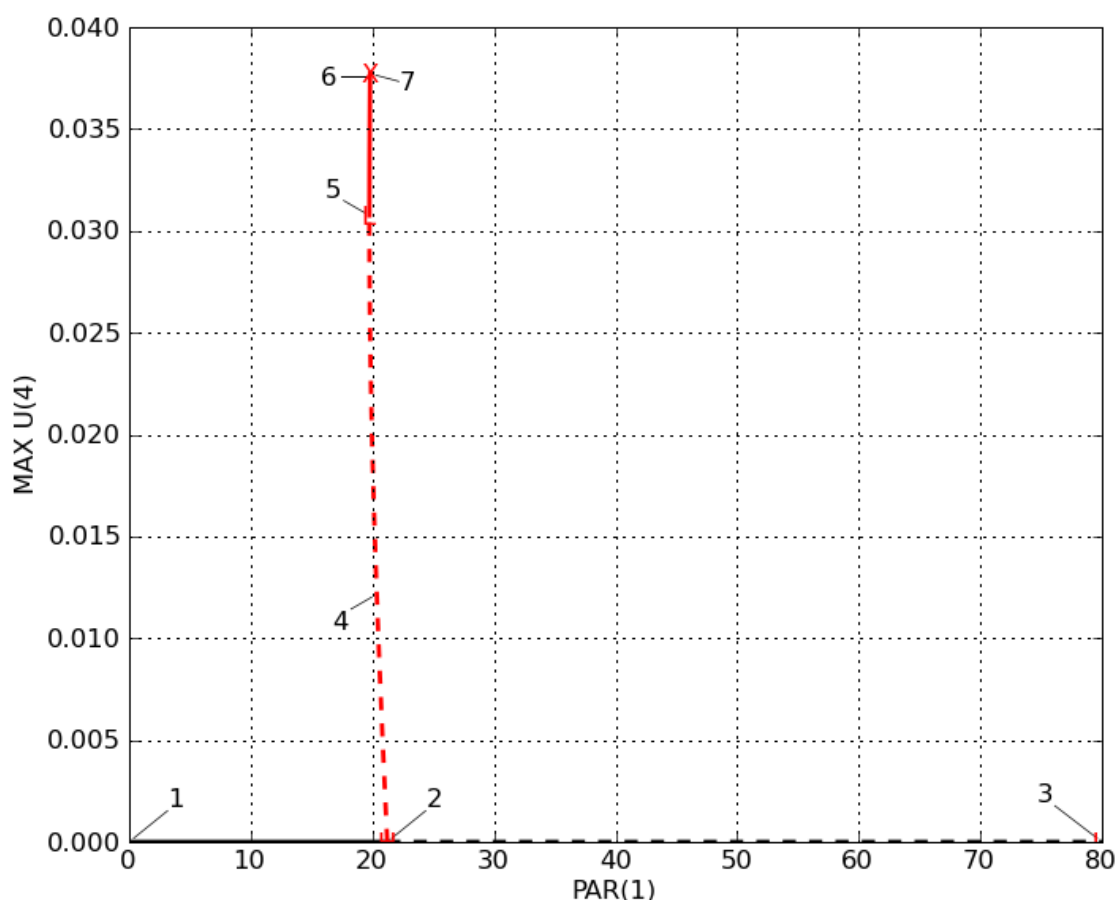
17. ábra, A rendszer bifurkációs diagramja

A diagramon a függőleges tengelyen ($U(4)$) a vontató jármű és az utánfutó által bezárt φ szöget tüntettük fel, különböző V koci irányú sebességek ($PAR(1)$) mellett.

Megállapítható, hogy a stacionárius mozgás a lineáris stabilitásvizsgálat által megadott V sebesség mellett veszti el stabilitását, (ld. 9. ábra). Ugyanakkor látható, hogy a diagramon „2”-vel jelölt pontból kiindulva ún. szubkritikus „pitch-fork” bifurkáció alakul ki, azaz a stabilis tartomány felett egy másik, instabilis állandósult mozgás is megjelenik.

6.3. Bifurkáció analízis a rezgésesen instabil tartományban

Az előzőekhez hasonlóan vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a vontatmány súlypontja a kerekek tengelye mögött helyezkedik el, legyen: $p = 2,5$. A járműszerelvény többi paramétere megegyezik a 6.2. fejezetben megadottal. Az eredményeket a következő bifurkációs diagramon ábrázoltuk.



18. ábra, A rendszer bifurkációs diagramja

A diagramon a függőleges tengelyen ($MAX U(4)$) a vontató jármű és az utánfutó által bezárt φ szög a kialakuló mozgás során felvett maximális értékét tüntettük fel, különböző V kocsi irányú sebességek ($PAR(1)$) mellett.

Ebben az esetben is megállapítható, hogy a stacionárius mozgás ugyanazon V sebesség mellett veszti el stabilitását, mint amit a lineáris stabilitásvizsgálat során kimutattunk (ld. 9. ábra). Azonban a kerekek tengelye előtti súlyponttal rendelkező vontatmánytól eltérően ebben az esetben a stabilitásvesztés szubkritikus Hopf-bifurkáción keresztül történik a „2”-vel jelölt pontban. Azaz a stabil stacionárius mozgás mellett egy instabil határciklus jelenik meg.

Érdekesség, hogy mindkét vizsgált esetben a függőlegestől eltérő érintővel lép ki az instabil ág, amely csúszó súrlódást tartalmazó rendszerek esetén bizonyítottan előfordulhat [6].

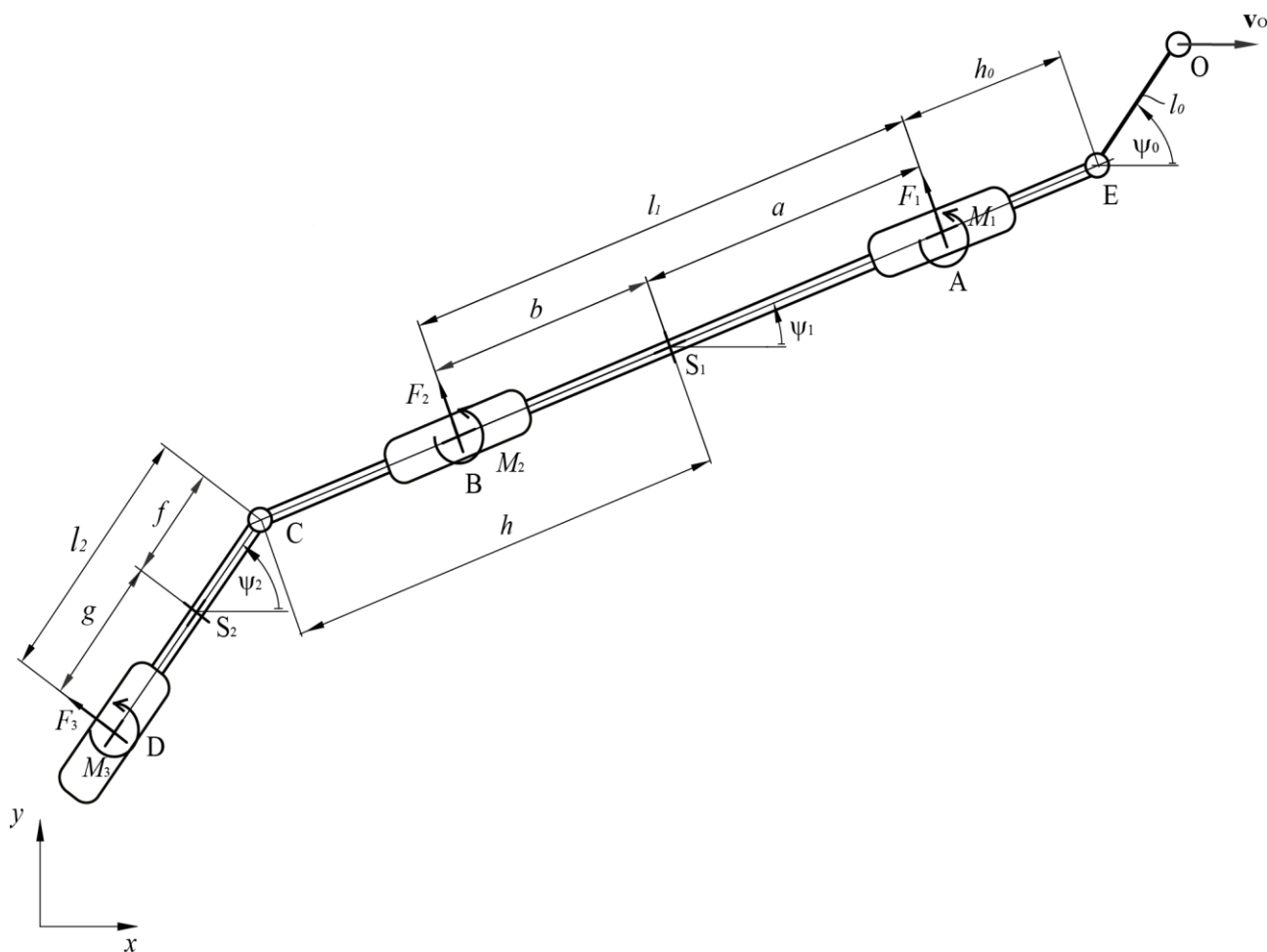
Mindkét vizsgált esetben elmondható, hogy az AUTO egy adott ponton túl nem képes követni a stabil tartomány felett kialakuló megoldást. Ennek oka feltételezhetően az, hogy, mint azt egyéb más ún. nem sima dinamikai rendszer vizsgálatánál kimutatható [7], a kialakuló megoldás az erő- illetve nyomaték-karakterisztikában (ld. (3.10), (3.16)) lévő intervallumváltásoknál alkalmazott közelítő egységugrás függvények paramétereire [4] rendkívül érzékeny, így ezzel kapcsolatban még további vizsgálatok szükségesek.

7. Kísérleti berendezés tervezése

7.1. A kísérlet célja

A dolgozat célja egy olyan kísérleti berendezés tervezése, amely alkalmas a személygépjármű-utánfutó rendszer futópádon való stabilitásvizsgálatára. Ez egyben lehetőséget biztosítana a bicikli modellen végzett stabilitásvizsgálat, illetve a numerikus szimuláció eredményeinek validálására, valamint a modell esetleges hiányosságainak feltárására. A futópádon végzett kísérlettel kapcsolatban azonban felmerül az a probléma, hogy ott az eredeti modellnél alkalmazott (2.11) kinematikai kényszer nem biztosítható. Ez szükségessé teszi az eredeti mechanikai modell módosítását. A módosított modellel szemben elvárásunk, hogy lineáris stabilitás szempontjából mutasson egyezést az eredeti modellünkkel. Ennek ellenőrzésére szükséges elvégeztük a kísérleti modell lineáris stabilitásvizsgálatát is.

7.2. A berendezés mechanikai modellje



19. ábra, A kísérleti berendezés mechanikai modellje

A kísérleti berendezés mechanikai modelljének (ld. 19. ábra) megtervezésekor a 2. fejezetben bemutatott bicikli modellt vesszük alapul. Az utánfutót vontató

személygépjárművet a futópádhhoz az O pontban csuklóval rögzítjük egy l_0 hosszúságú, a modellben zérus tömegűnek tekintett rúddal, amely a személygépjárműhöz az E pontban szintén csuklóval kapcsolódik. E pont távolsága a jármű első kerekétől h_0 .

Bár a valós kísérleti berendezésben a futópádon a talajt mozgatjuk a járműhöz képest, a Galilei-transzformáció alapján a modellezésnél úgy tekintjük, hogy a talaj az abszolút vonatkoztatási rendszerben áll, és az O pont sebességére írunk elő kényszert:

$$\mathbf{v}_O = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Equation Section (Next)}(7.1)$$

Mivel a fenti kényszer integrálható, ezzel valójában az O pont $\mathbf{r}_O$ helyvektorára írtunk elő, időfüggő geometriai kényszert:

$$\mathbf{r}_O(t) = \begin{bmatrix} Vt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

A rendszer tehát csak geometriai kényszert tartalmaz, amelyek között azonban (7.2) időfüggő, azaz a rendszer 3 szabadságfokú holonóm, reonóm rendszer, amelynek mozgásegyenletit a másodfajú Lagrange egyenlet segítségével vezethetjük le.

Válasszuk általános koordinátáknak az egyes rudak x -tengellyel bezárt ψ_0, ψ_1, ψ_2 szögeit:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Az általános koordináták idő szerinti deriváltjaként állítsuk elő az általános koordináta sebességeket:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_0 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Írjuk fel a rendszer kinetikus energiáját:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{S_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{S_2}^2 + \frac{1}{2} \theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \omega_2^2, \quad (7.5)$$

ahol m_1 és m_2 a személygépjármű valamint az utánfutó tömege, θ_1 és θ_2 a járművek tehetetlenségi nyomatékai, illetve $v_{S_1}^2, v_{S_2}^2$, valamint ω_1^2, ω_2^2 a járművek súlyponti sebesség vektorainak, illetve szögsebesség vektorainak abszolútértéke a négyzetben.

A járművek S_1 és S_2 súlypontjának helyvektorát az általános koordináták függvényében a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{S_1} &= \begin{bmatrix} Vt - l_0 \cos \psi_0 - (a + h_0) \cos \psi_1 \\ -l_0 \sin \psi_0 - (a + h_0) \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}_{S_2} &= \begin{bmatrix} Vt - l_0 \cos \psi_0 - (a + h + h_0) \cos \psi_1 - f \cos \psi_2 \\ -l_0 \sin \psi_0 - (a + h + h_0) \sin \psi_1 - f \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (7.6)$$

A fenti helyvektorok idő szerinti deriválásával felírhatjuk az egyes súlypontok sebességét az általános koordináták illetve az általános koordináta sebességek szerint:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{S_1} &= \begin{bmatrix} V + \dot{\psi}_0 l_0 \sin \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h_0) \sin \psi_1 \\ -\dot{\psi}_0 l_0 \cos \psi_0 - \dot{\psi}_1 (a + h_0) \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_{S_2} &= \begin{bmatrix} V + \dot{\psi}_0 l_0 \sin \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h + h_0) \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2 f \sin \psi_2 \\ -\dot{\psi}_0 l_0 \cos \psi_0 - \dot{\psi}_1 (a + h + h_0) \cos \psi_1 - \dot{\psi}_2 f \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Az egyes járművek szögsebességei:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix}.\quad (7.8)$$

A fenti összefüggéseket behelyettesítve a mozgási energiára vonatkozó (7.5) egyenletbe az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{\psi}_0 l_0 \cos \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h_0) \cos \psi_1)^2 + (V + \dot{\psi}_0 l_0 \sin \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h_0) \sin \psi_1)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{\psi}_0 l_0 \cos \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h + h_0) \cos \psi_1 + \dot{\psi}_2 f \cos \psi_2)^2 \right. \\ &\left. + (V + \dot{\psi}_0 l_0 \sin \psi_0 + \dot{\psi}_1 (a + h + h_0) \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2 f \sin \psi_2)^2 \right) + \frac{1}{2} \theta_1 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\psi}_2^2.\end{aligned}\quad (7.9)$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet szerint a rendszer mozgásegyenleteit a mozgási energiából az alábbiak szerint származtatjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, 3,\quad (7.10)$$

ahol $\dot{q}_k$ és q_k az általános koordináta sebesség, valamint általános koordináta vektorok k -dik elemei, valamint Q_k -k az ún. általános erők.

Deriváljuk a T kinetikus energiát az általános koordináta sebességek $(\dot{\psi}_0, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_0} &= (m_1 + m_2) V l_0 \sin \psi_0 + (m_1 + m_2) l_0^2 \dot{\psi}_0 + (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \cos(\psi_1 - \psi_0) \dot{\psi}_1 \\
&+ m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \dot{\psi}_2, \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} &= (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) (V \sin \psi_1 + \cos(\psi_0 - \psi_1) \dot{\psi}_0) \\
&+ (m_1 (a + h_0)^2 + m_2 (a + h + h_0)^2 + \theta_1) \dot{\psi}_1 + m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \dot{\psi}_2, \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} &= m_2 f V \sin \psi_2 + m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \dot{\psi}_0 \\
&+ m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \dot{\psi}_1 + (m_2 f^2 + \theta_2) \dot{\psi}_2.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Deriváljuk tovább a fenti parciális deriváltakat az idő szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_0} &= (m_1 + m_2) V l_0 \cos \psi_0 \dot{\psi}_0 + (m_1 + m_2) l_0^2 \ddot{\psi}_0 \\
&+ (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \cos(\psi_1 - \psi_0) \ddot{\psi}_1 \\
&- (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \sin(\psi_1 - \psi_0) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_0) \dot{\psi}_1 \\
&+ m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \ddot{\psi}_2 - m_2 f l_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_2, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} &= (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) (V \cos \psi_1 \dot{\psi}_1 + \cos(\psi_0 - \psi_1) \ddot{\psi}_0 \\
&- \sin(\psi_0 - \psi_1) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_1) \dot{\psi}_0) + (m_1 (a + h_0)^2 + m_2 (a + h + h_0)^2 + \theta_1) \ddot{\psi}_1 \\
&+ m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \ddot{\psi}_2 - m_2 f (a + h + h_0) \sin(\psi_1 - \psi_2) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_2, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} &= m_2 f V \cos \psi_2 \dot{\psi}_2 + m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \ddot{\psi}_0 - m_2 f l_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_0 \\
&+ m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \ddot{\psi}_1 - m_2 f (a + h + h_0) \sin(\psi_1 - \psi_2) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_1 \\
&+ (m_2 f^2 + \theta_2) \ddot{\psi}_2.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Ezek után képezzük a T kinetikus energia általános koordináták (ψ_0, ψ_1, ψ_2) szerinti parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \psi_0} &= (m_1 + m_2) l_0 V \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 \sin(\psi_0 - \psi_1) \\
&- m_2 f l_0 \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_2 \sin(\psi_0 - \psi_2), \\
\frac{\partial T}{\partial \psi_1} &= (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) (V \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 l_0 \sin(\psi_0 - \psi_1)) \\
&- m_2 f (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 \sin(\psi_1 - \psi_2), \\
\frac{\partial T}{\partial \psi_2} &= m_2 f \dot{\psi}_2 (V \cos \psi_2 + l_0 \dot{\psi}_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) + (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \sin(\psi_1 - \psi_2)).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

A Q_1, Q_2, Q_3 általános erőket a δP virtuális teljesítményből határozhatjuk meg az alábbi összefüggés szerint:

$$\delta P = \sum_{r=1}^3 Q_r \delta \dot{q}_r, \quad (7.14)$$

ahol $\delta \dot{\psi}_0, \delta \dot{\psi}_1, \delta \dot{\psi}_2$ a virtuális általános koordináta sebességek. A δP virtuális teljesítményt a rendszerre következő formulával írhatjuk fel:

$$\delta P = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{v}_B + \mathbf{F}_3 \delta \mathbf{v}_D + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \delta \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{M}_3 \delta \boldsymbol{\omega}_2, \quad (7.15)$$

ahol $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ illetve $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ a kerekekről a járművekre átadódó erők, illetve nyomatékok (ld. 1. ábra):

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -F_1 \sin \psi_1 \\ F_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -F_2 \sin \psi_1 \\ F_2 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \sin \psi_2 \\ F_3 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

illetve:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

$\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ A, B valamint D pontok virtuális sebessége, $\delta \boldsymbol{\omega}_1$ és $\delta \boldsymbol{\omega}_2$ pedig a két jármű virtuális szögsebessége.

A virtuális sebességek meghatározásához írjuk fel, A, B és D pont $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, illetve $\mathbf{v}_D$ sebességét:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1A} = \begin{bmatrix} V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + h_0 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ -l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - h_0 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1B} = \begin{bmatrix} V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a + b + h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ -l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a + b + h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1C} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{CD} = \begin{bmatrix} V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ -l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2 \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

A $\delta \mathbf{v}_A, \delta \mathbf{v}_B, \delta \mathbf{v}_D$ virtuális sebességeket formálisan úgy kaphatjuk meg, ha $\dot{\psi}_0, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ pszeudo sebességek helyére a $\delta \dot{\psi}_0, \delta \dot{\psi}_1, \delta \dot{\psi}_2$ virtuális pszeudo sebességeket helyettesítjük. Mivel a személygépjármű V hossz tengelyével párhuzamos sebessége állandó, így annak variációja $\delta V = 0$. A behelyettesítéseket elvégezve a virtuális sebességekre a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_A &= \begin{bmatrix} l_0 \delta \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + h_0 \delta \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ -l_0 \delta \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - h_0 \delta \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} l_0 \delta \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a+b+h_0) \delta \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 \\ -l_0 \delta \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a+b+h_0) \delta \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\delta \mathbf{v}_D &= \begin{bmatrix} l_0 \delta \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a+h+h_0) \delta \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2 \delta \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ -l_0 \delta \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a+h+h_0) \delta \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2 \delta \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Ezzel tehát a rendszerre ható erők, illetve nyomatékok δP virtuális teljesítményét leíró (7.15) egyenletbe behelyettesítve az erőket (7.16) és nyomatékokat (7.17), valamint a virtuális sebességeket (7.19), egyszerűsítések után, a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta P &= -\left((F_1 + F_2)l_0 \cos(\psi_0 - \psi_1) + F_3 l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2)\right) \delta \dot{\psi}_0 \\
&+ \left(M_1 + M_2 - F_1 h_0 - F_2(a+b+h_0) - F_3(a+h+h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2)\right) \delta \dot{\psi}_1 \\
&+ (M_3 - F_3 l_2) \delta \dot{\psi}_2 - (F_1 + F_2)V \sin \psi_1 - F_3 V \sin \psi_2.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

A fenti összefüggésből $\delta \dot{\psi}_0, \delta \dot{\psi}_1, \delta \dot{\psi}_2$ virtuális általános koordináta sebességek együtthatóit kigyűjtve kaphatjuk meg az általános erőket:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -(F_1 + F_2)l_0 \cos(\psi_0 - \psi_1) - F_3 l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2), \\
Q_2 &= M_1 + M_2 - F_1 h_0 - F_2(a+b+h_0) - F_3(a+h+h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2), \\
Q_3 &= M_3 - l_2 F_3.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

A másodfajú Lagrange egyenletbe (ld. (7.10)) (7.12), (7.13) és (7.21) összefüggéseket behelyettesítve felírhatjuk a kísérleti modell mozgásegyenlet-rendszerét:

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2) V l_0 \cos \psi_0 \dot{\psi}_0 + (m_1 + m_2) l_0^2 \ddot{\psi}_0 \\
& + (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \cos(\psi_1 - \psi_0) \ddot{\psi}_1 \\
& - (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \sin(\psi_1 - \psi_0) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_0) \dot{\psi}_1 \\
& + m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \ddot{\psi}_2 - m_2 f l_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_2 \\
& - (m_1 + m_2) l_0 V \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) l_0 \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 \sin(\psi_0 - \psi_1) \\
& - m_2 f l_0 \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_2 \sin(\psi_0 - \psi_2) = -(F_1 + F_2) l_0 \cos(\psi_0 - \psi_1) - F_3 l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2), \\
& (m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) (V \cos \psi_1 \dot{\psi}_1 + \cos(\psi_0 - \psi_1) \ddot{\psi}_0 \\
& - \sin(\psi_0 - \psi_1) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_1) \dot{\psi}_0) + (m_1 (a + h_0)^2 + m_2 (a + h + h_0)^2 + \theta_1) \ddot{\psi}_1 \\
& + m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \ddot{\psi}_2 - m_2 f (a + h + h_0) \sin(\psi_1 - \psi_2) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_2 \\
& - m_1 (a + h_0) + m_2 (a + h + h_0)) (V \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_0 \dot{\psi}_1 l_0 \sin(\psi_0 - \psi_1)) \\
& - m_2 f (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) \\
& = M_1 + M_2 - F_1 h_0 - F_2 (a + b + h_0) - F_3 (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2), \\
& m_2 f V \cos \psi_2 \dot{\psi}_2 + m_2 f l_0 \cos(\psi_0 - \psi_2) \ddot{\psi}_0 - m_2 f l_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) (\dot{\psi}_0 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_0 \\
& + m_2 f (a + h + h_0) \cos(\psi_1 - \psi_2) \ddot{\psi}_1 - m_2 f (a + h + h_0) \sin(\psi_1 - \psi_2) (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) \dot{\psi}_1 \\
& + (m_2 f^2 + \theta_2) \ddot{\psi}_2 - m_2 f \dot{\psi}_2 (V \cos \psi_2 + l_0 \dot{\psi}_0 \sin(\psi_0 - \psi_2) + (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \sin(\psi_1 - \psi_2)) \\
& = M_3 - l_2 F. \tag{7.22}
\end{aligned}$$

A rendszerre ható, a kerekek deformációjából származó F_1, F_2, F_3 erők, illetve az M_1, M_2, M_3 forgatónyomaték kiszámításához alkalmazhatjuk a (4.9), (4.10) linearizált összefüggéseket. Ugyanakkor a járműszerelvénny kerekeinek kúszási szögeit az eredeti modelltől eltérő módon az alábbiak szerint határozhatjuk meg az A, B, valamint D pontok sebességének (ld.(7.18)) x és y tengely irányú komponenseiből:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - h_0 \dot{\psi}_1 \cos \psi_1}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + h_0 \dot{\psi}_1 \sin \psi_1} \right) - \psi_1, \\
\alpha_2 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a + b + h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a + b + h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1} \right) - \psi_1, \\
\alpha_3 &= \arctan \left(\frac{-l_0 \dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 - l_2 \dot{\psi}_2 \cos \psi_2}{V + l_0 \dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + (a + h + h_0) \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + l_2 \dot{\psi}_2 \sin \psi_2} \right) - \psi_2. \tag{7.23}
\end{aligned}$$

7.3. Stabilitásvizsgálat

A kísérleti berendezés és az eredeti modell összehasonlítása céljából elvégezzük a kísérleti modell lineáris stabilitásvizsgálatát is. Ehhez tekintsük a rendszer (7.22) mozgásegyenleteit, és Cauchy-átírással alakítsuk át a másodrendű differenciálegyenlet-rendszert elsőrendűvé. Ehhez $\dot{\psi}_0, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ általános koordináta sebességek helyére vezessük be $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ változókat az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_0 &= \Omega_0, \\
\dot{\psi}_1 &= \Omega_1, \\
\dot{\psi}_2 &= \Omega_2.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

A fenti összefüggést deriválva az idő szerint az alábbi egyenletekre jutunk:

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi}_0 &= \dot{\Omega}_0, \\
\ddot{\psi}_1 &= \dot{\Omega}_1, \\
\ddot{\psi}_2 &= \dot{\Omega}_2.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

A fenti (7.24) és (7.25) összefüggéseket helyettesítsük be a rendszer mozgásegyenleteibe ((7.22)). Ezek után a mozgásegyenlet rendszert a 4.2. fejezetben leírt módszerrel hozzuk autonóm differenciálegyenlet-rendszer alakra. Ezzel egy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ alakú, hatismeretlenes elsőrendű autonóm differenciálegyenlet-rendszerhez jutottunk, amelyet a következő formában írhatunk fel:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_0 \\ \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\psi}_0 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \\ f_2(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \\ f_3(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \\ f_4(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \\ f_5(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \\ f_6(\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2) \end{bmatrix}. \tag{7.26}$$

Ekkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_0 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer az autonóm egyenlet x_0 egyensúlyi helyéhez tartozó variációs rendszere, ahol $\mathbf{J}_0$ $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jacobi-mátrixa, az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ helyen:

$$\mathbf{J}_0 = [j_{0kl}], \quad k, l = 1, \dots, 6, \tag{7.27}$$

ahol:

$$j_{0kl} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \tag{7.28}$$

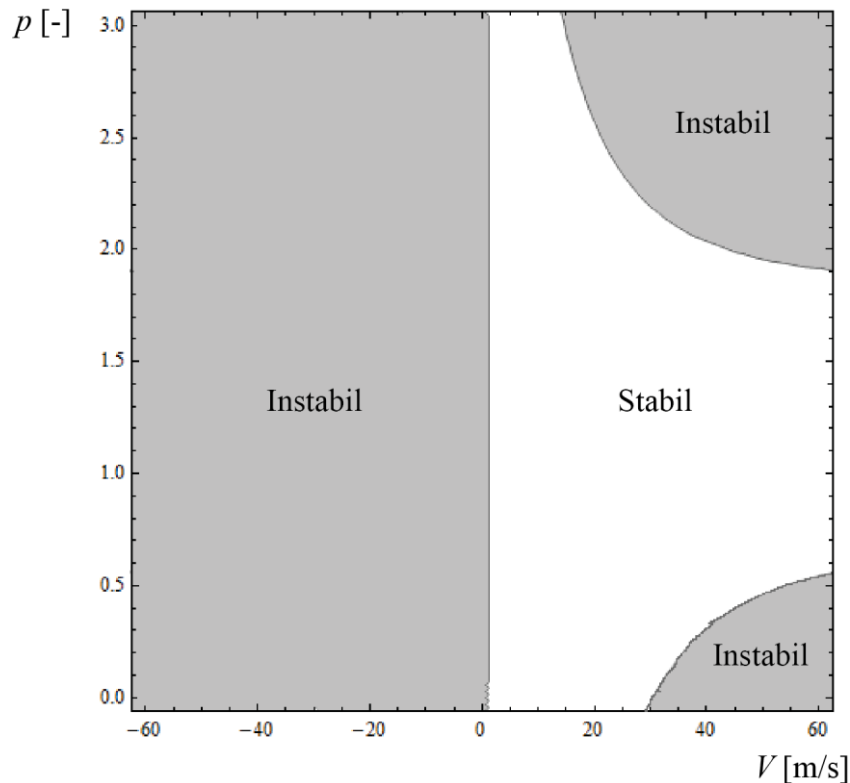
ahol $\mathbf{x}_0$ a (7.26) differenciálegyenlet változóinak az állandósult mozgás során felvett értékeit tartalmazó vektor, amely ebben az esetben nullvektor:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \Omega_{00} \\ \Omega_{10} \\ \Omega_{20} \\ \psi_{00} \\ \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{7.29}$$

A karakterisztikus polinomot a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{J}_0 - \mathbf{I}\lambda). \tag{7.30}$$

A differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}_0$ egyensúlyi helye (amely esetünkben a stacionárius mozgás) Ljapunov értelemben stabilis, ha $\mathbf{J}_0$ mátrix minden sajátértékének valós része negatív, vagy zérus. Belátható, hogy a $\mathbf{J}_0$ Jacobi-mátrixnak ebben az esetben paramétereiktől függetlenül mindig lesz két zérus sajátértéke. Ennek köszönhetően a lineáris stabilitás szempontjából elegendő a $\hat{P}(\lambda) = P(\lambda)/\lambda^2$, λ -ra nézve negyedfokú polinomot vizsgálnunk. Ezt a 4.2 fejezetben leírtakkal megegyezően a Routh-Hurwitz kritériummal [3] tehetjük meg. A stabilitásvizsgálat eredményeit ebben az esetben is stabilitási térképen ábrázoltuk (ld. 20. ábra), amelyről megállapítható, hogy a kísérlethez módosított rendszer lineáris stabilitási tartományai megegyeznek az eredeti rendszerrel.

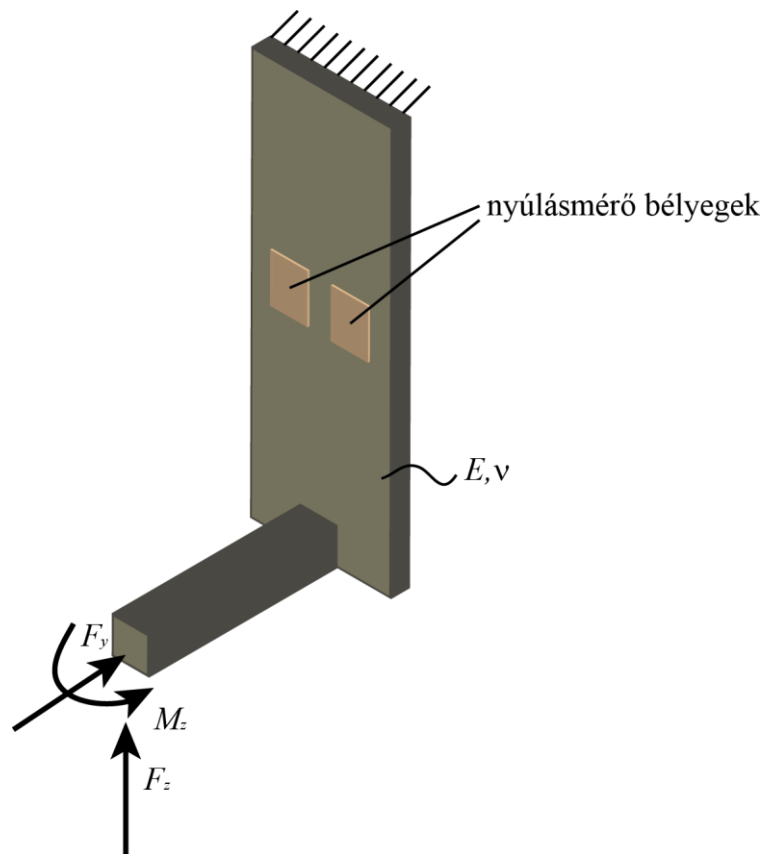


20. ábra, A kísérleti modell stabilitás térképe

7.4. A kerekek laterális erő-karakterisztikájának meghatározása

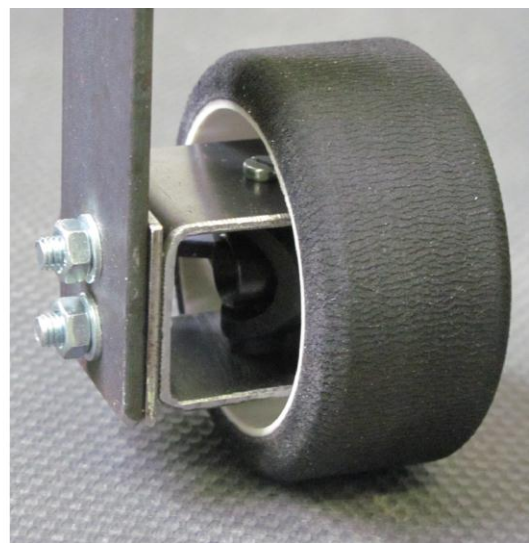
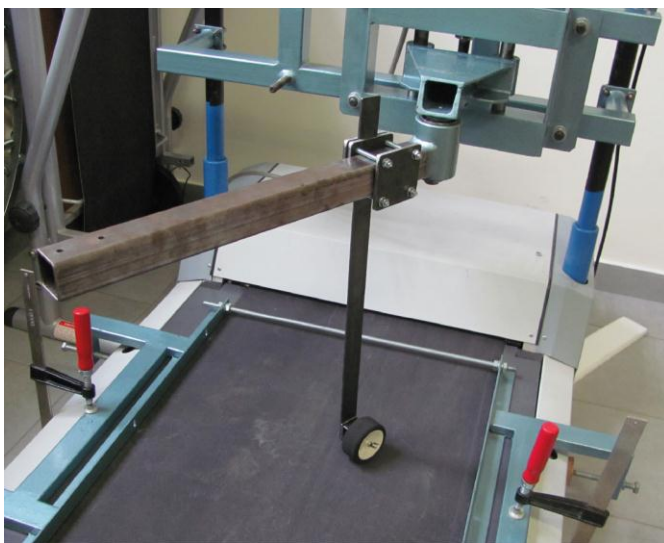
A kísérleti berendezés megépítésénél 1:10 méretarányú RC modellautó kerekeket használunk. Annak érdekében, hogy a tervezett, futópádon való mérésre alkalmas járműszerelvénnyel modell jellemző paraméterit úgy tudjuk megválasztani, hogy azok arányosak legyenek egy valódi járművel szükséges a kerekek jellemző paramétereinek (s hossz mentén megoszló merevség, a_1 letapadt hossz) meghatározása, amelyeket az oldalirányú erő-karakterisztika kimérésével határozhatunk meg. A mérésnek egyben célja lehet az erő-karakterisztika sebességtől való függésének vizsgálata is.

E célból egy olyan kísérleti berendezés építésébe kezdtünk, amelyben egy hosszú rugalmas rúdhoz úgy rögzítettük a kereket, hogy az a rúdhoz képest ne fordulhasson el, majd az egész rendszert rögzítettük a futópádon, úgy hogy a kerék α kúszási szöge tetszőlegesen beállítható legyen.



21. ábra, Az oldalirányú erő-karakterisztika mérésének elméleti modellje

A kísérlet elméleti modelljét a 21. ábra mutatja. A mérés során nyúlásmérő bélyegek segítségével mérjük a rúd egy meghatározott pontján az elmozdulást, amelyből az anyagjellemzők (E a rúd anyagának rugalmassági modulusa, ν a Poisson-tényező) ismeretében meghatározhatóak a gumikerék deformációjából származó erők. A megvalósított mérési berendezés (amelyre a mérés megkezdése előtt még fel kell ragasztani a nyúlásmérő bélyegeket) az alábbi ábrán látható.



22. ábra, A modell kerék laterális erő-karakterisztikájának mérésére szolgáló kísérleti berendezés

8. Összefoglalás

Összességében a vizsgálatok eredménye alapján elmondható, hogy a vontatmány terhelésének mértékétől (tömegétől), illetve egyéb jellemző paramétereitől függetlenül stabilitási szempontból a legkedvezőbb eset, ha úgy terheljük meg, hogy a súlypontja a kerekek tengelyével egy vonalba essen.

Megvizsgáltuk, hogy a vontatmány egyes jellemző paramétereinek megváltoztatása milyen mértékben befolyásolja a járműszerelvény lineáris stabilitását és kimutattuk, hogy míg a vontatmány tömege, valamint a kerekek oldalirányú merevsége jelentős hatással van a rendszer viselkedésére, addig a vontató jármű súlypontjának a csuklótól való távolsága kisebb mértékben, a vontatmány tehetetlenségi nyomatéka pedig a vizsgált paraméterek mellett elenyészően befolyásolta a rendszer stabilitását.

Szimulációk segítségével analizáltuk az egyes instabil paramétertartományokat és megállapítottuk, hogy amennyiben az utánfutó súlypontja jelentősen a kerekek tengelye elé kerül, a kritikus sebesség fölött a stabilitásvesztés módja statikus, míg a kerekek tengelye mögé eső súlypont esetén növekvő amplitúdójú rezgéssel történik. Ezt az eredményt a rendszer nemlineáris vizsgálata során kapott eredmények is megerősítették. A rendszer bifurkáció analízisével kapcsolatban azonban a kerekekről átadódó az erő- és nyomaték karakterisztikában lévő intervallumváltásnál jelentkező problémák további vizsgálatokat tesznek szükségessé.

Ezen kívül további vizsgálatok tárgya lehet a témában, hogy a modell nemlineáris vizsgálata során kapott eredmények szimulációval való összevetése, amely során figyelembe vesszük a nemlineáris oldalirányú erő karakterisztikát is. Továbbá érdekes eredményeket szolgáltatna a kísérleti modell nemlineáris vizsgálata is. Egy másik továbblépési lehetőség lehetne a dolgozatban alkalmazott kvázi-statikusan gumikerék deformációt feltételező „kefe” kerékmodell helyett, a dinamikus hatásokat figyelembe vevő, összetettebb kerékmodell alkalmazása is.

Mindezek mellett kiemelt célunk a futópados mérésre alkalmas járműszerelvény modell tervezéséhez kapcsolódó előzetes mérések elvégzése, majd annak megépítése, amely lehetővé tenné a dolgozatban tárgyalt vizsgálatok eredményeinek a validálását, illetve az alkalmazott modell hiányosságainak esetleges felfedezésével meghatározhatná a további kutatások irányát.

9. Irodalomjegyzék

- [1] Pacejka, H.B., Tyre and Vehicle Dynamics, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [2] Gantmacher, F., Lectures in Analytical Mechanics, Mir Publications, Moszkva, 1975.
- [3] Wolfram MathWorld, Routh-Hurwitz Theorem, <http://mathworld.wolfram.com/Routh-HurwitzTheorem.html>
- [4] Wolfram MathWorld, Heaviside Step Function, <http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html>
- [5] Doedel, E.J., Oldeman B.E., AUTO-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations, Concordia University Montreal, 2009.
- [6] Leine, R.I., Nonlinear Phenomena, Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems, Physica D 223 (2006) 121-137
- [7] Dombóvári Z., Local and Global Dynamics of Cutting Processes, PhD Thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2012.