



ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYI SEKCIÓ



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Gördeszka, az önegyensúlyozó anholonom rendszer

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1-2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

Szerző:

Várszegi Balázs

Gépészmérnöki mesterképzési szak

I évfolyam

Témavezető:

Takács Dénes, PhD

Műszaki Mechanikai Tanszék

Tudományos Munkatárs

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Az önegyensúlyozó gördeszka	6
2.1. Egyszerű mechanikai modell	6
2.2. A gördeszkás súlypontjának mozgásállapota	9
2.3. Kinematikai kényszerek	11
2.3.1. Az első pont sebessége	11
2.3.2. A hátsó pont sebessége	12
2.3.3. Kinematikai kényszerek mátrixos formában	12
2.4. Mozgásegyenletek	13
2.4.1. Appell–Gibbs-egyenletek	13
2.4.2. Routh–Voss-egyenletek	18
2.4.3. Dinamika alaptételével származtatott mozgásegyenletek	20
2.5. Lineáris stabilitásvizsgálat	24
2.5.1. Stacionárius mozgás	24
2.5.2. Linearizálás	25
2.5.3. Stabilitásvizsgálat	25
2.6. Az eredmények értékelése	27
3. Mérési eredmények	31
3.1. A gördeszka paraméterei	31
3.2. Kritikus sebesség létezése	32
4. Szabályozott gördeszka	35
4.1. Bővített mechanikai modell	35
4.2. Mozgásegyenletek	36
4.3. Lineáris stabilitásvizsgálat	37

4.3.1.	Stacionárius mozgás	37
4.3.2.	Linearizálás	38
4.3.3.	Stabilitásvizsgálat D-szeparációval	38
4.3.4.	Stabil hurok kialakulása	42
4.3.5.	Kritikus időzés	48
4.4.	Az eredmények értékelése	49
5.	Összefoglalás	61

1. Bevezetés

Sokszor a legegyszerűbb közlekedési eszközeink is érdekes, nem várt instabilitásokat mutatnak. Például a járműdinamikában mindmáig kutatott a kerékpárok [1] és gördeszkák [2] lineáris stabilitása. Ezzel kapcsolatban rengeteg érdekes anyag található a világháló különböző videó megosztó portáljain, melyekből azt a következtetést lehet levonni, hogy bizonyos sebesség fölött nehéz a gördeszka egyenes vonalú egyenletes mozgását megtartani.

A gördeszka az Amerikai Egyesült Államokból indult útjára a '60-as években, amikor kaliforniai fiatalok a méltán népszerű hullámlovaglás mintájára, a deszkájukra kerekeket szereltek, ezzel megalkotva az első gördeszkákat. A '70-es években már megjelentek az első gördeszka-gyártó cégek is, illetve felépült az első szabadtéri skatepark is. Magyarországon 1985-ben jelent meg ez a sportág, térhódítása a '90-es évek elején, majd az új évezred első évtizedének végén volt számottevő [3].

Manapság a gördeszkát használják közlekedési eszközként, trükköket mutatnak be annak használatával, illetve egymás sebességrekordjait döntik meg. Az utóbbinál különösen fontos a sebesség szerepe, de deszkától függően a mindennapi használat esetén is előjöhetnek a sebességnek betudható érdekes, és nem utolsósorban veszélyes jelenségek.

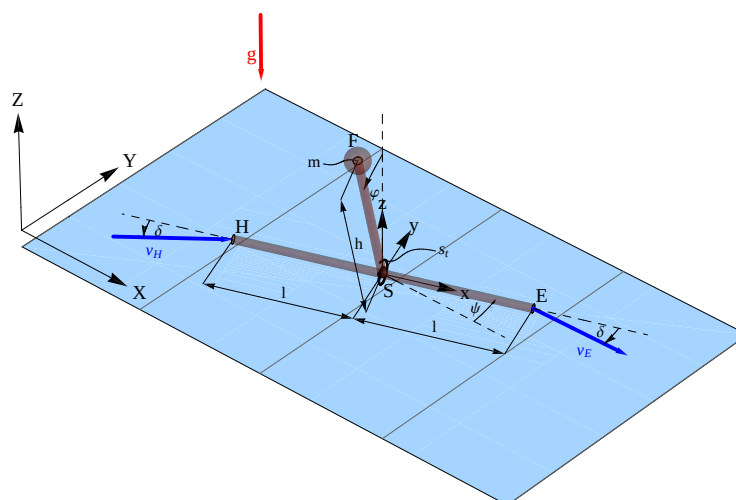
Gördeszkák mozgásának leírásával és a mozgás sebességfüggésével a '70-es évek óta – az eszköz megjelenése után nem sokkal – már komolyabban foglalkoznak [4], hiszen ez a sporteszköz veszélyeket is rejt. A dolgozat célja egy, az ezekhez ehhez hasonló mechanikai modell felállítása, amely kellően egyszerű, így lehetőséget ad a különböző paraméterek vizsgálatára, emellett megfelelően reprezentálja a valóságot.

A dolgozatban két modellt állítottunk fel, az egyik a gördeszkást úgy modellezi, hogy az rábízza magát a deszkára, nem próbálja azt stabilizálni, míg a második modellben a gördeszka szabályozza a saját és deszkája mozgását. Mind a két esetben ember és deszkájának egyenes vonalú egyenletes mozgásának lineáris stabilitását vizsgáljuk.

2. Az önegyensúlyozó gördeszka

Ebben a fejezetben egy olyan modell kerül bemutatásra, amelyben az ember és a gördeszka kapcsolatát merevnek tételezzük fel, elhanyagolva az ember szabályozó szerepét a gördeszka egyenes vonalú mozgásának megvalósításában.

2.1. Egyszerű mechanikai modell



2.1. ábra. Mechanikai modell

A mechanikai modell a 2.1 ábrán látható, amely csupán egy tömegpontot (F) tartalmaz, illetve két darab tömeg nélküli rudat, valamint egy torziós rugót. Az F tömegpont szimbolizálja a gördeszkás tömegközéppontját, E pont a gördeszka elejét, H a hátulját, S pedig a gördeszka geometriai közepét. A tömegpont az FS tömeg nélküli h hosszúságú rúdhhoz van rögzítve, mely az S pontban mereven kapcsolódik az EH rúdhhoz. A modellben h szimbolizálja a gördeszkázó ember súlypontjának magasságát, valamint m a tömegét. Az EH rúd $2l$ hosszúságú, és szintén tömeg nélküli, kifejezve azt, hogy a gördeszka tehetetlensége

a rajta álló emberéhez képest elhanyagolható. A torziós rugó az FS rúd elfordulását gátolja a talajhoz képest, amely a gördeszka kormányzásáért felelős gumibakot modellezi, ennek merevsége s_t .

Az álló vonatkoztatási rendszernek a talajt tekintjük, az ehhez rögzített koordináta-rendszer a KR1 (X, Y, Z) . A továbbiakban a külön nem jelölt vektorok és tenzorok ebben a koordináta-rendszerben értendők. A KR2 (x, y, z) koordináta-rendszer a gördeszka S pontjához rögzített, az EH rúdjal együtt forgó koordináta-rendszer, ahol x az $\mathbf{r}_{HE}$ vektor irányába mutató tengely. Az EH rúd síkmozgást végez, így a z tengely minden időpontban párhuzamos a Z tengellyel.

Ez a modell egy darab merev testet tartalmaz, melynek térben 6 szabadsági foka van, valamint egy darab geometriai kényszert, miszerint az EH rúd síkon mozog. Ez a geometriai kényszer 2 szabadsági fokot köt meg (z irányú elmozdulás és y körüli elfordulás), így a modellnek 4 szabadsági foka marad ($n = 4$). Ezek alapján 4 darab általános koordináta megválasztásával megfelelően leírható a merevtest helyzete a térben. Az általános koordinátavektor, az általános koordinátasebességek, valamint általános koordinátagyorsulások:

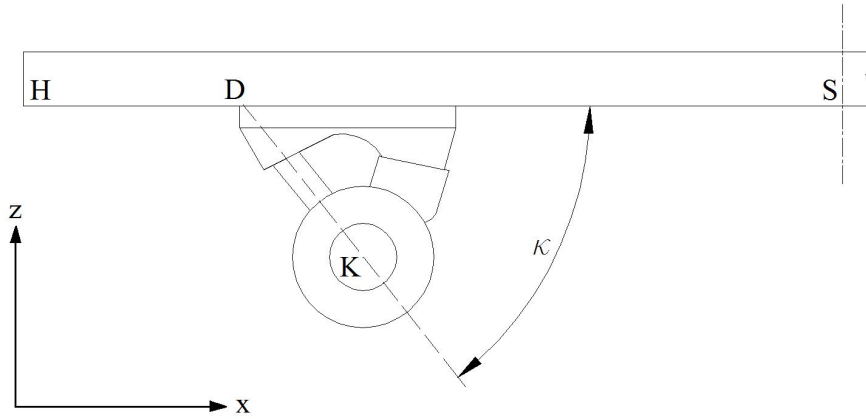
$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ \psi(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\dot{\mathbf{q}}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \ddot{X}(t) \\ \ddot{Y}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.1.1)$$

ahol $X(t)$ és $Y(t)$ az S pont koordinátái, $\psi(t)$ az EH rúd X tengellyel bezárt szöge, $\varphi(t)$ pedig az FS rúd z tengellyel bezárt szöge, ahogy azt a 2.1 ábra mutatja.

A gördeszka irányításának megfelelően a φ és δ szögek között egyértelmű összefüggés van, tehát E és H pontok sebességének iránya nem tetszőleges. Ez két darab anholonom kényszert jelent ($h_{kin} = 2$), ami eggyel tovább csökkenti a modell szabadsági fokainak számát, ami így 3-ra csökken.

Ezt az összefüggést úgy kaphatjuk meg, ha megvizsgáljuk a deszkát kanyarodás közben.

A gördeszkát úgy irányítjuk, hogy a deszkát vízszintes helyzetéhez képest x tengely körül φ szöggel megbillentjük. Ekkor a deszkához mereven rögzített királycsap, melyet a 2.2 ábra mutat, ($\mathbf{e}_{\text{DK}_{\text{KR}2}}$ egységvektor) is elfordul a deszkával. A kerekek tengelye a királycsapra merőleges tengely körül képes elfordulni, így egyik kerék sem emelkedik el a talajtól.



2.2. ábra. A gördeszka kerékfelfüggesztése

Amikor a deszkát az x tengely körül φ szöggel elforgatjuk, akkor az $\mathbf{e}_{\text{DK}_{\text{KR}2}}$ az alábbi összefüggés szerint adható meg KR2-ben:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{DK}_{\text{KR}2}} = \mathbf{R}_{\text{KR}2} \cdot \mathbf{e}_{\text{DK}_{\text{KR}2}} = \begin{bmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \sin \varphi \\ -\sin \kappa \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.1.2)$$

ahol

$$\mathbf{R}_{\text{KR}2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{e}_{\text{DK}_{\text{KR}2}} = \begin{bmatrix} \cos \kappa \\ 0 \\ -\sin \kappa \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

A kerekek tengelye merőleges a (2.1.2) módon kapott vektorra, illetve a z irányú egység-

vektorra ($\mathbf{e}_{z_{KR2}}$) is, mivel a talaj síkjában helyezkedik el:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{DK_{KR2}} = \tilde{\mathbf{r}}_{DK_{KR2}} \times \mathbf{e}_{z_{KR2}} = \begin{bmatrix} \sin \kappa \sin \varphi & -\cos \kappa & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.1.4)$$

A kerekek haladási sebességének és az x tengelynek a bezárt szöge megegyezik a kerekek tengelyének és az y tengelynek a bezárt szögével, lévén, hogy ezek páronként merőlegesek egymásra. Ezen vektorok bezárt szöge a δ kormányzási szög. Ennek a szögnek a koszinusza skaláris szorzat segítségével meghatározható

$$|\tilde{\mathbf{r}}_{DK_{KR2}} \cdot \mathbf{e}_{y_{KR2}}| = |\tilde{\mathbf{r}}_{DK_{KR2}}| \cos \delta, \quad (2.1.5)$$

ahol $\mathbf{e}_{y_{KR2}}$ az y irányú egységvektor.

Kifejtve (2.1.5) összefüggést δ és φ szögek között a

$$\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa = \operatorname{tg} \delta \quad (2.1.6)$$

kapcsolat adódik.

2.2. A gördeszkás súlypontjának mozgásállapota

Ebben a fejezetben meghatározásra kerül a 2.1 ábrán F betűvel jelölt anyagi pont sebessége, illetve gyorsulása. Az S pont sebessége

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.2.1)$$

és a merev test szögsebessége KR2 koordinátarendszerben könnyen felírható

$$\boldsymbol{\omega}_{KR2} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & 0 & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.2)$$

ami KR1 koordinátarendszerben

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \cos \psi & \dot{\varphi} \sin \psi & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T. \quad (2.2.3)$$

Az F pont sebessége a merev test kinematikájára vonatkozó redukciós képlettel

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SF}, \quad (2.2.4)$$

ahol $\mathbf{r}_{SF}$ az S pontból az F pontba mutató vektor

$$\mathbf{r}_{SF} = \begin{bmatrix} h \sin \varphi \sin \psi & -h \sin \varphi \cos \psi & h \cos \varphi \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.5)$$

ezekkel

$$\mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} \dot{X} + h\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \psi + h\dot{\psi} \cos \psi \sin \varphi \\ \dot{Y} - h\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi + h\dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi \\ -h\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Az F pont gyorsulása

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{SF} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SF}), \quad (2.2.7)$$

ahol

$$\mathbf{a}_S = \dot{\mathbf{v}}_S \text{ és } \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi + \ddot{\varphi} \cos \psi \\ \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \psi + \ddot{\varphi} \sin \psi \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Kiértékelve a (2.2.7) összefüggést az F pont gyorsulására az

$$\mathbf{a}_F = \begin{bmatrix} \ddot{X} + h \sin \psi \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \sin \varphi \right) + h \cos \psi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \varphi \right) \\ \ddot{Y} + h \cos \varphi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi - \ddot{\varphi} \cos \psi \right) + h \sin \varphi \left((\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \right) \\ -h (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

eredmény adódik.

2.3. Kinematikai kényszerek

Az E és H pontok sebessége felírható a szögsebesség, illetve az S pont sebességének segítségével, valamint az irányuk ismert, ahogy az a 2.1 ábrán is látható.

2.3.1. Az első pont sebessége

Az E pont sebessége felírható

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SE} \quad (2.3.1)$$

módon, ahol $\mathbf{r}_{SE}$ az S pontból E pontba mutató vektor, illetve az ismert iránya alapján

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} v_E \cos(\psi - \delta) & v_E \sin(\psi - \delta) & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2.3.2)$$

ahol v_E a $\mathbf{v}_E$ vektor hossza.

A (2.3.1) és (2.3.2) egyenletekből kiküszöbölve v_E -t a

$$\dot{X} \sin(\delta - \psi) + \dot{Y} \cos(\delta - \psi) + l\dot{\psi} \cos \delta = 0 \quad (2.3.3)$$

kapcsolat adódik az általános koordináták és általános koordinátasebességek között.

2.3.2. A hátsó pont sebessége

A H pont sebessége is felírható az alábbi két módon

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SH} \quad (2.3.4)$$

és

$$\mathbf{v}_H = \begin{bmatrix} v_H \cos \psi + \delta & v_H \sin \psi + \delta & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2.3.5)$$

ahol $\mathbf{r}_{SH}$ az S pontból H pontba mutató vektor ($\mathbf{r}_{SH} = -\mathbf{r}_{SE}$), illetve v_H a $\mathbf{v}_H$ vektor hossza.

A (2.3.3) egyenlettel adott, E pont sebességére vonatkozó kinematikai kényszer konstruálásához hasonlóan a (2.3.4) és (2.3.5) egyenletekből kiküszöbölve v_H -t kapjuk a H pontra vonatkozó kinematikai kényszert leíró egyenletet

$$\dot{X} \sin(\delta + \psi) - \dot{Y} \cos(\delta + \psi) + l\dot{\psi} \cos \delta = 0. \quad (2.3.6)$$

2.3.3. Kinematikai kényszerek mátrixos formában

A kinematikai kényszerek felírhatóak a könnyebb kezelhetőség érdekében az alábbi vektoros alakban:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.3.7)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa & -\cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa & -l & 0 \\ \sin \psi + \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa & -\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa & l & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

és

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (2.3.9)$$

2.4. Mozgásegyenletek

A mozgásegyenleteket ebben a dolgozatban három különböző módszerrel is származtatjuk. Ezek közül először az Appell–Gibbs-egyenletekkel való meghatározást mutatjuk meg, majd utána a Routh–Voss-egyenletekkel történőt, végül pedig közvetlenül a dinamika alaptételének segítségével határozzuk meg a mozgásegyenleteket, melyekről belátható, hogy ekvivalensek egymással.

2.4.1. Appell–Gibbs-egyenletek

Ezen módszer elsőrendű differenciálegyenlet - rendszerként szolgáltatja a mozgásegyenleteket (lásd [5]), ami a numerikus szimuláció szempontjából előnyös.

Az Appell – Gibbs - egyenleteknek megfelelően a kinematikai kényszerek kielégítéséhez pszeudosebességek választása szükséges. A pszeudosebességeket az általános koordinátasebességek lineáris kombinációjából állítjuk elő. Jelölje ezen pszeudosebességekből képzett vektort σ . Az Appell – Gibbs - egyenleteknél az általános koordinátasebességekre az alábbi összefüggés teljesül:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_0 \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad (2.4.1)$$

amelyből az általános koordinátasebességek az alábbi módon fejezhetők ki:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_0 \\ \sigma \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

A választandó pszeudosebességek száma $\rho = n - h_{kin} = 2$, így a (2.4.2) kifejezésben szereplő mátrix invertálható lesz, azaz $\mathbf{B}$ -nek kettő sora és négy oszlopa van. Ezt a mátrixot intuitív módon választjuk:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4.3)$$

a pszeudosebességek vektora is két soros:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Ezzel a $\mathbf{B}$ mátrix választással a (2.4.1) egyenletből kifejezhetők a pszeudosebességek

$$\sigma_1 = \dot{X} \cos \psi + \dot{Y} \sin \psi \quad \text{és} \quad \sigma_2 = \dot{\varphi}. \quad (2.4.5)$$

Észrevehető, hogy σ_1 a gördeszka hosszanti irányú sebessége, σ_2 pedig a gördeszkás "relatív" szögsebességének tekinthető.

Ismerve az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat, illetve az $\mathbf{A}_0$ vektort, a (2.4.2) összefüggés segítségével kifejezhetők az általános koordinátasebességek

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos \psi \\ \sigma_1 \sin \psi \\ -\sigma_1 \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

és gyorsulások

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \sin \psi \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} + \dot{\sigma}_1 \cos \psi \\ -\sigma_1^2 \cos \psi \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} + \dot{\sigma}_1 \sin \psi \\ -\sigma_1 \sigma_2 \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} - \dot{\sigma}_1 \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} \\ \dot{\sigma}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Az Appell–Gibbs-módszer alapján a gyorsulási energia i -edik pszeudogyorsulások szerinti deriváltja egyezik meg a pszeudoerő i -edik komponensével

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\sigma}_i} = \Pi_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.4.8)$$

A gyorsulási energiát, hasonlóan a mozgási energiához az

$$S = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_F \cdot \mathbf{a}_F \quad (2.4.9)$$

módon állíthatjuk elő, ahol m az anyagi pont tömege (a (2.4.9) összefüggés anyagi pontra vonatkozik, ez használható ezen modell esetén, hiszen a rudak tömeg nélküliek, ebből kifolyólag tehetetlenségi nyomatékuk is zérus). Behelyettesítve az $\mathbf{a}_F$ -et a (2.2.9) összefüggésből a (2.4.9) összefüggésbe:

$$\begin{aligned} S = & \frac{m}{2l^4} \left(\sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \kappa (l - h \sin \varphi^2 \operatorname{tg} \kappa)^2 \sigma_1^4 \right) + \frac{m}{2} h^2 \sigma_2^4 + \\ & \frac{mh}{4l^2} \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa \sigma_1^2 \sigma_2^2 (h (11 + 7 \cos 2\varphi) \operatorname{tg} \kappa - 4l) \sin \varphi + \\ & \frac{3mh}{l^2} \cos \varphi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa (-l + h \sin \varphi^2 \operatorname{tg} \kappa) \sigma_1 \sigma_2 \dot{\sigma}_1 + \frac{m}{2l^2} (l - h \sin \varphi^2 \operatorname{tg} \kappa)^2 \dot{\sigma}_1^2 + \\ & \frac{mh}{2l^2} \sin (2\varphi) \operatorname{tg} \kappa \sigma_1^2 (l - h \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{\sigma}_2 + \frac{m}{2} h^2 \dot{\sigma}_2^2. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

A pszeudoerőt az aktív erők (nehézségi erő, torziós rugó) virtuális teljesítményéből (2.4.12) lehet meghatározni olyan módon, hogy ennek meg kell egyeznie a pszeudoerők virtuális teljesítményével (2.4.11):

$$\delta P = \sum_i \Pi_i \delta \sigma_i, \quad (2.4.11)$$

$$\delta P = \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{v}_F + \mathbf{M}_{\text{st,KR2}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{\text{KR2}}. \quad (2.4.12)$$

A (2.4.12) összefüggésben szereplő $\mathbf{G}$ az m tömegre ható nehézségi erő

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T, \quad (2.4.13)$$

$\mathbf{M}_{\text{st,KR2}}$ pedig a torziós rugó által létrehozott nyomaték a KR2 koordinátarendszerben

$$\mathbf{M}_{\text{st,KR2}} = \begin{bmatrix} -s_t \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{KR2}}^T, \quad (2.4.14)$$

valamint ω_{KR2} a merev test szögsebessége a KR2 koordinátarendszerben.

A (2.4.11) (2.4.12) egyenleteket egymással egyenlővé téve, valamint felhasználva azt, hogy esetünkben $i = 1, 2$.

$$\Pi_2 \delta \sigma_1 + \Pi_2 \delta \sigma_2 = (mgh \sin \varphi - s_t \varphi) \delta \sigma_2 \quad (2.4.15)$$

összefüggés adódik, amiből a pszeudosebességek együtthatójának összehasonlításával a

$$\Pi_1 = 0 \text{ és } \Pi_2 = mgh \sin \varphi - s_t \varphi \quad (2.4.16)$$

eredmény kapható.

A (2.4.8) összefüggésből esetünkben két darab egyenlet származik $i = 1$ esetén

$$\frac{m}{2l^2} \left(3h \sin(2\varphi) \text{tg} \kappa (-l + h \sin^2 \varphi \text{tg} \kappa) \sigma_1 \sigma_2 + 2 (l - h \sin^2 \varphi \text{tg} \kappa)^2 \dot{\sigma}_1 \right) = 0 \quad (2.4.17)$$

és $i=2$ esetén

$$\frac{mh}{2l^2} (\sin(2\varphi) \text{tg} \kappa (l - h \sin^2 \varphi \text{tg} \kappa) \sigma_1^2 + 2hl^2 \dot{\sigma}_2) = mgh \sin \varphi - s_t \varphi. \quad (2.4.18)$$

A (2.4.17) és (2.4.18) egyenleteket átrendezve $\dot{\sigma}_1$ -ra és $\dot{\sigma}_2$ -ra, illetve ezekhez hozzáfűzve az általános koordinátasebességeket pszeudosebességekkel kifejező összefüggéseket (2.4.6)

felírható a rendszert leíró elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{3h \sin(2\varphi) \operatorname{tg} \kappa \sigma_1 \sigma_2}{2(l - h \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \kappa)} \quad (2.4.19a)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{mgh \sin \varphi - s_t \varphi}{mh^2} - \frac{\sin(2\varphi) \operatorname{tg} \kappa (l - h \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \kappa)}{2hl^2} \sigma_1^2 \quad (2.4.19b)$$

$$\dot{X} = \sigma_1 \cos \psi \quad (2.4.19c)$$

$$\dot{Y} = \sigma_1 \sin \psi \quad (2.4.19d)$$

$$\dot{\psi} = -\sigma_1 \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l} \quad (2.4.19e)$$

$$\dot{\varphi} = \sigma_2 \quad (2.4.19f)$$

2.4.2. Routh–Voss-egyenletek

A Routh–Voss-egyenletek előállításí módja hasonlít a másodfajú Lagrange-egyenletek előállításához, azzal a többlettel, hogy ez a módszer figyelembe veszi az anholonom kényszereket úgynevezett multiplikátorokkal. Az előállításí módja

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{\beta=1}^h \mu_\beta A_{\beta,k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4.20a)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{\beta,k} \dot{q}_k + A_\beta = 0, \quad \beta = 1, \dots, h_{kin} \quad (2.4.20b)$$

ahol μ_β a Lagrange-multiplikátor. Q_k jelen esetben előállítható a külső erők U potenciál-függvény felhasználásával:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (2.4.21)$$

A kinetikus energia (2.4.22) felírható egyszerűen az anyagi pontra vonatkozó összefüggés segítségével, mivel a rudak tömegnélküliek:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{v}_F = \frac{m}{2} h^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\dot{X} + h \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \psi + h \dot{\psi} \cos \psi \sin \varphi \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\dot{Y} - h \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi + h \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi \right)^2. \quad (2.4.22)$$

A külső erő a gravitációs térből származó erő, illetve a torziós rugó által kifejtett nyomaték összegéből áll elő, tehát szükséges ezen erők potenciál-függvénye. A gravitációs erő potenciál-függvénye a zérus helyet a felső egyensúlyi helyhez választva ($\varphi = 0$) a következő:

$$U_g = -mgh(1 - \cos \varphi). \quad (2.4.23)$$

A rugóerő potenciál-függvénye, a zérus helyet szintén a $\varphi = 0$ helyhez választva

$$U_{st} = \frac{1}{2} s_t \varphi^2. \quad (2.4.24)$$

Ezek alapján a potenciálfüggvény:

$$U = U_g + U_{s_t} = -mgh(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}s_t\varphi^2. \quad (2.4.25)$$

Ezeket felhasználva a mozgásegyenletek:

$$m \left(\ddot{X} + \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \sin \varphi \right) h \sin \psi + \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \varphi \right) h \cos \psi \right) =$$

$$(-\mu_1 + \mu_2) \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa - (\mu_1 + \mu_2) \sin \psi \quad (2.4.26a)$$

$$m \left(\ddot{Y} + \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi - \ddot{\varphi} \cos \psi \right) h \cos \varphi + \left(\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \right) h \sin \varphi \right) =$$

$$\mu_1(\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) - \mu_2(\cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \quad (2.4.26b)$$

$$mh \sin \varphi \left(2h\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{X} \cos \psi + \ddot{Y} \sin \psi + h\ddot{\psi} \sin \varphi \right) = -l\mu_1 + l\mu_2 \quad (2.4.26c)$$

$$mh \left(g \sin \varphi + \left(h\dot{\psi}^2 \sin \varphi - \ddot{X} \sin \psi + \ddot{Y} \cos \psi \right) \cos \varphi - h\ddot{\varphi} \right) - s_t\varphi = 0 \quad (2.4.26d)$$

$$(\sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} - (\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} - l\dot{\psi} = 0 \quad (2.4.26e)$$

$$(\sin \psi + \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} + (-\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} + l\dot{\psi} = 0 \quad (2.4.26f)$$

A (2.4.26) egyenletrendszer ekvivalens a (2.4.19) egyenletrendszerrel, ez látható amennyiben a μ_1 és μ_2 paramétereket kiküszöböljük a (2.4.26) egyenletekből, illetve itt is bevezetjük a σ_1 és σ_2 változókat. Azonban ezen hosszadalmas számítás részleteinek ismertetésétől most eltekintünk. Jelen mechanikai modell esetén is jól látható, hogy az Appell–Gibbs-módszerrel származtatott mozgásegyenletek egyszerűbb alakúak, mint a Routh–Voss-módszerrel származtatottak.

2.4.3. Dinamika alaptételével származtatott mozgásegyenletek

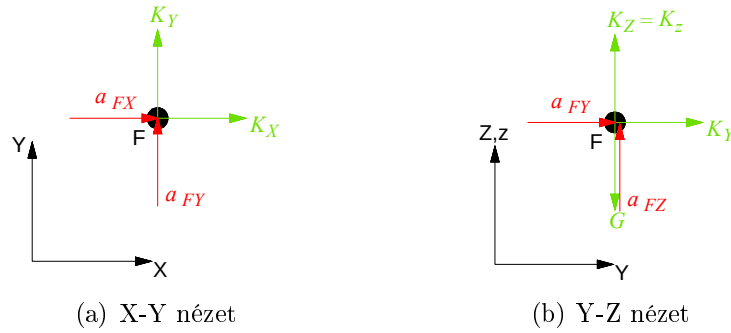
Ebben a fejezetben a mozgásegyenleteket Newton második axiómájának segítségével származtatjuk, amely

$$\left[\dot{\mathbf{I}}, \dot{\mathbf{\Pi}}_A \right]_A = [\mathbf{F}, \mathbf{M}_A]_A, \quad (2.4.27)$$

ahol $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ a merev test impulzusa, $\mathbf{F}$ a merev testre ható erők összessége, $\mathbf{\Pi}_A$ az A pontra vonatkozó perdület, $\mathbf{M}_A$ pedig az A pontra számított nyomaték. Ez az összefüggés akkor igaz, ha A súlypont vagy tartósan álló pont.

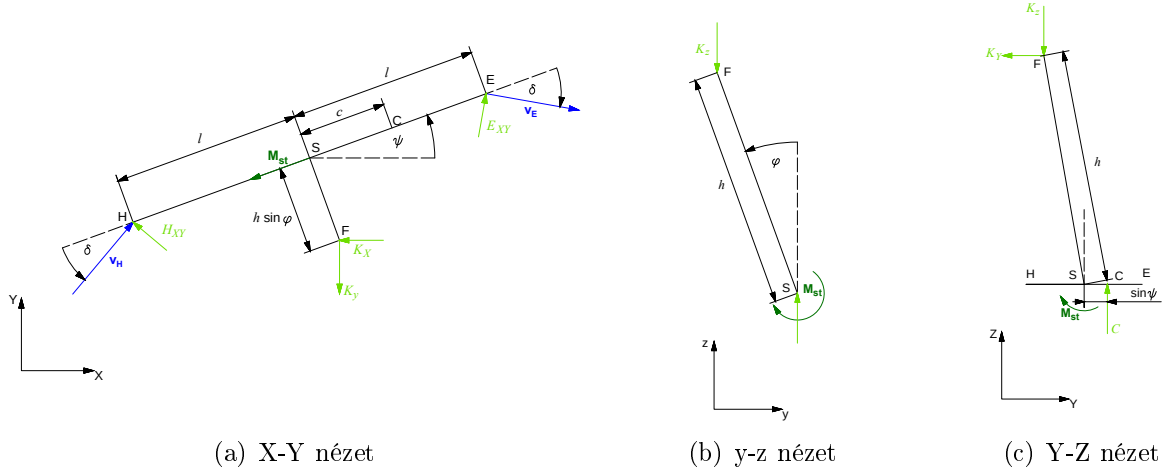
A mechanikai modell két részre osztható: egy tömegpontra (1) és egy tömeggel nem rendelkező rudakból összeállítható merev testre (2). A tömegpontnak a szabad-test-ábrái a 2.3 ábrán láthatóak, a rudaknak a szabad-test-ábráit pedig a 2.4 ábra mutatja. (Ahol a kék szín a sebességet, a piros a gyorsulást, a világoszöld az erőt, valamint a sötétzöld a nyomatékot jelöli.)

A tömegpont esetén természetesen a (2.4.27) dinamika alaptétel egyszerűsödik és csupán az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ összefüggés írható fel.



2.3. ábra. A tömegpont (1) szabad-test-ábrái

Mivel H és E pontok (2.4 ábra) sebességének iránya ismert, ezért ezen kényszereket létrehozó erők iránya ismert (sebességekre merőleges). Ezen erők felbonthatóak XY síkba eső, illetve Z komponensekre. A H és E pontokban ébredő Z irányú erőt a gördeszka mentén



2.4. ábra. A tömeg nélküli szerkezet (2) szabad-test-ábrái

S ponttól c távolságra C néven vettük figyelembe. A 2.4 ábrán látható még a torziós rugó által létrehozott nyomaték, illetve az F pontnál a tömegpontról átadódó erőkomponensek.

A dinamika alaptétele az anyagi pontra (1)

$$m\mathbf{a}_F = \mathbf{F}_F, \quad (2.4.28)$$

ahol $\mathbf{F}_F$ az anyagi pontra ható erő. Ez felírható

$$\mathbf{F}_F = \mathbf{K} + \mathbf{G}, \quad (2.4.29)$$

ahol

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}. \quad (2.4.30)$$

A (2) testre a dinamika alaptételét az S pontra írtuk fel, de ezek lényegében statikai

egyenletekké egyszerűsödnek, mivel a rudak tömege zérus:

$$0 = \mathbf{F}_2, \quad (2.4.31a)$$

$$0 = \mathbf{M}_{2s}. \quad (2.4.31b)$$

ahol $\mathbf{F}_2$ a (2) testre ható erők összessége

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{E} + \mathbf{H} + \mathbf{C} + (-\mathbf{K}), \quad (2.4.32)$$

$\mathbf{M}_{2s}$ pedig az S pontra számított nyomaték

$$\mathbf{M}_{2s} = \mathbf{r}_{SE} \times \mathbf{E} + \mathbf{r}_{SH} \times \mathbf{H} + \mathbf{r}_{SC} \times \mathbf{C} + \mathbf{r}_{SF} \times (-\mathbf{K}) + \mathbf{M}_{st}. \quad (2.4.33)$$

Az erők, illetve nyomatékok meghatározásához szükséges vektorok:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{SC} = c \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{XY} \cos(\psi - \delta + \pi/2) \\ E_{XY} \sin(\psi - \delta + \pi/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.34a)$$

$$\mathbf{r}_{SE} = l \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{XY} \cos(\psi + \delta + \pi/2) \\ H_{XY} \sin(\psi + \delta + \pi/2) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{SH} = l \begin{bmatrix} \cos(\psi + \pi) \\ \sin(\psi + \pi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.34b)$$

$$\mathbf{r}_{SF} = h \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos(\psi - \pi/2) \\ \sin \varphi \sin(\psi - \pi/2) \\ \cos \varphi \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{st} = s_t \varphi \begin{bmatrix} \cos(\psi + \pi) \\ \sin(\psi + \pi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.34c)$$

Ezek segítségével felírható a mozgásegyenleteket tartalmazó egyenletrendszer. Véve az (2.4.28) és (2.4.31) egyenletrendszereket, valamint a kinematikai kényszereket definiáló

egyenleteket (2.3.7) a mozgásegyenletek:

$$m \left(\ddot{X} + h \sin \psi \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \sin \varphi \right) + h \cos \psi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \varphi \right) \right) = K_X, \quad (2.4.35a)$$

$$m \left(\ddot{Y} + h \cos \varphi \left(2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi - \ddot{\varphi} \cos \psi \right) + h \sin \varphi \left(\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi \right) \right) = K_Y, \quad (2.4.35b)$$

$$-mh \left(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi \right) = K_Z - mg, \quad (2.4.35c)$$

$$0 = (E_{XY} - H_{XY}) \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa - (E_{XY} + H_{XY}) \sin \psi - K_X, \quad (2.4.35d)$$

$$0 = (E_{XY} + H_{XY}) \cos \psi - (-E_{XY} + H_{XY}) \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa - K_Y, \quad (2.4.35e)$$

$$0 = C - K_Z = 0, \quad (2.4.35f)$$

$$0 = hK_Y \cos \varphi + hK_Z \sin \varphi \cos \psi + cC \sin \psi - s_t \varphi \cos \psi, \quad (2.4.35g)$$

$$0 = hK_X \cos \varphi - hK_Z \sin \varphi \sin \psi + cC \cos \psi + s_t \varphi \sin \psi, \quad (2.4.35h)$$

$$0 = (E_{XY} - H_{XY})l - h \sin \varphi (K_X \cos \psi + K_Y \sin \psi), \quad (2.4.35i)$$

$$(\sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} - (\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} - l\dot{\psi} = 0, \quad (2.4.35j)$$

$$(\sin \psi + \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} + (-\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} + l\dot{\psi} = 0. \quad (2.4.35k)$$

Kiküszöbölve a (2.4.35) egyenletekből $K_X, K_Y, K_Z, E_{XY}, H_{XY}, d, C$ paramétereket kapjuk a rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet rendszert:

$$mh \left(\left(h\dot{\psi}^2 \sin \varphi - \ddot{X} \sin \psi + \ddot{Y} \cos \psi \right) \cos \varphi - h\ddot{\varphi} \right) = s_t \varphi - mgh \sin \varphi, \quad (2.4.36a)$$

$$m \left(l - h \operatorname{tg} \kappa \sin^2 \varphi \right) \left(2h\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi + \ddot{X} \cos \psi + \ddot{Y} \sin \psi + h\ddot{\psi} \sin \varphi \right) = 0, \quad (2.4.36b)$$

$$(\sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} - (\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} - l\dot{\psi} = 0, \quad (2.4.36c)$$

$$(\sin \psi + \cos \psi \sin \varphi \operatorname{tg} \kappa) \dot{X} + (-\cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{tg} \kappa) \dot{Y} + l\dot{\psi} = 0. \quad (2.4.36d)$$

A (2.4.36) egyenletrendszerről is belátható, hogy a σ_1 és σ_2 függvények bevezetésével a (2.4.19) egyenletrendszerrel azonos.

2.5. Lineáris stabilitásvizsgálat

Az egyszerűség kedvéért a további vizsgálatok során az Appell-Gibbs-egyenletek segítségével meghatározott (2.4.19) mozgásegyenleteket használjuk.

2.5.1. Stacionárius mozgás

A már említett egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz, mint stacionárius megoldáshoz tartozó állapotváltozók az alábbiak:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv \sigma_{1,0} = V, & \sigma_2 &\equiv \sigma_{2,0} = 0, & X &\equiv Vt + X_0 = Vt, \\ Y &\equiv Y_0 = 0, & \psi &\equiv \psi_0 = 0, & \varphi &\equiv \varphi_0 = 0.\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Ezek az állapotváltozó-értékek valóban kielégítik a (2.4.19) differenciálegyenlet rendszert.

Ennek megfelelően vezessünk be egy új állapotváltozót σ_1 helyett

$$\sigma_1(t) := \tilde{\sigma}_1 + \sigma_{1,0} = \tilde{\sigma}_1 + V.\tag{2.5.2}$$

Ez az új $\tilde{\sigma}_1$ változó most már nem a gördeszka hosszanti irányú sebességét jelöli, hanem annak egy konstans V -től való eltérését. Ezzel az új változóval a (2.4.19) differenciálegyenlet rendszer az alábbi módon néz ki ($\dot{\sigma}_1 = \dot{\tilde{\sigma}}_1$):

$$\dot{\tilde{\sigma}}_1 = \frac{3h \sin(2\varphi) \operatorname{tg} \kappa (\tilde{\sigma}_1 + V) \sigma_2}{2(l - h \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \kappa)}\tag{2.5.3a}$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{mgh \sin \varphi - s_t \varphi}{mh^2} - \frac{\sin(2\varphi) \operatorname{tg} \kappa (l - h \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \kappa)}{2hl^2} (\tilde{\sigma}_1 + V)^2\tag{2.5.3b}$$

$$\dot{X} = (\tilde{\sigma}_1 + V) \cos \psi\tag{2.5.3c}$$

$$\dot{Y} = (\tilde{\sigma}_1 + V) \sin \psi\tag{2.5.3d}$$

$$\dot{\psi} = -(\tilde{\sigma}_1 + V) \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \kappa}{l}\tag{2.5.3e}$$

$$\dot{\varphi} = \sigma_2\tag{2.5.3f}$$

Megfigyelhető, hogy a $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{\psi}$ általános koordináta sebességekre vonatkozó egyenletek leválaszthatóak, mivel az X, Y, ψ koordináták a (2.5.3a), (2.5.3b) és (2.5.3f) egyenletekben nem jelennek meg. A stabilitásvizsgálat során csak ezzel a három egyenlettel foglalkozunk.

2.5.2. Linearizálás

A linearizálást a leválasztás után maradt három változó szerint, mindegyik esetében a 0 egyensúlyi hely körül végezve kapjuk az

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\mathbf{X}, \quad (2.5.4)$$

ahol

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\sigma}}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{h} - \frac{s_t}{h^2 m} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \sigma_2 \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.5.5)$$

Észrevehető, hogy kis kitérésű mozgás esetén a gördeszka hosszirányú sebességváltozása nem befolyásolja a gördeszka keresztirányú mozgását.

2.5.3. Stabilitásvizsgálat

Helyettesítsük be az $\mathbf{X} = \mathbf{C}e^{\lambda t}$ exponenciális próbafüggvényt a (2.5.4) egyenletbe, ahol $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^3$ és $\lambda \in \mathbb{C}$. Ezzel a helyettesítéssel a lineáris együtthatómátrix ($\mathbf{J}$) karakterisztikus egyenlete a következő lesz:

$$\lambda \left(\lambda^2 - \frac{g}{h} + \frac{s_t}{mh^2} + \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl} \right) = 0. \quad (2.5.6)$$

A (2.5.6) karakterisztikus egyenlet megoldásai λ -ra nézve

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{g}{h} - \frac{s_t}{mh^2} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl}}, \lambda_2 = 0 \text{ és } \lambda_3 = \sqrt{\frac{g}{h} - \frac{s_t}{mh^2} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl}}. \quad (2.5.7)$$

Az aszimptotikus stabilitás feltétele, hogy az egyenlet gyökeinek valós része negatív legyen. Ez semmilyen V -re sem teljesül, mivel $\lambda_2 = 0$, de Ljapunov értelemben lehet stabilis a rendszer, ha a gyökök valós része pontosan 0. Ez akkor teljesül, ha λ_1 és λ_2 valósrésze is 0. Tehát Ljapunov értelemben stabilis akkor lehet ez az egyensúlyi helyzet, ha λ_1 és λ_2 értékei tisztán képzetesek, tehát ha

$$\frac{g}{h} - \frac{s_t}{mh^2} - \frac{V^2 \operatorname{tg} \kappa}{hl} \leq 0. \quad (2.5.8)$$

A (2.5.8) összefüggés mutatja, hogy a stabil tartomány elérhető a rugómerevség növelésével, valamint a sebesség növelésével. A rugómerevség értéke a gördeszka tervezési fázisában megválasztható, azonban a túl nagy merevség a gördeszka manőverezhetőségét rontja. Így ezen paraméter változtatását jelen tanulmányban nem vizsgáljuk. Megfigyelhető, hogy természetesen nem negatív tömeg, nem negatív súlypont magasság és nem negatív rugómerevség mellett is létezik olyan V sebesség, amivel megegyező vagy annál nagyobb sebességre az egyenes vonalú mozgás stabil. Ezt a sebességet nevezzük V_{stab} kritikus sebességnek, ami csak a gördeszka geometriai paramétereitől függ:

$$V_{stab} = \sqrt{\frac{gl}{\operatorname{tg} \kappa}} = 1,40281 \text{ [m/s]}. \quad (2.5.9)$$

A (2.5.8) stabilitási feltételből kifejezhető az a sebesség, melyre az egyensúlyi helyzet stabil

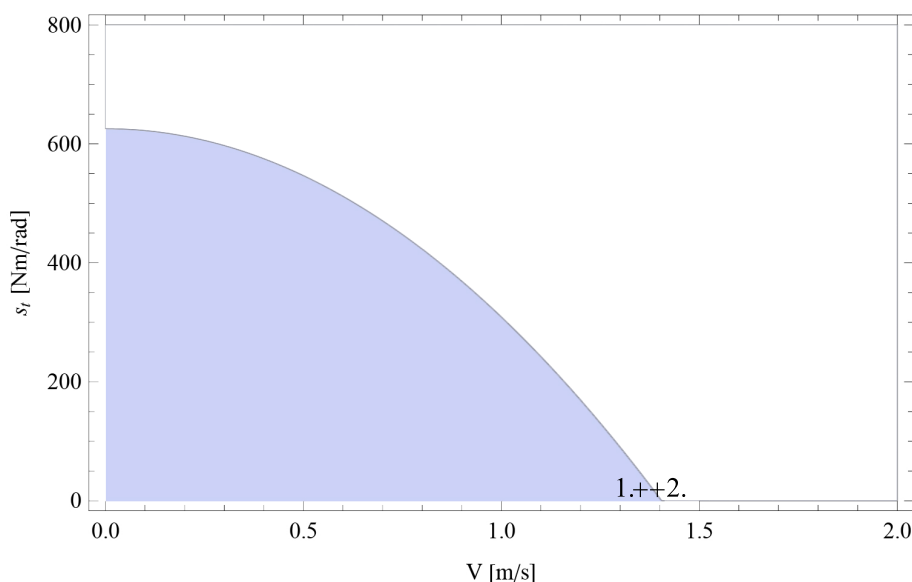
$$V > V_{krit} = \sqrt{\frac{l}{\operatorname{tg} \kappa} \left(g - \frac{s_t}{mh} \right)}. \quad (2.5.10)$$

2.1. táblázat. A gördeszka adatai

l	[m]	0,3937
g	[ms ⁻²]	9,81
κ	[°]	0,85

Ezek alapján megrajzolható a s_t és V paraméterterén a stabilitástérkép. Az egyenes

vonalú egyenletes mozgás azon paraméterértékekre instabil, ahol a 2.5 ábrán a szürkített tartományba esik. Az ábra a 2.1 és 2.2 táblázatokban szereplő adatok felhasználásával készült.



2.5. ábra. Önegyensúlyozó gördeszka stabilitástérképe

2.2. táblázat. A gördeszkás adatai

h	[m]	0,85
m	[kg]	75

A 2.5 ábrán vázolt stabilitástérkép Ljapunov stabilitásra vonatkozik, ez megfelel a fizikai szemléletnek, mivel a φ elfordulást nem csillapítja semmi, így az nem fog lecsengeni.

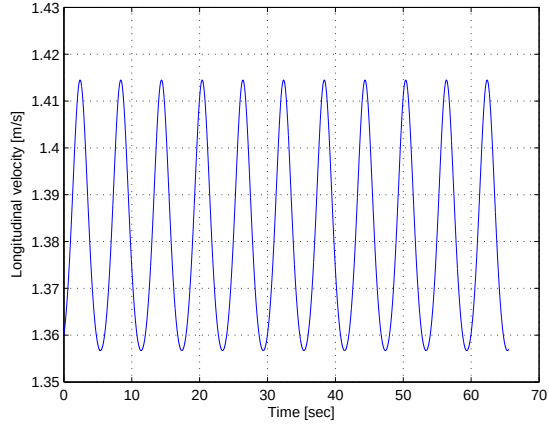
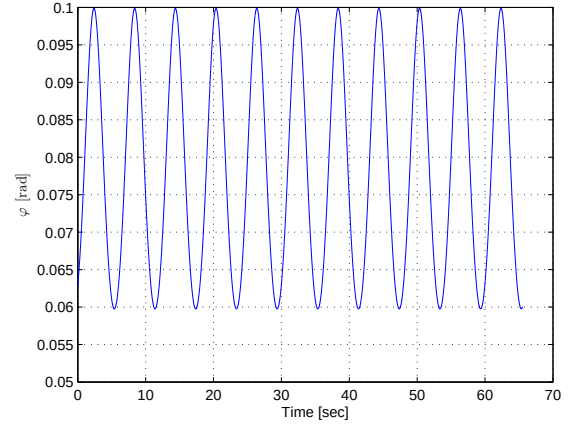
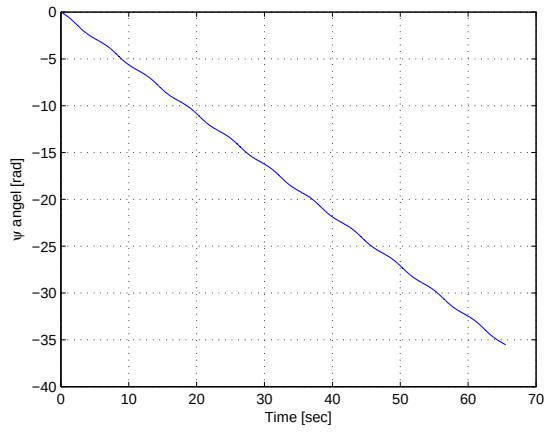
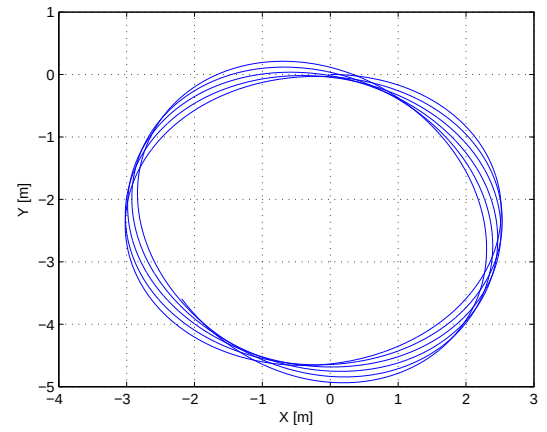
2.6. Az eredmények értékelése

Láthatjuk, hogy ennél a modellnél ha adott paraméterértékekre az egyensúlyi helyzet stabil, akkor a sebesség növelésével az stabil marad. Ez az eredmény fizikailag elképzelhető, hiszen a már említett kerékpárokra is hasonló eredmény kapható, miszerint nagyobb sebességnél könnyebb egyensúlyozni.

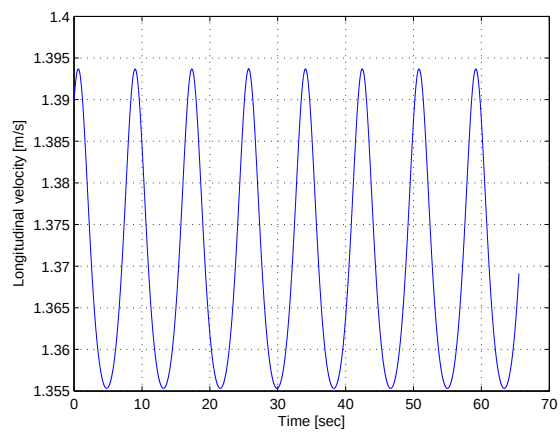
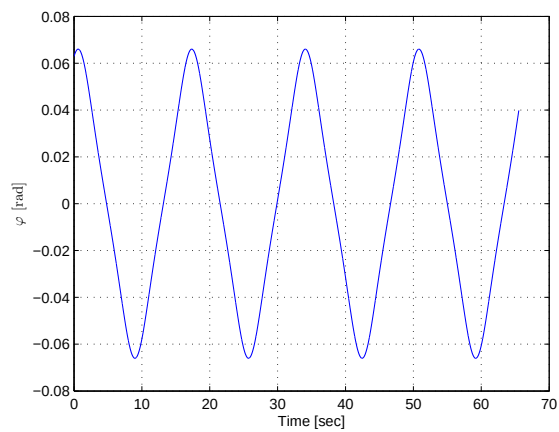
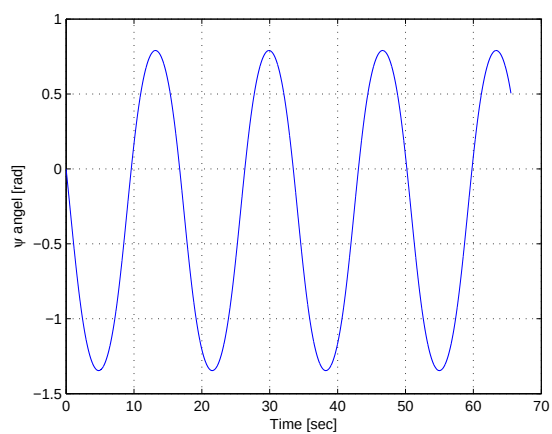
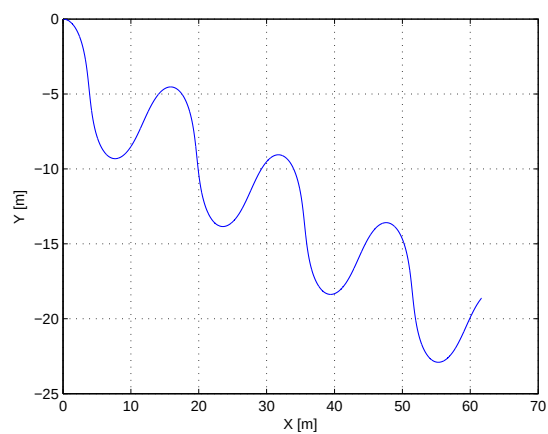
Numerikus szimulációkat végeztünk az $s_t = 35$ [Nm] $V = 1,36$ [m/s], illetve $V = 1,39$ [m/s] paraméterek mellett, mely paraméterpontokat a 2.5 ábrán az 1. és 2. potnok jelölik, mely eredmények megegyeznek a stabilitási térkép eredményeivel. A numerikus szimulációkat *MatLab* program segítségével készítettük, állandó lépésközű, negyedrendű Runge–Kutta-módszerrel a $\sigma_2(0) = 0,01$ [rad/s] és $\varphi(0) = \pi/50$ [rad], valamint $\tilde{\sigma}_1(0) = X(0) = Y(0) = \psi(0) = 0$ kezdeti feltételekkel. Az 1. paraméterpárhoz a 2.6 ábrák tartoznak, míg a 2. paraméterpárhoz pedig a 2.7 ábrák.

Az $s_t = 35$ [Nm] és $V = 1,36$ [m/s] paraméterekkel végzett numerikus szimuláción látszik, hogy a φ függvény periodikusan változik, de nem a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül, hanem egy ettől eltérő szöghelyzet körül. Ennek megfelelően a gördeszka az $X - Y$ síkon körszerű pályára áll. Ezzel szemben nagyobb sebességnél ($V = 1,39$ [m/s]) a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet stabil, így ekörül változik a φ szög.

Ezzel a modellel azt nem lehet belátni, hogy bizonyos sebesség fölött nehézségekbe ütközne az egyenes vonalú egyenletes mozgási állapot megtartása.

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

2.6. ábra. 1. ponthoz tartozó szimuláció ($V=1,36$ [m/s] és $s_t=35$ [Nm])

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

2.7. ábra. 2. ponthoz tartozó szimuláció ($V=1,39$ [m/s] és $s_t=35$ [Nm])

3. Mérési eredmények

Azt az eredményt, hogy a sebesség növelése segít az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilizálásában, kísérlettel mutatjuk meg. Ehhez először szükség van a gördeszka paramétereinek a megmérése.

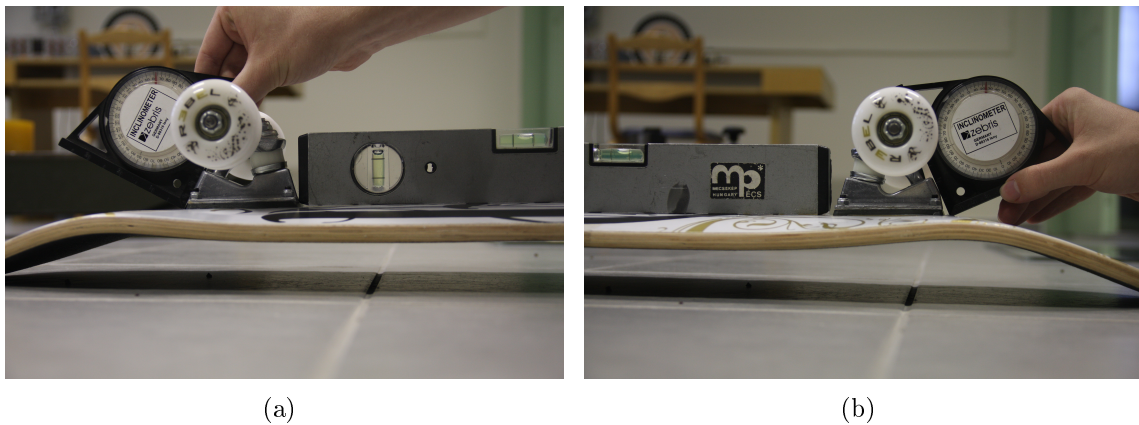
3.1. A gördeszka paramétere

A gördeszka méretei megtalálhatóak a márka honlapján [6], miszerint a deszka hossza 31", szélessége pedig 8". Ezek alapján a gördeszka félhossza és félszélessége

$$\begin{aligned} l &= 0,3937 \text{ [m]}, \\ b_{desz} &= 0,1016 \text{ [m]}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

A κ szöget a deszka adatlapja nem tartalmazza, így annak meghatározásához mérés szükséges. A mérésről készült képek a 3.1 ábrán láthatóak. Ez alapján

$$\kappa = 63 [^\circ]. \tag{3.1.2}$$



3.1. ábra. A κ szög mérése

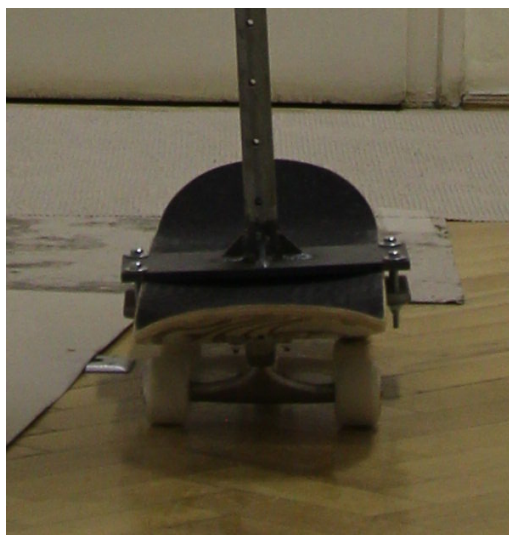
3.2. Kritikus sebesség létezése

Az elmélet igazolására olyan kísérletet állítottunk össze, amely segítségével megállapítható az, hogy $V = 0$ [m/s] sebességnél a felső egyensúlyi helyzet instabil, míg ha egy sebességgel ellökjük a deszkát, akkor az nem kezd el kanyarodni, hanem egyenes körül ingadozva gurul.

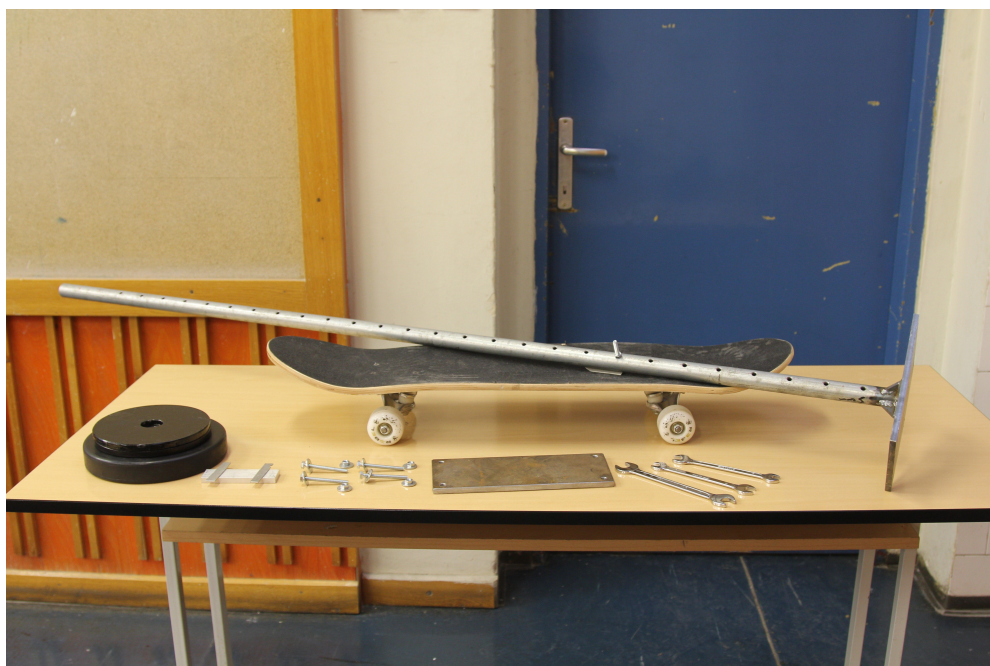
Ehhez összeállítottunk egy, a deszkához csavarokkal hozzáerősíthető szerkezetet, mely segítségével változtatható a h magasság és m tömeg. A szerkezet egy kör keresztmetszetű rúdból áll, ami rá van hegesztve egy acéllemezre, melyen furatok találhatók. Ezen furatok, illetve egy másik lemez segítségével rögzíthetjük a függőleges rudat a gördeszkára.

A rúd is át van fúrá, így a súlyok csavarok segítségével a választott magasságban rögzíthetők. Így beállítható, hogy mennyire dőljön ki a rúd a függőleges helyzetéből. A méréshez használt szerkezetről képeket láthatunk a 3.2 és 3.3 ábrákon.

A mérés során azt tapasztaltuk, hogy a kezdetben statikusan instabil szerkezet (3.4 és 3.5 ábrák) bizonyos sebességtől kezdve már az egyenes pálya körül ingadozva mozgott. Ez megegyezik az elméletben levezetett eredményekkel.



3.2. ábra. Kísérleti berendezés



3.3. ábra. Kísérleti berendezés elemei



3.4. ábra. Instabil állapot

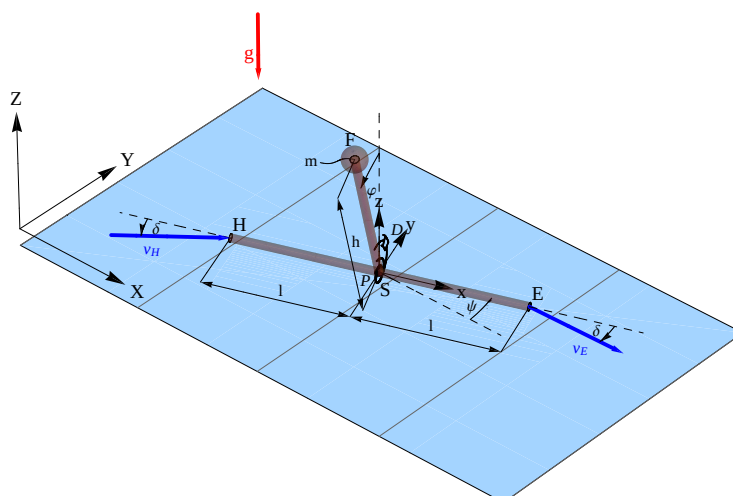


3.5. ábra. Instabil állapot

4. Szabályozott gördeszka

A 2. fejezetben bemutatott modellel nem lehet azt belátni, amit a világhálón megtalálható videók sejtetnek, miszerint a sebesség nem feltétlenül segít az egyensúlyi állapot megtartásában. Ezért a ebben a fejezetben úgy modellezzük a gördeszkát és rajta az embert, hogy a gördeszkázó már szabályozni akarja ezt a bizonyos egyenes vonalú egyenletes mozgást. Továbbra is a 2. fejezetben bemutatott modellhez hasonló egyszerű szerkezettel modellezzük a gördeszkást és deszkáját.

4.1. Bővített mechanikai modell



4.1. ábra. Szabályozókörrrel rendelkező mechanikai modell

Ahogy a bevezetőben említésre került, ez a modell megegyezik a 2. fejezetben bemutatottal, csak a torziós rugó helyett egy PD szabályozási kör biztosítja a visszatérítő nyomatékot (4.1 ábra). Mivel ez a szabályozás az embert modellezi, aki nem azonnal reagál a környezetére, tehát reflexideje nem nulla, ezt a modell időkésleltetett szabályozással veszi

figyelembe, melyben az időkést τ jelöli.

Ezenkívül a modell teljes egészében megegyezik a 2. fejezetben ismerttetettel, tehát a geometriai és az anholonom kényszerek, az általános koordináták és a koordinátarendszerek is megegyeznek.

4.2. Mozgásegyenletek

Ebben a modellben a mozgásegyenletek levezetésére már csak az Appell–Gibbs-módszert használjuk. Mivel az anholonom kényszerek és az általános koordináták megegyeznek, ezért a pseudosebességek is ugyanarra adódnak (2.4.5). Ebből következően az általános koordinátasebességek (2.4.6) és gyorsulások (2.4.7) is megegyeznek a pseudosebességekkel kifejezve, illetve a gyorsulási energia (2.4.10) sem változik, tehát annak pseudogyorsulás szerinti deriváltjai sem. A két modell közötti különbség a pseudoerőben van.

A pseudoerő előállítása is hasonlóan történik az aktív erők látszólagos teljesítményével

$$\delta P = \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{v}_F + \mathbf{M}_{\text{PD,KR2}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{\text{KR2}}, \quad (4.2.1)$$

ahol

$$\mathbf{M}_{\text{PD,KR2}} = \begin{bmatrix} -P\varphi(t-\tau) - D\dot{\varphi}(t-\tau) & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{KR2}}^T. \quad (4.2.2)$$

Felhasználva a (2.4.11) összefüggést

$$\Pi_2 \delta \sigma_1(t) + \Pi_2 \delta \sigma_2(t) = (mgh \sin \varphi(t) - P\varphi(t) (t-\tau) - D\dot{\varphi}(t-\tau)) \delta \sigma_2(t), \quad (4.2.3)$$

ebből a virtuális pseudosebességek együtthatójának összehasonlításával adódik a

$$\Pi_1 = 0 \text{ és } \Pi_2 = mgh \sin \varphi(t) - P\varphi(t-\tau) - D\dot{\varphi}(t-\tau). \quad (4.2.4)$$

A pseudoerők segítségével meghatározhatóak a mozgásegyenletek, valamint felhasználva

azt, hogy $\dot{\varphi}(t - \tau) = \sigma_2(t - \tau)$.

$$\dot{\sigma}_1(t) = \frac{3h \sin(2\varphi(t)) \operatorname{tg} \kappa \sigma_1(t) \sigma_2(t)}{2(l - h \sin^2 \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa)} \quad (4.2.5a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2(t) = & \frac{mgh \sin \varphi(t) - P\varphi(t - \tau) - D\sigma_2(t - \tau)}{mh^2} - \\ & - \frac{\sin(2\varphi(t)) \operatorname{tg} \kappa (l - h \sin^2 \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa)}{2hl^2} \sigma_1^2(t) \end{aligned} \quad (4.2.5b)$$

$$\dot{X}(t) = \sigma_1(t) \cos \psi(t) \quad (4.2.5c)$$

$$\dot{Y}(t) = \sigma_1(t) \sin \psi(t) \quad (4.2.5d)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\sigma_1(t) \frac{\sin \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa}{l} \quad (4.2.5e)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \sigma_2(t) \quad (4.2.5f)$$

4.3. Lineáris stabilitásvizsgálat

4.3.1. Stacionárius mozgás

Ennél a modellnél az egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz tartozó állapotváltozó értékek megegyeznek a (2.5.1) összefüggésben bemutatottakkal. Ugyanazt az új állapotváltozót szükséges bevezetni σ_1 helyett, mint a (2) fejezetben (2.5.2). Ezzel a mozgásegyenlet:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_1(t) = \frac{3h \sin(2\varphi(t)) \operatorname{tg} \kappa (\tilde{\sigma}_1(t) + V) \sigma_2(t)}{2(l - h \sin^2 \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa)} \quad (4.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_2(t) = & \frac{mgh \sin \varphi(t) - P\varphi(t - \tau) - D\sigma_2(t - \tau)}{mh^2} - \\ & - \frac{\sin(2\varphi(t)) \operatorname{tg} \kappa (l - h \sin^2 \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa)}{2hl^2} (\tilde{\sigma}_1(t) + V)^2 \end{aligned} \quad (4.3.1b)$$

$$\dot{X}(t) = (\tilde{\sigma}_1(t) + V) \cos \psi(t) \quad (4.3.1c)$$

$$\dot{Y}(t) = (\tilde{\sigma}_1(t) + V) \sin \psi(t) \quad (4.3.1d)$$

$$\dot{\psi}(t) = -(\tilde{\sigma}_1(t) + V) \frac{\sin \varphi(t) \operatorname{tg} \kappa}{l} \quad (4.3.1e)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \sigma_2(t) \quad (4.3.1f)$$

A (4.3.1) egyenletrendszerre is igaz, hogy az X , Y , ψ ciklikus koordináták, így az ezek deriváltjaira vonatkozó egyenletek leválaszthatóak.

4.3.2. Linearizálás

A linearizálást a leválasztás után maradt három pár változó szerint, mindegyik esetében a 0 egyensúlyi hely körül végezve kapjuk az

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{X}(t) + \mathbf{L}\mathbf{X}(t - \tau), \quad (4.3.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\sigma}}_1(t) \\ \dot{\sigma}_2(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1(t) \\ \sigma_2(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \mathbf{X}(t - \tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1(t - \tau) \\ \sigma_2(t - \tau) \\ \varphi(t - \tau) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{h} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{mh^2} & -\frac{P}{mh^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Erre is igaz, hogy a $\dot{\tilde{\sigma}}_1(t)$ -ra vonatkozó egyenlet a linearizált alakban nem jelenik meg.

4.3.3. Stabilitásvizsgálat D-szeparációval

Keressük a megoldást $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}^T e^{\lambda t}$ alakban, ahol $C_i \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$. Behelyettesítve ezt a (4.3.2) egyenletbe az a

$$\begin{bmatrix} C_1 \lambda \\ C_2 \frac{De^{\lambda\tau}}{mh^2} + C_3 \frac{Pe^{\lambda\tau}}{mh^2} + C_2 \lambda - C_3 \left(\frac{g}{h} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{hl} \right) \\ -C_2 + C_3 \lambda \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

alakra hozható.

A (4.3.2) egyenlet átalakítható a

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{De^{-\lambda\tau}}{mh^2} + \lambda & -\frac{g}{h} + \frac{Pe^{-\lambda\tau}}{mh^2} + \frac{V^2 \text{tg}\kappa}{hl} \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

mátrix egyenletté. Mivel $e^{\lambda t} \neq 0$, ezért vagy a konstansokból összeállított vektor zérus vektor, vagy az együtthatómátrixának determinánsa zérus. Amennyiben a konstansokból összeállított vektor zérus vektor, az a triviális megoldást eredményezi, mi az ettől különböző megoldást állítjuk elő, tehát a konstans vektor együtthatómátrixának determinánsának kell zérussal megegyeznie, így kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\left(\lambda^2 + \frac{De^{-\lambda\tau}}{mh^2} \lambda - \frac{g}{h} + \frac{Pe^{-\lambda\tau}}{mh^2} + \frac{V^2 \text{tg}\kappa}{hl} \right) \lambda = 0. \quad (4.3.6)$$

A (4.3.6) karakterisztikus egyenletnek $\lambda = 0$ mindig megoldása, tehát az egyensúlyi helyzet csak Ljapunov értelemben lehet stabilis. Ez nem mond ellent a fizikai képünknek, hiszen ebben a modellben az inverz ingaszerű lengés szabályozva van, de az előrehaladás sebessége nincsen, így ez a mozgás csak Ljapunov értelemben lesz stabilis. A következőkben vizsgáljuk csak a (4.3.6) karakterisztikus egyenletben együtthatóként szereplő kifejezést, ez a

$$\lambda^2 + \frac{De^{-\lambda\tau}}{mh^2} \lambda - \frac{g}{h} + \frac{Pe^{-\lambda\tau}}{mh^2} + \frac{V^2 \text{tg}\kappa}{hl} = 0. \quad (4.3.7)$$

A egyensúlyi helyzet akkor van a stabilitás határán, ha a λ karakterisztikus exponensek éppen átlépnek a képzetes tengelyen, tehát $\text{Re}\lambda = 0$, azaz

$$\lambda = \mathbf{i}\omega \quad (4.3.8)$$

alakban kereshető, ahol $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathbf{i}$ pedig a képzetes egységvektor.

Beírva ezt a (4.3.7) egyenletbe kaphatunk egy komplex egyenletet, melynek jobb olda-

lán 0 áll. Ez csak akkor lehet igaz, ha az egyenlet bal oldalának valós és képzetes része is megegyezik zérussal. Az így kapott egyenletrendszer, melyben már csak valós számok szerepelnek:

$$-\frac{D\omega \cos(\omega\tau)}{mh^2} + \frac{P \sin(\omega\tau)}{mh^2} = 0, \quad (4.3.9a)$$

$$-\omega^2 - \frac{g}{h} + \frac{P \cos(\omega\tau)}{mh^2} + \frac{D\omega \sin(\omega\tau)}{mh^2} + \frac{V^2 \operatorname{tg}\kappa}{hl} = 0. \quad (4.3.9b)$$

A (4.3.9) egyenletrendszer P -re és D -re nézve lineáris egyenletrendszer, így kifejezhető belőle P és D :

$$P = mh \cos(\omega\tau) \left((g + h\omega^2) - \frac{V^2}{l} \operatorname{tg}\kappa \right), \quad (4.3.10a)$$

$$D = \frac{mh \sin(\omega\tau) \left((g + h\omega^2) - \frac{V^2}{l} \operatorname{tg}\kappa \right)}{\omega}. \quad (4.3.10b)$$

Megállapítható, hogy P és D ω -ra nézve páros függvények, így elegendő $\omega \in \mathbb{R}^+$ halmazon végezni a vizsgálatokat.

Látható hogy $\omega = 0$ esetén a (4.3.9a) egyenletből azonosságot, míg a (4.3.9b) egyenletből P -re kapunk egy feltételt, melyhez bármely D megoldása az (4.3.9) egyenletrendszernek, tehát a

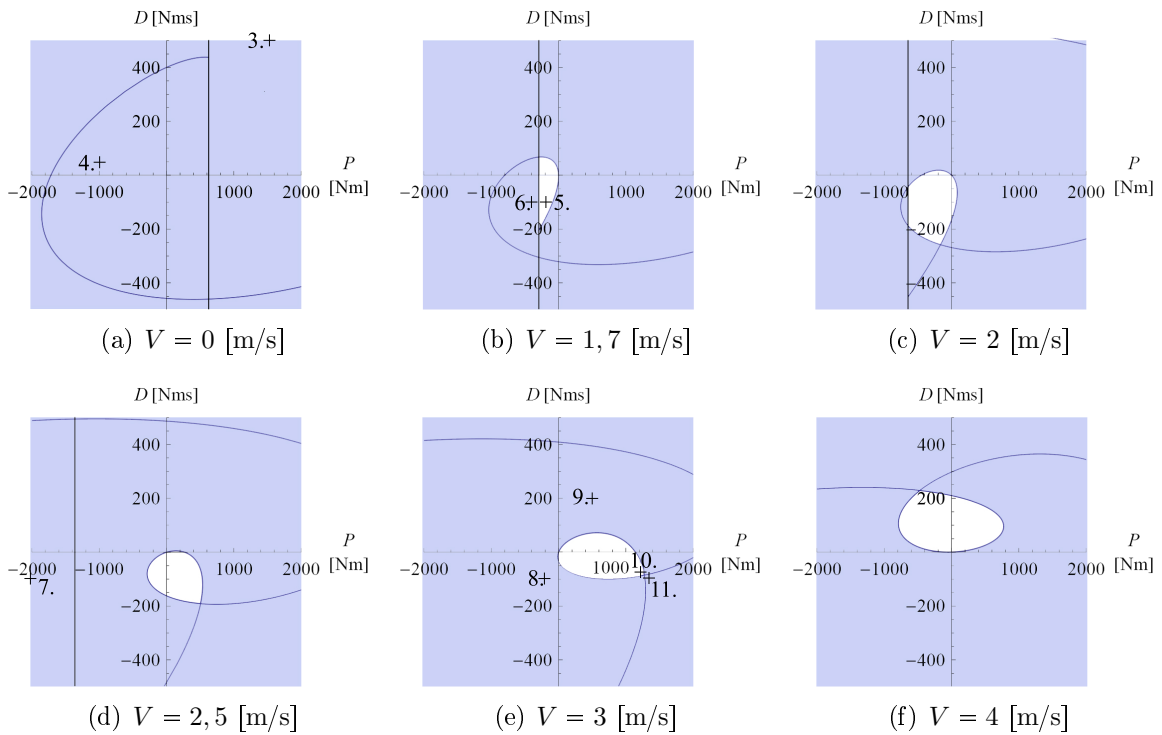
$$P = mgh - \frac{mhV^2 \operatorname{tg}\kappa}{l} \quad (4.3.11)$$

egyenes egy stabilitási határ. Mivel ez egy $\omega = 0$ szögsebességű stabilitási határ, ezért ezt statikus stabilitási határnak nevezzük. A 2 fejezetben ismertetett időkésést nem tartalmazó modellben, ahol P az s_t torziós rugómerevségnek felelt meg, azt az eredményt kaptunk, hogy ennek a rugómerevségnek nagyobbnak kell lennie, egy a sebességtől függő kifejezésnél (lásd 2.5 ábra). Ez ennél az időkéséses szabályozást tartalmazó modellnél is így van, amely

numerikusan ellenőrizhető, tehát a

$$P < mgh - \frac{mhV^2 \tan \kappa}{l} \quad (4.3.12)$$

paraméterértékekre az egyensúlyi helyzet instabil, mégpedig olyan módon, hogy a φ szög nem a 0 értékhez fog beállni, vagy akörül lengeni.



4.2. ábra. Szabályozott gördeszka stabilitástérképei különböző sebességekre

A 4.2 ábrán láthatóak az egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz tartozó stabilitástérképek $P - D$ paramétersíkon különböző sebességek esetén $\tau = 0,7$ [s] időközés mellett. A stabilitási görbéket a 2.1 és 2.2 táblázatok adatait figyelembe véve készítettük. A szürkített terület a lineáris stabil, a fehérek a lineárisan instabil paramétertartományokat jelölik. A 4.2 stabilitási térképeken a jelölt pontokban numerikus szimulációkat végeztünk, melyek a 4.4 fejezetben találhatók.

4.3.4. Stabil hurok kialakulása

A D/P arányt és a határgörbe távolságát az origótól a (4.3.13) összefüggés mutatja.

$$\frac{D}{P} = \frac{\operatorname{tg}(\omega\tau)}{\omega}, \quad (4.3.13a)$$

$$D^2 + P^2 = \frac{m^2 h^2 (\omega^2 \cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)) (l(g + h\omega^2) - V^2 \operatorname{tg}\kappa)^2}{l^2 \omega^2}. \quad (4.3.13b)$$

Tegyük fel, hogy a $D/P = k$ rögzített aránynál vizsgáljuk a görbét. A (4.3.13a) egyenletet ezzel:

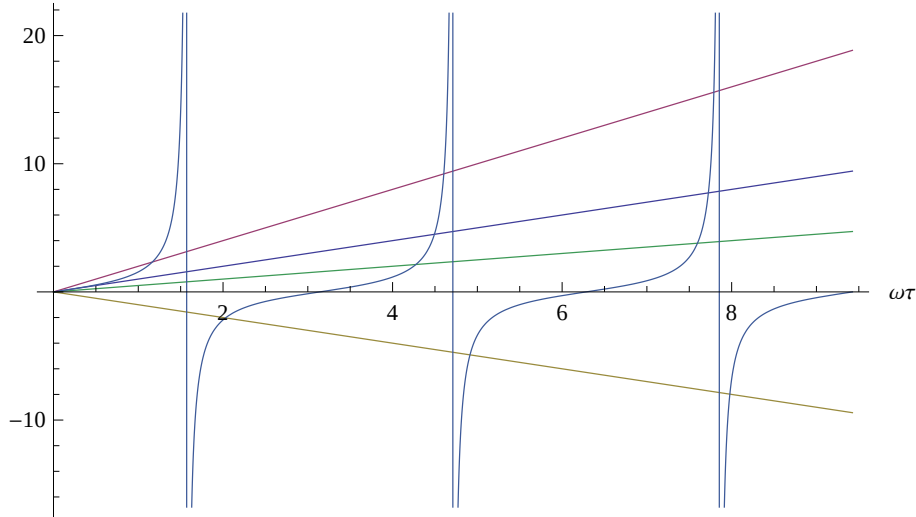
$$\operatorname{tg}(\omega\tau) = k\omega = k_1\omega\tau, \quad (4.3.14)$$

ahol

$$k_1 = k/\tau, \quad (4.3.15)$$

így $\omega\tau$ -t egy változóként lehet kezelni.

A (4.3.14) egyenlet grafikusán megoldható, ez látható a 4.3 ábrán.



4.3. ábra. A $\operatorname{tg}(\omega\tau) = k_1\omega\tau$ egyenlet megoldása különböző k_1 esetén

Legyenek a (4.3.14) egyenlet megoldásai $\omega\tau_r$, ahol r jelöli az r -edik megoldást ($\omega\tau =$

0 megoldást figyelmen kívül hagyva). Látható, hogy egyre nagyobb r esetén az $\omega\tau_r$ -ek egyre közelebb esnek $0 < k_1 < 1$ esetén a $(2r+1)\pi/2$, $k_1 > 1$ és $k_1 < 0$ esetén a $(2r-1)\pi/2$ értékekhez, amennyiben r -et növeljük. $\omega\tau_r$ -hez tartozó P -re és D -re lesz pontja a határgörbének adott k_1 esetén.

$k_1 \rightarrow \infty$ esetén ezt a megoldást nem használhatjuk, hiszen akkor nem létezik metszéspont. Ez az eset megfelel a $P = 0$ megoldásnak, azaz amikor

$$l(g + h\omega^2) - V^2 \operatorname{tg} \kappa = 0. \quad (4.3.16)$$

A (4.3.13a) jobb oldala alapján $k_1 \rightarrow 0$ esetben:

$$\cos(\omega\tau) = 0 \quad (4.3.17)$$

azaz

$$\omega\tau = \pi/2 + i\pi, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.3.18)$$

ekkor

$$|\sin(\pi/2 + i\pi)| = 1, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.3.19)$$

tehát a vizsgálandó összefüggés megegyezik a (4.3.25) függvénnyel, melyet később részletezünk.

Emellett az $\omega\tau_r$ -re tett megállapítások akkor sem igazak, ha $D = 0$, tehát vagy a (4.3.16) feltétel teljesül, melynek a hatása megegyezik az ott leírtakéval, vagy

$$\sin(\omega\tau) = 0 \quad (4.3.20)$$

azaz

$$\omega\tau = i\pi, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.3.21)$$

ekkor

$$|\cos(i\pi)| = 1, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.3.22)$$

tehát a vizsgálandó összefüggés szintén megegyezik a (4.3.25) függvénnyel.

Adott $D/P = k$ értéknél $\sin(\omega\tau)$ és $\cos(\omega\tau)$ felírható k paraméter segítségével

$$\sin(\omega\tau) = k\omega \cos(\omega\tau) \quad \text{és} \quad \cos(\omega\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{k\omega}. \quad (4.3.23)$$

Behelyettesítve a (4.3.13b) összefüggésbe a (4.3.23) eredményeket:

$$D^2 + P^2 = m^2 h^2 \cos^2(\omega\tau) (1 + k^2) \left(g + \frac{h\omega^2 \tau^2}{\tau^2} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{l} \right)^2, \quad (4.3.24a)$$

$$D^2 + P^2 = m^2 h^2 \sin^2(\omega\tau) (1 + k^{-2}) \left(\frac{g\tau}{\omega\tau} + \frac{h\omega\tau}{\tau} - \frac{\tau V^2 \text{tg} \kappa}{l\omega\tau} \right)^2. \quad (4.3.24b)$$

A (4.3.24) összefüggésekben szereplő

$$\left(g + \frac{h\omega^2 \tau^2}{\tau^2} - \frac{V^2 \text{tg} \kappa}{l} \right)^2, \quad (4.3.25a)$$

$$\left(\frac{g\tau}{\omega\tau} + \frac{h\omega\tau}{\tau} - \frac{\tau V^2 \text{tg} \kappa}{l\omega\tau} \right)^2 \quad (4.3.25b)$$

függvényekre igaz, hogy ha

$$0 < \omega\tau < \tau \sqrt{\frac{V^2 \text{tg} \kappa - gl}{hl}} \quad (4.3.26)$$

akkor monoton csökkenőek illetve

$$\omega\tau > \tau \sqrt{\frac{V^2 \text{tg} \kappa - gl}{hl}} \quad (4.3.27)$$

esetén monoton növekvőek.

Tekintve a (4.3.24a) összefüggést adott $D/P = k$ viszony és $\omega\tau$ -ra megfogalmazott (4.3.26) feltétel esetén a stabilitási határgörbe távolsága az origótól monoton csökken, hiszen

ha az r -et növeljük akkor $\omega\tau_r$ monoton tart $\pi/2$ valamilyen páratlan számú többszöröséhez, tehát $\cos^2(\omega\tau_r)$ monoton csökkenve tart 0-hoz, illetve a (4.3.25a) függvény is monoton csökken.

Emellett belátható a (4.3.24b) összefüggésből, hogy adott $D/P = k$ viszony és $\omega\tau$ -ra megfogalmazott (4.3.27) feltétel esetén a stabilitási határgörbe távolsága az origótól monoton növekszik, hiszen ha az r -et növeljük akkor $\omega\tau_r$ monoton tart $\pi/2$ valamilyen páratlan számú többszöröséhez, tehát $\sin^2(\omega\tau_r)$ monoton növekedve tart 1-hez, illetve a (4.3.25b) függvény is monoton növekszik.

Ez megegyezik azzal, hogy a stabilitás határgörbéje, amennyiben átmegy a $P = 0$ és $D = 0$ ponton, akkor addig, amíg át nem megy, monoton csökken a távolsága az origótól, utána pedig monoton növekszik adott D/P arány esetén.

Belátható, hogy $V = 0$ [ms⁻¹] sebességhez $\forall\omega\tau$ esetén a határgörbe origótól mért távolsága növekszik. Tehát a határgörbe akkor metszheti át saját magát először, amikor valamilyen 0-tól különböző ω esetén újra a $P(\omega = 0)$ és $D(\omega = 0)$ ponton megy keresztül.

Feltételezzük azt, hogy pontosan o -szor metszi át saját magát a görbe. Az $o + 1$ -edik metszés akkor fog újra belépni, ha a görbe újra áthalad a $P(\omega = 0)$ és $D(\omega = 0)$ ponton.

Ezen pontokra az igaz, hogy:

$$P(\omega) = P(\omega = 0), \quad (4.3.28a)$$

$$D(\omega) = D(\omega = 0). \quad (4.3.28b)$$

Behelyettesítve a (4.3.28) egyenletrendszerbe a (4.3.10) eredményeket, illetve a $D(\omega = 0)$ szabályozó paramétert határértékkel számítva kapható a

$$\frac{mh \cos(\tau\omega) (l(g + h\omega^2) - V^2 \text{tg}\kappa)}{l} = \frac{mh (gl - V^2 \text{tg}\kappa)}{l}, \quad (4.3.29a)$$

$$\frac{mh \sin(\tau\omega) (l(g + h\omega^2) - V^2 \text{tg}\kappa)}{l\omega} = \frac{mh\tau (gl - V^2 \text{tg}\kappa)}{l} \quad (4.3.29b)$$

egyenletrendszer.

A (4.3.29) egyenletek átalakíthatóak a

$$\cos(\tau\omega) = \frac{1}{1 + \frac{hl\omega^2}{gl - V^2 \operatorname{tg}\kappa}}, \quad (4.3.30a)$$

$$\frac{\sin(\tau\omega)}{\tau\omega} = \frac{1}{1 + \frac{hl\omega^2}{gl - V^2 \operatorname{tg}\kappa}} \quad (4.3.30b)$$

alakra.

Megfigyelhető, hogy a (4.3.30a) és (4.3.30b) egyenletek jobb oldala megegyezik, így a ball oldalak is azonosak. Egyenlővé téve a bal oldalakat

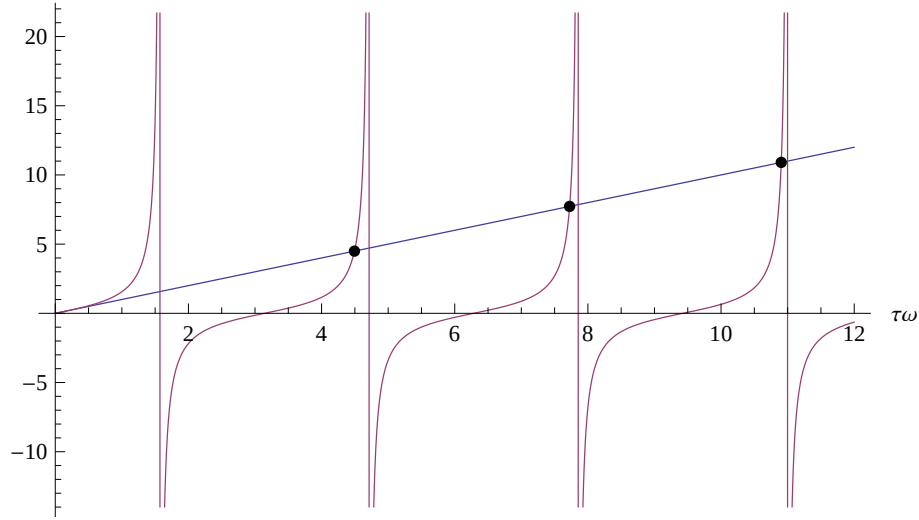
$$\operatorname{tg}\omega\tau = \omega\tau. \quad (4.3.31)$$

A (4.3.31) nemlineáris egyenlet analitikusan nem oldható meg, de numerikusan, illetve grafikusan igen. A grafikus megoldást a 4.4 ábrán látható, míg a numerikus megoldás eredményeit a (4.3.32) összefüggés mutatja.

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}\tau_1 &= 4,4934094579090641 \\ \widetilde{\omega}\tau_2 &= 7,7252518369377071 \\ \widetilde{\omega}\tau_3 &= 10,904121659428899 \\ \widetilde{\omega}\tau_4 &= 14,066193912831473 \\ &\dots \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \widetilde{\omega}\tau_r &= \frac{\pi}{2} + r\pi \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Kifejezve a (4.3.29b) egyenletekből V -t (csak a pozitív megoldást figyelembevéve):

$$V = \sqrt{\frac{l(g\tau\omega - (g + h\omega^2)\sin(\tau\omega))}{(\tau\omega - \sin(\omega\tau))\operatorname{tg}\kappa}}. \quad (4.3.33)$$



4.4. ábra. A $\text{tg}\tau\omega = \tau\omega$ egyenlet megoldása grafikusán

Belátható, hogy a (4.3.33) összefüggés nevezője $\forall\omega\tau$ esetén pozitív (tehát $\omega\tau - \sin(\omega\tau) > 0$, $\kappa > 0$ esetén), tehát számlálójának is pozitívnak kell lennie, hogy valós sebességet kapjunk. Ha r páratlan, akkor a (4.3.33) számlálója mindenféleképpen pozitív. Ha

$$\tau > \tau_{min} \simeq \sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{\frac{\widetilde{\tau}\omega_{2r}^2}{\widetilde{\tau}\omega_{2r} - 1}} \quad (4.3.34)$$

akkor a $2r$ -edik megoldásig a páros megoldásokra is valós sebességet kapunk.

Behelyettesítve a (4.3.33) összefüggésbe a (4.3.32) eredményeket belátható, hogy

$$V < \sqrt{\frac{l \left(g\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_1 - \left(g + \frac{h\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_1^2}{\tau^2} \right) \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_1) \right)}{(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_1 - \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_1))\text{tg}\kappa}} = \sqrt{\frac{gl + 3,60334 \frac{h}{\tau^2} l}{\text{tg}\kappa}} \quad (4.3.35)$$

sebesség esetén a stabilitás határát szemléltető görbe a $P - D$ paramétertéren nem metszi el saját magát, míg

$$\sqrt{\frac{l \left(g\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_i - \left(g + \frac{h\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_i^2}{\tau^2} \right) \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_i) \right)}{(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_i - \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_i))\text{tg}\kappa}} \leq V < \sqrt{\frac{l \left(g\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_{i+1} - \left(g + \frac{h\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_{i+1}^2}{\tau^2} \right) \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_{i+1}) \right)}{(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_{i+1} - \sin(\widetilde{\omega}\widetilde{\tau}_{i+1}))\text{tg}\kappa}} \quad (4.3.36)$$

esetén i -szer metszi el, ahol i azon megoldásokat jelöli, amikre valós sebesség adódik.

Ha a görbe többször is metszi magát, akkor is csak a legfelül kialakuló tartomány lehet stabilis.

Emellett megállapítható, hogy ez a spirál balra csavarodik, mivel

$$\frac{d\frac{D}{\tau P}}{d\omega} = \frac{1}{\omega\tau \cos^2(\omega\tau)} - \operatorname{tg}(\omega\tau) \frac{1}{(\omega\tau)^2} \geq 0. \quad (4.3.37)$$

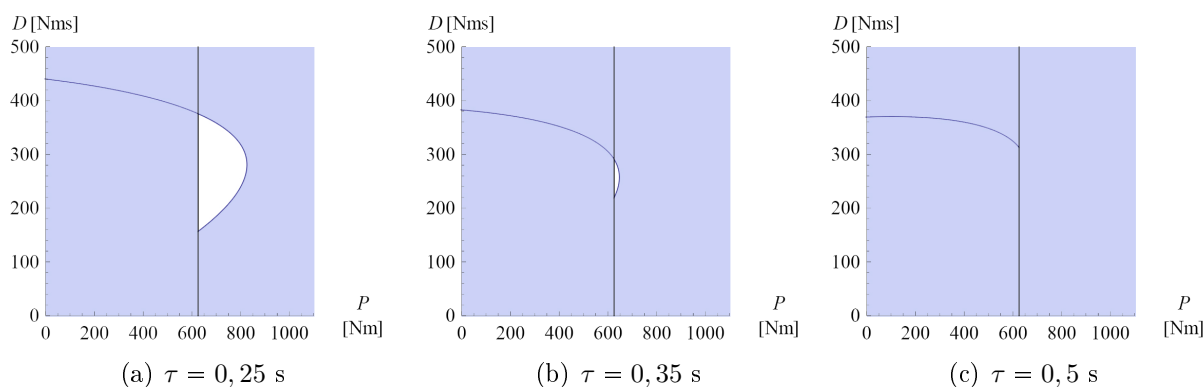
A (4.3.37) egyenlőtlenség azonos átalakításokkal a

$$2\omega\tau \geq \sin(2\omega\tau) \quad (4.3.38)$$

alakra hozható, amely triviálisan igaz.

4.3.5. Kritikus időzésés

A τ időzésés növelésével, minden egyéb változatlansága mellett megfigyelhető, hogy a stabil tartomány bezáródik. Ezen stabilitástérképeken is a szürke színnel jelölt tartomány az instabil, míg a fehérrel jelölt a stabil.



4.5. ábra. A stabilitási térkép az időzésést változtatva

Mivel a statikus stabilitásvesztésből adódó határ egy függőleges egyenes, amin rajta van

a görbe kezdőpontja, ezért ha a görbe $\omega = 0$ -ban már a kisebb P értékek felé indul, akkor nem lesz stabil tartomány. Tehát akkor lehet satbil tartomány, hogyha

$$\left. \frac{d^2 P}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} > 0, \quad (4.3.39)$$

mivel

$$\left. \frac{dP}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 0. \quad (4.3.40)$$

Felhasználva a (4.3.10a) összefüggést

$$\left. \frac{d^2 P}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = mh \left(2h - \tau^2 g - \frac{V^2 \tau^2}{l} \text{tg} \kappa \right). \quad (4.3.41)$$

Felhasználva a (4.3.41) eredményből és a (4.3.39) egyenlőtlenségből kaphatunk az időkézésre egy feltételt. Pozitív időkésést feltételezve:

$$\tau < \tau_{krit} = \sqrt{\frac{2hl}{gl - V^2 \text{tg} \kappa}} \quad (4.3.42)$$

A $\tau_{krit}=0,416284$ [s] $V = 0$ [ms⁻¹] esetén. Megfigyelhető, hogy ha V növekszik, akkor a kritikus időkésés is növekszik, tehát lassabb reakcióidővel is el tudjuk kerülni a stabilitásvesztést, vagyis a sebesség növekedése ebből a szempontból segít.

4.4. Az eredmények értékelése

A numerikus szimulációt ebben az esetben is állandó lépésközü negyedrendű Runge–Kutta-módszerrel végeztük *MatLab* program felhasználásával. Ebben az esetben a kezdeti feltételek

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1(t \leq 0) &= 0[\text{m/s}], \quad \sigma_2(0 < t) = 0 \text{ és } \sigma_2(t = 0) = 0.01[\text{rad/s}], \quad X(t \leq 0) = Vt[\text{m}], \\ Y(t \leq 0) &= 0[\text{m}], \quad \psi(t \leq 0) = 0[\text{rad}], \quad \varphi(t \leq 0) = 0[\text{rad}]. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Ezen modell esetén is a 2.1 és 2.2 táblázatok adatait használtuk a numerikus szimulációkhoz, a $\tau = 0,7$ [s]-os paraméterértékkel kiegészítve.

A 4.2 ábra stabilitási térképein látható, hogy $V = 0$ [m/s] sebesség esetén nem létezik stabil $P - D$ paraméterpár, hiszen $\tau = 0,7$ [s] $> \tau_{krit} = 0,416284$ [s]. Ilyen adatok mellett $V = 1,1278$ [m/s] sebességig nem létezik olyan $P - D$ paraméterpár, amire az egyensúlyi helyzet stabil lehet, ahogy azt a 3. és 4. paraméterpárra elvégzett numerikus szimuláció is mutatja.

Érdemes megfigyelni, hogy $V=1.7$ m/s esetén a $P = -200$ [Nm] és $D = -100$ [Nms], paraméterpároknál stabilis a stacionárius megoldás, míg ugyanezen paraméterpárok nagyobb sebességnél (pl. $V = 3$ [m/s]) instabil egyenes vonalú mozgáshoz vezetnek (4.2(b) ábra). Az ezekhez tartozó numerikus szimulációk a 4.2 ábra 5. és 8. pontjai. A szimuláció eredményét a 4.8 és 4.11 ábra mutatja. A szabályozót nem tartalmazó modellnél a stabil tartományon lévő paraméterpontok nem kerülhetnek át az instabil tartományra a sebesség növelésével, ehhez képest ez az időkésés miatt a szabályozót tartalmazó modellnél előfordul.

Ezen a példán az is megmutatható, hogy negatív P és D érték esetén is lehet stabil az egyensúlyi helyzet, ami látszólag ellentmond a fizikai érzékünknek, mivel így ha van kitérés, abból nagyobb kitérést szeretne csinálni a szabályozó. Ellenben a szabályozó, jelen esetben az ember nem arra reagál, ami épp történik, hanem arra ami τ idővel azelőtt történt, így ezekkel a negatív paraméterekkel is csökkenteni próbálja a pillanatnyi szöghelyzetet, illetve szögsebességet.

Az is megmutatható $V = 1,7$ [m/s] sebesség esetén (4.2 ábra 6. pont), hogy a $P = -400$ [Nm] és $D = -100$ [Nms] szabályozó paraméterek esetén a szögsebesség lecseng, viszont a φ szögkitérés nem a 0 [rad]-hoz áll be, hanem egy ettől különböző φ szöghelyzethez. Tehát ez a pont egy statikusan instabil tartományban fekszik. Ennek megfelelően a gördeszka egy körpályára áll be (4.9 ábra).

Amennyiben egy dinamikusan instabil paramétertartományba esik P és D értéke, akkor a rezgés amplitúdója beállhat egy állandó értékhez (például 4.2 ábra 9. pont, ahol

$V = 3$ [m/s], $P = 500$ [Nm] és $D = 200$ [Nms], a szimulációs eredményeket a 4.12 ábra tartalmazza). Ez az állandó érték nem lehet bármekkora, mert egy bizonyos szöghelyzet esetén, amikor a vizsgált tömegpont az anholonom kényszereket biztosító erők metszéspontja fölé kerül, ami a pillanatnyi sebességpólusa a modellnek, akkor csak a szabályozónak lehet teljesítménye.

Ilyen kitérés esetén a szimuláció szingulárisává válik. Ha megfigyeljük a dinamika alaptételével levezetett megoldás (2.4.36b) egyenletét, akkor abban látható, hogy ha az első tagja 0-ra változik, akkor ez az egyenlet teljesül, így információ a deriváltakra ebből nem nyerhető. Mivel az Appell–Gibbs-módszerrel levezetett egyenletek az előbbiekkal ekvivalensek, ezért ennél a szöghelyzetnél ezen egyenletekben is szingularitás található. Ez a szöghelyzet felírható az előbb meggondolt fizikai képből, illetve a (2.4.36b) egyenletből is, mindkettő módszer esetén

$$\varphi_{krit} = \arcsin \sqrt{\frac{l}{htg\kappa}} = 0,507276[\text{rad}] = 29,0648[^\circ]. \quad (4.4.2)$$

Ez megfigyelhető a $V = 2,5$ [m/s], $P = -2000$ [Nm] és $D = -100$ [Nms] (4.2 ábra 7. pont) paraméterek választása mellett (szimulációs eredmények: 4.10 ábra).

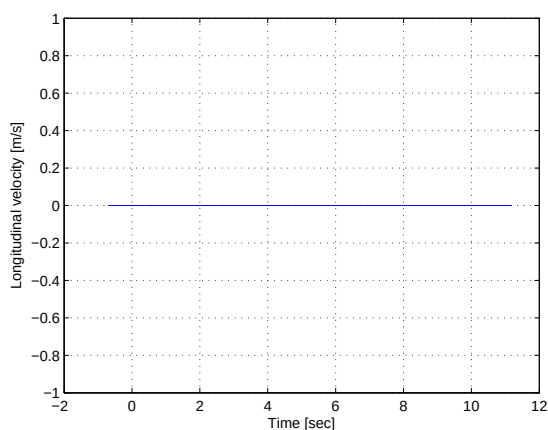
Abban az esetben, ha nézzük a $V = 3$ [m/s] sebességhez tartozó stabilitási diagramot (4.2(e) ábra), látható, hogy a görbe a $P = 1210$ [Nm] és $D = -75$ [Nms] (4.2 ábra 10. pont) paraméterértékek közelében átmetszi saját magát, tehát ugyanahhoz a P – D értékpárhoz két darab ω rezgési frekvencia tartozik. Ennek megfelelően ezen paraméterértékekhez tartozó szimulációban két frekvencia is megjelenik. Hasonlót tapasztalhatunk instabil paraméterpár esetén (4.2 11. pont). Leolvasható az 4.13 ábráról, amely a Fourier transzformáltjait is mutatja a szimulált mennyiségeknek, hogy a megjelölt frekvenciák

$$f_{sz1} = 0,65 \text{ [Hz]} \text{ és } f_{sz2} = 1,32 \text{ [Hz]}, \quad (4.4.3)$$

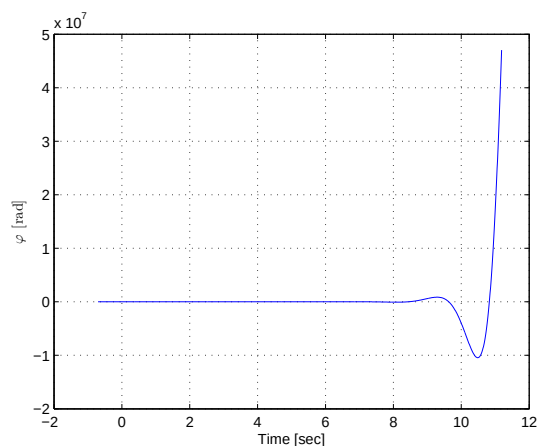
ezek numerikusan meghatározhatóak a (4.3.10) egyenletek segítségével is, így

$$f_{e1} = 0,656511 \text{ [Hz]} \text{ és } f_{e2} = 1,32577 \text{ [Hz]}. \quad (4.4.4)$$

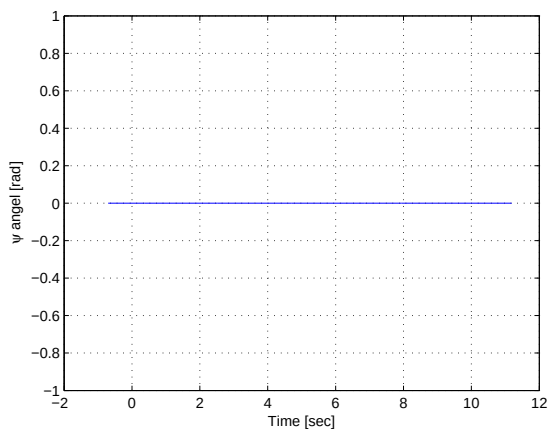
Látható, hogy a (4.4.3) és (4.4.4) eredmények közel vannak egymáshoz, ez visszaigazolja a feltételezéseket.



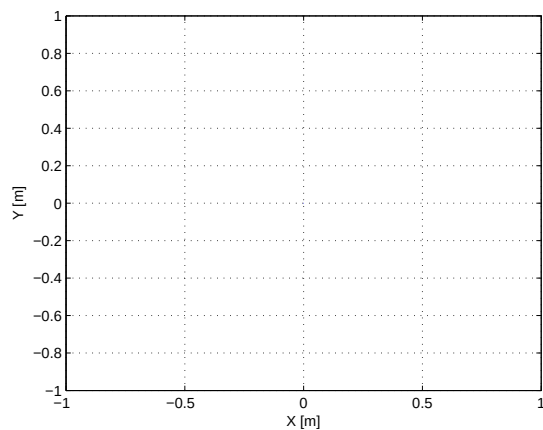
(a) $\sigma_1(t)$



(b) $\varphi(t)$

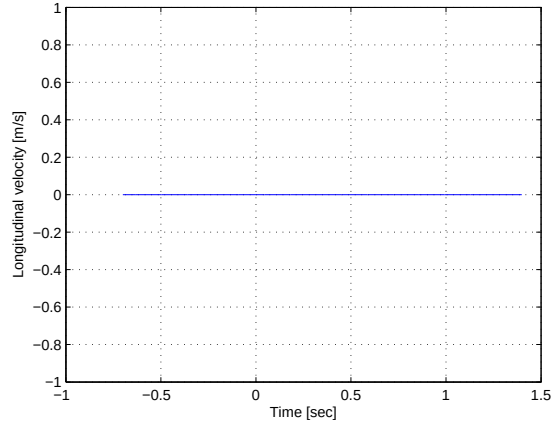
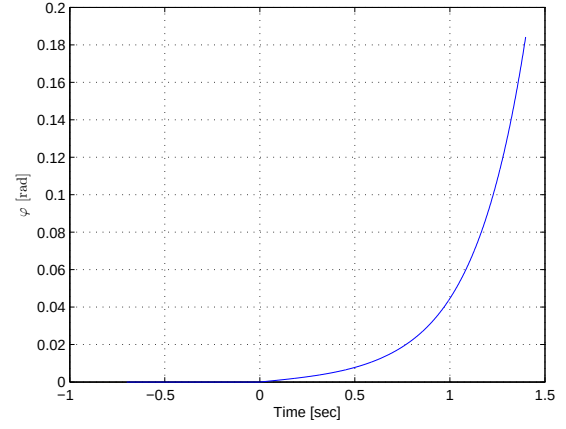
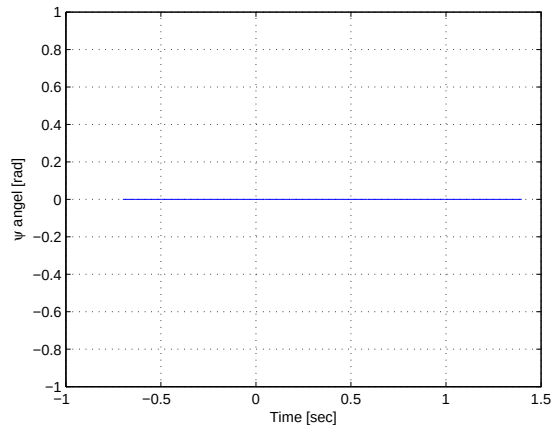
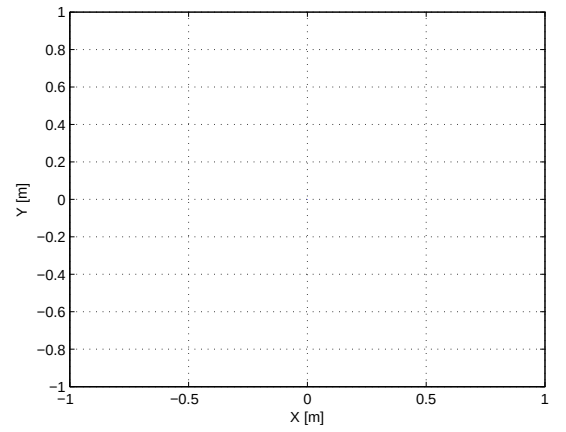


(c) $\psi(t)$

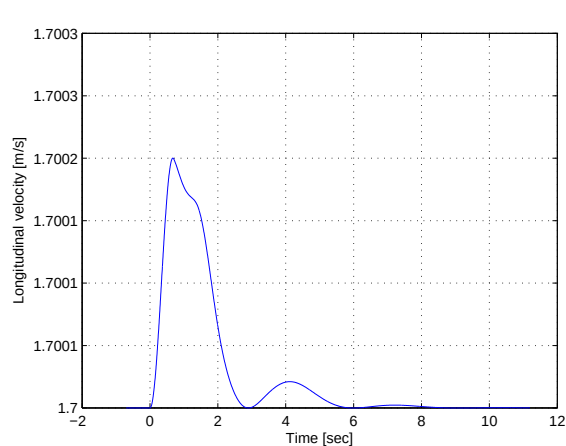
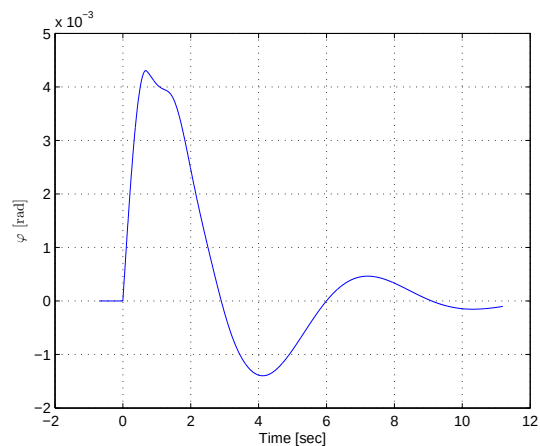
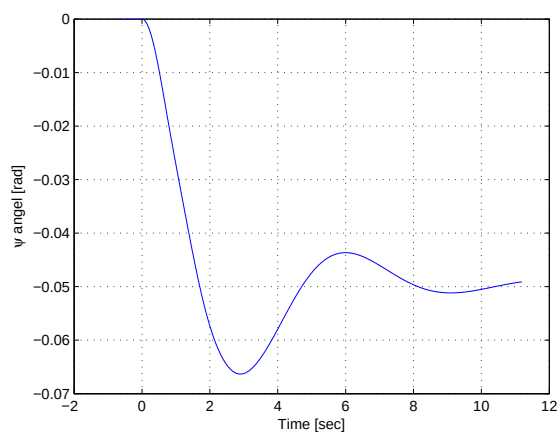
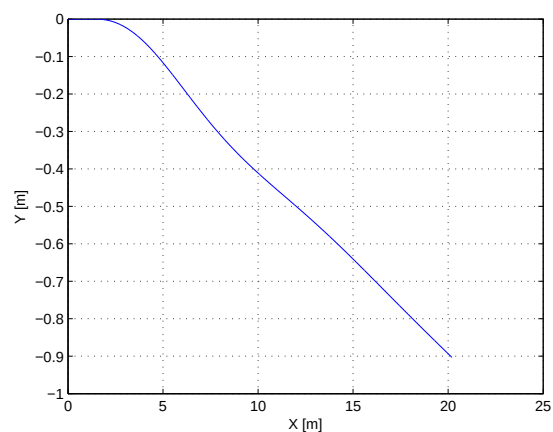


(d) $Y(X)$

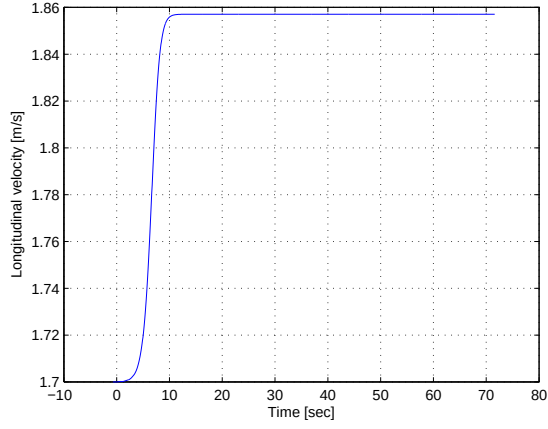
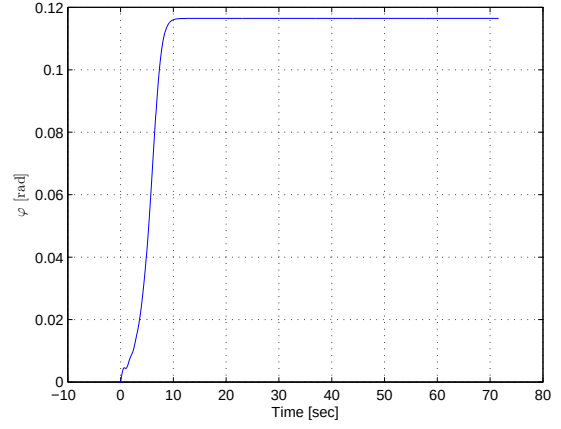
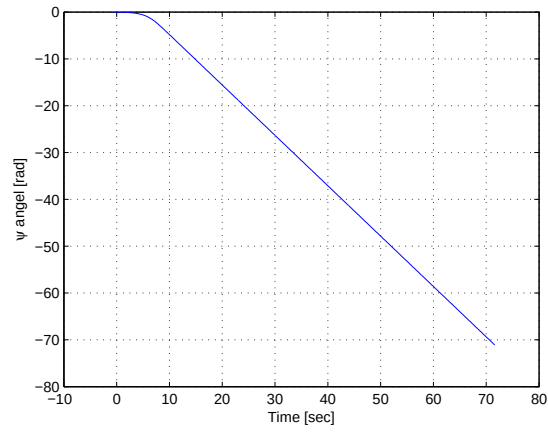
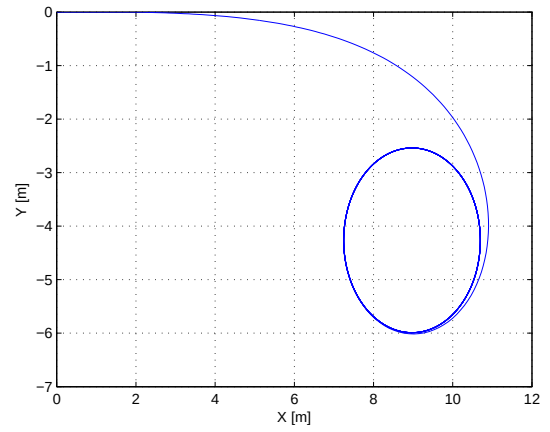
4.6. ábra. 3. ponthoz tartozó szimuláció ($V=0 \text{ [m/s]}$, $P=1500 \text{ [Nm]}$ és $D=500 \text{ [Nms]}$)

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

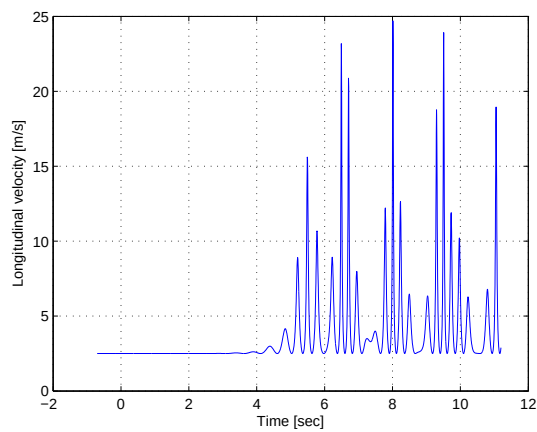
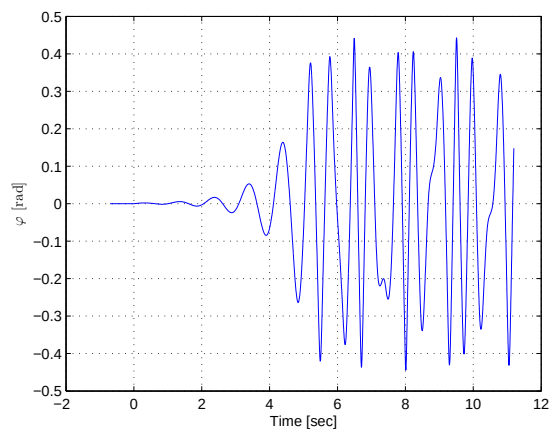
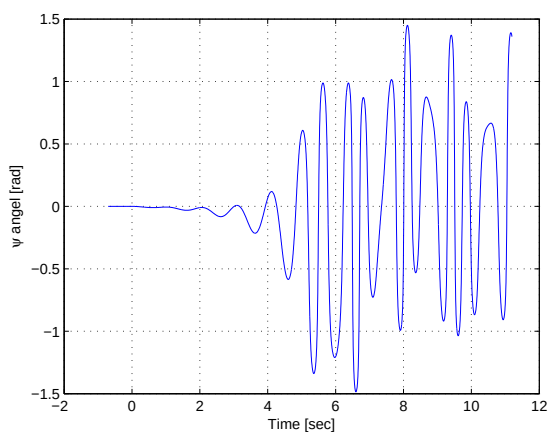
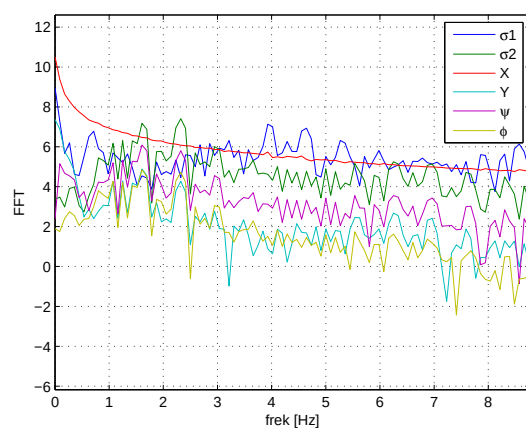
4.7. ábra. 4. ponthoz tartozó szimuláció ($V=0$ [m/s], $P=-1000$ [Nm] és $D=50$ [Nms])

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

4.8. ábra. 5. ponthoz tartozó szimuláció ($V=1,7$ [m/s], $P=-200$ [Nm] és $D=-100$ [Nms])

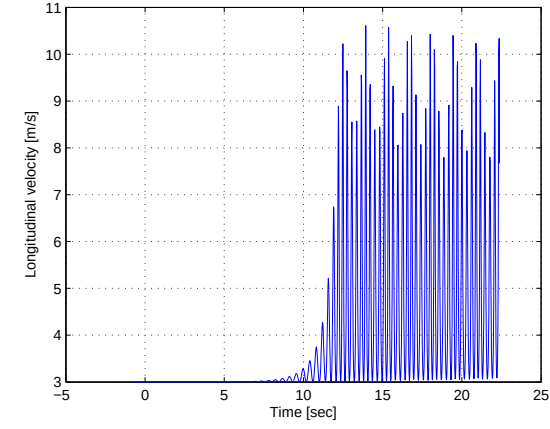
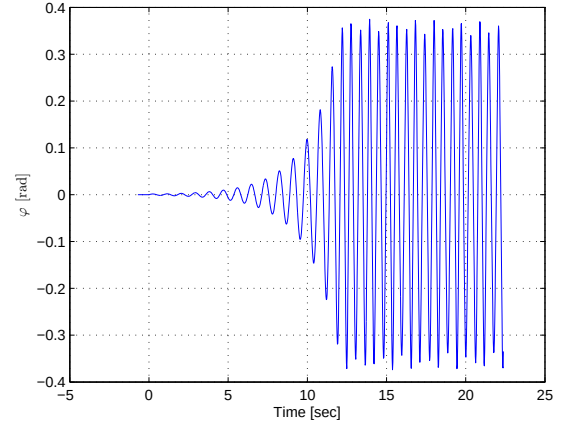
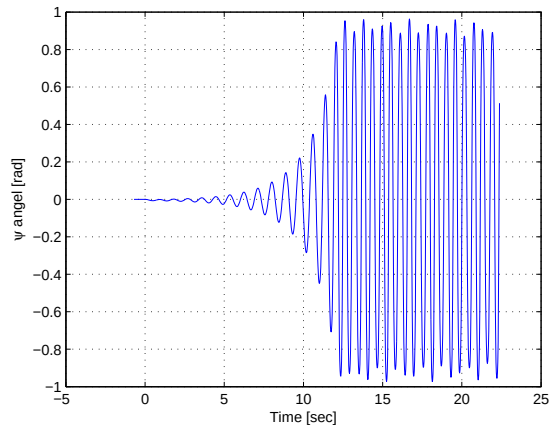
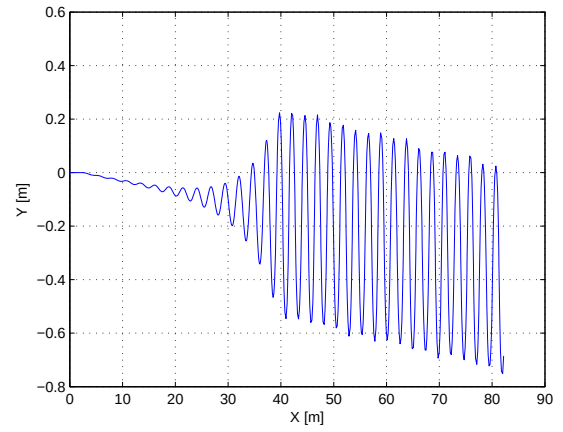
(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

4.9. ábra. 6. ponthoz tartozó szimuláció ($V=1,7$ [m/s], $P=-400$ [Nm] és $D=-100$ [Nms])

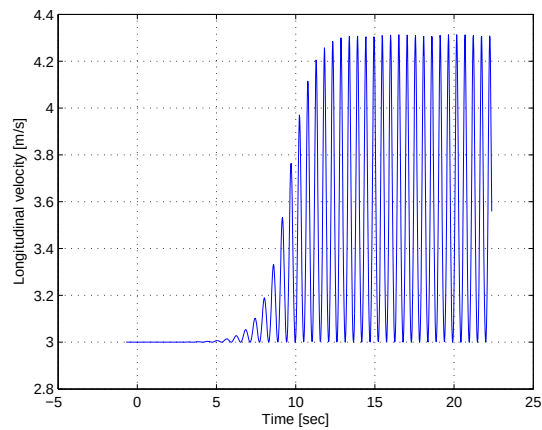
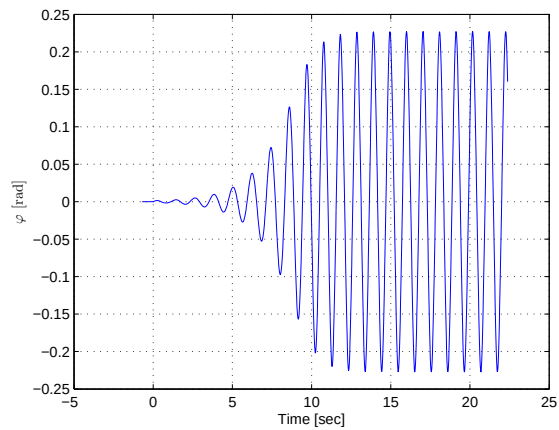
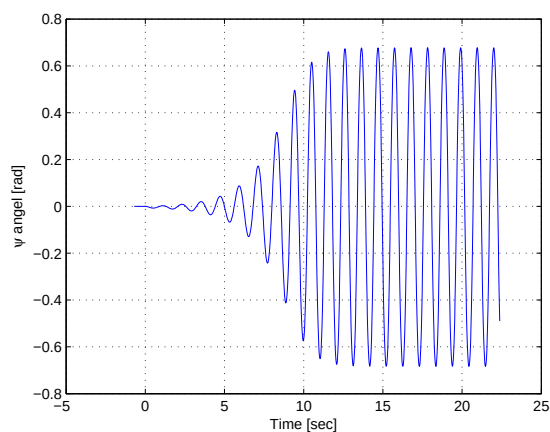
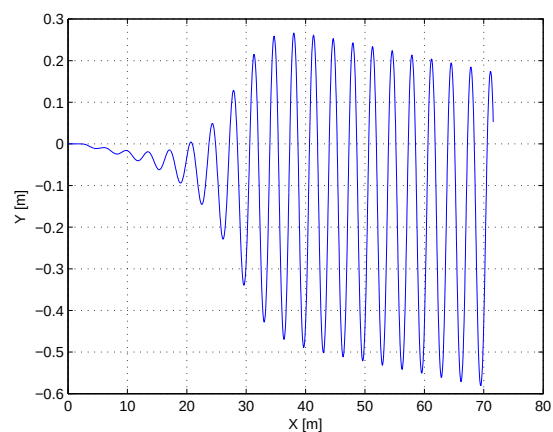
(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ 

(d) FFT

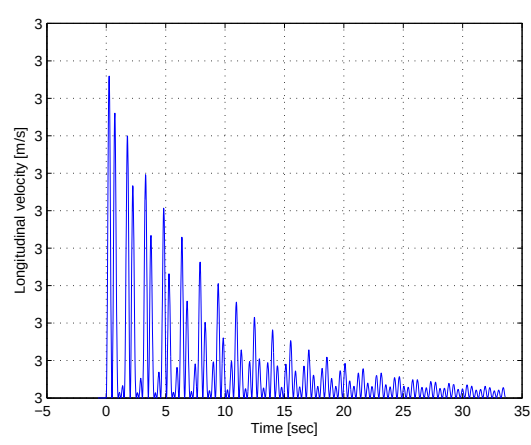
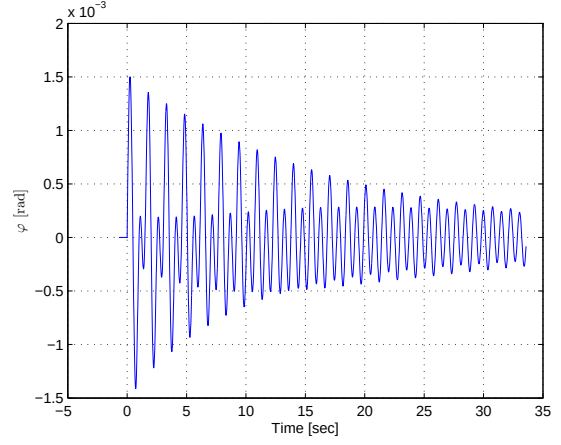
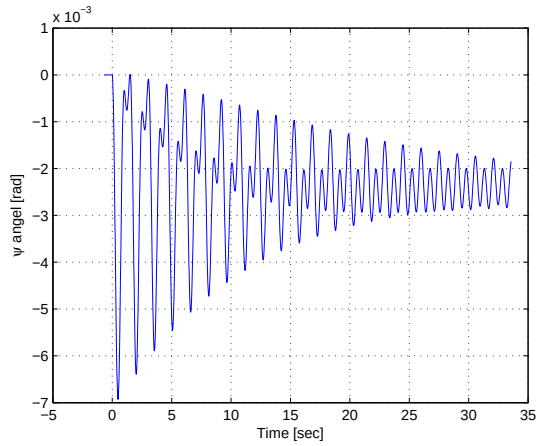
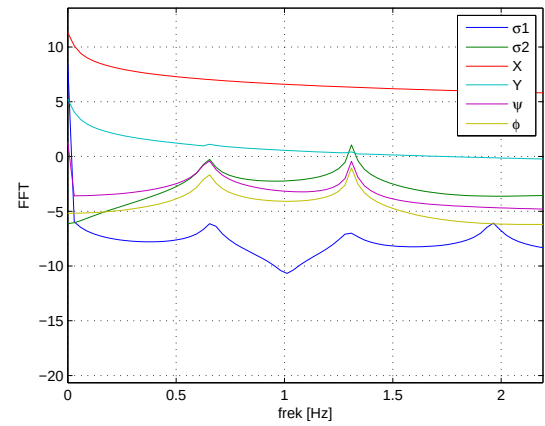
4.10. ábra. 7. ponthoz tartozó szimuláció ($V=2,5$ [m/s], $P=-2000$ [Nm] és $D=-100$ [Nms])

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

4.11. ábra. 8. ponthoz tartozó szimuláció ($V=3$ [m/s], $P=-200$ [Nm] és $D=-100$ [Nms])

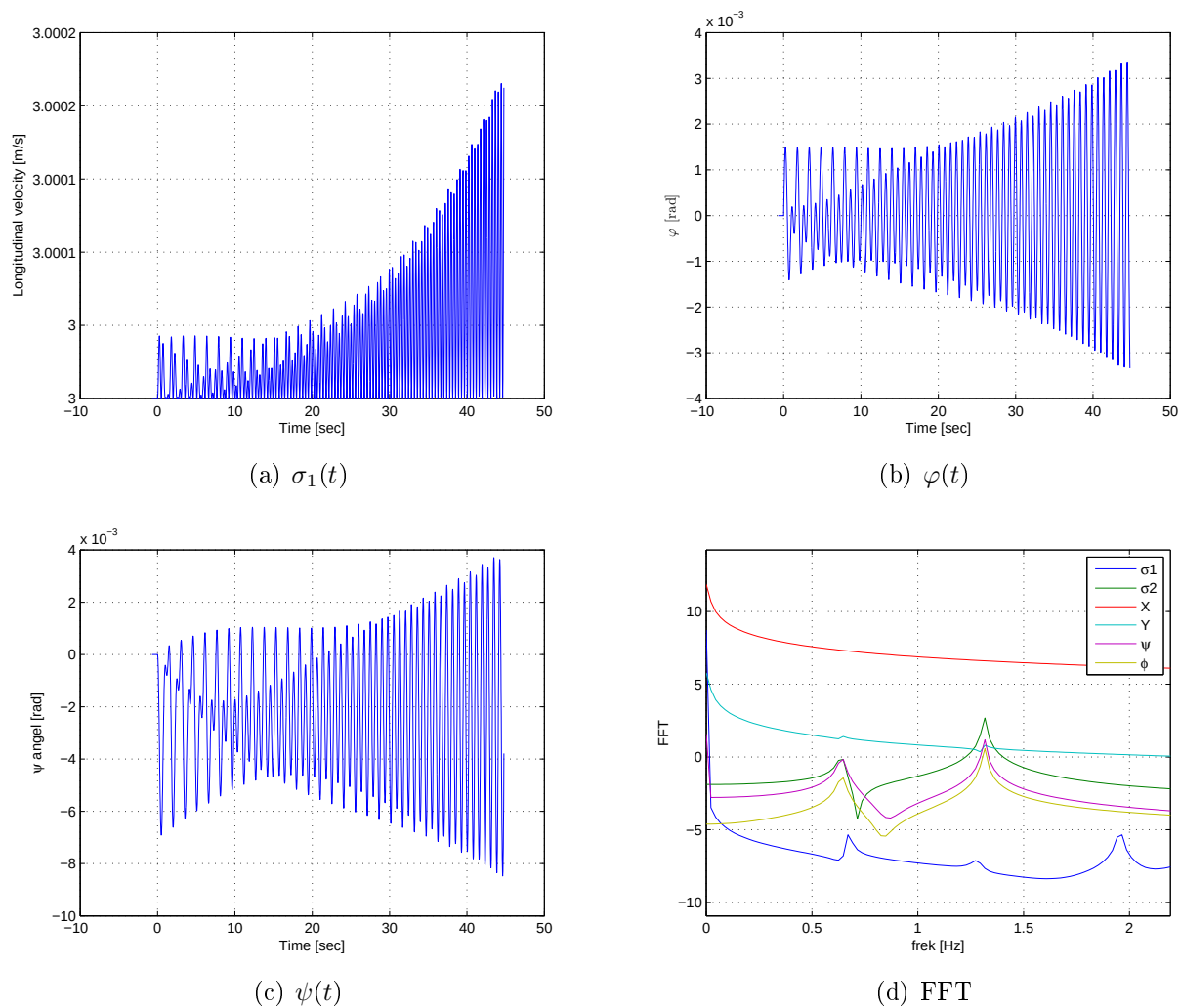
(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ (d) $Y(X)$

4.12. ábra. 9. ponthoz tartozó szimuláció ($V=3$ [m/s], $P=500$ [Nm] és $D=200$ [Nms])

(a) $\sigma_1(t)$ (b) $\varphi(t)$ (c) $\psi(t)$ 

(d) FFT

4.13. ábra. 10. ponthoz tartozó szimuláció ($V=3$ [m/s], $P=1210$ [Nm] és $D=-75$ [Nms])



4.14. ábra. 11. ponthoz tartozó szimuláció ($V=3$ [m/s], $P=1250$ [Nm] és $D=-85$ [Nms])

5. Összefoglalás

Ahogy az a bevezetőben említésre került, a világhálón számtalan videó található, amiben gördeszkások bizonyos sebesség felett elesnek [7] [8] [9]. Ezt maradéktalanul egyik modell segítségével sem sikerült belátni.

Az első modell, amely a gördeszkást úgy modellezi, hogy az rábízta magát a deszkára, mereven áll rajta, és külön nem szabályozza az egyenes vonalú egyenletes mozgást. Ezen az alapon felépített mechanikai modell vizsgálata során arra az eredményre jutottunk, hogy nagyobb sebességnél a gördeszka stabilabb. Ez a kerékpár segítségével magyarázható, ami a hétköznapiakban sokat használt közlekedési eszköz. Hiszen, ha felülünk a kerékpárra, azt kis sebességnél szinte alig, vagy egyáltalán nem tudjuk egyensúlyozni, míg ha megyünk vele, akkor akár a kormányt el is engedhetjük, és a bicikli akkor sem fog eldőlni.

A gördeszkánál is hasonló jelenség játszódik le. Amennyiben álló helyzetben rajta állunk, folyamatosan figyelniünk kell arra, hogy a deszka ne billenjen felre. A kerékpáros példa segítségével könnyen elképzelhető, hogy ha gurulunk, akkor ez már nem okoz akkora nehézséget. Ez azonban nem magyarázza a fent említett videókban fellépő rezgéses stabilitásvesztést.

Ezen dolgozatban később tárgyalt mechanikai modell - amely szabályozókört is tartalmaz, illetve az ember reflexidejét is modellezi - esetén választható olyan szabályozó paraméterpár, mely esetén rezgéses stabilitásvesztés lép fel. Viszont erről a modellenről sem mondható el, hogy létezne egy olyan sebesség, amelynél nagyobb sebességekre nem lehet olyan szabályozó paramétereket választani, hogy a modell stabil legyen. Tehát amennyiben létezik olyan sebesség, amire a modell lehet stabil, akkor ennél nagyobb tetszőleges sebesség esetén mindig lesz olyan paraméterpár, melyre a modell szintén stabil.

Viszont, ha kijelölünk egy paraméterpárt, akkor arról nem mondható el, hogy stabil maradna tetszőlegesen nagy sebességre. Előfordulhat olyan is, hogy ez a stabil paraméterpár csak úgy állítható elő, hogy vagy a P vagy a D paraméter negatív.

Tehát a kezdetben megfelelő pozitív P és D paraméterek helyett a sebesség növekedésével

nemcsak ezeken a paramétereken kell változtatni, hanem át kell menni negatív tartományba is. Amennyiben az emberi szabályozás nem eléggé adaptív ehhez, akkor nem tudja megvalósítani ezen paraméterváltoztatásokat.

Ezenkívül, ahogyan azt az első modell is mutatja, lenne egy másik lehetősége is a gördeszkásnak arra, hogy nagy sebességnél se essen le a deszkáról. Amennyiben bemerevítené a lábát a gördeszkás – tehát rábízná magát a deszkára úgy, hogy az őt is egyensúlyozza –, akkor nagy sebességnél sem lépne fel az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilitásvesztése. Ez nem csak az első modellen figyelhető meg, hanem a másodikon is. Hiszen bizonyos sebességtől a $P = 0$ és $D = 0$ ponton mindig áthalad a stabilitás határát jelző görbe. Itt mindig van esély a gördeszkát Ljapunov értelemben stabilan tartani. Ebben az esetben a szabályozás kikapcsolása megegyezik a $P = 0$ és $D = 0$ paraméterek választásával.

Hivatkozások

- [1] Kooijman, J. D. G., et al.: 2011, A Bicycle Can Be Self-Stable Without Gyroscopic or Caster Effects, *Science* 332, 339 (2011).
 - [2] Kremnev, A. V., Kuleshov, A. S.: 2008, Dynamics and simulation of the simplest model of skateboard, *ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia, June, 30 - July, 4 2008*.
 - [3] szabadban.hu: A gördeszkázás története - A világot jelentő kerekek [http : //www.szabadban.hu/cikk.php?aid = d0c67e50cee0d22f53b4840&cat = 58](http://www.szabadban.hu/cikk.php?aid=d0c67e50cee0d22f53b4840&cat=58) (2011)
 - [4] Hubbard, M.: 1979, Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard, *Journal of Applied Mechanics* (1979).
 - [5] Gantmacher, F.: 1975, *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR Publishers, Moscow.
 - [6] REBEL: [http : //www.rebelsports.de/produkte/skateboards/extreme – alliance/](http://www.rebelsports.de/produkte/skateboards/extreme-alliance/)
 - [7] YouTube: skateboarding over 40mph death [http : //www.youtube.com/watch?v = zrgTeqofYfQ&feature = related](http://www.youtube.com/watch?v=zrgTeqofYfQ&feature=related) (2012.11.06)
 - [8] YouTube: How not to go down the big hill. [http : //www.youtube.com/watch?v = adQbAd0UVM&feature = related](http://www.youtube.com/watch?v=adQbAd0UVM&feature=related) (2012.11.06)
 - [9] YouTube: Fail like a boss - EPIC [http : //www.youtube.com/watch?v = 5nTAn6EflE](http://www.youtube.com/watch?v=5nTAn6EflE) (2012.11.06)
-