



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



Műszaki Mechanikai Tanszék

Megfogó egység mechanikai modellezése - a szingularitást kihasználva

Szerzők:

Hidas Anna

Hallgató, II. évf.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Mátyás Dóra

Hallgató, II. évf.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Konzulensek:

Zelei Ambrus

Tudományos segédmunkatárs

Bencsik László

Doktorandusz

Tudományos Diákköri Dolgozat

2012. október

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1-2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Az ACROBOTER platform	1
1.2. A jelenlegi konstrukció problémájának bemutatása	2
1.3. Az új koncepció	2
1.4. A dolgozat célkitűzése	3
2. Rugalmasság és a szingularitás hatása	4
2.1. Egy gyorszorító működésének elemzése méréssel	4
3. Mechanikai modellezés	10
3.1. Természetes koordináták	10
3.2. AMF-6830 típusú ipari gyorszorító mechanizmus modellezése természetes koordináták használatával	13
3.3. Az ACROBOTER mászóegység modellezése természetes koordináták használatával	15
4. A szükséges számítási módszerek	18
4.1. Egyensúlyi helyzet keresése	18
4.2. Newton-Raphson módszer	19
4.3. Reakcióerők számítása a Lagrange-multiplikátorokból	21
4.3.1. Példa: konzolos tartó	23
4.3.2. Példa: kettősinga	24
5. Numerikus számítások	26
5.1. A gyorszorító	26
5.2. A mászóegység kapaszkodó-mechanizmusa	28
6. Összefoglalás	32
Irodalomjegyzék	33

Ábrák jegyzéke

1.1. Az ACROBOTER koncepció	1
1.2. A megépített konstrukció	2
1.3. Honda Asimo robot	3
2.1. Gyorsszorító	4
2.2. Mérési összeállítás	5
2.3. A kifejtett erő a beszorított darab vastagságának függvényében (balra a gumirugó nélkül mért eredmények, jobbra a rugóval mért eredmények láthatók)	6
2.4. A szorítórúd	7
2.5. A szorítórúd lehajlása	7
2.6. A keresztmetszet	8
3.1. Négycsuklós mechanizmus a mászóegységben	10
3.2. Szögkényszer megadása	12
3.3. Területkényszerezés	12
3.4. A vizsgált ipari gyorszorító mechanikai modellje	13
3.5. Az ACROBOTER mechanikai modellje	15
4.1. Kényszerek köregyenlettel (helytelenül) való megadása	21
4.2. Konzolos tartó	23
4.3. Kettősinga	24
5.1. A beviteli és a szorítóerő az iterációs lépések függvényében	27
5.2. A szorítóerő a bevitt erő függvényében	27
5.3. Az aktuátorerő és a rugóerő az iterációs lépések függvényében	28
5.4. A szorítóerő az aktuátorerő függvényében	29
5.5. Normáligenybevételi függvények	30
5.6. Hajlítóigenybevételi függvény	31
5.7. A hajlítóigenyomatéki függvény maximuma	31

Táblázatok jegyzéke

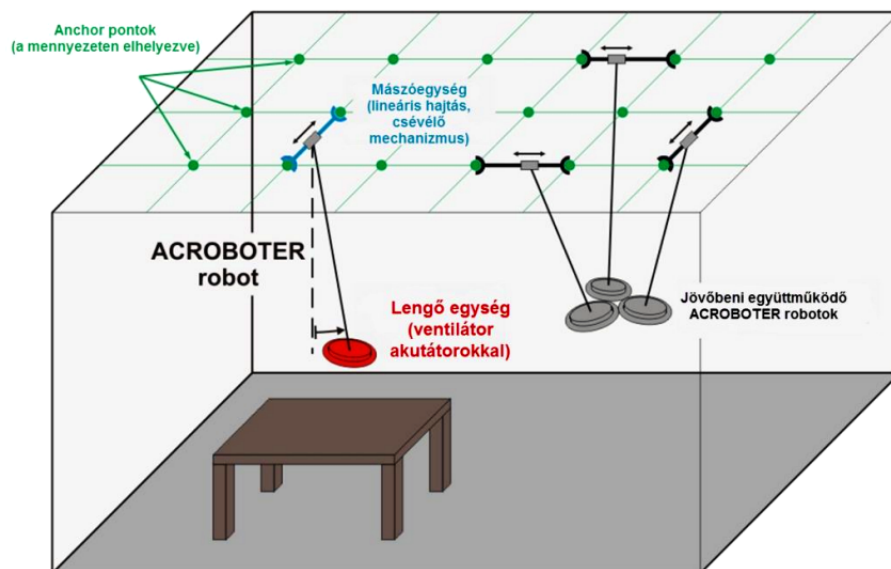
2.1. A rugalmas elem nélkül mért eredmények	5
2.2. Rugalmas elemmel mért eredmények	6
2.3. A rugalmas elem nélkül mért eredmények és az elméleti szorítóerő . . .	8
2.4. A rugalmas elemmel mért eredmények és az elméleti szorítóerő	9

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Az ACROBOTER platform

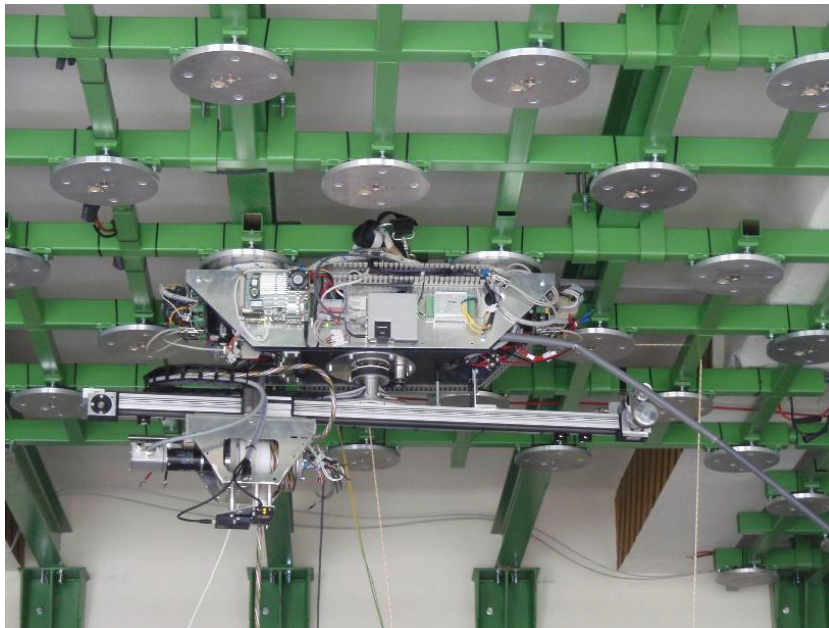
Az ACROBOTER (Autonomous Collaborative Robots to Swing and Work in Everyday EnviRonment) egy EU projekt (IST-2006-045530) keretében fejlesztett új típusú beltéri szervizrobot, mely az eddigi háztartási célú robotoktól eltérő módon valódi háromdimenziós mozgásra képes, így alkalmas arra, hogy megkerülje az épületek belső tereiben található akadályokat, gyorsasága és hatékonysága révén a jövő meghatározó háztartási berendezésévé válhat. Alapgondolata, hogy egy épületben a legnagyobb szabad felület a mennyezet. Ezt kihasználva, a rendszer egy, a mennyezetre szerelt rácsozaton, a rácspontokhoz (anchor pontok) való csatlakozási pont megváltoztatásával mozog. A mászóegységhez kapcsolódik a csévélnélhető kötélén függő lengő egység, melynek vízszintes pozícióját, ventilátorok szabályozzák, és feladata kisebb tárgyak vagy más kisebb mobilitású (pl. földön mozgó) szervizrobotok három dimenzióban történő mozgatása. Az 1.1 ábrán a mászóegység mozgása látható.



1.1. ábra. Az ACROBOTER koncepció

1.2. A jelenlegi konstrukció problémájának bemutatása

A jelenlegi mechanizmus hibája, hogy a mászóegység tácsákhoz való rögzítése nehézkes. Továbbá, mivel becsavarómechanizmusok segítségével rögzíti magát, nagyon lassan változtat pozíciót. Mivel a csavarok becsavarása nagyfokú pontosságot igényel, fontos a megfelelő szög és pozíció megtalálása. Azonban a gyártási és szerelési hibák, valamint a súlyból adódó lehajlás miatt ez nehezen kivitelezhető, és a pontatlanság befeszüléshez vezet. Így a szerkezet biztonságos működése nem szavatolható.



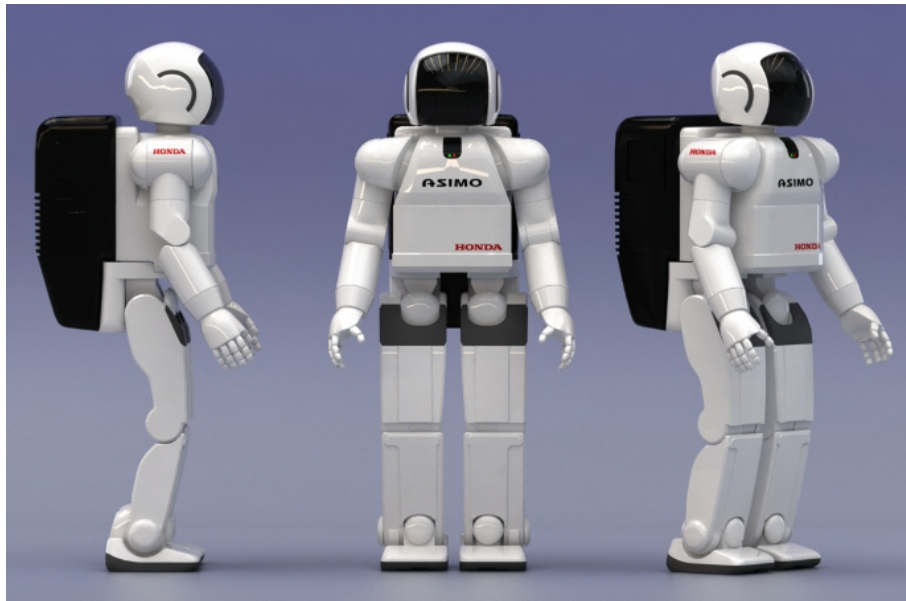
1.2. ábra. A megépített konstrukció

1.3. Az új koncepció

A mászóegység megfogó mechanizmusának koncepcionális tervezése egy korábbi munkában már megkezdődött [1]. Az újratervezett megfogó egység a gyorsleszorítók elvén működik, ami az ipar különböző területein használatos. Például hegesztés során, az alkatrészek összefogására, vagy asztalosműhelyekben a bútorok összeszorításához alkalmazzák. Ez az eszköz a kinematikai szingularitást használja ki, ami általában nehezen írható le - és ezért a legtöbb esetben törekszünk arra, hogy ezt elkerüljük, mind a matematikai leírásban, sok esetben pedig a szerkezet megtervezésekor is.

Ismert azonban, hogy az élet több területén is alkalmazzuk a szingularitást. Többek között hosszú állás során: ha a lábunkat több test dinamikai rendszerként képzeljük el, ahol a bokánkat, a térdünket és a csípőízületünket csuklónak tekintjük, akkor láthatjuk, hogy álláskor a térdünket szingularitásba helyezzük, testünkkel pedig minimális energiabefektetéssel egyensúlyozunk. Ily módon lényegében erőfeszítés és energiabefektetés nélkül vagyunk képesek állni, szemben a Honda Asimo robottal (1.3 ábra), ami a szingularitás elkerülése miatt nem nyújtja ki soha teljesen a lábát (lásd: (1.3 ábra)), így

folyamatosan erőt kell kifejteniük a csuklókbán lévő motoroknak, ami komoly energiabefektetésbe kerül. Az emberi álláshoz hasonlóan egy gyorszorító berendezés esetén is, a szingularitásnak köszönhetően viszonylag kis aktuátorerő szükséges a megfogáshoz, továbbá ha a szerkezet elérte a szinguláris helyzetet, a szorításhoz már nem szükséges energiabevitel, mivel a kapcsolat alakkal záró lesz. Ez egy rögzítőberendezés esetében nagyfokú biztonságot garantál, még áramkimaradás esetén is, ami követelmény egy olyan környezetben, ahol emberek tartózkodnak.



1.3. ábra. Honda Asimo robot

1.4. A dolgozat célkitűzése

A dolgozat célja, hogy a [1]-ben bemutatott CAD modell alapján mechanikai modellt készítsünk, és egy eljárást dolgozzunk ki, melynek segítségével szilárdságilag és a működés szempontjából ellenőrizhető és optimalizálható a megtervezett koncepció. Ezenkívül célul tűztük ki a megtervezett szerkezetet hajtó aktuátor kiválasztásához szükséges adatok becslését.

Továbbá vizsgáljuk a hasonló mechanikai rendszereket, hogy a kidolgozott eljárással kapcsolatban általános következtetéseket vonhassunk le. A dolgozat célja, hogy a levezetett módszerek alkalmazhatók legyenek hasonló zárt láncú, szingularitást felhasználó berendezések méretezésénél, tervezésénél.

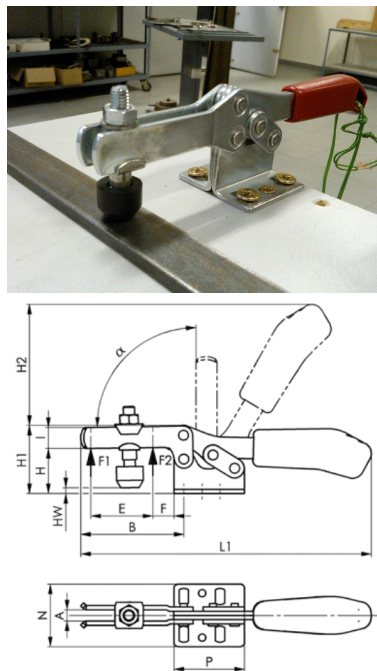
2. fejezet

Rugalmasság és a szingularitás hatása

2.1. Egy gyorszorító működésének elemzése méréssel

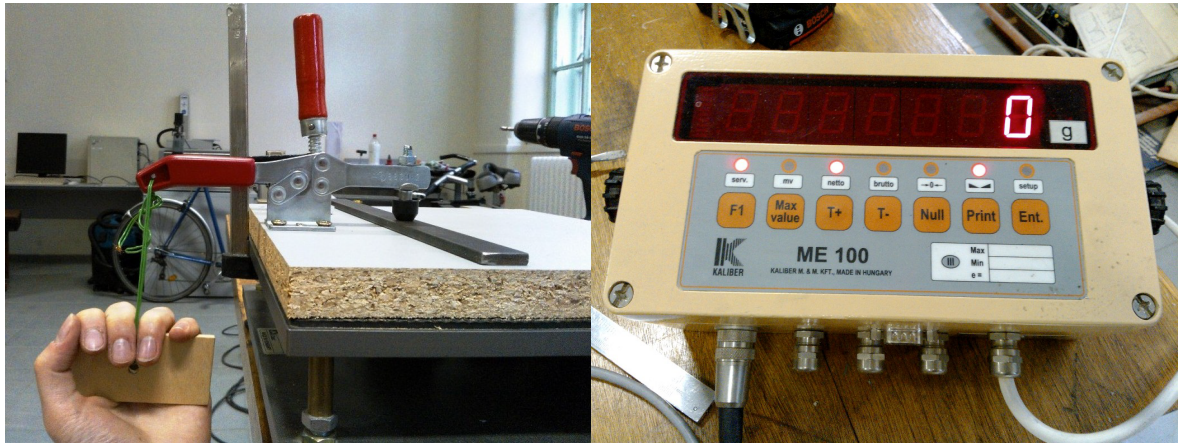
Az ipari gyorszorítók esetében fontos a rendszer rugalmassága, mivel a szingularitáson való áthajtás a mechanizmus rugalmassága miatt kivitelezhető. Az ipari gyakorlatban, egy a rendszer többi eleméhez képest nagyságrenddel puhább gumirugót alkalmaznak a szorítópofára szerelve. Az ACROBOTER esetében is fokozottan figyelembe kell ezt venni, hiszen a beépített rugalmas elemnek kell kompenzálni a szerelési hibákat és a mászóegység karjának lehajlását a rendszer károsodása nélkül.

Ezen fejezet célja, hogy egy ipari gyorszorító esetében megvizsgáljuk a rendszer rugalmasságát, annak modellezési lehetőségét, és a gumirugó merevség változásának hatását. A méréseket a 2.1 ábrán látható AMF-6830-as típusú ipari gyorszorítón végeztük el.



2.1. ábra. Gyorszorító

A mérési összeállítást a 2.2 ábra szemlélteti. A gyorszorító egy bútorlapra került felerősítésre, majd a bútorlapot kéziszorítók segítségével rögzítettük a 2.2 ábrán látható mérleg mérleglapjához. A gyorszorító úgy lett beállítva, hogy abban az esetben, ha nem helyezünk el munkadarabot a bútorlap és a gyorszorító szorítófeje közé, akkor a szinguláris helyzeten még éppen alakváltozás nélkül áthajtható legyen. Ebben az összeállításban a különböző vastagságú munkadarabok leszorítása esetén a rendszernek pontosan akkora alakváltozást kell szenvednie, amekkora a leszorított darab vastagsága. A szorítóerőt a szorítócsavar fejti ki, aminek a végén nagy rugalmasságú elemet helyeztünk el. A mérést a rugalmas elemmel, illetve anélkül is megismételtük. A mérés során megvizsgáltuk, hogy különböző vastagságú leszorítandó munkadarabok



2.2. ábra. Mérési összeállítás

esetén mekkora erővel hozható létre a szorítás, vagyis mekkora erő szükséges ahhoz, hogy a mechanizmus áthaladjon a szinguláris helyzeten. A 2.2 ábrán látható piros rudat lassan, egyre nagyobb erővel nyomtuk lefelé, miközben figyeltük a mérleg által jelzett tömeget. A mérést minden egyes munkadarab vastagságnál háromszor megismételtük, majd a következőtépén számoltuk a beszorításhoz szükséges erőt:

$$F_{be} = m_{atlag}g[N], \quad (2.1)$$

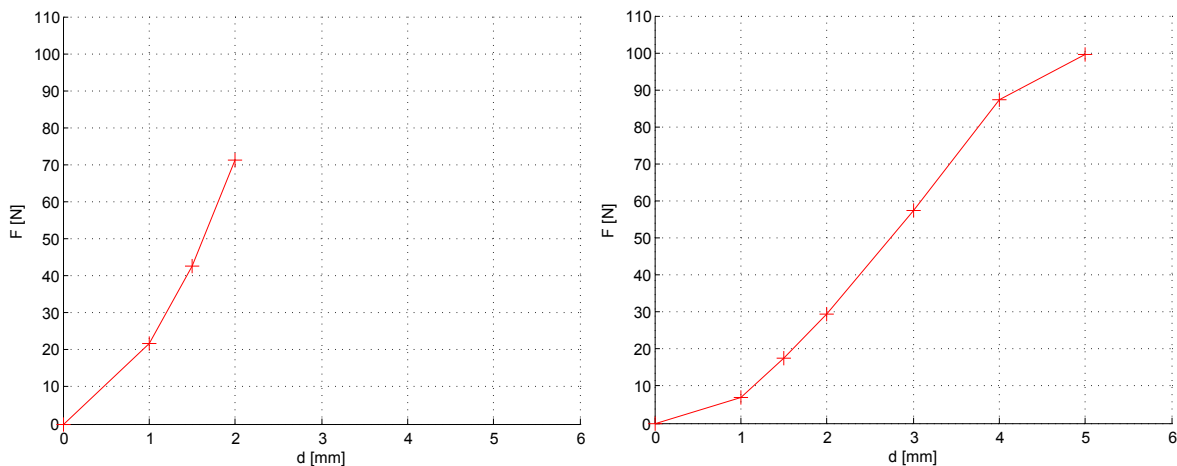
ahol $g = 9,81[\frac{m}{s^2}]$ a gravitációs állandó és $m_{atlag} = 1/3(m_1 + m_2 + m_3)$ a mért tömegek átlaga.

d [mm]	m_1 [g]	m_2 [g]	m_3 [g]	F_{be} [N]
0	0	0	0	0
1	2100	2200	2300	21,6
1,5	4300	4300	4400	42,5
2	7300	7200	7300	71,3

2.1. táblázat. A rugalmas elem nélkül mért eredmények

d [mm]	m_1 [g]	m_2 [g]	m_3 [g]	F_{be} [N]
0	0	0	0	0
1	600	700	800	6,9
1,5	1780	1780	1790	17,5
2	3120	2900	2950	29,3
3	5900	5950	5720	57,5
4	9000	8940	8750	87,3
5	10200	10300	9900	99,4

2.2. táblázat. Rugalmas elemmel mért eredmények

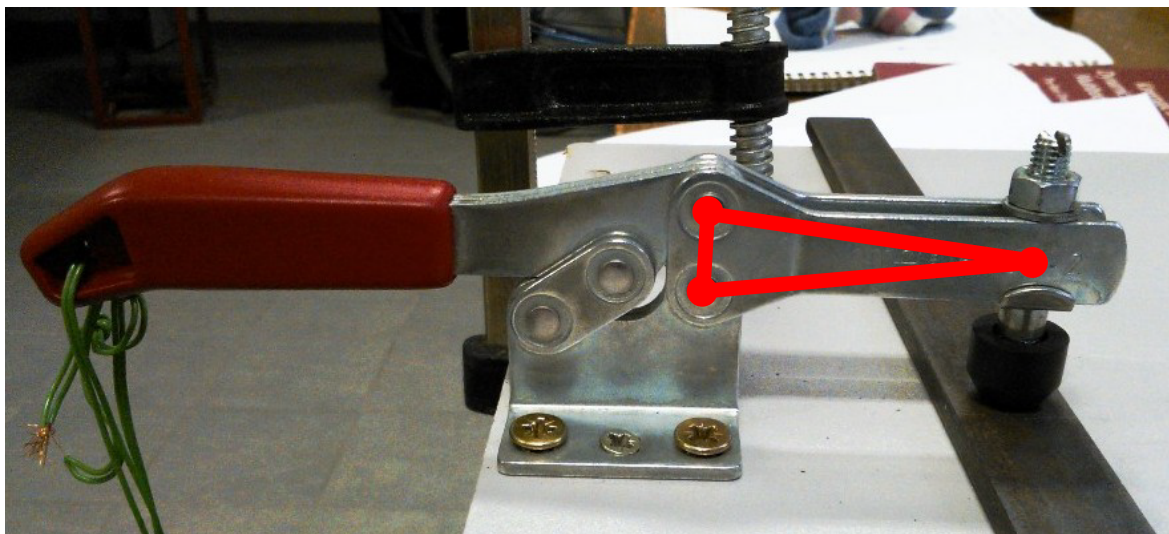


2.3. ábra. A kifejtett erő a beszorított darab vastagságának függvényében (balra a gumirugó nélkül mért eredmények, jobbra a rugóval mért eredmények láthatók)

A 2.3 ábra alapján látható, hogy rugalmasabb rendszer esetén vastagabb darabok kisebb erővel leszoríthatók. A rugalmas elem alkalmazása nélkül 2 mm-nél vastagabb lemezen nem tudtuk elvégezni a vizsgálatot, ugyanis ekkor a mérleg méréshatárát túlléptük volna. Gumirugóval viszont akár 5 mm-ig is növelhető a befogott munkadarab vastagsága, tehát a vizsgálat azt is megmutatja, hogy a rendszerbe épített plusz rugalmasság növeli a rendszer toleranciáját a geometriai eltérésekkel szemben. Ebből arra következtethetünk, hogy az ACROBOTER mászóegységénél a kapaszkodási pontok pozícióhibáira kevésbé lesz érzékeny a megfogórendszer, hogyha a szorítópofákra gumirugót erősítünk.

A gyorsszorító alakváltozása a szinguláris helyzet eléréséig tart. A szinguláris pont elérése előtt kell a legnagyobb erőt kifejtenuünk, de a szinguláris pontban a kifejtett erő ugrásszerűen lecsökken. Ha a rendszer átmegy a szinguláris állapotba, akkor leszorítottuk a munkadarabot. A szorítás csak a piros kar (2.2 ábra) felfelé történő mozgatásával oldható fel. Ugyanígy az mászóegységénél is arra számítottunk, hogy a szorítást csak vezérelt módon, az aktuátorral lehet majd megszüntetni.

Mérésünket számítással is ellenőriztük. A legfontosabb eredmény, hogy számolással igazolhatóan a rozsdamentes acélrudak szorítóerő okozta lehajlása elhanyagolható a csuklóknál létrejövő deformációkhoz képest. A szorítóerő számításához a Castigliano-tételt használjuk fel, oly módon, hogy a szorítókar ismert lehajlásához számoljuk a

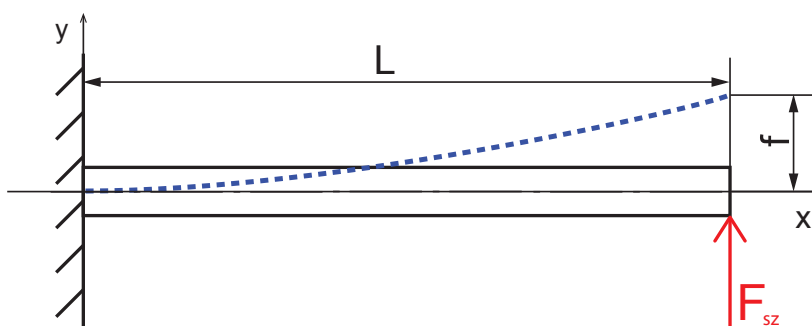


2.4. ábra. A szorítórúd

lehajlást kiváltó erőt. A szorítókart a 2.4 ábrán a piros háromszög jelöli. A kar a szingularitáshoz közeli állapotban befogott tartóként került modellezésre a 2.5 ábrán látható módon. A lehajlás a Castigliano-tétellel:

$$f = \int \frac{M_h(x)}{I_z E} \frac{\partial M_h(x)}{\partial F} dx, \quad (2.2)$$

ahol f a lehajlás, $M_h(x)$ a hajlítónyomatéki igénybevételi függvény, I_z a z-tengelyre vett másodrendű nyomaték, F a vizsgált keresztmetszetben ható aktív erő és E az acél rugalmassági modulusza.



2.5. ábra. A szorítórúd lehajlása

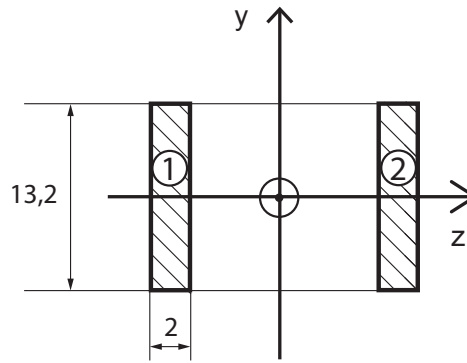
Ebben az esetben:

$$f = \frac{F_{sz} l^3}{3I_z E}, \quad (2.3)$$

ahol f a lehajlás, F_{sz} a szorítóerő, l az szorítórúd hossza, I_z a z-tengelyre vett másodrendű nyomaték, és E az acél rugalmassági modulusza. A 2.3 egyenlet alaján az f lehajlásból meghatározható az F_{sz} szorítóerő:

$$F_{sz} = \frac{3f I_z E}{l^3}. \quad (2.4)$$

Az f lehajlás egyenlő a befogott darab vastagságával, $E = 210 [GPa]$, $l = 60 [mm]$. A z-tengelyre vett másodrendű nyomaték meghatározható:



2.6. ábra. A keresztmetszet

$$I_z = 2I_{z1}. \quad (2.5)$$

A 2.5 egyenletben I_z a teljes keresztmetszet z-tengelyre vett másodrendű nyomatéka. Behelyettesítve a 2.6 ábra alapján: $I_{z1} = 383 [mm^4]$ az (1) rész z-tengelyre vett másodrendű nyomatéka. Az 2.5 összefüggés alapján: $I_z = 766 [mm^4]$. A (2.4) egyenletbe való behelyettesítéssel kiszámítható a az F_{sz} elméleti szorítóerő.

$d [mm]$	$F_{sz} [N]$
0	0
1	2234
1,5	3351
2	4468

2.3. táblázat. A rugalmas elem nélkül mért eredmények és az elméleti szorítóerő

A 2.1 táblázat alapján látható, hogy a ha a modell helyes, akkor a kifejtett erőnél nagyságrendekkel nagyobb szorítóerő érhető el. Ez a mászóegység működésének szempontjából előnyös lenne, azonban tudjuk, hogy a rendszer összalakváltozásának jelentős része a csuklóokban jelenik meg, tehát az itt kiszámolt F_{sz} erőnél kisebb erő hat a valódi szerkezetben. A csuklók deformációja azonban nehezen meghatározható, ezért a szorítóerő a későbbiekben más módszerrel kerül meghatározásra. Ez a tapasztalat fontos lesz továbbá az ACROBOTER megfogó mechanizmusának vizsgálatakor is.

A rugalmas elemmel mért eredmények alapján (2.2 táblázat) látható, hogy kisebb erő kifejtésével vastagabb darabokat is le lehet szorítani, mint gumirugó nélkül. Ez azt jelenti, hogy a rugalmas elem alkalmazásával a rendszer rugalmassága lényegesen nőtt. Mivel az előző példa alapján a szorítórúd lehajlása elhanyagolható, a rugalmas elem deformációjából, a Hooke-törvény (lásd: 2.6 egyenlet) alapján következtethetünk az F_{sz} szorítóerőre, azonban az eredmény ebben az esetben sem pontos, ugyanis a csuklók deformációja továbbra sem kiszámítható. Emiatt a kiszámított szorítóerő ebben az esetben is nagyobb lesz a valóban ható szorítóerőnél.

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.6)$$

$$\frac{F_{sz}}{A_0} = E \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (2.7)$$

$$F_{sz} = E \frac{A_0}{L_0} \Delta L. \quad (2.8)$$

A gumirugó $A_0 = 63,6[mm^2]$ keresztmetszetű, $L_0 = 5[mm]$ magasságú hengerként modellezhető, melynek lehajlása ΔL megegyezik a befogott darab vastagságával. A gumirugó rugalmassági modulusa meghatározható a következő tapasztalati képlet alapján

$$E = \frac{0.0981(56 + 7.62336S)}{0.137505(254 - 2.54S)}, \quad (2.9)$$

ahol $S = 55[\frac{g}{cm^3}]$ egy átlagos szilikongumi Shore keménysége [2]. Behelyettesítés után $E = 2,97[MPa]$ adódik.

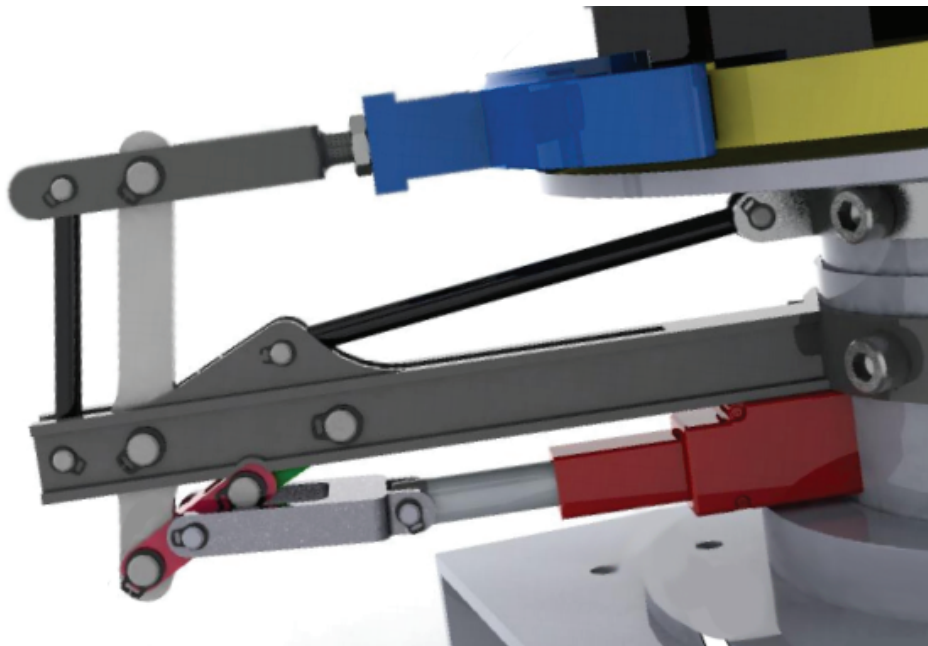
d [mm]	F [N]	F_{sz} [N]
0	0	0
1	6,9	37,8
1,5	17,5	56,7
2	29,3	75,6
3	57,5	113
4	87,3	151
5	99,4	189

2.4. táblázat. A rugalmas elemmel mért eredmények és az elméleti szorítóerő

3. fejezet

Mechanikai modellezés

Az ACROBOTER szervizrobot kapaszkodóegységének esetében a működés szempontjából fontos a szorítóerő ismerete az aktuátorerő függvényében. A szorítóerő meghatározásához mechanikai modellt készítettünk a 2. fejezetben vizsgált gyorszorítóról, majd az ACROBOTER mászóegységéről (3.1. ábra) is. A gyorszorítót abból a célból vizsgáljuk, hogy számításainkat méréssel is össze tudjuk hasonlítani, majd ebből következtetéseket vonjunk le az ACROBOTER megfogó egységének számításaival kapcsolatban is.



3.1. ábra. Négycsuklós mechanizmus a mászóegységben

3.1. Természetes koordináták

A több test dinamikai rendszerek többféle koordinátaválasztás mellett leírhatók, ez azonban nem jelenti azt, hogy azok egyenértékűek lennének egymással a számítások időigényessége és a leírás egyszerűsége szempontjából. Esetünkben is az első problémát a megfelelő leírókoordináta csoport kiválasztása jelenti.

Minimális (független) azaz általános koordináták használatakor a koordináták száma megegyezik a rendszer szabadságfokainak számával, számuk ezáltal minimális. Azonban sok esetben az így levezetett egyenletek bizonyos pozícióban szingulárisak lehetnek, mind például a térbeli inga Euler szögekkel leírva [3]. Továbbá a leíró egyenletek transzcendens, nemlineáris függvényeket tartalmazhatnak. Ez különösen igaz zártláncú mechanizmusoknál, mint például a vizsgált alkalmazás.

Ennek elkerülésére a rendszer kinematikai leírása nem minimális számú koordinátával történik [4]. Ekkor a koordináták száma több, mint a rendszer szabadságfokainak száma. Az egymással összefüggő koordinátákat kényszeregyenletek kapcsolják össze, melyek száma m és megegyezik a felhasznált koordináták n és a rendszer szabadságfokainak DoF számának különbségével.

Az egyik lehetséges mód a természetes koordinátás leírásmód [5], mely nem használ szögeket a leíráshoz, minden térbeli merev testet három pontja, és egy a testen lévő egységvektor derékszögű koordinátarendszerbeli koordinátái ír le. Ez azért előnyös, mert alkalmazásával a rendszer egyszerűen leírható, a számítások kevésbé időigényesek.

Síkbeli esetben a természetes koordináták használatakor minden test helyzete legalább két pontja alapján kerül meghatározásra. Ezt a két kiválasztott pontot bázispontnak nevezzük. A bázispontok felvételekor a következőket kell betartani:

- Minden csuklóban legalább egy bázispont legyen.
- Minden merev testnek legalább két bázispontja legyen. (Két merev test osztható közös bázisponton.)
- Bármely további pontot bázispontnak választhatjuk, ekkor azonban ennek koordinátái automatikusan bekerülnek az ismeretlen változók közé.

Természetes koordináták használatakor kétféle geometriai kényszer biztosíthat kapcsolatot az összefüggő koordináták között:

- *Merev test kényszer*: Ha két pont ugyanahhoz a merev testhez tartozik, akkor a merev test definíciója alapján a pontok távolsága állandó. (Ezzel gyakorlatilag garantáljuk, hogy a testek merev testként mozogjanak.)
- *Kényszererőket helyettesítő kényszer*: Két pont egymásra esését, illetve a fix pontok pozícióját írja le. Ezekben az esetekben a kényszereknek mindig megfeleltethető egy kényszererő, mely biztosítja a geometriai feltételt.

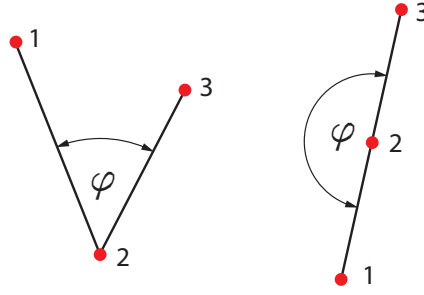
A merev testekre felírható kényszerek lehetnek távolságkényszerek (két pont távolságát garantálják):

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L_1^2 = 0, \quad (3.1)$$

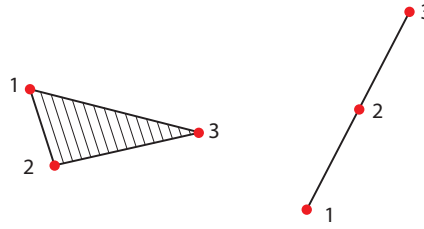
illetve szögekényszerek (két egyenes irányvektorának bezárt szögét adják meg, lásd: 3.2 ábra):

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) - (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) - L_1 L_2 \cos \phi = 0. \quad (3.2)$$

Szögekényszereket kétféleképpen adhatunk meg, skaláris szorzat és vektoriális szorzat segítségével. Fontos azonban figyelembe venni, hogy ha a két alakzat által bezárt ϕ



3.2. ábra. Szögekényszer megadása



3.3. ábra. Területkényszerezés

szög közel 0° illetve 180° , a skaláris szorzat nem határozza meg egyértelműen a testek helyzetét, hasonlóan ϕ közel 90° esetén a vektoriális szorzással felírt egyenlet nem lesz egyértelmű. Egyes merev testeket három ponttal adunk meg, ezek leírása kényszeregyenletekkel többféleképpen történhet. Általában a három pont állandó távolságát leíró három köregyenlet garantálja a merev testként történő mozgást. Másik megoldásként az egyik köregyenlet helyett területkényszerrel is garantálhatjuk a merev testként történő mozgást. Az 1-2-3 háromszögek (lásd: 3.3 ábra) esetében a

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

determináns az oldalvektorok vektoriális szorzását fejezi ki. A vektoriális szorzásként kapott, a mozgás síkjára merőleges vektor abszolút értéke megegyezik a két vektor által meghatározott paralelogramma területével, mely éppen kétszerese a háromszög területének. Mivel a háromszög pontjai merev testként viselkednek, a háromszög területe állandó marad a mozgás során. A felírt determináns formula alapján az alábbi kényszeregyenlet írható fel:

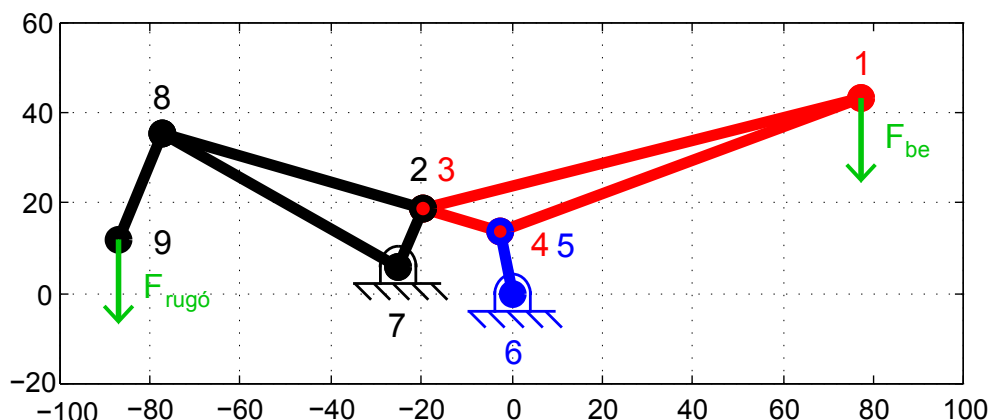
$$(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - 2T_{123} = 0. \quad (3.4)$$

Az időben állandó területre vonatkozó kényszer egyenlet felírásának előnye, hogy mindig garantálja a merev testként történő mozgást szemben a három oldalhosszra felírt kényszeregyenletek módszerével, mely nem minden esetben alkalmazható. A három ponttal adott merev testek egy speciális esete az, amikor a három pont egy egyenesre esik. Ezt egy elfajuló háromszöggé is felfoghatjuk. Fontos azonban megjegyezni, hogy ekkor nem írhatunk fel három távolságkényszert (köregyenletet), mivel az nem adja meg egyértelműen a megoldást. Ekkor általában területkényszert írunk fel, melyre

ebben a speciális esetben a terület konstans zérus. Ha egy merev testet négy pontja alapján definiálunk, akkor összesen nyolc koordinátával kell számolnunk. Mivel a síkban a szabadsági fokok száma három ezért öt kényszer egyenletet kell felírunk. Az eset nagyon hasonlít a három pont által jellemzett merev testek esetére, azonban itt plusz egy pont helyzetét is meg kell határozni. Az egyik megoldási lehetőség, hogy a négy közül valamely három pontra távolságkényszereket (köregyenleteket) írunk fel (ezzel meghatározzuk a három pont alkotta háromszög helyzetét két oldalhossz és egy átló alapján), majd a negyedik pont helyzetét valamely két ponttól mért távolságára vonatkozó kényszer segítségével írjuk fel. Lényegében a módszer alkalmazásakor két háromszöget írunk fel az oldalhosszai segítségével, melyek közös oldala a négyszög valamely átlója, tehát a közös oldal miatt 6 helyett összesen 5 távolságot definiálunk. Másik módszer, amelyet egy négy pontja által meghatározott merev test esetében alkalmazhatunk, ha valamely három pontja által alkotott háromszögre írunk fel három távolságot meghatározó kényszer egyenletet. A negyedik pont helyzetét további két kényszer egyenlettel rögzíthetjük, melyet a négyszög negyedik pontjába mutató átlóvektorának a háromszög és a négyszög közös oldalvektorainak a lineáris kombinációjaként történő felírása fejez ki. (Az átlóvektor mindig a két oldalvektor konstans szorosa.) Ilyen módon síkbeli példáról lévén szó x és y koordináták szerint két kényszeregyenlet állítható elő. Ezen módszer előnye, hogy a lineáris kombinációra vonatkozó két kényszeregyenlet csak elsőfokú tagokat tartalmaz.

3.2. AMF-6830 típusú ipari gyorszorító mecha- nizmus modellezése természetes koordináták használatával

Az eszközt a modellezéséhez rudakból és csuklókból álló rendszerré redukáltuk, mely a 3.4 ábrán látható. Az egy merev testhez tartozó rudak azonos színnel vannak jelölve. Ez alapján már felírhatjuk a kényszeregyenleteket a gyorszorítóra. A koordináta



3.4. ábra. A vizsgált ipari gyorszorító mechanikai modellje

választáshoz a bázispontokat a rudak végpontjában vettük fel, úgy, hogy ahol egy adott pont két különböző merev testhez tartozik, ott két bázispontot vettünk fel (ennek azért

van jelentősége, mert így megkaphatjuk azt a belső erőt is, amely két bázispontot együtt tartja). Így a négy csuklóból álló rendszert kilenc bázisponttal írtuk le, melyek mindegyike x és y koordinátával rendelkezik, így összesen 18 koordinátánk van. A 2,3 és a 4,5 pontok koordinátái megegyeznek, azonban míg 2 pont az első rúdhoz, a 3,4 pontok a második rúdhoz tartoznak, valamint az 5 pont a harmadik rúdhoz tartozik. Mint a 3.4 ábrán látható, a 6 és a 7 csukló rögzített. Egy pont helyzetének a megadásából az összes többi pont helyzete kiszámolható, tehát a rendszer egy szabadsági fokkal rendelkezik, így összesen $18-1=17$ kényszeregyenlet felírása szükséges. További paraméterként szerepelnek a rúdhosszak és a rögzített csuklók helyzetét meghatározó paraméterek (L jelöli a rúdhosszakat, d pedig a fix csuklók koordinátaértékeit Descartes-féle koordinátarendszerben), melyeket előzőleg lemértünk. Mindezek alapján a gyorszorítóra az alább látható kényszeregyenletek írhatók fel. A rögzített koordinátákat leíró egyenletek:

$$x_6 - d_1 = 0, \quad (3.5)$$

$$y_6 - d_2 = 0, \quad (3.6)$$

$$x_7 - d_3 = 0, \quad (3.7)$$

$$y_7 - d_4 = 0. \quad (3.8)$$

Koordináták azonosságát leíró egyenletek:

$$x_2 - x_3 = 0, \quad (3.9)$$

$$y_2 - y_3 = 0, \quad (3.10)$$

$$x_4 - x_5 = 0, \quad (3.11)$$

$$y_4 - y_5 = 0. \quad (3.12)$$

Merevtest kényszerek, ezen belül a rudak hosszát rögzítő egyenletek:

$$(x_2 - x_7)^2 + (y_2 - y_7)^2 - L_1^2 = 0, \quad (3.13)$$

$$(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 - L_2^2 = 0, \quad (3.14)$$

$$(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 - L_3^2 = 0, \quad (3.15)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_4^2 = 0, \quad (3.16)$$

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - L_5^2 = 0, \quad (3.17)$$

$$(x_8 - x_2)^2 + (y_8 - y_2)^2 - L_6^2 = 0, \quad (3.18)$$

$$(x_8 - x_7)^2 + (y_8 - y_7)^2 - L_7^2 = 0, \quad (3.19)$$

$$(x_8 - x_9)^2 + (y_8 - y_9)^2 - L_8^2 = 0. \quad (3.20)$$

Merevtest kényszert, ezen belül szögekényszert ad meg a következő egyenlet:

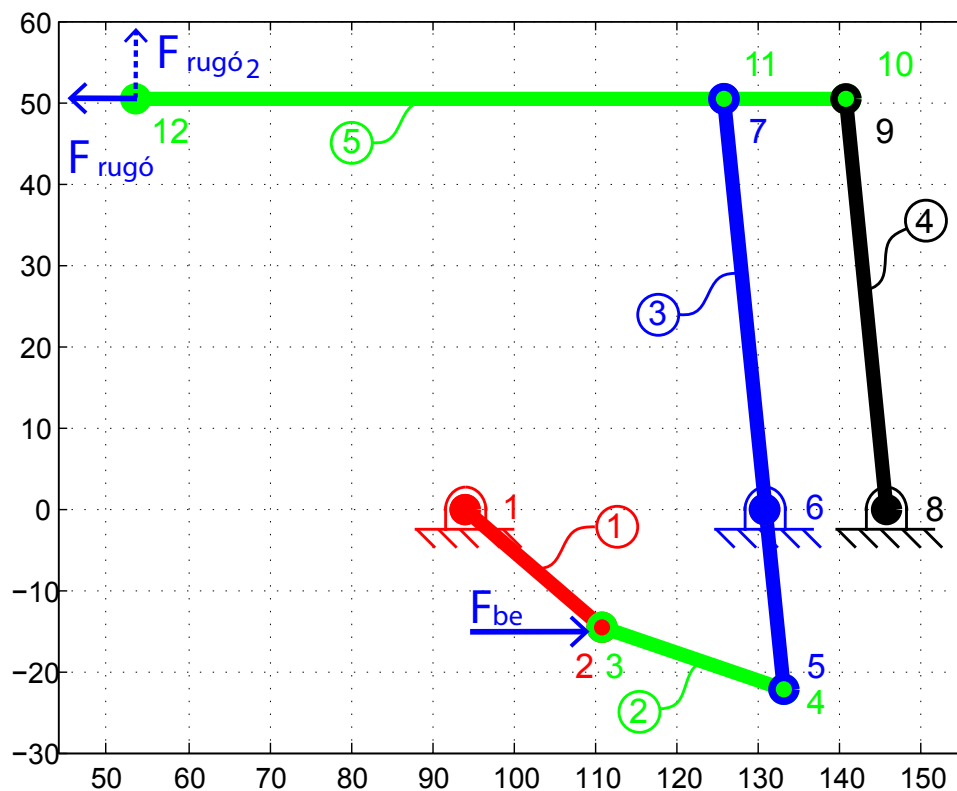
$$(x_9 - x_8)\left(\frac{x_2 + x_7}{2} - x_8\right) + (y_9 - y_8)\left(\frac{y_2 + y_7}{2} - y_8\right) = 0, \quad (3.21)$$

melyet úgy adtunk meg, hogy egy skalárszorítás garantálja, a 8-9 pontok által meghatározott rúd merőlegességét a 8 pontból a 2-7 pontokat összekötő szakasz felezőpontjába mutató vektorra (lásd 3.4). Másik megoldásként az egyik köregyenlet helyett területkényszert is megadhattunk volna. Az 1-3-4 és 2-7-8 háromszögek esetében ez:

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_7 & y_2 - y_7 & 0 \\ x_2 - x_8 & y_2 - y_8 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

3.3. Az ACROBOTER mászóegység modellezése természetes koordináták használatával



3.5. ábra. Az ACROBOTER mechanikai modellje

A bázispontokat természetes koordináta választással, a 3.5 ábrán látható módon vettük fel. Az 1,2 pontok az első rúdhoz, a 3,4 pontok a másodikhoz, az 5,6,7 pontok a harmadokhoz tartoznak (itt 5,6 távolságát L_3 , 6,7 távolságát L_4 jelöli). A 8,9 pontok a negyedik rúdhoz, 10,11,12 pontok pedig az ötödik rúdhoz tartoznak (itt 10,11 távolságát L_5 , 11,12 távolságát L_6 jelöli). A két pont által meghatározott merev testekre a fentihez hasonló módon írhatjuk fel a kényszeregyenleteket:

$$x_1 - d_1 = 0, \quad (3.24)$$

$$y_1 - d_2 = 0, \quad (3.25)$$

$$x_2 - x_3 = 0, \quad (3.26)$$

$$y_2 - y_3 = 0, \quad (3.27)$$

$$x_4 - x_5 = 0, \quad (3.28)$$

$$y_4 - y_5 = 0, \quad (3.29)$$

$$x_6 - d_3 = 0, \quad (3.30)$$

$$y_6 - d_2 = 0, \quad (3.31)$$

$$x_8 - d_4 = 0, \quad (3.32)$$

$$y_8 - d_2 = 0, \quad (3.33)$$

$$x_{10} - x_9 = 0, \quad (3.34)$$

$$y_{10} - y_9 = 0, \quad (3.35)$$

$$x_{11} - x_7 = 0, \quad (3.36)$$

$$y_{11} - y_7 = 0. \quad (3.37)$$

Ezen kívül további merevtest kényszerekre van szükség. A két pont által definiált merev testeknél a két végpont távolsága adja a kényszeregyenletet. A három pont alapján definiált merev testek esetében azonban a három pontra felírt távolság képletek nem mindig alkalmazhatók. Ha a háromszög elfajuló, vagyis tulajdonképpen egy egyenes szakasz, akkor a három köregyenlet nem definiálja egyértelműen az elrendezést. Ilyenkor az egyenletek nem függetlenek egymástól, tehát nem garantálják, hogy a rúd merevtestként mozogjon. Ennek oka, hogy a középső pont infinitezimálisan kis mértékben elmozdítható a rúdról, tehát eltávolítható a rúd többi pontjától anélkül, hogy a másik két ponttól mért távolsága megváltozna.

Ha tehát három pont által meghatározott szakaszcól van szó, akkor két pont helyzetét jellemezhetjük távolságkényszerekkel, a harmadik pont helyzetét azonban hasonló háromszögek segítségével, vagy a 3.2 alfejezetben ismertetett területkényszerrel határozhatjuk meg. A területkényszer esetében azt használjuk ki, hogy a háromszög oldalai által kijelölt valamely két vektor keresztszorzatának abszolút értékeként kapott paralelogrammaterület fele megegyezik a háromszög területével. Ha a háromszög pontjai egy egyenesre esnek, akkor az így kapott terület értéke zérus. Könnyen belátható, hogy a fent említett két módszer ekvivalens egymással, azonban a terület kényszer előnye, hogy általánosan alkalmazható. A merevtest kényszerek a következőképpen írhatóak fel:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_1^2 = 0, \quad (3.38)$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - L_2^2 = 0, \quad (3.39)$$

$$(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 - L_3^2 = 0, \quad (3.40)$$

$$(x_7 - x_6)^2 + (y_7 - y_6)^2 - L_4^2 = 0, \quad (3.41)$$

$$(x_9 - x_8)^2 + (y_9 - y_8)^2 - L_4^2 = 0, \quad (3.42)$$

$$(x_{12} - x_{11})^2 + (y_{12} - y_{11})^2 - L_5^2 = 0, \quad (3.43)$$

$$(x_{11} - x_{10})^2 + (y_{11} - y_{10})^2 - L_6^2 = 0, \quad (3.44)$$

$$(x_7 - x_6)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_7 - y_6) = 0, \quad (3.45)$$

$$(x_{12} - x_{11})(y_{11} - y_{10}) - (x_{11} - x_{10})(y_{12} - y_{11}) = 0. \quad (3.46)$$

Összesen 24 koordinátát vettünk fel és a rendszer szabadságfokainak száma egy, így 23 kényszeregyenletet írtunk fel. A legtöbb esetben a megszokott távolság kényszereket használtuk, azonban mivel két rúd három felvett ponttal is rendelkezik, ezeknél a pontoknál a háromszögek hasonlósága alapján 3.5 írtunk fel kényszer egyenleteket.

A két hasonlóságot kifejező egyenlet más módon is írható. Mivel a három pont egy egyenesre esik, kihasználhatjuk, hogy a három pont közül bármely két pontot összekötő vektor párhuzamos egymással, tehát a vektorok nyújtásával, nagyításával definiálhatjuk a harmadik pont helyzetét. Ez alapján Az 5-6-7 és a 10-11-12 pontokra az

$$(x_5 - x_6) - C(x_5 - x_7) = 0; \quad (3.47)$$

$$(y_5 - y_6) - C(y_5 - y_7) = 0; \quad (3.48)$$

$$(x_{10} - x_{11}) - C(x_{10} - x_{11}) = 0; \quad (3.49)$$

$$(y_{10} - y_{11}) - C(y_{10} - y_{11}) = 0. \quad (3.50)$$

egyenleteket írhatjuk fel, ahol $C \in \mathbb{R}$ arányossági tényező a két rúdhossz hányadosával egyenlő.

4. fejezet

A szükséges számítási módszerek

A szerkezetek vizsgálatának célja, hogy végigkövetve a szorítás folyamatát a rendszer elemeinek pozíciója meghatározásra kerüljön, továbbá szükség van a csuklóknban ébredő reakcióerők, a szorítóerő, továbbá a szinguláris helyzeten való átbillentéshez szükséges aktuátorerő meghatározására. Ezek közül a szorítóerő és az aktuátorerő kapcsolatának a meghatározása a legfontosabb feladat. A reakcióerők kiszámítására pedig a szerkezet szilárdsági méretezéséhez szükséges.

A vizsgálat során a 3. fejezetben felírt kényszeregyenletek felhasználásával létrehozott mechanikai modell egyensúlyát keressük meg különböző szorító erő értékekre.

4.1. Egyensúlyi helyzet keresése

A fő problémát a több test dinamikai rendszer minden pontjának a pozíciójának a megtalálása jelenti. Ez alapvetően kétféle problémaként definiálható: egyik esetben a kezdeti pozíció ismeretlen, és meghatározandó. A másik esetben a kezdeti pozíció ismert. (A kezdetiérték probléma korábban már megoldásra került, vagy a kezdeti pozíció bemeneti paramétere a számításainknak.) Ekkor egy koordináta véges elmozdulása alapján kell meghatározni a többi koordináta pozícióját. Ehhez a nemlineáris geometriai kényszeregyenletek megoldása is szükséges, melyeknek általában több megoldása is létezik. Esetünkben a nemlineáris geometriai kényszeregyenletek megoldása során felhasználhatjuk, hogy a kezdeti pozíció ismert, tehát a helyes megoldás megtalálásához az iterációt a kezdeti ismert állapotból kell indítani, így eredményként a megoldások közül azt kapjuk, amely a kiindulási értékhez a legközelebb esik. (A kezdeti pozíció a CAD modell segítségével felírható.) Tehát az, hogy az egyenleteknek több megoldása is létezik, ebben az esetben nem jelent problémát, ugyanis az algoritmusnak mindig az előző értékhez legközelebbi megoldást kell megtalálnia.) A pozíció probléma megoldása a következő egyenlet teljesülése révén lehetséges:

$$\varphi(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.1)$$

ahol $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ a rendszert leíró koordináták vektora, $\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m$ a kényszeregyenleteket tartalmazó függvény vektor.

Mivel azonban esetünkben az erők meghatározására is szükség van, illetve a rugalmas tag miatt a pozíciók függenek az erőktől, ezen egyenlet megoldása nem elegendő a számításokhoz. Így a megoldás során egy, a kinetikai leírásban használandó egyenlet egyszerűsített változatát fogjuk alkalmazni, a következő módon. A rendszert felépítő rudakat és csuklókat súlytalannak tekintjük, tehát a gravitációs erőt elhagyjuk. A kényszererőket a kényszereket leíró egyenletekkel helyettesítjük. A rendszerre minden egyes pozícióban egy statikai egyensúlyi problémát oldunk meg. A leíráshoz a Lagrange multiplikátorok módszerét használjuk. Ezen leírás során $n + m$ ismeretlennel dolgozunk, melyből n a $\mathbf{q}$ vektor által reprezentált, a rendszert leíró koordináták száma, m a felírható kényszeregyenletekhez tartozó Lagrange-multiplikátorok száma. Megjegyezzük, hogy jelen esetben a rendszer szabadságfoka egy, tehát $n - m = 1$ adódik. A megoldást a következő egyenletből kapjuk meg:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}, \quad (4.2)$$

ahol $\mathbf{M}$ a tömegmátrix, $\ddot{\mathbf{q}}$ a koordináták második deriváltja, vagyis a gyorsulás, $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{q}}^T$ a kényszeregyenleteket tartalmazó $\boldsymbol{\varphi}$ vektor $\mathbf{q}$ koordináták szerinti parciális deriváltak által meghatározott Jacobi-mátrix transzponáltja, a $\boldsymbol{\lambda}$ a Lagrange-multiplikátorokat tartalmazó vektor, $\mathbf{Q}$ az általános erő vektor. Jelen esetben a tömegmátrixot tartalmazó tag elhagyható, mivel a rendszer tehetetlenségéből származó erők nagyságrendekkel kisebbek a kényszererőknél és a $\mathbf{Q}$ vektor tartalmazta, külső, aktív erőknél. Így az egyenlet nullára rendezve a következő lesz:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q} = 0, \quad (4.3)$$

Ez a kifejezés egy $n + m$ ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszert ad. Ehhez még hozzá kell venni a kényszeregyenletek teljesülését, azaz a (4.1) kifejezés által meghatározott egyenletrendszert, mely m egyenletből áll. Így már az egyenletek és az ismeretlenek száma egyenlő, ami a megoldhatósághoz elengedhetetlen. Azonban mivel a (4.1) nemlineáris egyenleteket is tartalmaz, analitikus módon (4.3) nem lesz megoldható.

4.2. Newton-Raphson módszer

A (4.1), (4.3) nemlineáris egyenletek megoldása többek között Newton-Raphson módszerrel lehetséges. Ez a módszer a numerikus gyökhelykeresés legalapvetőbb módszere, amivel valós függvények esetén jól közelíthetjük a gyököket. Ez a módszer a megoldás közelében négyzetesen konvergál, vagyis minden iterációs lépésben a hiba az előző lépésben meglévő hiba négyzetével lesz arányos. Azonban a megoldástól távolról indítva az iterációt, az divergálhat, vagy másik gyököt adhat, tehát fontos az iterációt a megfelelő helyről indítani. A módszer a rendszer linearizációján alapszik [6], úgy, hogy az egyenletrendszert reprezentáló függvényt a $\mathbf{q}_i$ körüli Taylor-sorának első két elemével helyettesíti. A kényszeregyenletek (4.1) megoldására tehát az alábbi egyenlet írható fel:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) \simeq \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_i) + \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i) = 0, \quad (4.4)$$

ahol $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)$ mátrix a kényszeregyenletek Jacobi mátrixa. Ez az egyenlet egy lineáris egyenletekből álló egyenletrendszert ír le, amely közelítése a (4.1) nemlineáris egyenletrendszernek. A $\mathbf{q}$ vektor, melyet a (4.4) egyenlet megoldásaként kapunk, közelítése

lesz a (4.1) egyenlet megoldásának. Ha ezt a közelítő megoldást $\mathbf{q}_{i+1}$ -nek nevezzük, a rekurzív képlet a következőképpen áll elő:

$$\varphi(\mathbf{q}_i) + \varphi_q(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = 0, \quad (4.5)$$

melyből az $(i + 1)$ -edik közelítő megoldás kifejezhető:

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i - \varphi(\mathbf{q}_i)\varphi_q^{-1}(\mathbf{q}_i), \quad (4.6)$$

ahol $\varphi_q^{-1}(\mathbf{q}_i)$ a kényszer Jacobi-mátrixának inverze. Ezt ismételten alkalmazhatjuk, mindaddig, amíg az egyenletrendszer hibája elhanyagolhatóan kicsi lesz, vagy elér egy előre meghatározott hibakorlátot. Ezzel a módszerrel már megoldható lesz a (4.3) egyenlet. Azonban a Newton-Raphson módszer nem mindig konvergál egy megoldáshoz. Fent már említésre került az iteráció megfelelő helyről való indításának lényegessége, azonban még ez sem garantálja a konvergenciát. Ha a kezdeti becslés nem felel meg egy lehetséges fizikai megoldásnak, akkor a matematikai algoritmus a kezdeti becsléstől függően divergálhat.

Továbbá a (4.1), (4.3) megoldása során lényeges, hogy megfelelő kényszeregyenletekkel töltsük fel a $\varphi(\mathbf{q})$ vektort. Kerülendő az olyan egyenletek felírása, melyekből felépített egyenletrendszer megoldásai között kettős gyökök lesznek. Belátható ugyanis, hogy ez esetben az iteráció meg fogja ugyan közelíteni a megoldást, de egy adott hibánál kisebb nem érhető el. Ez a hiba a megoldó program számábrázolási határával van összefüggésben: Ha a hiba e határ alá csökken, az invertálandó mátrix szinguláris lesz, így nem állítható elő a következő approximációs lépés. Egyváltozós függvények esetén ez a probléma jól látható: Ha a függvénynek a zérushelyen szélsőértéke van, ott a derivált értéke nulla, az érintő tehát vízszintes lesz. Jó példa erre a

$$f(x) = x^2, \quad (4.7)$$

egyenletű parabola, melynek kettős gyöke láthatóan az $x = 0$ helyen található. Az iterációs módszerrel azonban a zérushely nem megtalálható, ugyanis

$$f'(x) = 2x, \quad (4.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0, \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

Az $(i + 1)$ -edik közelítő megoldás a következőképpen számolható:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'_{x_i}}. \quad (4.11)$$

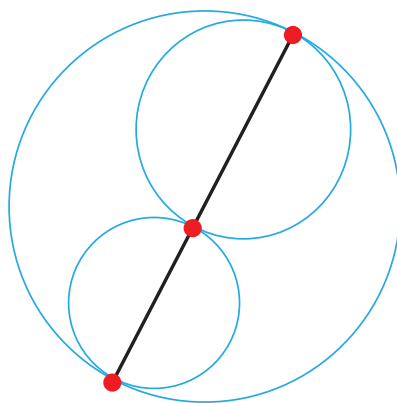
Ekkor azonban

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_i)}{f'_{x_i}} = \frac{f(x_i)}{0}, \quad (4.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_i)}{f'_{x_i}} = \infty. \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

Tehát ha a becslés közel van a gyökhöz, akkor a következő becslés nagyon messzire kerülhet. Ebben az esetben az iteráció divergál, a zérushelyet a módszer csak megközelíteni tudja. Ebből következik, hogy az ACROBOTER mászóegység mechanikai modellezése esetén a kényszeregyenleteket csak a már 3. fejezetben tárgyalt módon adhatjuk meg. Ennek magyarázata a következő: ha a kényszereket a 4.1 ábrán látható módon, a rúd-hosszakra köregyenletek felírásával adnánk meg, egy olyan függvényt kapnánk, melynek hat azonos gyöke van. Hiszen ekkor a három egyenletből álló egyenletrendszer éppen akkor teljesül, ha a rúdhosszak által definiált körök páronként érintik egymást. Ekkor azonban a fentiek alapján a Jacobi mátrix inverze a megoldáshoz közel nem lesz előálítható.



4.1. ábra. Kényszerek köregyenlettel (helytelenül) való megadása

Látható, hogy a kényszeregyenletek Jacobi mátrixa igen nagy szerepet játszik minden mechanikai modellezési problémában. Ez a mátrix határozza meg ugyanis azt a lineáris egyenletrendszert, melynek segítségével a megoldás következő közelítése megkapható. Fontos tehát, hogy ez a mátrix könnyen és gyorsan kiértékelhető legyen, hiszen ez a jellemzője minden jó többtest rendszert leíró módszernek. Ez is az egyik oka annak, hogy a leíráshoz természetes koordinátákat használunk, mert ezek biztosítják az analízis maximális hatékonyságát. Ezen tapasztalatok általános következménye, hogy a természetes koordinátákkal definiált mechanikai rendszerek numerikus modellezése során a kényszeregyenletekkel való leírásakor figyelembe kell venni a megoldó módszer sajátágaiból származó hibalehetőségeket, és a kényszeregyenleteket ehhez mérten kell felírni.

4.3. Reakcióerők számítása a Lagrange-multiplikátorokból

A 4.2 fejezetben leírtak alapján kiszámítható a vizsgált szerkezet egyensúlya esetén az összes leíró koordináta és Lagrange-multiplikátor. A vizsgált szerkezet szilárdági vizsgálatához azonban azt is tudnunk kell, hogy milyen reakciók hatnak a szerkezetre. Ebben az alfejezetben arra adunk módszert, hogy a már ismert Lagrange-multiplikátorokból hogyan számíthatóak a reakciók. Hasonló levezetés található a [7] irodalomban, mi azonban nem csak anyagi pontokból álló rendszerre, hanem

merev testekre is bizonyítjuk az alkalmazhatóságot, ezen kívül bemutatjuk, hogy nem csak reakció erők, hanem reakció nyomatékok kiszámítása is lehetséges a Lagrange-multiplikátorok alapján.

A (4.3) egyenlet felírható a kényszeregyenletek olyan felbontásával, hogy φ_r vektor tartalmazza azokat a kényszereket, amelyek összefüggésben állnak a reakcióerőkkel, illetve φ_n tartalmazza az egyéb kényszereket, ezek többnyire merev test jellegű kényszerek, de erre nem szükséges szorítkoznunk:

$$\left[\varphi_{rq}^T(\mathbf{q}) \mid \varphi_{nq}^T(\mathbf{q}) \right] \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (4.15)$$

ahol $\varphi_r(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m_r}$ a kényszereknek azon csoportját tartalmazó vektor, amelyek kapcsolatban állnak a kiszámítani kívánt reakciókkal, $\varphi_n(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m_n}$ vektorban pedig a többi kényszer található. Ezek Jakobi mátrixai $\varphi_{rq}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m_r \times n}$, $\varphi_{nq}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m_n \times n}$ és az összes kényszeregyenlet száma: $m = m_r + m_n$. A szorzást elvégezve az al mátrixokkal az alábbi egyenlet adódik:

$$\varphi_{rq}^T(\mathbf{q})\lambda_r + \varphi_{nq}^T(\mathbf{q})\lambda_n = \mathbf{Q}(\mathbf{q}). \quad (4.16)$$

A $\varphi_r(\mathbf{q})$ vektorban lévő kényszereket a reakcióerőkből származó $\mathbf{Q}_r(\mathbf{q}, \mathbf{R}) \in \mathbb{R}^n$ általánoseroő vektorral is helyettesíthetjük:

$$\varphi_{nq}^T(\mathbf{q})\lambda_n = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_r(\mathbf{q}, \mathbf{R}), \quad (4.17)$$

ahol $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^r$ az r darab reakciót tartalmazza. A reakciók megválasztása bizonyos keretek között önkényesen történhet. Mivel a (4.16) és a (4.17) egyenlet egyenértékű, felírható, hogy:

$$\mathbf{Q}_r(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = -\varphi_{rq}^T(\mathbf{q})\lambda_r. \quad (4.18)$$

Feltételezzük, hogy a reakció erők és nyomatékok csak lineárisan kerülnek bele az általánoseroő vektorba, vagyis a $\mathbf{Q}_r(\mathbf{q}, \mathbf{R})$ általánoseroő vektor egy $\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ együttműködő mátrix és a reakciók vektorának a szorzataként állítható elő:

$$\mathbf{Q}_r(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}(\mathbf{q})\mathbf{R}. \quad (4.19)$$

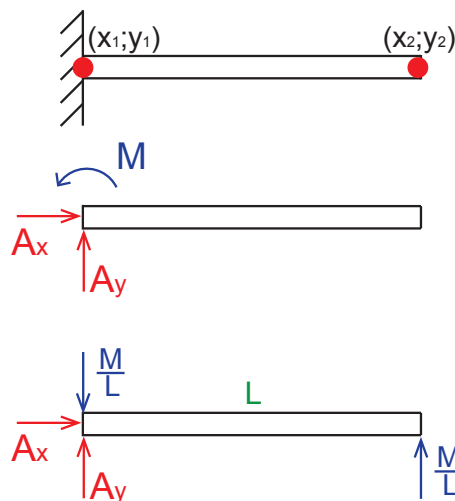
A probléma az, hogy a (4.18) egyenletrendszerben az ismeretlen reakciók száma (r) kisebb, mint az egyenletek száma (n). Ha a (4.18) bal oldalán a (4.19) egyenletnek megfelelően írjuk be a reakciókból származó általánoseroő vektort, és még balról beszorzunk a $\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}$ transzponáltjával, akkor egy megoldható egyenletrendszert kapunk. Ebből a reakciók közvetlenül kifejezhetők:

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^T \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^T \varphi_{rq}^T \lambda_r. \quad (4.20)$$

A fenti egyenletben kapott $(\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^T \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^T$ kifejezés nem más mint a $\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}$ általánosított inverze, vagy más szóval pszeudo-inverze, tehát röviden azt írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^\dagger \varphi_{rq}^T \lambda_r. \quad (4.21)$$

Ezzel zárt alakú összefüggéshez jutunk, amely a Lagrange-multiplikátorok függvényében egyértelműen megadja a reakcióerőket és reakciónyomatékokat. A következő alfejezetekben a módszer alkalmazását szemléltető példákat mutatunk be.



4.2. ábra. Konzolos tartó

4.3.1. Példa: konzolos tartó

A 4.2 ábrán látható konzolos tartó természetes koordináták alkalmazása esetén az alábbi koordinátákkal írható le:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2]^T. \quad (4.22)$$

Mivel statikai feladatról van szó, a koordináták számával megegyező geometriai kényszer kell felírni. A reakciókkal kapcsolatos kényszerek vektora:

$$\varphi_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}^T, \quad (4.23)$$

míg a rúd hosszára vonatkozó kényszer:

$$\varphi_n = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L^2]^T. \quad (4.24)$$

A kiszámolni kívánt reakciók vektora:

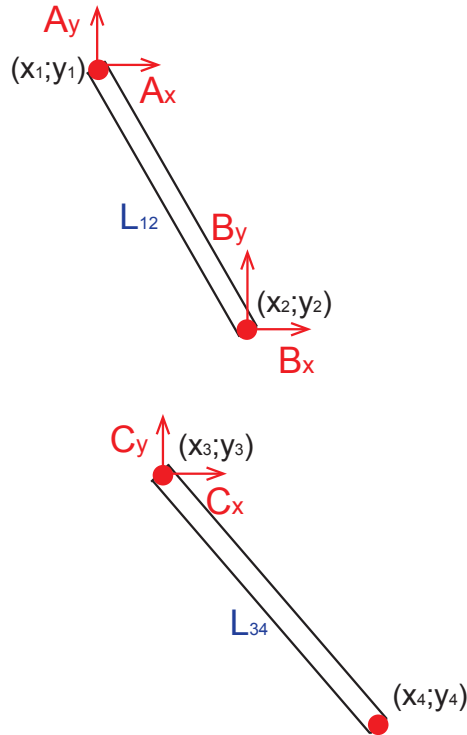
$$\mathbf{R} = [A_x; A_y; M_A]^T. \quad (4.25)$$

A reakciókból származó általános erővektor az alábbi formában adódik:

$$\mathbf{Q}_r = [A_x; A_y - M_A/L; 0; M_A/L]^T, \quad (4.26)$$

A reakciókra a megoldás a Lagrange-multiplikátorok függvényében a (4.21) egyenlet alapján számolva:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ L\lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$



4.3. ábra. Kettősinga

4.3.2. Példa: kettősinga

A rendszert leíró koordináták a természetes koordinátákkal történő leírás szerint, a 4.3 ábra alapján:

$$\mathbf{q} = [x_1; y_1; x_2; y_2; x_3; y_3; x_4; y_4]^T. \quad (4.28)$$

A kényszer egyenleteket tartalmazó $\varphi(\mathbf{q})$ vektor a 4.3 fejezet elején leírtak szerint felbontható a reakciókat helyettesítő kényszereket tartalmazó φ_r és a többi kényszert tartalmazó φ_n vektorra:

$$\varphi_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 - x_3 \\ y_2 - y_3 \end{bmatrix}^T, \quad (4.29)$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L_{12}^2 \\ (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 - L_{34}^2 \end{bmatrix}^T. \quad (4.30)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a kényszerek száma $m = m_r + m_n = 6$ kisebb, mint a leírókoordináták száma $n = 8$, tehát látszik, hogy a rendszer szabadsági fokainak a száma $n - m = 2$. Látni fogjuk, hogy a 4.3 fejezetben bemutatott módszer alkalmazásához nem szükséges, hogy a rendszer minden szabadsági foka meg legyen kötve, tehát dinamikai feladatok esetében is működik.

A reakciók vektora, mely ebben az esetben nem tartalmaz nyomatékokat, csak a csukló jellegű kényszerekhez tartozó reakcióerőket:

$$\mathbf{R} = [A_x; A_y; B_x; B_y; C_x; C_y]^T, \quad (4.31)$$

A $\mathbf{q}$ vektor szerint a reakciókból származó általános erővektor az alábbi formában adódik:

$$\mathbf{Q}_r = [A_x; A_y; B_x; B_y; C_x; C_y; 0; 0]^T, \quad (4.32)$$

A reakcióerőkre a megoldás a Lagrange-multiplikátorok függvényében a (4.21) egyenlet alapján számolva a következőképpen adódik:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \\ -\lambda_5 \\ -\lambda_6 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

A kettősinga példáján azt is beláthattuk, hogy a $\mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}^T \mathbf{Q}_{r\mathbf{R}}$ szorzat egy egységmátrix (lásd: (4.20) egyenlet), tehát ennek az inverzét ilyenkor nem szükséges ténylegesen kiszámítani. Az előjelek pedig a $\varphi_{r\mathbf{q}}$ Jakobi mátrix szerint alakulnak, amely ilyenkor kizárólag $+1$ és -1 elemeket tartalmaz. Ez mindig igaz, hogyha a rendszer csak csukló jellegű kényszereket tartalmaz, és az ismeretlen reakcióerők egységesen a koordináta-rendszer szerint megadott pozitív irányban vannak felvéve. Ez segíti a módszer algoritmizálhatóságát.

5. fejezet

Numerikus számítások

Az előzőekben leírt módszerek segítségével már elvégezhető a rendszerek numerikus analízise. A gyorszorító esetében az egyes pozíciókon kívül meghatározásra kerül a bemeneti erő, és az eszköz által kifejtett szorítóerő. Az ACROBOTER mászóegysége esetében a pozíciók, a bemeneti erő, a kifejtett szorító erő, valamint az egyes csuklókban ébredő reakciók kerülnek meghatározásra, melyekből előállítjuk a mechanizmust alkotó rudak igénybevételi függvényeit. A numerikus analízishez szükség van a rendszert leíró koordináták felvételére, a koordináták és Lagrange-multiplikátorok kezdeti becslésére és a mechanikai paraméterekre (rudak hossza, rugalmasság), valamint az ezekből felírható kényszeregyenletek, továbbá a külső erők vektorának megadására.

5.1. A gyorszorító

A koordináták felvételét és a kényszeregyenletek felírását a 3.2 fejezetben tárgyaltuk. A külső aktív erők vektora a következő:

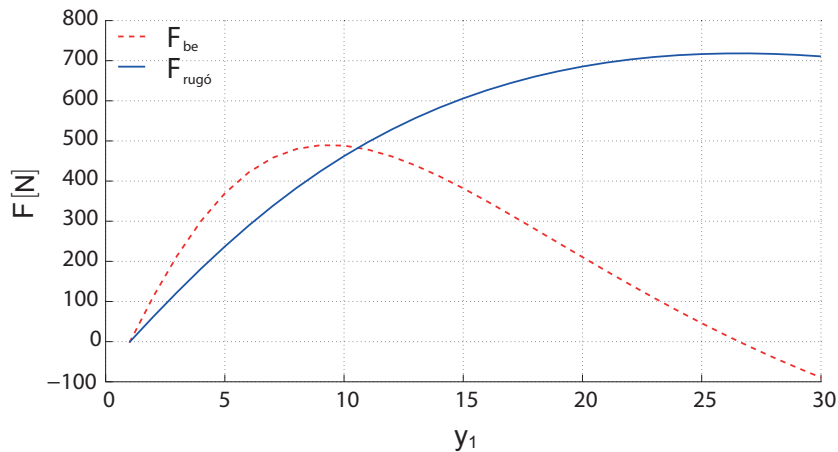
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0, & -F_{be}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & s(d_5 - y_9) \end{bmatrix}^T, \quad (5.1)$$

ahol F_{be} egy y irányú bevezetett erő, a Q vektor utolsó eleme a kimeneti erő, azaz a szorítóerő, mely rugóerőként számítható, így ehhez a paraméterek közé felvettünk s rugómerevséget is (lásd: 3.4 ábra). A kezdeti becslés a koordinátákra, ahonnan az iterációt indítjuk, CAD szoftverrel kerültek meghatározásra, a gyorszorítón lemért paramétereket felhasználva. A rugómerevségre a [2] alapján egy közelítő értéket $s = 20[N/mm]$ -t vettünk fel. A $\mathbf{q}$ a leíró koordináták vektora ebben az esetben nem egyezik meg az ismeretlenek vektorával, mivel a kényszererőket is meg akarjuk határozni. Ehhez az y_1 koordinátát ismertnek tekintjük, és a rendszer mozgását y_1 elmozdulásával írjuk le.

A rendszert leíró (4.1) és (4.3) egyenletet minden egyes y_1 értékre a Newton-Raphson módszerrel oldjuk meg. Első lépésben elvégezzük az iterációt a pozíció megtalálására és az erők számítására, majd az így kapott eredményeket használjuk fel a következő lépésben. A futtatás során y_1 koordinátát elmozdítjuk, majd ebben a pozícióban kezdünk iterálni, úgy hogy az iterációt az előző lépésben meghatározott pontokból indítjuk. Ezáltal garantáljuk, hogy a kezdeti becslések a következő lépés megoldásának közelében legyenek. Ez annak a feltétele, hogy az egymást követő y_1 értékekhez kapott megoldások egymáshoz közeli konfigurációkhoz tartozzanak. Ezeket a lépéseket

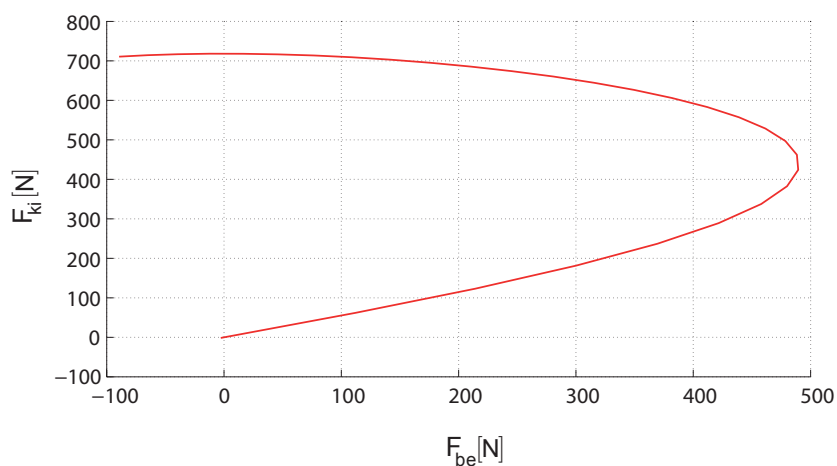
addig ismételjük, míg a y_1 elmozdulása egy olyan pozíciót határoz meg, melyben a rendszer már túl van a szinguláris helyzeten. Azaz az y_1 elmozdításával áthajtjuk a rendszert a szinguláris ponton.

A folyamat során a y_1 minden helyzetére kiszámoljuk a bevitt erőt azaz az aktuátor erőt (F_{be}) és a szorítóerőt ($F_{sz} = s(d_5 - y_9)$). Melyek a (4.1) és (4.3) egyenletrendszer megoldásvektorának elemei. A következő grafikonok a kapott eredményeket szemléltetik. A 5.1 ábrán a bevitt erő és a rugóerő (szorítóerő) van ábrázolva az iterá-



5.1. ábra. A beviteli és a szorítóerő az iterációs lépések függvényében

ciós lépések (y_1 elmozdulása) függvényében. Megfigyelhető, hogy a beviteli erő akkor vált előjelet, amikor a szorítóerőnek maximuma van. Ez éppen a szinguláris pontban következik be. A 5.2 ábrán a szorítóerő a bevitt erő függvényében van ábrázolva. Erről



5.2. ábra. A szorítóerő a bevitt erő függvényében

leolvasható az F_{be} erő maximuma, továbbá látszik, hogy az F_{be} erő csökkenésével a szorító erő (F_{rug}) tovább növekszik. Illetve ezen az ábrán is látszik, hogy a maximális szorítóerőhöz tartozó F_{be} zérus.

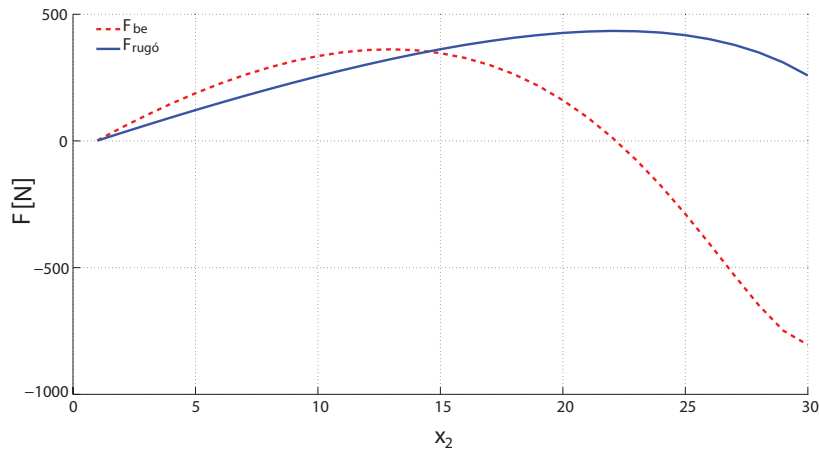
5.2. A mászóegység kapaszkodó-mechanizmusa

A gyorszorítóéval analóg módon lehet vizsgálni a mászóegység szorítómechanizmusát is. A koordináták felvételét és a kényszeregyenletek felírását a 3.3 fejezetben tárgyaltuk. Az általános erővektor a következő:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -F_{be} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1(d_5 - x_1 2) & -s_2(d_6 - y_1 2) & & & & & \end{bmatrix}^T, \quad (5.2)$$

Az F_{be} aktuátorerőt az x irányú bevezetett erővel modellezzük, a Q vektor utolsó két koordinátája a kimeneti erő, vagyis a szorítóerő. Ezeket rugóerőkből származtatjuk akképpen, hogy felveszünk két rugómerevséget: (s_1, s_2) (lásd: 3.5). A koordinátákra vonatkozó kezdeti becslés, ahonnan az iterációt indítjuk, CAD modellből kerültek meghatározásra. A szükséges adatokat (karhosszak, fix csuklók helyei) [1] alapján vettük fel. A rugómerevségre egy közelítő értéket $s_1 = 100[N/mm]$ - t vettünk fel [2], az y irányú rugóerőt a jelenlegi modellben elhanyagoljuk, ehhez s_2 rugómerevséget nullának tekintjük, mivel ennek figyelembe vétele megkívánja a mászóegység karjának lehajlásából adódó rugalmasság kiszámítását.

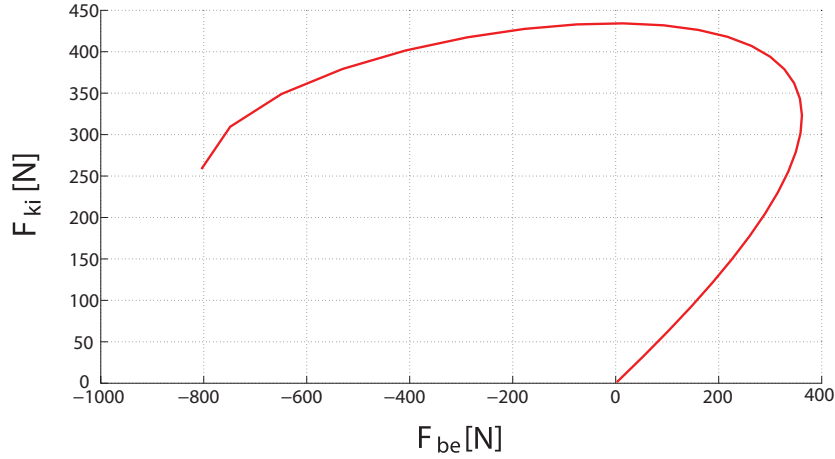
A q vektor a gyorszorító esetéhez hasonlóan ebben az esetben sem egyezik meg az ismeretlenek vektorával, mivel nem csak a koordinátákat, hanem az erőket is meg akarjuk határozni. Ehhez az x_2 koordinátát ismertnek tekintjük, és a rendszer mozgását x_2 elmozdulásával írjuk le. A gyorszorító példájával analóg módon itt az x_2 koordinátát változtatjuk, és így hajtjuk végre sorra az iterációkat. Azaz az x_2 elmozdításával hajtjuk át a rendszert a szinguláris ponton. A folyamat során a x_2 minden értékére kiszámoljuk az aktuátorerőt (F_{be}) és a szorítóerőt ($F_{sz} = s_1(d_5 - x_1 2)$). Ezek az előző példához hasonlóan az iterációból közvetlenül adódnak. A következő grafikonok a kapott eredményeket szemléltetik.



5.3. ábra. Az aktuátorerő és a rugóerő az iterációs lépések függvényében

Az 5.3 ábrán az aktuátorerő és a rugóerő (szorítóerő) van ábrázolva az iterációs lépések (x_2 elmozdulása) függvényében. Az előző példához hasonlóan itt is megfigyelhető, hogy a beviteli erő akkor vált előjelet, amikor a szorítóerőnek maximuma van.

Az 5.4 ábrán a szorítóerő az aktuátorerő függvényében van ábrázolva. Erről leolvasható az F_{be} aktuátorerő maximuma, melynek ismerete elengedhetetlen a mo-

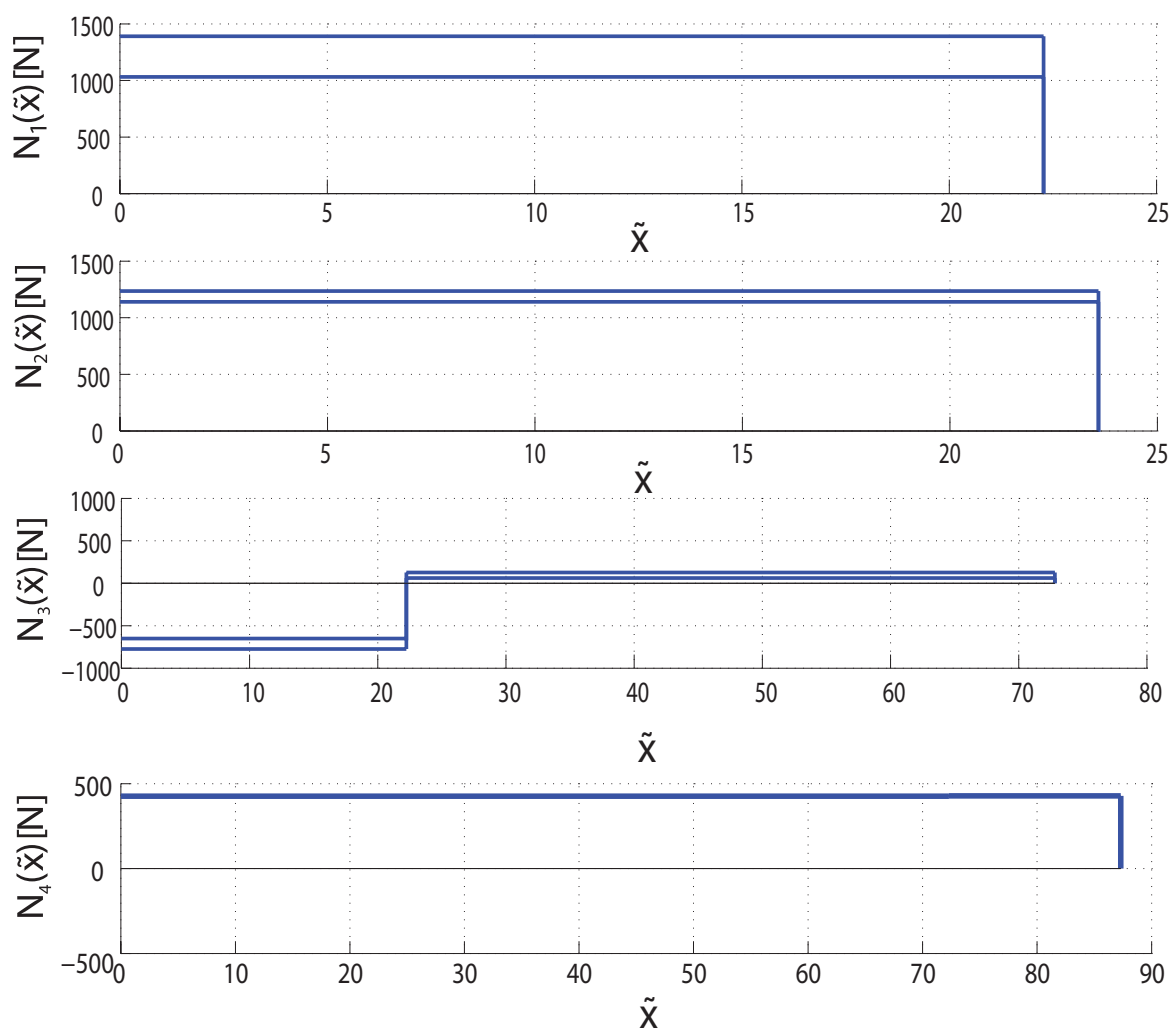


5.4. ábra. A szorítóerő az aktuátorerő függvényében

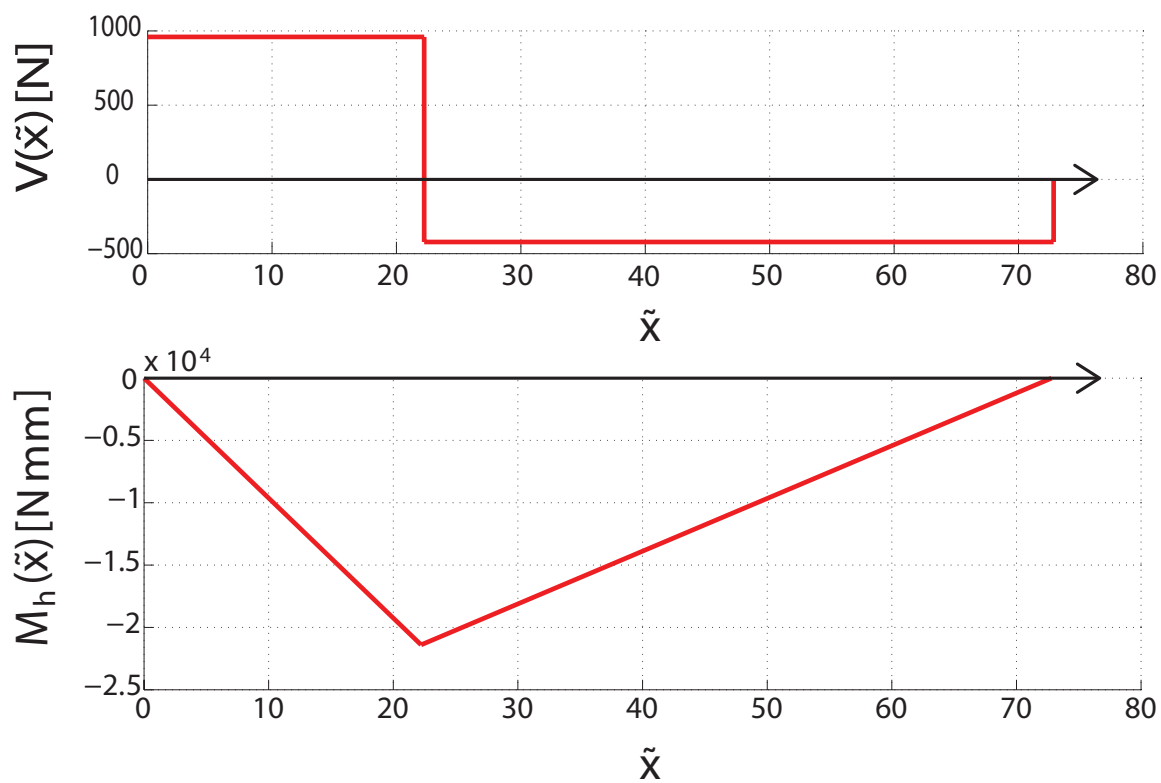
torválasztáshoz. Továbbá látszik, hogy az F_{be} erő csökkenésével a szorító erő (F_{rug}) tovább növekszik. Illetve ezen az ábrán is látszik, hogy a maximális szorítóerőhöz tartozó F_{be} aktuátorerő zérus, azaz a motort nem kell táplálni ahhoz, hogy a szorítás fennmaradjon.

További fontos célkitűzés volt, hogy meghatározzuk a szerkezetek egyes alkatrészeire ható reakciókat. Ezek a 4.3 fejezetben tárgyalt módon a Lagrange multiplikátorok (λ) vektorának elemeiből számíthatóak. A kapott reakcióerőkből igénybevételek számíthatóak, oly módon, hogy az x, y irányú reakciókat felbontjuk rúdírányú és rúdra merőleges komponensekre. Az egyes rudak transzformációs mátrixát felírva, és azzal a reakcióerő vektort beszorozva megkapjuk az erőket a rúd saját $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koordinátarendszerében. A rúdírányú és rúdra merőleges erőkből már felírhatóak az igénybevételi függvények.

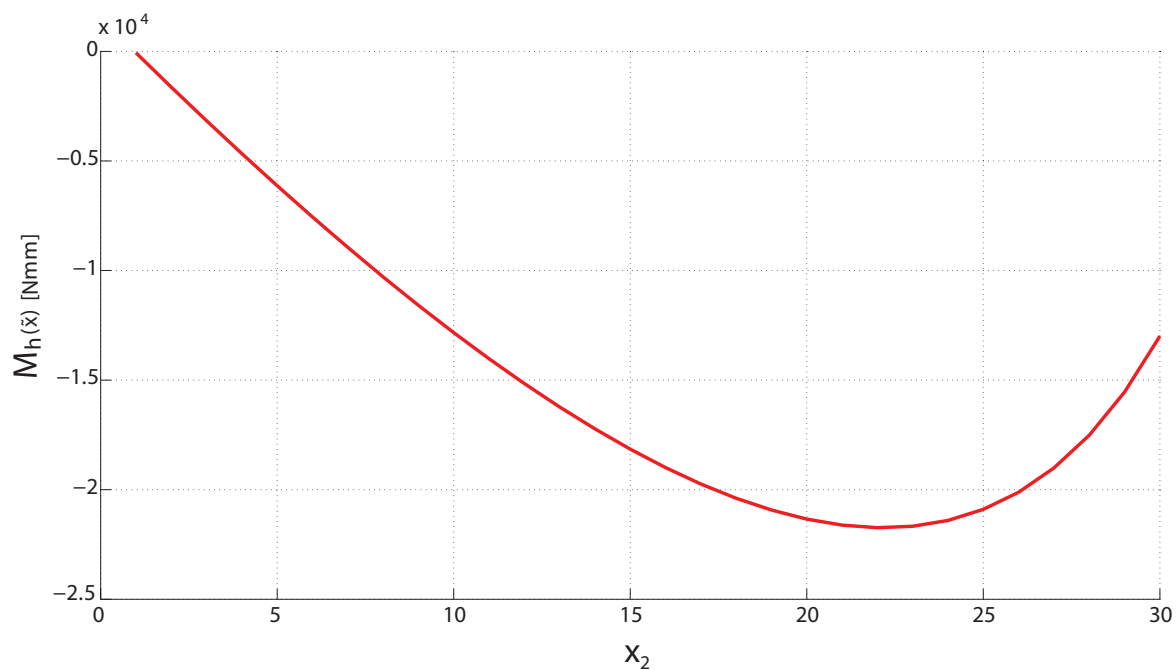
Normál igénybevétele a negyedik rúd kivételével mindegyiknek van. Az egyes rudak normál igénybevételei függvényei a 5.5 ábrán láthatóak, a szingularitáshoz közeli két állapotban. Hajlító igénybevétele csak a harmadik rúdnak van, az 5.6 ábrán a szinguláris helyzet közelében érvényes nyíróerő és hajlítónyomatéki függvény látható. Az 5.7 ábrán a hajlítónyomatéki függvény maximuma látható az iterációs lépések vagyis az x_2 elmozdulás értékének a függvényében.



5.5. ábra. Normáligenybevételi függvények



5.6. ábra. Hajlítóigénybevételi függvény



5.7. ábra. A hajlítónyomatéki függvény maximuma

6. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatunkban célul tűztük ki az ACROBOTER szervizrobot mászóegységét rögzítő megfogószerkezet vizsgálatát mind a működési elv szempontjából, mind szilárdsági szempontból. A szerkezet működése a kinematikai szingularitás kihasználásán alapul, ezért megvizsgáltunk egy egyszerűbb ilyen elven működő, iparban is megtalálható gyorszorító szerkezetet is, és számításainkat ennek modelljén ellenőriztük.

Bebizonyosodott, hogy a szerkezet rugalmasságának modellezésekor nem elegendő az egyes szerkezeti elemek rugalmasságát modellezni. Az őket összekötő csapok rugalmassága sokkal nagyobb szerepet játszik, azonban ezek modellezése is nagyobb kihívást jelent. A csapok rugalmasságának figyelembevétele további terveink között szerepel, egy könnyen algoritmizálható, és a természetes koordinátás leírásmódhoz jól illeszkedő formalizmust kívánunk létrehozni.

A szerkezet elemeinek szilárdsági ellenőrzéséhez szükség van a reakciók kiszámítására. Levezettük, hogy milyen kapcsolat áll fenn a Lagrange-multiplikátorok és a reakciók között, és bizonyítottuk, hogy a szakirodalomban található leírással szemben a módszer nem csak anyagi pontrendszerre, hanem merev testekből álló többtest-dinamikai rendszerre is működik, illetve nem csak a reakcióerők, hanem a reakciónyomatékok is kiszámíthatóak. Továbbá természetes koordinátákkal modelleztünk két többtest dinamikai rendszert, és numerikus módszerekkel kiszámítottuk a szükséges erőket, valamint a mászóegység esetében az igénybevételeket is meghatároztuk.

A további tervek között szerepel a [1] irodalomban megtervezett szerkezet szilárdsági ellenőrzése, amelyhez jelen munkánkban megtettük a szükséges előzetes lépéseket. Ezen kívül vizsgálni szeretnénk, hogy a szerkezet mennyire érzékeny a gyártásból adódó mérethibák jelenlétére.

Irodalomjegyzék

- [1] Attila T., *Acroboter mászóegység koncepció tervezési feladat DIPLOMATERV*, 2012.
- [2] A PEMU Muanyagipari zrt honlapja, URL <http://www.pemu.hu/>, last access: 05/11/2012.
- [3] Vidyasagar M. and Spong M.W., *Robot Dynamics And Control*, John Wiley and Sons Inc, 1989.
- [4] Siciliano B. and Khatib O., *Handbook of robotics*, Springer, 2008.
- [5] Jalón J.G.D. and Bayo E., *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*, Springer-Verlag, 1994.
- [6] Gisbert S., *Numerikus módszerek 1.*, Typotex, 1993.
- [7] Jiang Z. and Zhang C., Constraint Reaction Forces and Lagrange Multipliers in Multi-Body Systems, *Advanced Materials Research*, 97, 2010.