

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

OTDK dolgozat



Inverz inga egyensúlyozása

Készítette: Budai Csaba Gépészeti modellezés MSc hallgató II. évfolyam

Konzulens: Dr. Insperger Tamás Egyetemi docens

"A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009

"Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben"
című program támogatta.

Budapest, 2013. április 24-26.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Mechanikai modell kialakítása	5
3. A sebességállapot és gyorsulásállapot leírása	6
4. Mozgásegyenletek	7
4.1. Felírás másodfajú Lagrange-egyenlettel	7
4.2. Felírás Newton-egyenletekkel	9
4.3. Felírás Appell-Gibbs egyenletekkel	10
5. A lineatizált rendszer állapotter-modelleje	13
6. Szabályozókör tervezése	15
6.1. Állapot irányíthatóság vizsgálata	15
6.2. Szabályozókör tervezése	16
6.2.1. Szabályozókör tervezése a kerék szabályozása nélküli esetben	16
6.2.2. Szabályozókör tervezése a kerék szabályozását tartalmazó esetben	17
6.3. Stabilitásvizsgálat	18
6.3.1. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozása nélküli esetben	18
6.3.2. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozását tartalmazó esetben	21
7. Digitális rendszer stabilitásvizsgálata	25
7.1. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozása nélküli esetben	26
7.2. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozását tartalmazó esetben	33
8. Számítógépes szimuláció és animáció	39
8.1. A zavarás hatásának figyelembe vétele	40
9. Geometria tervezése	42
10. Mérőrendszer tervezése	44
10.1. A mérőrendszer felépítése	44
10.2. Az érzékelők megválasztása	49
10.2.1. A választott MEMS szenzorok	49

10.2.2. A választott szögjeladó.....	50
10.3. A mérőkártya nyomtatott áramkör terve	50
11. Elektronika tervezése.....	51
11.1. A felhasznált processzor.....	52
11.2. Tápellátás megvalósítása.....	52
11.3. Kommunikáció a számítógéppel.....	53
11.4. Kommunikáció a motorvezérlő elektronikával	53
11.5. A vezérlő elektronika nyomtatott áramköri terve.....	54
12. Összefoglalás.....	55
13. Irodalomjegyzék	56
14. Melléklet	57

1. Bevezetés

Egy olyan robotot vizsgálunk, amely képes saját magát egyensúlyozni. A robotot modellezhetjük egy olyan inverz ingaként, ahol az inga egy kerékhez kapcsolódik. A mechanikai modell alapján felírhatjuk a rendszer nemlineáris mozgásegyenletét.

A felső egyensúlyi helyzet körüli linearizálás után kialakíthatjuk a rendszer állapot-tér modelljét, majd állapot-visszacsatolással meghatározzuk a szabályozáshoz szükséges nyomaték értékét.

Első közelítésben analóg rendszert feltételezünk. A valós idejű rendszer stabilitási tulajdonságait a Routh-Hurwitz stabilitási kritériummal vizsgáljuk. Ezután, mint mintavételes, (időkésést tartalmazó) digitális rendszert vizsgáljuk.

Mind analóg, mind pedig digitális rendszer esetén a stabilitási diagramokat négydimenziós stabilitási térképen ábrázoljuk. Különböző szabályozási paraméterek esetén vizsgáljuk a rendszer viselkedését numerikus szimuláció segítségével. A kapott eredményeket számítógépes szimuláció és animáció segítségével is szemléltetjük.

Felhasználva az analitikus számítások eredményeit egy kísérleti berendezést terveztünk és valósítottunk meg. Kiválasztjuk a szabályozáshoz használható beavatkozó egységet. A tervek alapján a szükséges alkotóelemeket legyártjuk, valamint összeszereljük a megtervezett beágyazott rendszert. A szükséges jelek mérésére alkalmas érzékelőket megválasztjuk, valamint megtervezzük az érzékelők jeleihez szükséges feldolgozó elektronikát.

A vezérlő elektronika központi egysége egy digitális jelfeldolgozó processzor (DSP), amely segítségével meghatározzuk a szabályozáshoz szükséges beavatkozó nyomatékot és továbbítjuk a motorvezérlő elektronikán keresztül a szervomotor felé. A vezérlő elektronika tartalmazza a processzor és a további perifériaelemek tápellátását, a jelek szintjének illesztését a processzorhoz. A megtervezett vezérlőelektronika továbbá tartalmaz egy flash memóriára történő adatmentési lehetőséget is.

A processzor és a motorvezérlő elektronika között szabványosított CANopen kommunikációt használunk, valamint a számítógép és a processzor közötti kommunikációt Bluetooth modul segítségével valósítjuk meg.

A megtervezett szerkezet alkatrészeinek legyártásában nyújtott segítségéért köszönet illeti Ladunga Károlyt.

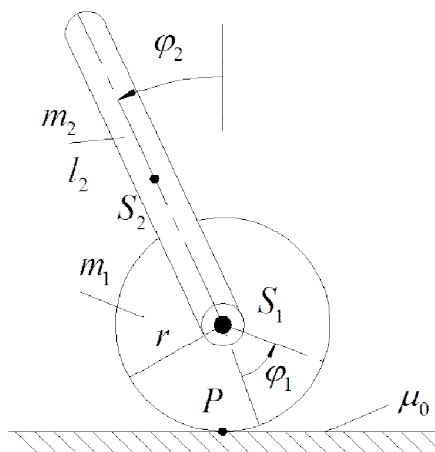
2. Mechanikai modell kialakítása

A dolgozatban egy Segway (forrás: www.segway.com) mozgását vizsgáljuk. A Segway mechanikai modellje egy olyan inverz inga, ahol az inga alsó csuklópontjához egy kereket kapcsolunk. A kerék segítségével tudjuk az inverz ingát vízszintesen mozgatni, szabályozni, valamint egyensúlyozni a rendszert.

A Segwayt síkbeli homogén tömegeloszlású, valamint állandó keresztmetszetű rúdként modellezzük, a kereket pedig síkbeli korongként. A rendszert alkotó testeket merev testként modellezzük. Az inga és a kerék közötti csatlakozási pontot súrlódásmentes csapnak tekintjük. A mechanikai modell $n = 2$ szabadsági fokú, a rendszert jellemző általános koordináták vektora a következő:

$$\mathbf{q}^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2], \quad (2.1)$$

ahol φ_1 a kerék szögelfordulása egy választott kiindulási pozícióhoz képest, φ_2 az inverz inga szöghelyezete a függőleges irányhoz képest. A mechanikai modell a 1. ábrán látható.



1. ábra: Mechanikai modell

A modellezés során feltesszük, hogy a rendszer geometriai paramétereit és a tömegek ismertek. Ezáltal a rendszert alkotó merev testek súlyponton átmenő, a síkra merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékai $(\Theta_{S1}, \Theta_{S2})$ meghatározhatóak [1].

$$\Theta_{S1} = \frac{1}{2} m_1 r^2, \quad \Theta_{S2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2, \quad (2.2)$$

ahol m_1 a kerék, m_2 az inga tömege, r a kerék sugara, l_2 az inga hossza.

3. A sebességállapot és gyorsulásállapot leírása

Egy merev test sebességállapota ismert a merev test egy adott pontjának sebessége, valamint a merev test szögsebességének ismeretében. Bármely pont sebessége a következő képlettel számítható:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}, \quad (3.1)$$

ahol $\mathbf{v}_B$ a keresett pont sebesség vektora, $\mathbf{v}_A$ az ismert pont sebesség vektora, $\boldsymbol{\omega}$ a merev test szögsebesség vektora, valamint $\mathbf{r}_{AB}$ az A pontból a B pontba mutató helyvektor [1].

A modellezés során feltesszük, hogy a kerék gördülést végez, azaz a talajjal érintkező pont a sebességpólus, tehát $\mathbf{v}_p \equiv \mathbf{0}$. Ezáltal kerék súlypontjának sebesség vektora a következő:

$$\mathbf{v}_{S1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{pS1}, \quad (3.2)$$

ahol $\mathbf{v}_{S1}$ a kerék súlypontjának sebességvektora, $\boldsymbol{\omega}_1$ a kerék szögsebesség vektora:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad -\dot{\phi}_1]^T, \quad (3.3)$$

valamint $\mathbf{r}_{pS1}$ a póluspontból a kerék súlypontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{r}_{pS1} = [0 \quad r \quad 0]^T. \quad (3.4)$$

Tehát a kerék súlypontjának sebességvektora:

$$\mathbf{v}_{S1} = [r\dot{\phi}_1 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (3.5)$$

Az inga súlypontjának sebességvektora:

$$\mathbf{v}_{S2} = \mathbf{v}_{S1} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S1S2}, \quad (3.6)$$

ahol $\mathbf{v}_{S2}$ az inga súlypontjának sebességvektora, $\boldsymbol{\omega}_2$ az inga szögsebesség vektora:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [0 \quad 0 \quad -\dot{\phi}_2]^T, \quad (3.7)$$

valamint $\mathbf{r}_{S1S2}$ a kerék súlypontjából az inga súlypontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{r}_{S1S2} = \left[\frac{l_2}{2} \sin(\phi_2) \quad \frac{l_2}{2} \cos(\phi_2) \quad 0 \right]^T. \quad (3.8)$$

Tehát az inga súlypontjának sebességvektora:

$$\mathbf{v}_{S2} = \left[r\dot{\phi}_1 + \frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2) \quad -\frac{l_2}{2} \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2) \quad 0 \right]^T. \quad (3.9)$$

A gyorsulás a sebesség idő szerinti első deriváltja, valamint a szöggyorsulás a szögsebesség első deriváltja.

A kerék súlypontjának gyorsulás vektora:

$$\mathbf{a}_{s1} = [r\ddot{\varphi}_1 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (3.10)$$

A kerék szöggyorsulás vektora:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = [0 \quad 0 \quad -\ddot{\varphi}_1]^T. \quad (3.11)$$

Az inga súlypontjának gyorsulás vektora:

$$\mathbf{a}_{s2} = \left[r\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) \quad -\frac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2) \quad 0 \right]^T. \quad (3.12)$$

Az inga szöggyorsulás vektora:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = [0 \quad 0 \quad -\ddot{\varphi}_2]^T. \quad (3.13)$$

4. Mozgásegyenletek

A mozgásegyenlet felírását másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével végezzük, de azokat ellenőrzésképp a Newton-egyenletekkel és az Appell-Gibbs egyenletekkel is levezetjük.

4.1. Felírás másodfajú Lagrange-egyenlettel

A másodfajú Lagrange-egyenlet csillapítatlan, gerjesztett esetben a következő:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*, \quad (4.1)$$

ahol T a rendszer teljes kinetikus energiája, U a rendszer teljes potenciális energiája, valamint $\mathbf{Q}^*$ az általános (nem potenciális) erők vektora [3].

A rendszer teljes kinetikus energiája a rendszert alkotó merev testek kinetikus energiáinak összege, amely síkmozgás esetén a következő:

$$T = \sum_{i=1}^2 T_i = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{Si} \omega_i^2 \right), \quad (4.2)$$

ahol m_i a merev test tömege, $\mathbf{v}_{Si}$ a merev test súlypontjának sebessége, Θ_{Si} merev testek súlypontján átmenő, a síkra merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékai, valamint ω_i a merev testek szögsebességei.

A kerék kinetikus energiája:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (r\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} \Theta_{s1} \dot{\varphi}_1^2. \quad (4.3)$$

Az inga kinetikus energiája:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(r\dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \right)^2 + \left(-\frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \Theta_{s2} \dot{\varphi}_2^2. \quad (4.4)$$

Tehát a teljes rendszer kinetikus energiája:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left[(m_1 + m_2) r^2 + \Theta_{s1} \right] \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{1}{4} m_2 l_2^2 + \Theta_{s2} \right) \dot{\varphi}_2^2 + m_2 r l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \right\}. \quad (4.5)$$

A rendszer teljes potenciális energiája a rendszert alkotó merev testek potenciális energiáinak összege, azaz:

$$U = \sum_{i=1}^2 U_i = \sum_{i=1}^2 m_i g h_{si}, \quad (4.6)$$

ahol m_i a merev test tömege, g a gravitációs gyorsulás, valamint h_{si} a referencia ponttól, azaz a potenciális energia nulla szintjétől a merev test súlypontjáig vett távolság.

A kerék potenciális energiája:

$$U_1 = m_1 g r. \quad (4.7)$$

Az inga potenciális energiája:

$$U_2 = m_2 g \left(r + \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) \right). \quad (4.8)$$

Tehát a teljes rendszer potenciális energiája:

$$U = (m_1 + m_2) g r + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos(\varphi_2). \quad (4.9)$$

A rendszerre ható általános erő vektor meghatározható a rendszerre ható külső erők teljesítménye alapján:

$$P = M(-\dot{\varphi}_1) + (-M)(-\dot{\varphi}_2), \quad (4.10)$$

Tehát az általános erő vektora:

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} -M \\ M \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Tehát az egyensúlyozott inga nemlineáris mozgásegyenlete:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{s1} + (m_1 + m_2) r^2 & \frac{1}{2} m_2 r l_2 \cos(\varphi_2) \\ \frac{1}{2} m_2 r l_2 \cos(\varphi_2) & \Theta_{s2} + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_2 r l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ \frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ M \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Az egyensúlyozott inga mozgásának vizsgálatához linearizáljuk a rendszert leíró nemlineáris mozgásegyenletet a felső egyensúlyi helyzete körül. Ebben az esetben csak kis szögkitérések esetén lesz érvényes a megoldás.

Az egyensúlyozott inga lineáris mozgásegyenlete:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{s1} + (m_1 + m_2)r^2 & \frac{1}{2}m_2rl_2 \\ \frac{1}{2}m_2rl_2 & \Theta_{s2} + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_2gl_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} M. \quad (4.13)$$

4.2. Felírás Newton-egyenletekkel

A mozgásegyenlet felírásához szükséges a dinamika két alapegyenlete:

$$[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_A]_A = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A, \quad (4.14)$$

ahol $\dot{\mathbf{I}}$ az impulzusderivált, $\mathbf{D}_A$ egy adott pontra felírt kinetikai nyomaték, $\mathbf{F}$ a rendszerre ható aktív és kényszererők eredője, valamint $\mathbf{M}_A$ a rendszerre ható erők nyomatéka egy adott pontra. Az erőrendszer meghatározásához készítsünk szabadtest-ábrát [1].

Súlypontra felírt mennyiségekkel a kinetikai nyomaték:

$$\mathbf{D}_S = \Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S. \quad (4.15)$$

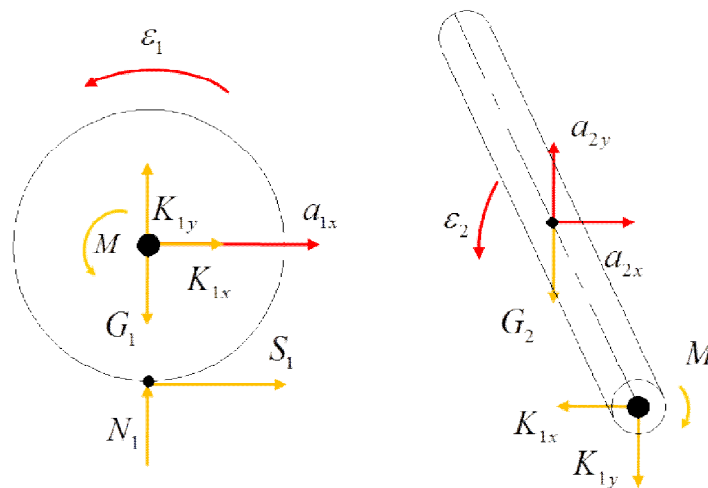
Síkmozgás esetén $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\Pi}_S$, ezért $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S \equiv \mathbf{0}$, ezért:

$$D_S = \dot{\Pi}_S = \Theta_{Sz} \varepsilon_z. \quad (4.16)$$

Ezáltal a mozgásegyenlet felírásához szükséges dinamika két alapegyenlete síkmozgás esetén:

$$[\dot{\mathbf{I}}; \dot{\Pi}_S]_S = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_S]_S. \quad (4.17)$$

A szabadtest-ábrát a 2. ábrán láthatjuk.



2. ábra: Szabadtest-ábra

A szabadtest-ábrára segítségével felírhatóak a következő egyenletek:

$$m_1 a_{1x} = S_1 + K_{1x}, \quad (4.18)$$

$$0 = N_1 - G_1 + K_{1y}, \quad (4.19)$$

$$\Theta_{S1} \varepsilon_{1z} = S_1 r + M, \quad (4.20)$$

$$m_2 a_{2x} = -K_{1x}, \quad (4.21)$$

$$m_2 a_{2y} = -K_{1y} - G_2, \quad (4.22)$$

$$\Theta_{S2} \varepsilon_{2z} = -K_{1x} \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) + K_{1y} \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) - M. \quad (4.23)$$

A számításhoz szükséges gyorsulás megtalálható a (3.10) egyenletben, valamint a szükséges szöggyorsulás a (3.11) egyenletben. Megoldva a (4.18)-(4.20)-(4.21) egyenletrendszert:

$$\left[\Theta_{S1} + (m_1 + m_2) r^2 \right] \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 r l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} m_2 r l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) = -M \quad (4.24)$$

A számításhoz szükséges gyorsulás megtalálható a (3.12) egyenletben, valamint a szükséges szöggyorsulás a (3.13) egyenletben. Megoldva a (4.21)-(4.22)-(4.23) egyenletrendszert:

$$\frac{1}{2} m_2 r l_2 \cos(\varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + \left(\Theta_{S2} + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \right) \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) = M \quad (4.25)$$

Összehasonlítva a (4.24)-(4.25) egyenletrendszert, a (4.12) egyenletrendszerrel, látható, hogy a Newton-egyenletekkel meghatározott mozgásegyenlet megegyezik a másodfajú Lagrange egyenletekkel meghatározott mozgásegyenletekkel.

4.3. Felírás Appell-Gibbs egyenletekkel

Az Appell-Gibbs egyenletek általános alakja:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{\Pi}, \quad (4.26)$$

ahol S az Appell-függvény, vagy gyorsulás energia, $\boldsymbol{\sigma}$ a kvázi-sebességek vektora, valamint $\boldsymbol{\Pi}$ a kvázi-erők vektora [3].

Az Appell-függvény merev testek esetén:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\omega}. \quad (4.27)$$

A (4.27) egyenlet síkmozgás esetén a következő formára írható át:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega^4. \quad (4.28)$$

A kvázi-sebességek szabadon választhatóak, nem feltétlenül az általános koordináták deriváltjai.

Jelen esetben válasszuk a kvázi-sebességeket az általános koordináták deriváltjainak, ezáltal a kvázi-sebességek vektora:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T = [\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2]^T. \quad (4.29)$$

Felhasználva a (3.3) és (3.7) egyenleteket a szögsebességek vektorai:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad -\sigma_1]^T, \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [0 \quad 0 \quad -\sigma_2]^T. \quad (4.31)$$

Felhasználva a (3.11) és (3.13) egyenleteket a szöggyorsulások vektorai:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = [0 \quad 0 \quad -\dot{\sigma}_1]^T, \quad (4.32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = [0 \quad 0 \quad -\dot{\sigma}_2]^T. \quad (4.33)$$

Felhasználva a (3.10) és (3.12) egyenleteket a gyorsulások vektorai:

$$\mathbf{a}_{s1} = [r\dot{\sigma}_1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{a}_{s2} = \left[r\dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\sigma}_2 \cos(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\sigma_2^2 \sin(\varphi_2) \quad -\frac{l_2}{2}\dot{\sigma}_2 \sin(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\sigma_2^2 \cos(\varphi_2) \quad 0 \right]^T. \quad (4.35)$$

Felírva a gyorsulásenergiát a kerékre:

$$S_1 = \frac{1}{2}m_1a_{s1}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{s1}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_{s1}\omega_1^4, \quad (4.36)$$

azaz

$$S_1 = \frac{1}{2}(m_1r^2 + \Theta_{s1})\dot{\sigma}_1^2 + f(\sigma_1). \quad (4.37)$$

Felírva a gyorsulásenergiát az ingára:

$$S_2 = \frac{1}{2}m_2a_{s2}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{s2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_{s2}\omega_2^4, \quad (4.38)$$

azaz

$$S_2 = -\frac{1}{2}m_2rl_2 \sin(\varphi_2)\sigma_2^2\dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2}m_2rl_2 \cos(\varphi_2)\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\sigma}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}m_2l_2^2 + \Theta_{s2}\right)\dot{\sigma}_2^2 + f(\sigma_2). \quad (4.39)$$

A gyorsulásenergia a (4.37) és (4.38) egyenletek alapján:

$$S = \sum_{i=1}^2 S_i. \quad (4.40)$$

A 2. ábrán található szabadtest-ábra segítségével felírjuk a teljesítmény tételt:

$$P = M(-\sigma_1) + (-M)(-\sigma_2) + (-M_{G_2})(-\sigma_2), \quad (4.41)$$

ezáltal meghatározzuk a kvázi-erők vektorát:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -M & M + M_{G_2} \end{bmatrix}^T, \quad (4.42)$$

ahol $M_{G_2} = \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin(\varphi_2)$.

Elvégezve a számításokat megkapjuk a mozgásegyenleteket az alábbi formában:

$$\sigma_1 = \dot{\varphi}_1, \quad (4.43)$$

$$\sigma_2 = \dot{\varphi}_2, \quad (4.44)$$

$$\left[\Theta_{S1} + (m_1 + m_2)r^2 \right] \dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2}m_2rl_2 \cos(\varphi_2) \dot{\sigma}_2 - \frac{1}{2}m_2rl_2 \sin(\varphi_2) \sigma_2^2 = -M, \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{2}m_2rl_2 \cos(\varphi_2) \dot{\sigma}_1 + \left(\Theta_{S2} + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \right) \dot{\sigma}_2 - \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin(\varphi_2) = M. \quad (4.46)$$

A kapott (4.43) - (4.46) egyenletrendszer megegyezik a korábban számított mozgásegyenletek Cauchy-féle normálalakjával, valamint a később meghatározott (5.5) egyenlettel, azaz az állapottér-modell főegyenletével.

5. A lineatizált rendszer állapotter-modellje

A (4.13) egyenlet paraméteresen:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

azaz:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = M\mathbf{b}, \quad (5.2)$$

ahol $\mathbf{M}$ a tömegmátrix, $\mathbf{S}$ a merevségi mátrix, $\mathbf{Q}^* = M\mathbf{b}$ az általános erő vektora, valamint $\mathbf{b} := [-1 \ 1]^T$.

Rendezzük át a (5.2) egyenletet:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q} + M\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.3)$$

ahol $\mathbf{M}^{-1}$ a tömegmátrix inverze. A tömegmátrix inverze paraméteres alakban:

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\text{ahol } w_{11} = \frac{4}{(6m_1 + m_2)r^2}, \quad w_{12} = -\frac{6}{(6m_1 + m_2)rl_2}, \quad w_{22} = \frac{6(3m_1 + 2m_2)}{(6m_1 + m_2)m_2l_2^2}.$$

Tehát a (5.3) paraméteresen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{12}s_{22} \\ 0 & -w_{22}s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} w_{12} - w_{11} \\ w_{22} - w_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

$$\text{Legyen } \tilde{\mathbf{S}} := \begin{bmatrix} 0 & -w_{12}s_{22} \\ 0 & -w_{22}s_{22} \end{bmatrix}, \text{ valamint } \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} w_{12} - w_{11} \\ w_{22} - w_{12} \end{bmatrix}.$$

Tehát a (5.5) átalakítható a következő formába:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{q} + M\tilde{\mathbf{b}}. \quad (5.6)$$

Mivel a (5.5) egyenletben a $\mathbf{q}$ vektort szorzó mátrix első oszlopa zérus, ezért a második egyenlet nem függ a φ_1 koordinátától. Ha a későbbiekben a kerék szöghelyzetét nem szabályozzuk, akkor az első egyenletet lecsatolhatjuk az egyenletrendszeről:

$$\ddot{\varphi}_1 = -w_{12}s_{22}\varphi_2 + (w_{12} - w_{11})M. \quad (5.7)$$

Ebben az esetben a rendszer leírásához szükséges differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi}_2 = -w_{22}s_{22}\varphi_2 + (w_{22} - w_{12})M. \quad (5.8)$$

Ha a későbbiekben a kerék szöghelyzetét is szabályozzuk, akkor szükséges a rendszer állapotter-modellje. Az állapotter-modell (ÁTM) kialakításához a (5.6) egyenletet Cauchy-féle normálalakra hozzuk, azaz a másodrendű differenciálegyenlet rendszert elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré alakítjuk. Az állapotter-modell általános alakja két egyenletből tevődik össze a (5.9) főegyenletből és a (5.10) segédegyenletből:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (5.10)$$

ahol $\mathbf{x}$ az állapotvektor, $\mathbf{u}$ a bemeneti vektor, $\mathbf{y}$ a kimeneti vektor, $\mathbf{A}$ a rendszer mátrix, $\mathbf{B}$ a bemeneti mátrix, $\mathbf{C}$ a kimeneti mátrix, valamint $\mathbf{D}$ a segéd mátrix [6].

A rendszer állapotvektora:

$$\mathbf{x} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2]^T. \quad (5.11)$$

A rendszer bemeneti vektora:

$$\mathbf{u} = M. \quad (5.12)$$

A rendszer kimenetén tetszőleges értékeket figyelhetünk meg, amelyek előállíthatóak az állapotvektor és a rendszer paramétereinek lineáris kombinációjaként, ekkor a kimeneti mátrix és a kimeneti vektor tetszőleges alakot vehet fel. Jelen esetben erre nincs szükség, ezért számunka elegendő az állapotter-modell főegyenletét vizsgálni. Az állapotter-modell főegyenlete paraméteres alakban a következő:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (5.13)$$

ahol $\mathbf{E}$ a 2×2 -es egységmátrix.

A konkrét paraméterekkel, a rendszermátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3m_2 g}{(6m_1 + m_2)r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(3m_1 + 2m_2)g}{(6m_1 + m_2)l_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

valamint a bemeneti mátrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2(2l_2 + 3r)}{(6m_1 + m_2)l_2 r^2} \\ \frac{6(m_2 l_2 + 3m_1 r + 2m_2 r)}{m_2(6m_1 + m_2)l_2^2 r} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

6. Szabályozókör tervezése

Az inga egyensúlyozásához értéktartó szabályozást valósítunk meg, ehhez a választott szabályozási eljárás az állapot-visszacsatolás. Az állapot-visszacsatolás tervezéséhez a rendszer állapottér-modelljére van szükség.

A szabályozási eljárás akkor alkalmazható, ha az állapotjelzők közvetlenül mérhetőek, vagy az adott paraméterek méréséből visszavezethetőek [5].

A szabályozókör tervezését elvégezzük a kerék szabályozása nélküli illetve a kerék szabályozását is tartalmazó esetre.

6.1. Állapot irányíthatóság vizsgálata

A rendszer állapotirányíthatóságát a Kálmán-féle rangfeltétellel vizsgáljuk, amely szerint a differenciálegyenlet-rendszer állapot irányítható, ha teljesül a következő feltétel:

$$\text{rang}(\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n. \quad (6.1)$$

Az (5.14) és (5.15) kifejezésben szereplő mátrixok paraméteresen a következők:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

illetve:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

ahol a_1 , a_2 , b_1 és b_2 jelen esetben független paraméterek.

Felhasználva az (6.1) összefüggéshez az (6.2) és (6.3) kifejezéseket:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1 b_2 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 b_2 \\ b_1 & 0 & a_1 b_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 b_2 & 0 \end{bmatrix} = 4. \quad (6.4)$$

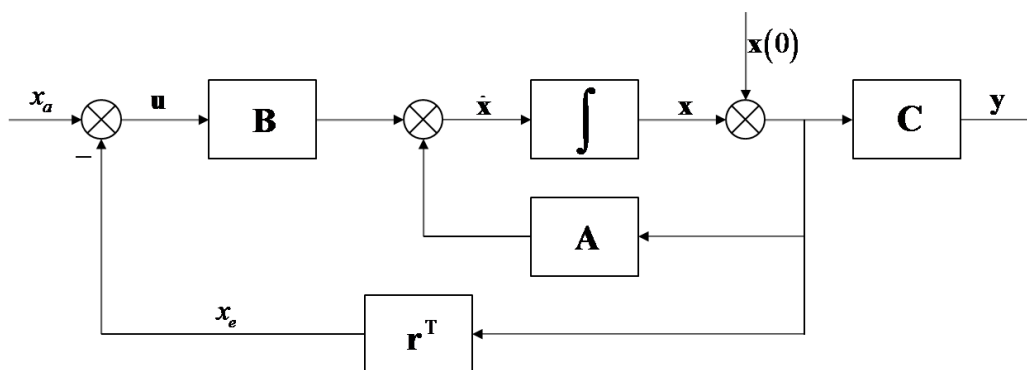
Mivel a képzett mátrix rangja 4, ezért a rendszer állapot irányítható.

6.2. Szabályozókör tervezése

A szabályozókör elvi vázlata a 3. ábrán látható. A kezdeti feltétel $t = 0$ időpillanatban $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}(0)$. Az alapjel, a szabályozás célja, azaz amit a szabályozás során szeretnénk megvalósítani. A szabályozó paraméterek vektora $\mathbf{r}^T$.

A hibajel x_e , amely a szabályozott jellemzőket tartalmazó konstans, azaz $x_e = \mathbf{r}^T \mathbf{x}$. Az állapot-visszacsatolás során a hibajel értékét negatívan csatoljuk vissza, ezért a bemeneti vektor az alapjel és a hibajel különbsége:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{r}^T \mathbf{x}. \quad (6.5)$$



3. ábra: Az állapot-visszacsatolás elvi vázlata

6.2.1. Szabályozókör tervezése a kerék szabályozása nélküli esetben

Amikor csak az inga függőleges helyzetben történő szabályozása a cél, a szerkezet vízszintes helyzete nem számít, akkor (5.8) egyenletet használjuk, azaz rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi}_2 = -w_{22}s_{22}\varphi_2 + (w_{22} - w_{12})M.$$

Az egy szabadsági fokú rendszerekhez tervezett állapot-visszacsatolás ekvivalens a klasszikus PD szabályozóval.

Ebben az esetben:

$$\mathbf{r}^T = [P_2 \quad D_2], \quad (6.6)$$

tehát a szabályozó nyomaték:

$$M = -(P_2\varphi_2 + D_2\dot{\varphi}_2). \quad (6.7)$$

A szabályozó paramétereit is tartalmazó differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi}_2 + (w_{22} - w_{12})D_2\dot{\varphi}_2 + [w_{22}s_{22} + (w_{22} - w_{12})P_2]\varphi_2 = 0. \quad (6.8)$$

6.2.2. Szabályozókör tervezése a kerék szabályozását tartalmazó esetben

Amikor a rendszert a vízszintes irányban is szabályozzuk, akkor a differenciálegyenlet rendszert nem csatlakoztathatjuk szét. Ebben az esetben a rendszer mozgását az állapotter-modellel jellemezzük. Ekkor, a szabályozó paraméterek vektora:

$$\mathbf{r}^T = [P_1 \quad P_2 \quad D_1 \quad D_2]. \quad (6.9)$$

Ezáltal a szükséges szabályozó nyomaték:

$$M = -\left(\sum_{i=1}^2 P_i \varphi_i + \sum_{i=1}^2 D_i \dot{\varphi}_i\right). \quad (6.10)$$

Ahogy korábban már meghatároztuk, a rendszer állapotter-modelljének főegyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Használjuk fel az (6.5) összefüggést az állapotter-modellel főegyenletéhez, valamint legyen:

$$\mathbf{A}^* := \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{r}^T, \quad (6.11)$$

ahol a rendszermátrix az (5.14) egyenlet alapján paraméteres alakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\text{ahol } a_{32} = -\frac{3m_2g}{c_1}, \quad a_{42} = \frac{3(3m_1 + 2m_2)g}{c_2}, \quad \text{továbbá } c_1 := (6m_1 + m_2)r, \quad c_2 := (6m_1 + m_2)l_2,$$

valamint a bemeneti mátrix az (5.15) egyenlet alapján paraméteres alakban:

$$\mathbf{B} = [0 \quad 0 \quad b_{31} \quad b_{41}]^T, \quad (6.13)$$

$$\text{ahol } b_{31} = -\frac{2(2l_2 + 3r)}{c_3r}, \quad b_{41} = \frac{6(m_2l_2 + 3m_1r + 2m_2r)}{c_3m_2l_2}, \quad \text{továbbá } c_3 := (6m_1 + m_2)l_2r.$$

Ezáltal a szabályozott rendszer egyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\mathbf{x}, \quad (6.14)$$

ahol $\mathbf{A}^*$ mátrix paraméteres alakban:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_{31}P_1 & a_{32} - b_{31}P_2 & -b_{31}D_1 & -b_{31}D_2 \\ -b_{41}P_1 & a_{42} - b_{41}P_2 & -b_{41}D_1 & -b_{41}D_2 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

6.3. Stabilitásvizsgálat

Jelen fejezetben az analóg rendszer stabilitásvizsgálatát végezzük el a kerék szabályozását tartalmazó és a kerék szabályozása nélküli esetekben.

6.3.1. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozása nélküli esetben

A stabilitás szükséges, és elégséges feltétele, hogy az (6.8) egyenletből képzett karakterisztikus polinom együtthatói pozitívak legyenek. Ahogy korábban számoltuk, a kerék szabályozás nélküli esetben a rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet, azaz az (6.8) egyenlet a következő:

$$\ddot{\varphi}_2 + (w_{22} - w_{12}) D_2 \dot{\varphi}_2 + [w_{22} s_{22} + (w_{22} - w_{12}) P_2] \varphi_2 = 0 .$$

A képzett karakterisztikus polinom általános esetben:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 , \quad (6.16)$$

A stabilitás feltétele:

$$a_i > 0 , \quad (6.17)$$

ahol $i = 0..2$.

A karakterisztikus polinom együttható:

$$a_2 = 1 , \quad (6.18)$$

$$a_1 = (w_{22} - w_{12}) D_2 = \frac{6(m_2 l_2 + 3m_1 l_2 + 2m_2 r)}{m_2 r l_2 (6m_1 + m_2)} D_2 , \quad (6.19)$$

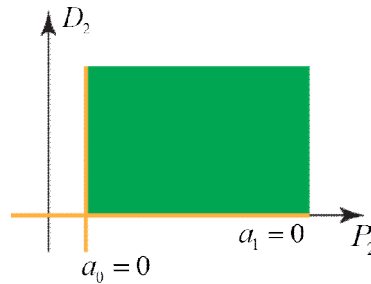
$$a_0 = w_{22} s_{22} + (w_{22} - w_{12}) P_2 = -\frac{3(3m_1 + 2m_2) g r^2 + 2(3r + 2l_2)}{(6m_1 + m_2) r^2 l_2} P_2 . \quad (6.20)$$

A stabilitás feltételei a (6.19) és (6.20) egyenlet alapján:

$$D_2 > 0 , \quad (6.21)$$

$$P_2 > \frac{1}{2} \frac{(3m_1 + 2m_2) m_2 g r l_2}{m_2 l_2 + (3m_1 + 2m_2) r} . \quad (6.22)$$

A (6.21) és (6.22) stabilitási feltételei alapján meghatározott stabilitás térkép a 4. ábrán látható. Ahol a narancssárga vonalak jelzik a stabilitási határvonalakat, valamint a zöld tartomány jelöli a stabil tartományt.



4. ábra: Analóg stabilitás térkép kerék szabályozása nélküli esetben

Az (6.8) egyenlet megoldásával ellenőrizhetjük a stabilitástérképet. A (6.8) megadható a következő alakban:

$$\ddot{\varphi}_2 + b\dot{\varphi}_2 + c\varphi_2 = 0, \quad (6.23)$$

ahol $b = (w_{22} - w_{12})D_2$, valamint $c = w_{22}s_{22} + (w_{22} - w_{12})P_2$.

A (6.23) egyenlet megoldása:

$$\varphi_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.24)$$

ahol a C_1, C_2 tetszőleges konstansokat a kezdeti feltételek segítségével határozhatjuk meg, valamint:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right).$$

A szimulációhoz használt paraméterkészlet megtalálható az 1. táblázatban.

1. táblázat: A szimuláció során felhasznált paraméterkészlet

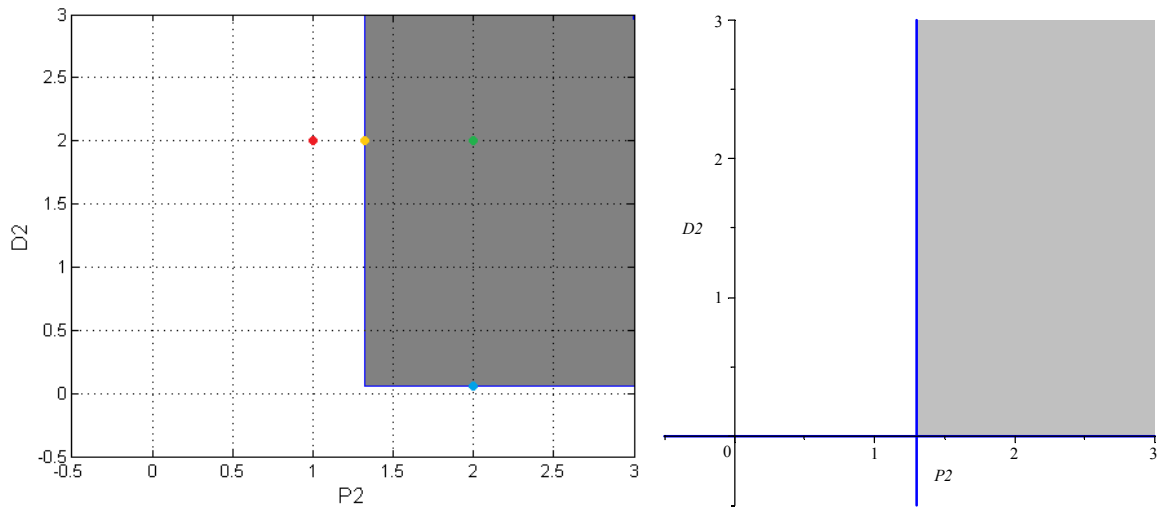
Adatok	Érték	Dimenzió
m_1	0,20	kg
m_2	3,50	kg
r	0,05	m
l_2	0,25	m
g	9,81	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Valamint legyenek a kezdeti feltételek:

$$\varphi_2(0) = \frac{\pi}{36}, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right].$$

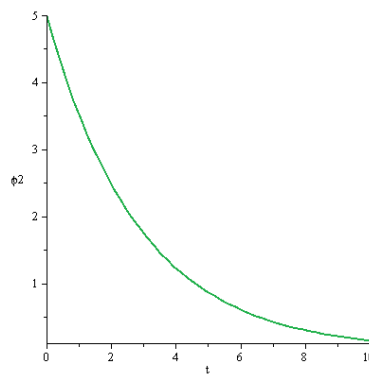
Az 5. ábrán látható diagramon zöld ponttal jelöljük a stabil tartományból választott szabályozó paramétereket, piros ponttal az instabil tartományból választott szabályozó paramétereket, valamint narancssárga és kék ponttal a stabil és instabil tartomány határáról választott szabályozó paramétereket. Az 5. ábrán a kék vonalak jelzik a stabilitási határvonalakat, valamint a szürke tartomány jelöli a stabil tartományt.

Az 5. ábrán a bal oldali ábrát a sajátértékek meghatározásával, numerikus szimulációval, míg a jobb oldali ábrát a Routh-Hurwitz kritérium feltételeinek kihasználásával, analitikus módszerekkel határoztuk meg.



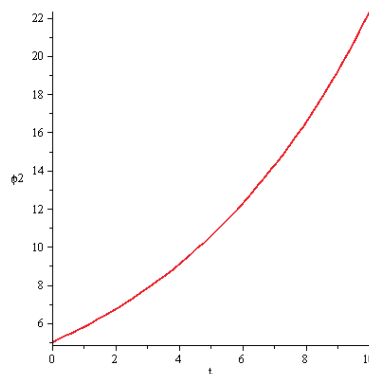
5. ábra: Analóg stabilitás térkép kerék szabályozása nélküli esetben a P_2 - D_2 síkon

Ha $P_2 = 2$, $D_2 = 2$, ez esetben a szöghelyzetet az idő függvényében leíró görbe konvergens viselkedést mutat. Az eredmény a 6. ábrán látható.



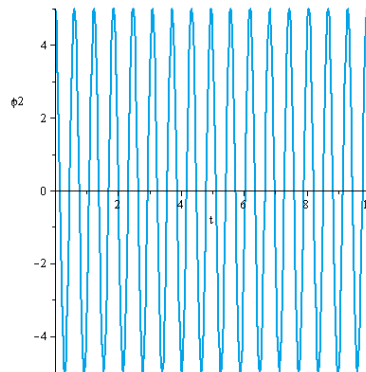
6. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése a stabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 1$, $D_2 = 2$, ez esetben a szöghelyzetet az idő függvényében leíró görbe divergens viselkedést mutat. Az eredmény a 7. ábrán látható.



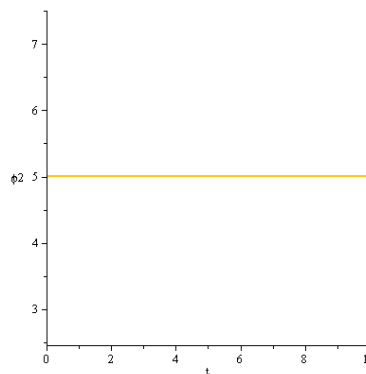
7. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése az instabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 2, D_2 = 0$, ez esetben a szöghelyzetet az idő függvényében leíró görbe állandó amplitúdójú lengést viselkedést mutat. Az eredmény a 8. ábrán látható. Látható, hogy a dinamikus stabilitás vesztes határáról választottunk szabályozóparaméter értékeket.



8. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 \approx 1,3, D_2 = 2$, ez esetben a szöghelyzetet az idő függvényében leíró görbe pedig konstans. Az eredmény a 9. ábrán látható. Látható, hogy a statikus stabilitás vesztes határáról választottunk szabályozóparaméter értékeket.



9. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

6.3.2. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozását tartalmazó esetben

A stabilitás feltétele, hogy $\mathbf{A}^*$ mátrix minden λ_i sajátérték reális része negatív legyen, azaz:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0. \quad (6.25)$$

A sajátértékek számítása a karakterisztikus egyenlet alapján:

$$\det(\mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (6.26)$$

ahol $\mathbf{E}$ a 4×4 -es egységmátrix.

A stabilitásvizsgálat a Routh-Hurwitz stabilitáskritériummal végezhető el, miszerint a stabilitás szükséges, és elégséges feltétele, hogy a (6.26) egyenletből képzett karakterisztikus polinom együtthatói pozitívak legyenek, valamint a karakterisztikus egyenlet együtthatóiból képzett Hurwitz-mátrix determinánsa, valamint minden főátló melletti aldetermináns értéke is pozitív legyen [4].

A (6.26) egyenlet alapján képzett karakterisztikus polinom:

$$\sum_{i=0}^4 a_i \lambda^i = 0. \quad (6.27)$$

A stabilitás feltétele, hogy a karakterisztikus polinom együtthatói legyenek pozitívak, azaz:

$$a_i > 0, \quad (6.28)$$

ahol $i = 0..4$.

A karakterisztikus polinom együtthatói:

$$a_4 = 1, \quad (6.29)$$

$$a_3 = b_{31}D_1 + b_{41}D_2, \quad (6.30)$$

$$a_2 = b_{41}P_2 + b_{31}P_1 - a_{42}, \quad (6.31)$$

$$a_1 = (b_{41}a_{32} - b_{31}a_{42})D_1, \quad (6.32)$$

$$a_0 = (b_{41}a_{32} - b_{31}a_{42})P_1. \quad (6.33)$$

A karakterisztikus polinom alapján a Hurwitz-mátrix determinánsa:

$$H = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (6.34)$$

Ha $a_3 > 0$ és $a_0 > 0$ feltétel teljesül, akkor további kritérium feltételt csak a H_2 és H_3 aldetermináns ad, miszerint:

$$H_2 = a_2a_3 - a_1a_4 > 0, \quad (6.35)$$

$$H_3 = a_1H_2 - a_0a_3^2 > 0. \quad (6.36)$$

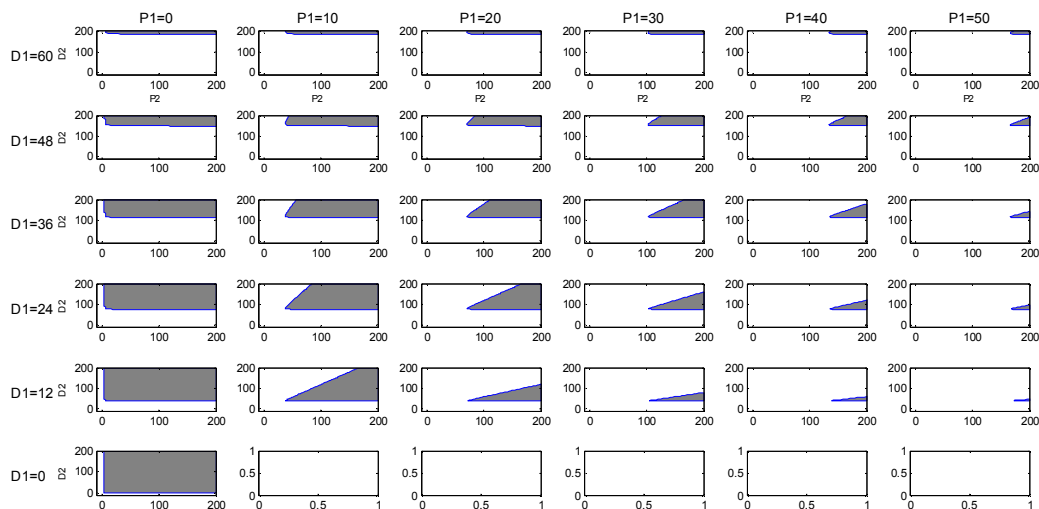
Mivel a Routh-Hurwitz stabilitáskritérium a négydimenziós paraméterterben meglehetősen bonyolult, ezért a stabilitást numerikusan határozzuk meg a MatLAB programmal, az $\mathbf{A}^*$ mátrix sajátértékeinek vizsgálatával.

Különböző P_1 , D_1 , P_2 , D_2 szabályozási tényezők esetén a sajátértékek numerikusan meghatározhatók, és a stabilitási tulajdonságok egy négydimenziós stabilitási diagramon szemléltethetők.

A szimulációhoz használt paraméterkészlet megtalálható az 1. táblázatban.

A kapott négydimenziós stabilitási térképet a 4. ábrán láthatjuk, ahol a stabil tartományokat a szürke mezők jelölik.

Inverz inga egyensúlyozása



10. ábra: Négydimenziós stabilitás térkép analóg szabályozás esetén

Vegyük a (6.14) lineáris elsőrendű differenciálegyenlet rendszert, amelynek általános megoldása:

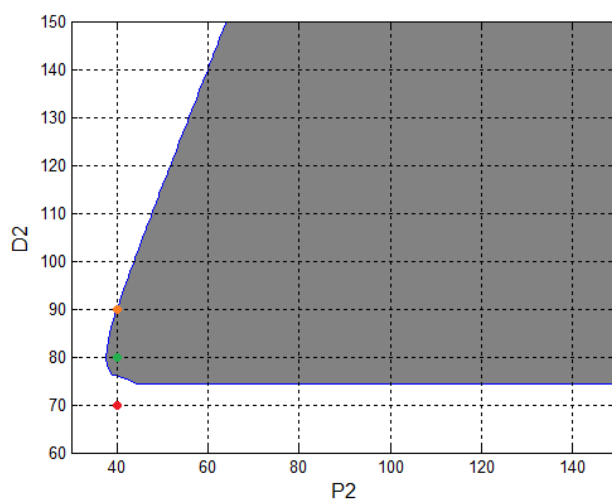
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\mathbf{A}^* t} = \mathbf{x}_0 \exp(\mathbf{A}^* t), \quad (6.37)$$

ahol $\mathbf{x}_0$ a kezdeti feltételek vektora [7].

Megoldva MatLAB programmal a (6.37) egyenletet vizsgáljuk, a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet leíró egyenletek viselkedését a következő kezdeti feltételek mellett:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi}{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (6.38)$$

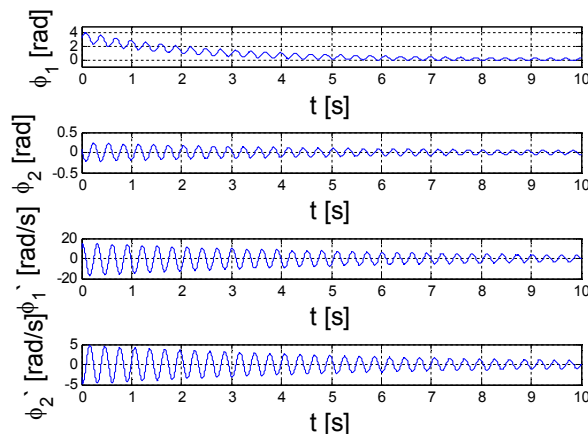
A szimulációhoz használt paraméterkészletet az 1. táblázatban találjuk. Válasszunk az 5. ábrán látható négydimenziós stabilitástérképről egy kétdimenziós stabilitás térképet, amely a 6. ábrán látható.



11. ábra: Stabilitási diagram a P2-D2 síkon

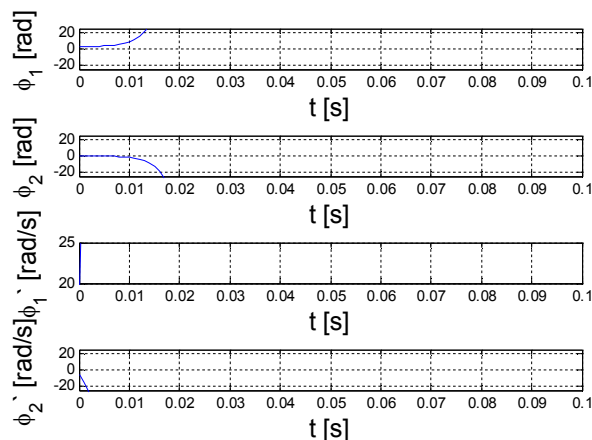
A 11. ábrán látható stabilitási diagramot a $P_1 = 10$, $D_1 = 24$ értékek rögzítésével kapjuk. A diagramon zölddel jelöljük a stabil tartományból választott szabályozó paramétereket, pirossal az instabil tartományból választott szabályozó paramétereket, valamint narancssárgával a stabil és instabil tartomány határáról választott szabályozó paramétereket.

Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 80$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék aszimptotikusan stabilis viselkedést mutatnak. Az eredmény a 12. ábrán látható.



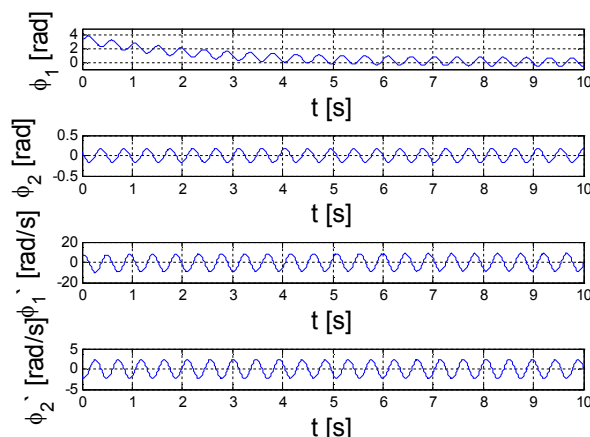
12. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése a stabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 70$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék divergens viselkedést mutatnak. Az eredmény a 13. ábrán látható.



13. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése az instabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 90$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék állandó amplitúdójú lengést mutatnak. Az eredmény a 14. ábrán látható.

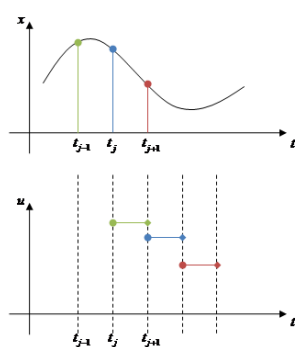


14. ábra: Analóg stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

7. Digitális rendszer stabilitásvizsgálata

Mivel a valóságban építhető szerkezetekben általában digitális szabályozást alkalmaznak, a jelen dolgozatban tárgyalt egyensúlyozó rendszert is diszkrét rendszerként modellezzük. A digitális hatás két egységből tevődik össze, a mintavételezett szenzorjelek hatásából, valamint az időkéseleltetett beavatkozásból. A mintavételezett, időkéseleltetett rendszer nulladrendű tartóként (ZOH) modellezhető [4].

A ZOH matematikai modellje szerint a mintavételezett jel ($\mathbf{x}$) a t_j és t_{j+1} mintavételezési időpillanat között állandó, valamint az időkéseleltetés (τ) hatása miatt, a beavatkozási folyamat során a beavatkozó jelet ($\mathbf{u}$) a következő mintavételezési periódusban tudjuk felhasználni. A ZOH matematikai modellje a 15. ábrán látható.



15. ábra: A nulladrendű tartó matematikai modellje

7.1. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozása nélküli esetben

Amikor csak az inga függőleges helyzetben történő szabályozása a cél, a szerkezet vízszintes helyzete nem számít, akkor (5.8) egyenletet használjuk, azaz a rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi}_2 = -w_{22}s_{22}\varphi_2 + (w_{22} - w_{12})M.$$

Ebben az esetben a szabályozó nyomaték:

$$M = -\left[P_2\varphi_2(t_j - \tau) + D_2\dot{\varphi}_2(t_j - \tau)\right], \quad t \in [t_j, t_j + \tau), \quad t_j = j\tau, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (7.1)$$

ahol τ a mintavételezési idő.

Felhasználva a következő kifejezést, dimenziótlanítjuk az időt:

$$\frac{d\Box}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{d\Box}{dT}. \quad (7.2)$$

A továbbiakban a dimenziótlan idő szerinti deriválást vesszővel jelöljük.

Ezáltal a (7.1) egyenlet dimenziótlan alakban:

$$\varphi_2''(T) - \tau^2 w_{22} \tilde{s}_{22} \varphi_2(T) = -(w_{22} - w_{12}) \left[P_2 \tau^2 \varphi_2(j-1) + D_2 \tau \varphi_2'(j-1) \right], \quad (7.3)$$

ahol $T \in [j, j+1)$ valamint $\tilde{s}_{22} := -s_{22}$.

Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$\beta^2 := \tau^2 w_{22} \tilde{s}_{22}, \quad (7.4)$$

valamint definiáljuk a következő dimenziótlan proporcionális és differenciális erősítési tényezőket:

$$p := (w_{22} - w_{12}) P_2 \tau^2, \quad d := (w_{22} - w_{12}) D_2 \tau. \quad (7.5)$$

Felhasználva a (7.4)-(7.5) mennyiségeket, a (7.3) egyenlet a következő lesz:

$$\varphi_2''(T) - \beta^2 \varphi_2(T) = -p \varphi_2(j-1) - d \varphi_2'(j-1). \quad (7.6)$$

Legyen a diszkrét szabályozó nyomaték:

$$u_j := -p \varphi_2(j-1) - d \varphi_2'(j-1). \quad (7.7)$$

Ezáltal a (7.6) egyenlet:

$$\varphi_2''(T) - \beta^2 \varphi_2(T) = u_j. \quad (7.8)$$

A (7.8) egyenlet általános megoldása:

$$\varphi_2(T) = C_1 e^{\beta T} + C_2 e^{-\beta T} - \frac{u_j}{\beta^2}. \quad (7.9)$$

Felhasználva a következő hiperbolikus és exponenciális függvények közötti azonosságokat:

$$e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x), \quad (7.10)$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x). \quad (7.11)$$

Ezáltal a (7.9) egyenlet megadható a következő alakban:

$$\varphi_2(T) = A \operatorname{ch}(\beta T) + B \operatorname{sh}(\beta T) - \frac{u_j}{\beta^2}, \quad (7.12)$$

ahol $A = C_1 + C_2$, valamint $B = C_1 - C_2$.

Elvégezve a (7.12) egyenlet deriválását a T dimenziótlan idő szerint:

$$\varphi_2'(T) = A\beta \operatorname{sh}(\beta T) + B\beta \operatorname{ch}(\beta T). \quad (7.13)$$

A kezdeti feltételek segítségével a $T = 0$ időpillanatban:

$$\varphi_2(0) = \varphi_2(j) = A - \frac{u_j}{\beta^2} \rightarrow A = \varphi_2(j) + \frac{u_j}{\beta^2}, \quad (7.14)$$

$$\varphi_2'(0) = \varphi_2'(j) = B\beta \rightarrow B = \frac{\varphi_2'(j)}{\beta}. \quad (7.15)$$

Felhasználva a kezdeti feltételek alapján kapott összefüggéseket, a (7.12)-(7.13) egyenletek:

$$\varphi_2(j+1) = \left(\varphi_2(j) + \frac{u_j}{\beta^2} \right) \operatorname{ch}(\beta) + \left(\frac{\varphi_2'(j)}{\beta} \right) \operatorname{sh}(\beta) - \frac{u_j}{\beta^2}, \quad (7.16)$$

$$\varphi_2'(j+1) = \left(\varphi_2(j) + \frac{u_j}{\beta^2} \right) \beta \operatorname{sh}(\beta) + \left(\frac{\varphi_2'(j)}{\beta} \right) \beta \operatorname{ch}(\beta), \quad (7.17)$$

azaz

$$\varphi_2(j+1) = \operatorname{ch}(\beta) \varphi_2(j) + \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} \operatorname{sh}(\beta) \varphi_2'(j) + \frac{\operatorname{ch}(\beta) - 1}{\beta^2} u_j, \quad (7.18)$$

$$\varphi_2'(j+1) = \beta \operatorname{sh}(\beta) \varphi_2(j) + \operatorname{ch}(\beta) \varphi_2'(j) + \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} u_j. \quad (7.19)$$

A (7.7) egyenlet alapján a következő időpillanatra számított diszkrét szabályozó erő:

$$u_{j+1} = -p\varphi_2(j) - d\varphi_2'(j), \quad (7.20)$$

Felhasználva a (7.18)-(7.19), valamint a (7.20) egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} \varphi_2(j+1) \\ \varphi_2'(j+1) \\ u_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\beta) & \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} & \frac{\operatorname{ch}(\beta)-1}{\beta^2} \\ \beta \operatorname{sh}(\beta) & \operatorname{ch}(\beta) & \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} \\ -p & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2(j) \\ \varphi_2'(j) \\ u_j \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

$$\text{Legyen } \tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\beta) & \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} & \frac{\operatorname{ch}(\beta)-1}{\beta^2} \\ \beta \operatorname{sh}(\beta) & \operatorname{ch}(\beta) & \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} \\ -p & -d & 0 \end{bmatrix}.$$

A (7.21) egyenlet a következő diszkrét leképezést jelenti:

$$\mathbf{y}_{j+1} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y}_j, \quad (7.22)$$

amely megadható általánosan a következő differencia egyenletként:

$$\mathbf{y}(T+1) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y}(T). \quad (7.23)$$

Felhasználva a $\mathbf{y}(T) = \mathbf{K} e^{\lambda T}$ exponenciális próbafüggvényt, a következő karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \mu \mathbf{E}) = 0, \quad (7.24)$$

ahol $\mu = e^\lambda$, valamint $\mathbf{E}$ az 3×3 egységmátrix.

A stabilitásvizsgálathoz számoljuk ki $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix sajátértékeit a (7.24) egyenlet alapján. Mintavételes rendszer esetén a stabilitás feltétele, hogy a μ sajátértékek, azaz a karakterisztikus multiplikátorok a komplex egységkörön belül helyezkedjenek el, azaz:

$$|\mu| < 1. \quad (7.25)$$

A (7.24) egyenlet alapján:

$$\mu^3 - 2 \operatorname{ch}(\beta) \mu^2 + \left(1 + \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} d + \frac{\operatorname{ch}(\beta)-1}{\beta^2} p\right) \mu + \left(\frac{\operatorname{ch}(\beta)-1}{\beta^2} p - \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} d\right) = 0. \quad (7.26)$$

Elvégezve a Möbius transzformációt, azaz:

$$\mu := \frac{\eta + 1}{\eta - 1}. \quad (7.27)$$

A Möbius transzformáció alkalmazásával a (7.26) egyenlet a következőre módosul:

$$a_3\eta^3 + a_2\eta^2 + a_1\eta + a_0 = 0, \quad (7.28)$$

ahol

$$a_3 = 2 \left[1 - \operatorname{ch}(\beta) + \frac{\operatorname{ch}(\beta) - 1}{\beta^2} p \right], \quad (7.29)$$

$$a_2 = 2 \left[1 - \operatorname{ch}(\beta) + \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} d - 2 \frac{\operatorname{ch}(\beta) - 1}{\beta^2} p \right], \quad (7.30)$$

$$a_1 = 2 \left[1 + \operatorname{ch}(\beta) - 2 \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} d + \frac{\operatorname{ch}(\beta) - 1}{\beta^2} p \right], \quad (7.31)$$

$$a_0 = 2 \left[1 + \operatorname{ch}(\beta) + \frac{\operatorname{sh}(\beta)}{\beta} d \right]. \quad (7.32)$$

Möbius transzformáció alkalmazásával a stabilitás feltétele:

$$\operatorname{Re}\{\eta_i\} < 0, \quad (7.33)$$

ahol $i = 1, 2, 3$.

Tehát a stabilitásvizsgálatot elvégezhetjük a Routh-Hurwitz stabilitáskritériummal. Miszerint a (7.29)-(7.30)-(7.31)-(7.32) kifejezések, azaz a (7.28) karakterisztikus egyenlet együtthatói legyenek pozitívak.

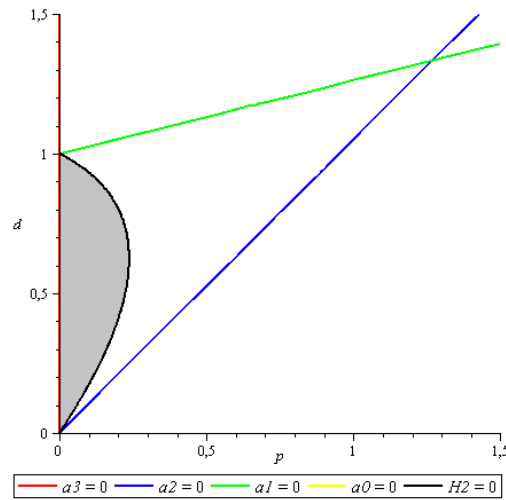
A (7.28) karakterisztikus polinom alapján a Hurwitz-mátrix determinánsa:

$$H = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (7.34)$$

Ha $a_0 > 0$ feltétel teljesül, akkor további kritérium feltételt csak a H_2 aldetemináns ad, miszerint:

$$H_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (7.35)$$

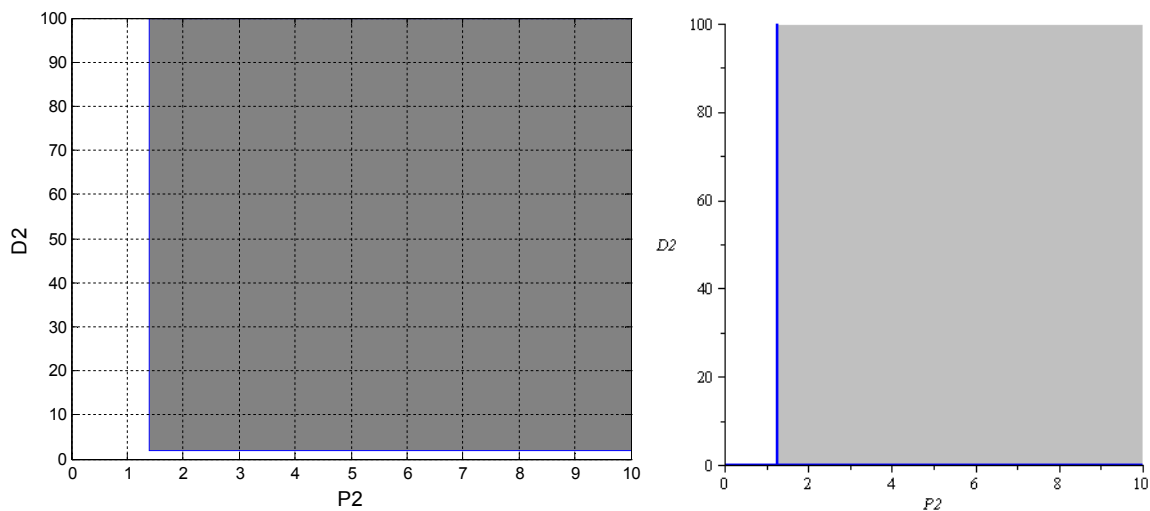
A kapott feltétel rendszert p - d dimenziótlan szabályozó paraméterek síkján ábrázoltuk. A határgörbék a 16. ábrán láthatóak. A 16. ábrán a szürke szín jelöli a stabil tartományt.



16. ábra: Digitális stabilitási térkép p - d dimenziótlan szabályozó paraméterek síkján

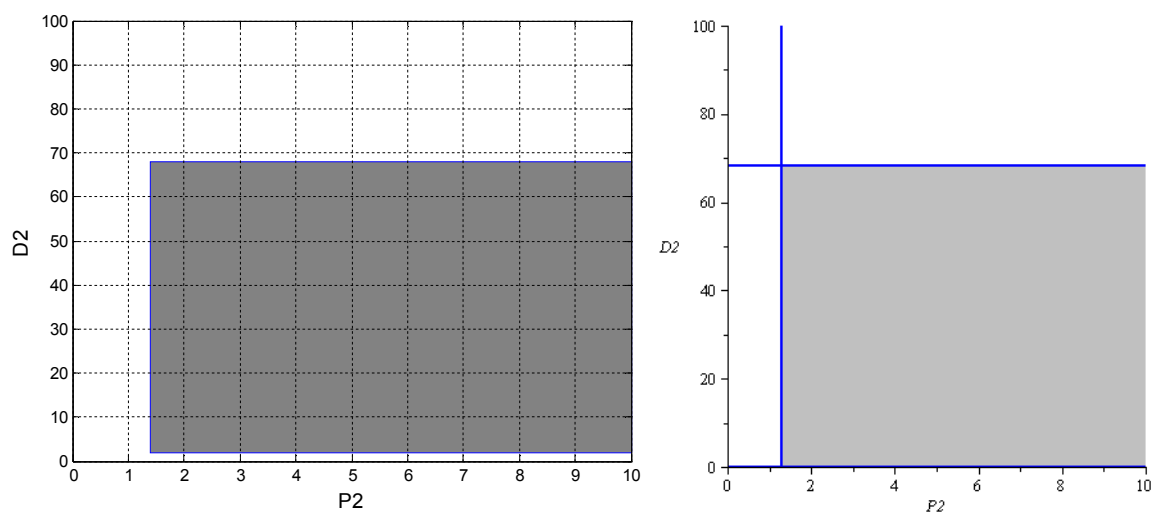
Az 17. 18. 19. ábrán a kék vonalak jelzik a stabilitási határvonalakat, valamint a szürke tartomány jelöli a stabil tartományt. Az 17. 18. 19. ábrán a bal oldali ábrát a sajátértékek numerikus meghatározásával, míg a jobb oldali ábrát a Routh-Hurwitz kritérium feltételeinek kihasználásával, analitikus módszerekkel határoztuk meg.

A 17. ábrán látható stabilitási térképet $\tau = 0,01$ [ms] mintavételezési idő mellett vizsgáltuk.



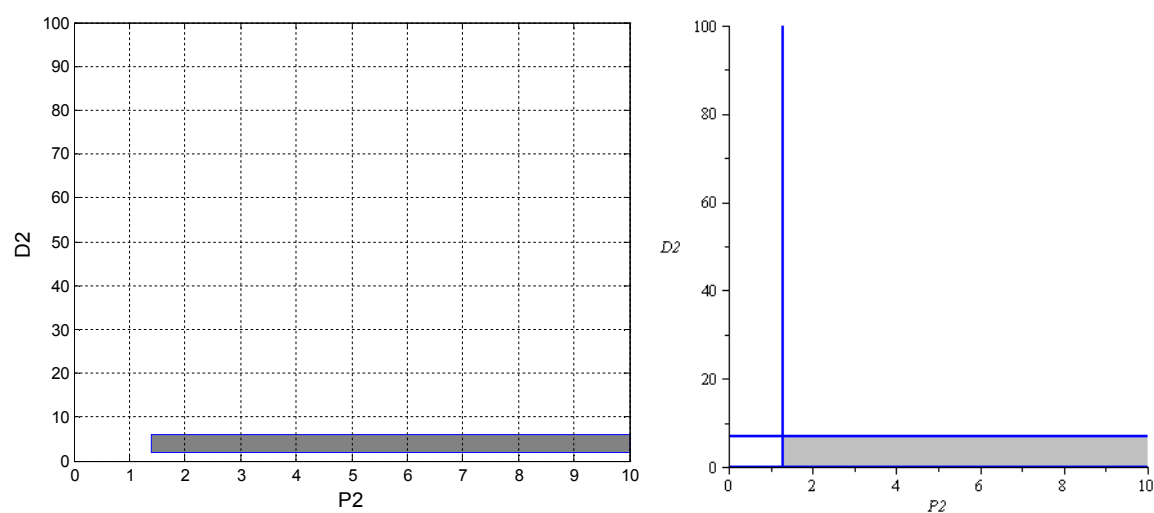
17. ábra: Digitális stabilitási térkép a P_2 - D_2 síkon, $\tau = 0,01$ [ms] esetén

A 18. ábrán látható stabilitási térképet $\tau = 0,1$ [ms] mintavételezési idő mellett vizsgáltuk.



18. ábra: Digitális stabilitási térkép a P_2 - D_2 síkon, $\tau = 0,1$ [ms] esetén

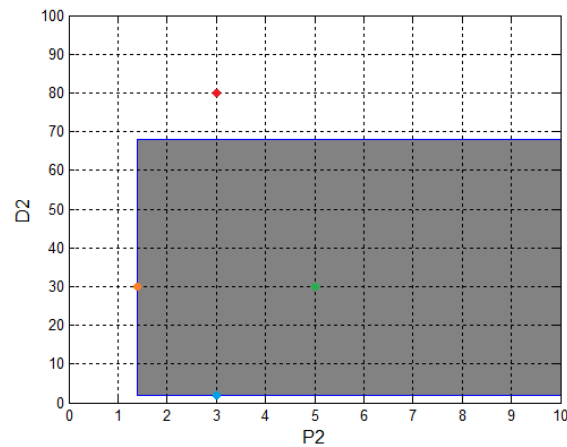
A 19. ábrán látható stabilitási térképet $\tau = 1$ [ms] mintavételezési idő mellett vizsgáltuk.



19. ábra: Digitális stabilitási térkép a P_2 - D_2 síkon, $\tau = 1$ [ms] esetén

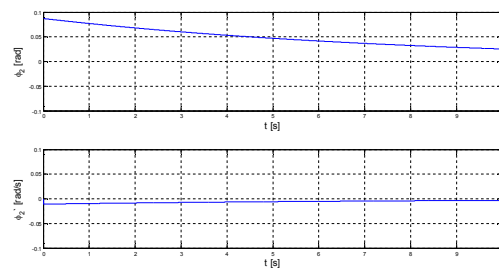
Inverz inga egyensúlyozása

A 20. ábrán látható diagramon zöld ponttal jelöljük a stabil tartományból választott szabályozó paramétereket, piros ponttal az instabil tartományból választott szabályozó paramétereket, valamint narancssárga és kék ponttal a stabil és instabil tartomány határáról választott szabályozó paramétereket.



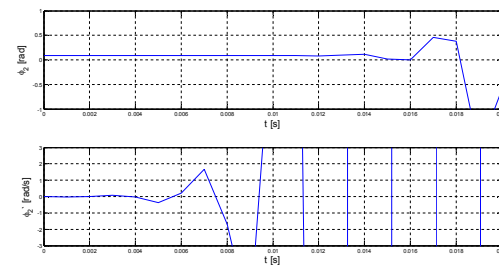
20. ábra: Digitális stabilitási térkép a P_2 - D_2 síkon, $\tau = 0,1$ [ms] esetén

Ha $P_2 = 5$, $D_2 = 30$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék aszimptotikusan stabilis viselkedést mutatnak. Az eredmény a 21. ábrán látható.



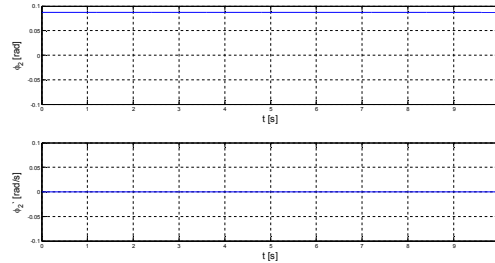
21. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése a stabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 3$, $D_2 = 80$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék divergens viselkedést mutatnak. Az eredmény a 22. ábrán látható.



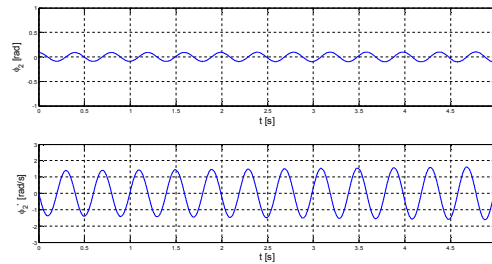
22. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése az instabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 \approx 1,3$, $D_2 = 30$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék állandók, tehát ebben az esetben a kezdeti feltételt folyamatosan tartjuk. Látható, hogy a statikus stabilitás vesztes határáról választottunk szabályozóparaméter értékeket. Az eredmény a 23. ábrán látható.



23. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

Ha $P_2 = 3$, $D_2 = 0$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék állandó amplitúdójú lengést mutatnak. Látható, hogy a dinamikus stabilitás vesztes határáról választottunk szabályozóparaméter értékeket. Az eredmény a 24. ábrán látható.



24. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

7.2. Stabilitásvizsgálat a kerék szabályozását tartalmazó esetben

Az időkéseleltetett, mintavételezett differenciálegyenlet rendszer általános alakja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t_j - \tau), \quad t \in [t_j, t_j + \tau), \quad t_j = j\tau, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (7.36)$$

ahol τ a mintavételezési idő.

A ZOH matematikai modellje értelmében $\mathbf{u}(t_j - \tau) = \mathbf{u}(t_{j-1})$ állandó a $t \in [t_j, t_j + \tau)$ intervallumon. ezért a (7.36) funkcionál differenciálegyenlet egy inhomogén lineáris közönséges differenciálegyenletként kezelhető, melynek általános megoldása a változók variálásának módszerével levezethető egy tetszőleges későbbi t időpillanatra:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_j)} \mathbf{x}(t_j) + \int_{t_j}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}) ds, \quad (7.37)$$

Ha $t = t_j$:

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x}(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{\mathbf{A}(t_{j+1}-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}) ds, \quad (7.38)$$

azaz

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x}(t_j) + \int_0^{\tau} e^{\mathbf{A}(\tau-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}) ds. \quad (7.39)$$

Legyen $\Phi = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)} = \exp(\mathbf{A}\tau)$, így a (7.37) egyenlet egy konkrét t_1 időpillanatban:

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-s)} ds \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}), \quad (7.40)$$

ahol a kezdeti feltételek a $t = 0$ időpillanatban $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Abban az esetben, ha az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, a (7.40) egyenletben szereplő integrálszámítás elvégezhető a következőképpen:

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi \mathbf{x}_0 + \left[-\mathbf{A}^{-1} \cdot e^{\mathbf{A}(t_1-s)} \right]_{t_0}^{t_1} \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}). \quad (7.41)$$

A Newton-Leibniz formula felhasználásával a (7.41) egyenletet megoldjuk:

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1} (\Phi - \mathbf{E}) \mathbf{B}\mathbf{u}(t_{j-1}). \quad (7.42)$$

Legyen $\mathbf{T} := \mathbf{A}^{-1} (\Phi - \mathbf{E})$, valamint legyen $\Gamma = \mathbf{T}\mathbf{B}$.

Általánosítsuk (7.42) egyenletet tetszőleges mintavételezési időpillanatra:

$$\mathbf{x}(t_{j+1}) = \Phi \mathbf{x}(t_j) + \Gamma \mathbf{u}(t_{j-1}). \quad (7.43)$$

A bemeneti jel mintavételezett alakja:

$$\mathbf{u}(t_j) = -\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t_j). \quad (7.44)$$

A (7.43) és (7.44) egyenletek alapján levezethető a következő diszkrét leképezés:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_{j+1}) \\ \mathbf{u}(t_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_j) \\ \mathbf{u}(t_{j-1}) \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

Abban az esetben, ha az $\mathbf{A}$ mátrix nem invertálható, a (7.40) egyenletben szereplő integrálszámítást közvetlenül számoljuk. Ebben az esetben:

$$\mathbf{T} = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} ds. \quad (7.46)$$

$$\text{Legyen } \tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{\Gamma} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

A stabilitásvizsgálathoz számoljuk ki $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \mu \mathbf{E}) = 0, \quad (7.47)$$

ahol $\mu = e^\lambda$, valamint $\mathbf{E}$ az 5×5 egységmátrix.

Mintavételes rendszer esetén a stabilitás feltétele, hogy a μ sajátértékek a komplex egységkörön belül helyezkedjenek el, azaz:

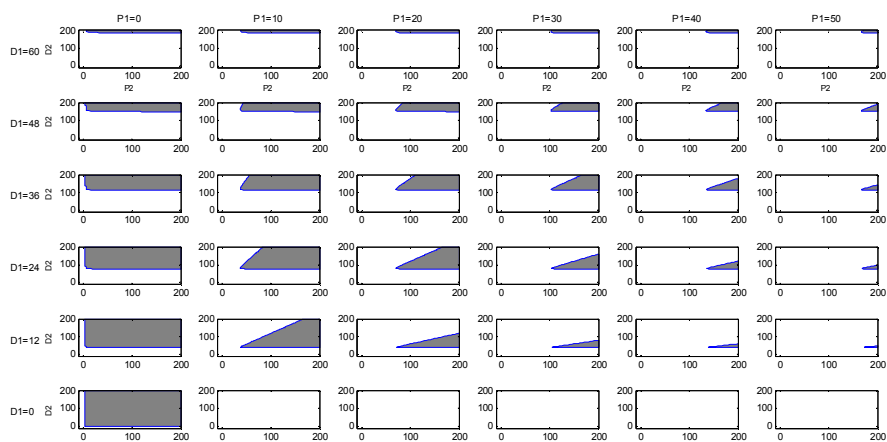
$$|\mu| < 1. \quad (7.48)$$

Hasonlóan az analóg rendszerhez a MatLAB program segítségével rajzolunk négydimenziós stabilitás térképeket. A futtatáshoz használt geometriai paraméterek megegyeznek az analóg modellhez felhasznált paraméterekkel, amelyek az 1. táblázatban megtalálhatóak. A stabilitást különböző mintavételezési idő mellett vizsgáljuk:

$$\tau = k \cdot 0,01 [ms], \quad (7.49)$$

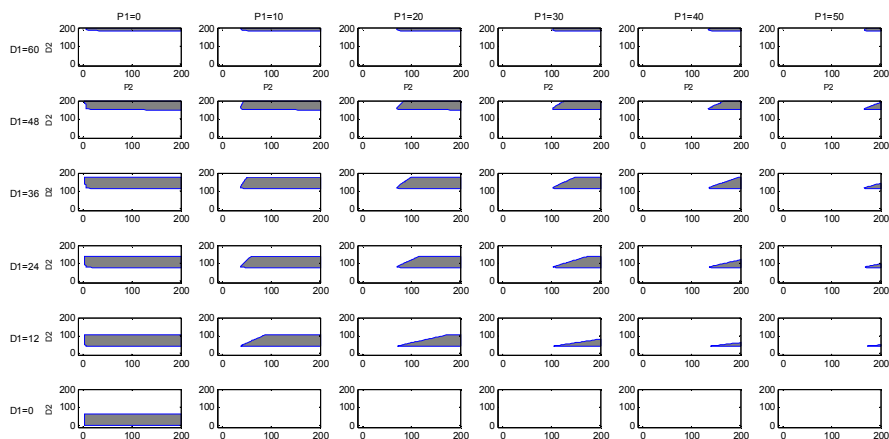
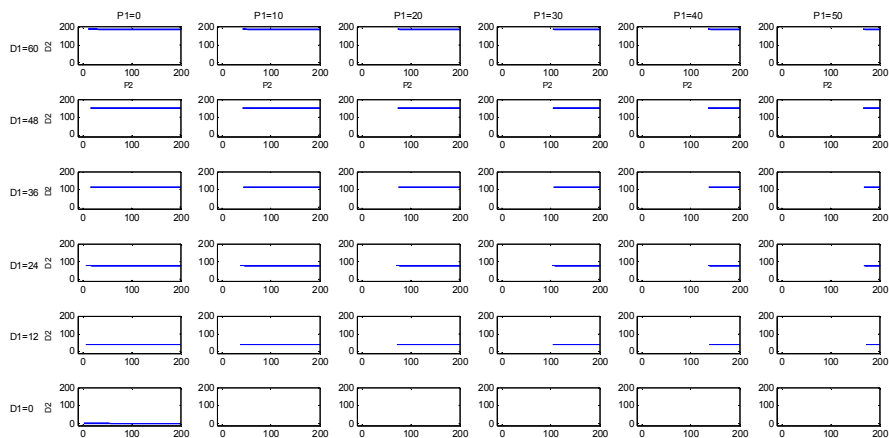
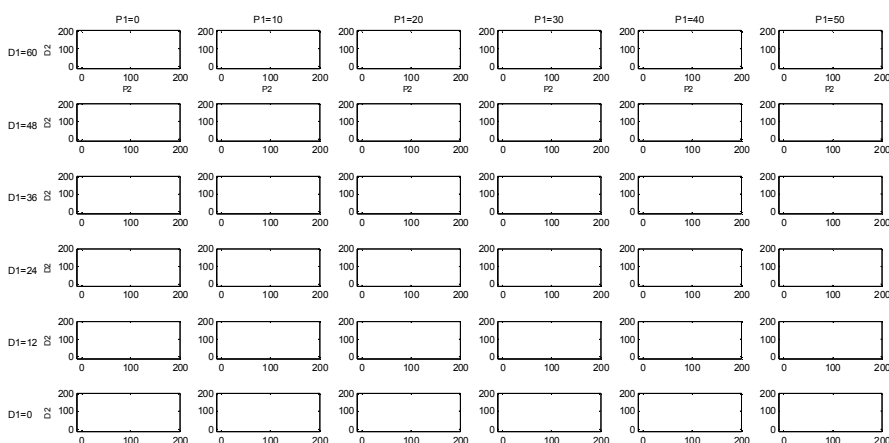
ahol $1 \leq k \leq 500$.

A meghatározott stabilitási térképeket a 25-28. ábrán láthatjuk.



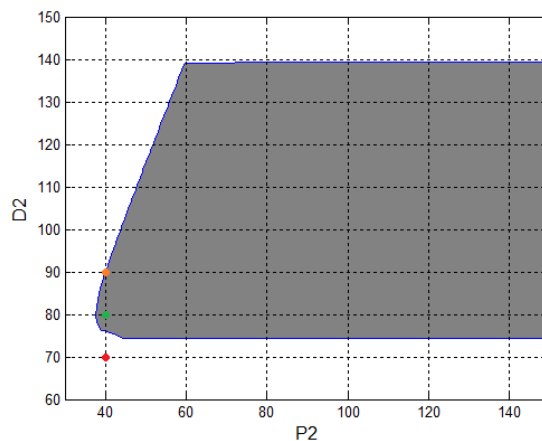
25. ábra: Digitális rendszer stabilitás térképe $k=1$ esetén ($\tau = 0,01$ [ms])

Inverz inga egyensúlyozása

26. ábra: Digitális rendszer stabilitás térképe $k=10$ esetén ($\tau = 0,1$ [ms])27. ábra: Digitális rendszer stabilitás térképe $k=100$ esetén ($\tau = 1$ [ms])28. ábra: Digitális rendszer stabilitás térképe $k=500$ esetén ($\tau = 5$ [ms])

Ha $k = 500$, akkor a rendszer elveszíti a stabilitását, nem találunk stabil tartományt a vizsgált P és D értékekre. Ha $k = 1$, akkor a mintavételezés és az időkézés hatása gyakorlatilag elhanyagolható, ebben az esetben visszakapjuk az analóg rendszer stabilitási térképét.

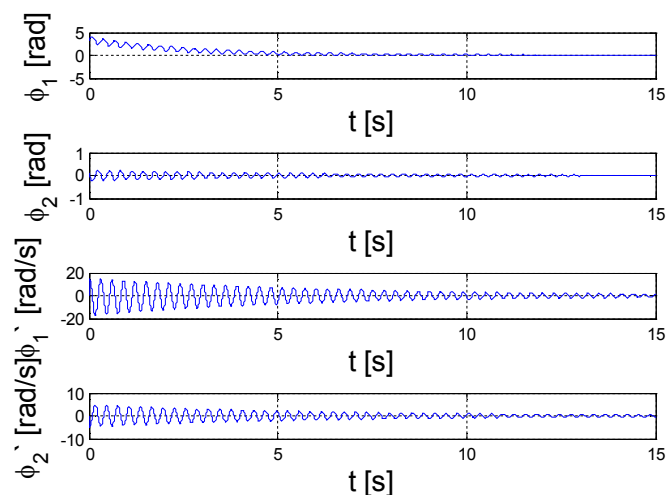
Ha $1 \leq k \leq 500$ értéktartomány között vizsgáljuk a rendszert, ha k értékét növeljük, akkor a $k = 1$ érték esetén kapott stabil tartomány folyamatosan csökken. Tehát a mintavételezés elrontja a rendszer stabilitását, minél lassabban tudjuk az analóg jelet mintavételezni, annál nagyobb mértékben veszítünk a stabil tartományból.



29. ábra: Stabilitási diagram a P_2 - D_2 síkon

A 29. ábrán látható stabilitási diagramot a $P_1 = 10$, $D_1 = 24$ értékek rögzítésével kapjuk $\tau = 0,1$ [ms], azaz $k = 10$ esetén. A diagramon zölddel jelöljük a stabil tartományból választott szabályozó paramétereket, pirossal az instabil tartományból választott szabályozó paramétereket, valamint narancssárgával a stabil és instabil tartomány határáról választott szabályozó paramétereket.

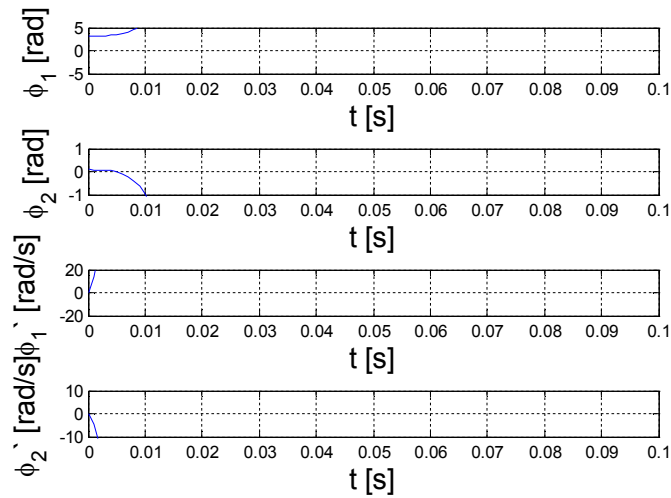
Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 80$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék aszimptotikusan stabilis viselkedést mutatnak. Az eredmény a 30. ábrán látható.



30. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése a stabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

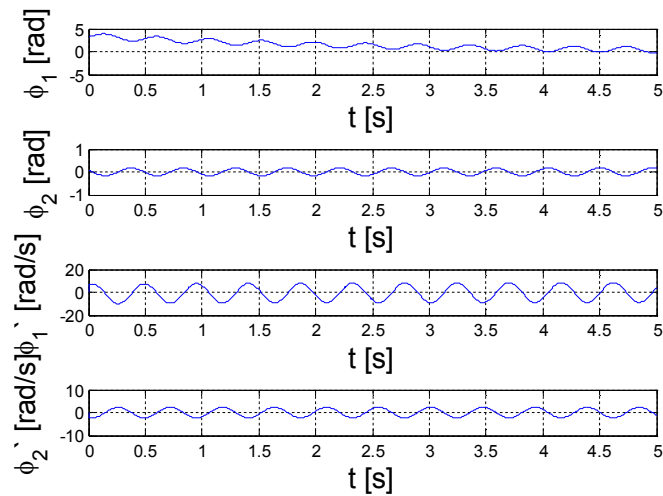
Inverz inga egyensúlyozása

Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 70$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék divergens viselkedést mutatnak. Az eredmény a 31. ábrán látható.



31. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése az instabil tartományból választott szabályozó paraméterekkel

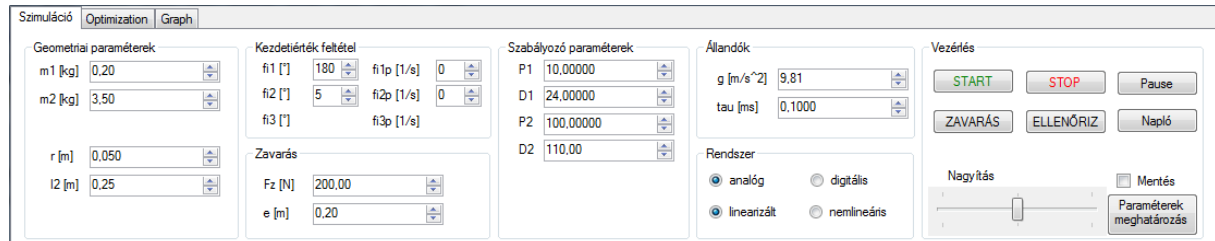
Ha $P_2 = 40$, $D_2 = 90$, ez esetben a szöghelyzetet, illetve a szögsebességet az idő függvényében leíró görbék állandó amplitúdójú lengést mutatnak. Az eredmény a 32. ábrán látható.



32. ábra: Digitális stabilitási térkép ellenőrzése a stabilitás határáról választott szabályozó paraméterekkel

8. Számítógépes szimuláció és animáció

A szerkezet mozgásának szemléltetésére, a szerkezet viselkedésének elemzésére, ellenőrzésére készült egy számítógépes animációs program, amelyet a C# programnyelven készült Microsoft Visual Studio 2010 fejlesztői környezetben készítettük el. A program kezelői felülete a 33. ábrán látható. A program rajzoló felülete és grafikonrajzoló modulja a 34. ábrán látható.



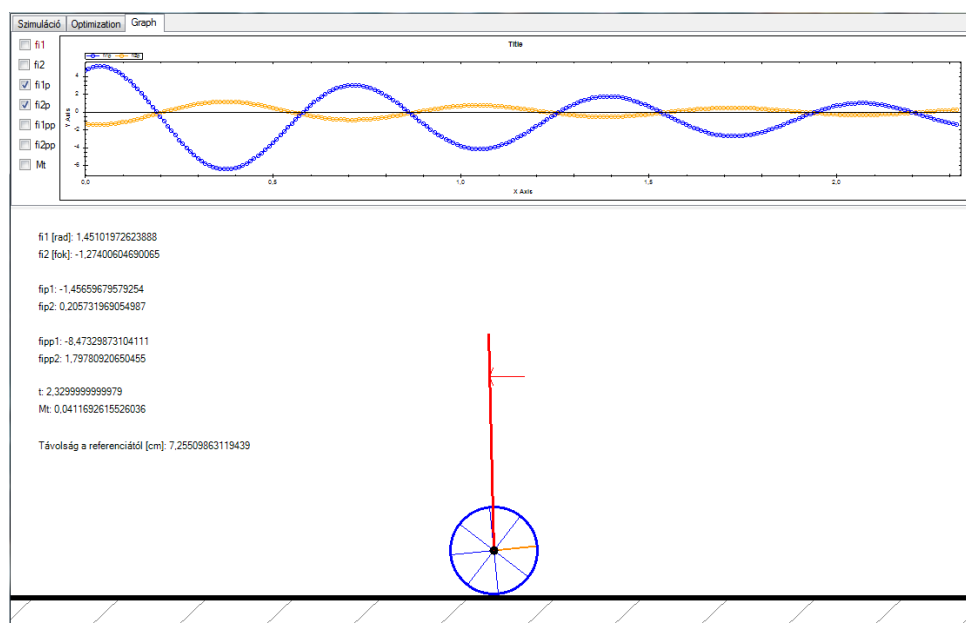
33. ábra: Az animációs szoftver kezelői felülete

Az animációs programmal az ELLENŐRIZ gomb lenyomásával vizsgálhatjuk a rendszer stabilitását. A START gomb indítja, a STOP gomb állítja meg az animációt. Futtatás előtt beállíthatjuk a kezdeti paramétereket, a geometriai jellemzőket, valamint a szabályozó paraméterek értékét.

Választhatunk az analóg és a digitális rendszer szimulációja, valamint linearizált és nemlineáris modell között. A mozgásegyenletek megoldása közönséges negyedrendű Runge-Kutta módszerrel történik.

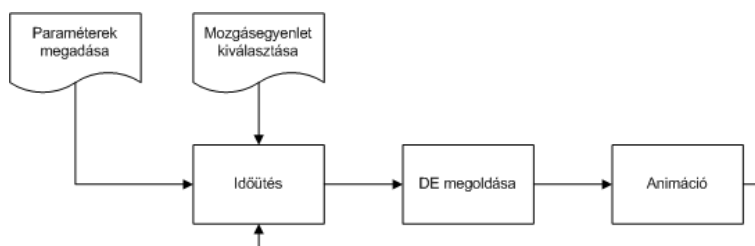
Amikor az animáció fut a ZAVARÁS gomb lenyomásával egy tetszőleges konstans zavarással terhelhetjük a rendszert, és vizsgálni tudjuk, hogy stabilizálódik-e a rendszer. A zavarás helyét egy nyíllal jelöljük.

A könnyebb átláthatóság érdekében dinamikusan nagyíthatjuk, illetve kicsinyíthetjük a kirajzolt modell képét.



34. ábra: Az animációs szoftver rajzolófelülete

A program fő működésének blokkdiagramja a 35. ábrán látható.



35. ábra: Az animációs program blokkdiagramja

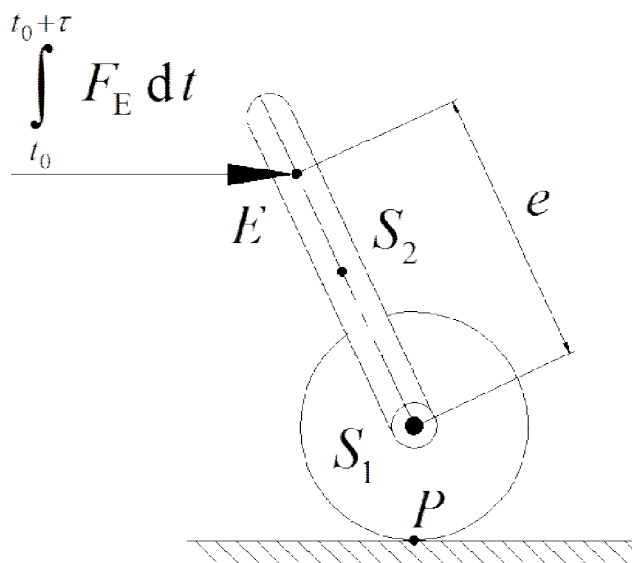
8.1. A zavarás hatásának figyelembe vétele

A rendszer stabil működésének ellenőrzésére a stabil egyensúlyi helyzetből egy tetszőleges konstans erővel kitérítve vizsgáljuk, hogy stabilizálódik-e a rendszer. A zavaróerő vektorát a teljesítmény-tétel segítségével határozzuk meg:

$$P_Z = \mathbf{Q}_Z^T \mathbf{v}_z, \quad (8.1)$$

ahol P_Z a zavaróerő teljesítménye, $\mathbf{Q}_Z$ a zavaró erő vektora, valamint $\mathbf{v}_z$ az erő támadáspontjának sebessége.

A zavarást adott nagyságú erőnek, amely nagyon kis ideig fejti ki hatását, ezért a zavarást erőimpulzusként szemléltetjük. A zavarás figyelembevételét a 36. ábrán láthatjuk.



36. ábra: A zavarás hatása

A 36. ábra alapján a zavaró erő vektora:

$$\mathbf{Q}_Z = [F_Z \quad 0 \quad 0]^T, \quad (8.2)$$

$$\text{ahol } F_Z = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_E dt.$$

Az erő támadáspontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_{S1} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S1E}, \quad (8.3)$$

ahol $\mathbf{r}_{S1E}$ a kerék súlypontjából az inga egy tetszőleges pontjába mutató helyvektor:

$$\mathbf{r}_{S1E} = [e \sin(\varphi_2) \quad e \cos(\varphi_2) \quad 0]^T. \quad (8.4)$$

A kerék súlypontjának sebesség vektora megtalálható a (3.5) egyenletben, miszerint:

$$\mathbf{v}_{S1} = [r\dot{\varphi}_1 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (8.5)$$

valamint az inga szögsebesség vektora megtalálható a (3.7) egyenletben, miszerint:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = [0 \quad 0 \quad -\dot{\varphi}_2]^T. \quad (8.6)$$

Felhasználva a (8.4)-(8.5)-(8.6) egyenleteket, a (8.3) egyenlet alapján az erő támadáspontjának sebessége:

$$\mathbf{v}_E = [r\dot{\varphi}_1 + e\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \quad -e\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \quad 0]^T. \quad (8.7)$$

Felhasználva a (8.2)-(8.7) egyenleteket, a (8.1) egyenlet alapján a zavaró erő teljesítménye:

$$P_z = F_z r \dot{\varphi}_1 + F_z e \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2. \quad (8.8)$$

A (8.8) egyenlet alapján a $\mathbf{Z}$ zavarás vektora:

$$\mathbf{Z} = [r \quad e \cos(\varphi_2) \quad 0]^T. \quad (8.9)$$

A zavarás hatása hozzáadódik az állapottér-modell főegyenletéhez, azaz:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{Z}z(t), \quad (8.10)$$

ahol $z(t) = F_z = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_E dt$.

9. Geometria tervezése

A szerkezet geometriáját Autodesk Inventor 2012 Professional 3D-s tervező programban rajzoltuk. A tervezett geometria alapvetően alumínium négyszög, illetve kör keresztmetszetű rudakból, illetve alumínium lemezekből tevődik össze. Ezáltal a szerkezet tömege viszonylag kicsi, valamint könnyen megmunkálható.

A Segway testet úgy kell kialakítani, hogy lehetőség szerint a vezetékezés miatt a Segway testére szerelt mérőkártya, vezérlő elektronika, szervo erősítő, akkumulátor valamint a motor minél közelebb legyenek egymáshoz.

A geometria megtervezése során a 2. táblázatban szereplő paraméter összeállítást használtuk fel.

2. táblázat: A választott geometriai és szabályozó paraméterek

Geometria	Nagyság	Dim.	Szabályozó	Nagyság	Dim.
Kerék tömege	0,2	kg	P_1	10	Nm/rad
Segway tömege	3,5	kg	D_1	24	Nms/rad
Kerék sugara	0,05	m	P_2	100	Nm/rad
Segway magassága	0,25	m	D_2	110	Nms/rad

A hajtáslánc fő egysége a Maxon EC-max 40, 70 W teljesítményű BLDC motor, azaz kefenélküli egyenáramú motor. A motor tengelyére rászertünk egy Maxon GP42C kerámia fogaskerekű bolygóművet, amellyel 4,3:1 lassító áttételt érhetünk el.

A hajtásláncban a kerék tengelyét fogasszíj-hajtással kapcsoljuk össze a motor kimenő tengelyével. A fogasszíj-hajtással 2:1 lassító áttételt valósítunk meg. A hajtáslánc kialakításánál be kell tartanunk a két fogasszíj-tárcsa tengelytávolságát.

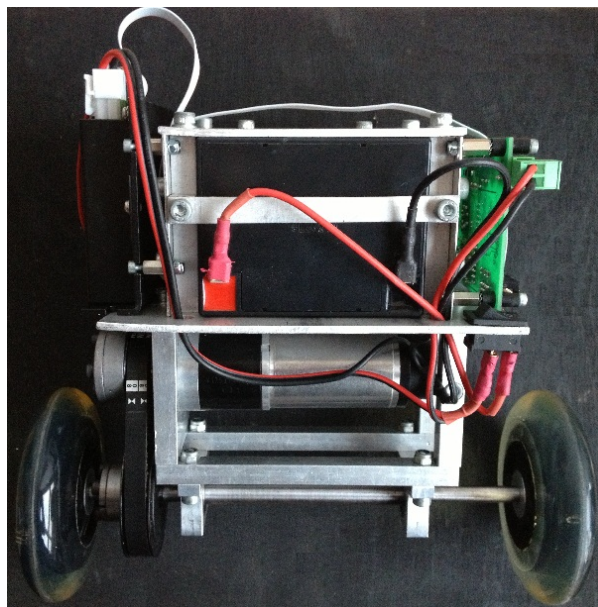
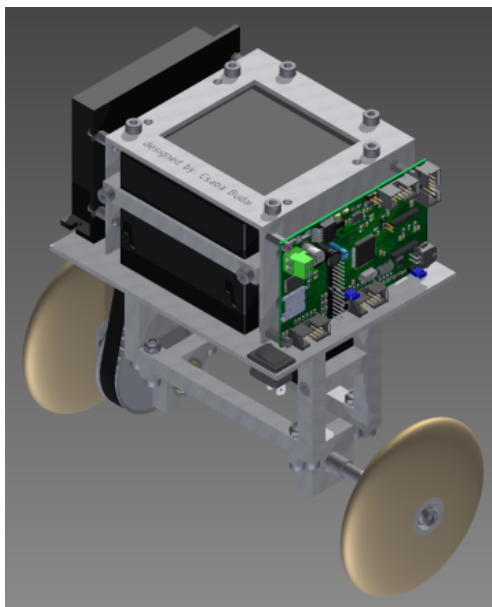
A szerkezet forgó alkatrészeinek csapágyazását X elrendezésű csapágyazással valósítjuk meg, melyhez SKF cég mélyhornyú golyós csapágyait választottunk.

A választott motort a felszerelt bolygóművel, valamint a motor tengelyvégre szerelt szögjeladóval és a szükséges vezetékezéssel a 37. ábrán láthatjuk [8].



37. ábra: Maxon EC-max 40 BLDC motor (hajtóművel és szögjeladóval szerelve)

A szerkezet megtervezett és legyártott geometriája a 38. ábrán látható.



38. ábra: A megtervezett és legyártott beágyazott rendszer

10. Mérőrendszer tervezése

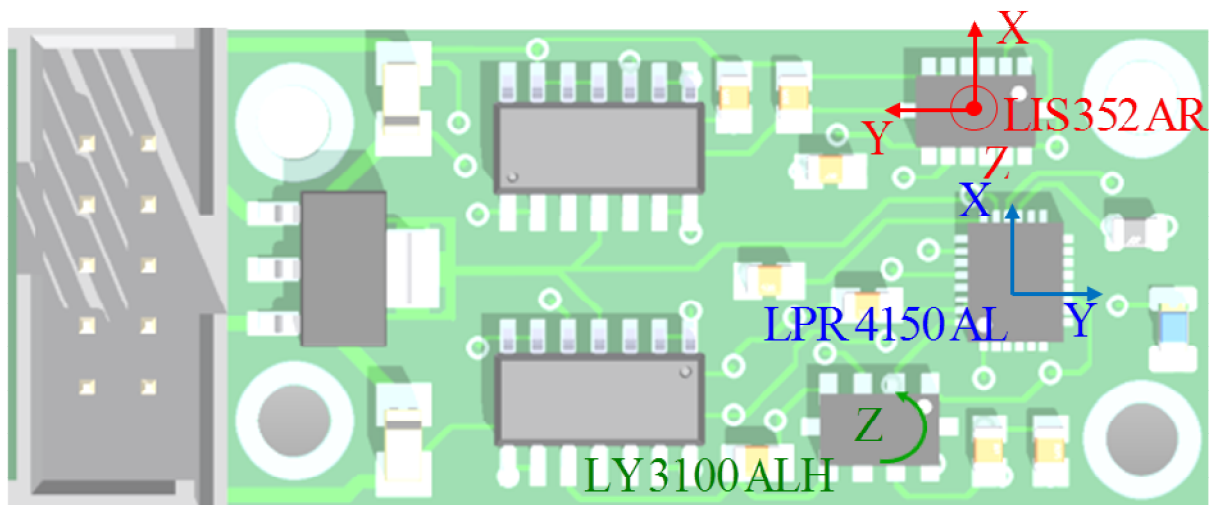
Az állapotszabályozás megvalósításához szükség van a rendszert alkotó merev testek szögpozíciójára, valamint szögsebességeire az abszolút függőleges irányhoz képest. A műszaki gyakorlatban a szükséges fizikai mennyiségeket olyan érzékelőkkel mérjük, amelyek az adott mennyiséggel arányos villamos jelet szolgáltatnak. A szögelfordulás mérésére alkalmasak az inkrementális szögjeladók, a szögsebesség mérésére pedig a giroszkópok. Az abszolút függőleges irány meghatározásához gyorsulásérzékelőt használunk [8].

10.1. A mérőrendszer felépítése

A szabályozáshoz mind a kerék, mind pedig az inga szöghelyzetére valamint szögsebességére szükségünk van, azaz mérnünk kell az állapotjelzőket. Az állapot jelzők vektora a (5.11) egyenletben látható, azaz:

$$\mathbf{x} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2]^T. \quad (10.1)$$

A megtervezett mérőrendszer koordináta rendszerét a 39. ábrán láthatjuk.



39. ábra: A mérőrendszer koordináta rendszere

Az inga szögsebességét közvetlenül tudjuk mérni, azaz:

$$y_{g2} = C_{gy} \dot{\varphi}_2, \quad (10.2)$$

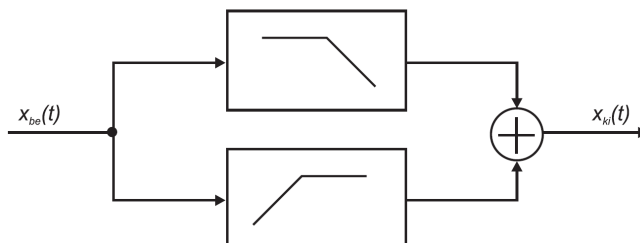
ahol y_{g2} az inga szögsebességével arányos villamos jel, valamint a LPR4150AL típusú szenzor adatlapjában megtalálható szenzorállandó:

$$C_{gy} = 0,167 \left[\frac{\text{mV}}{\text{dps}} \right]. \quad (10.3)$$

A LPR4150AL típusú szenzor adatlapjának hivatkozása megtalálható a mellékletben.

A LIS35AR típusú gyorsulásérzékelő jelei közül a X és Z tengelyek mentén mért gyorsulásra, valamint a LPR4150AL típusú szögsebesség érzékelő Y tengely körül mért szögsebességére van szükségünk, hogy az abszolút szöghelyzetet meg tudjuk határozni.

A mért szögsebesség és gyorsulás jelekből komplementer szűrőpár alkalmazásával állíthatjuk elő az abszolút szöghelyzetet. A komplementer szűrő blokkvázlata a 40. ábrán látható.



40. ábra: A komplementer szűrő blokkvázlata

A szűrő működésének alapelve, hogy a bejövő jelet párhuzamosan szűrjük egy alul, és egy felül áteresztő szűrő segítségével, majd a kimeneteket összegezzük. Akkor kapjuk vissza az eredeti jelet, ha teljesül a következő feltétel:

$$F_{LP}(s) + F_{HP}(s) = 1, \quad (10.4)$$

ahol $F_{LP}(s)$ az alul áteresztő, $F_{HP}(s)$ pedig a felül áteresztő szűrő átviteli függvénye. A szűrők tetszőleges fokszámú polinomok lehetnek [2].

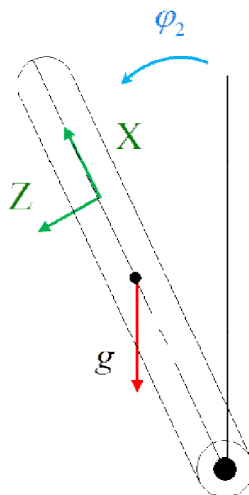
Ha gyorsulás mérő egyik tengely egy tengelybe esik az abszolút függőleges iránnyal, akkor a tengely mentén a gravitációs gyorsulással arányos villamos jelet mér. Ha az ingát a rászerezelt gyorsulás érzékelővel kibillentjük az abszolút függőleges irányból. A gyorsulásérzékelő X és Z tengelye mentén mért jelek meghatározzák a nehézségi gyorsulást, azaz:

$$g = \sqrt{a_x^2 + a_z^2}. \quad (10.5)$$

A gyorsulás mérés elvi vázlata a 41. ábrán látható. Az inga szögelfordulását a következőképp számolhatjuk:

$$\varphi_2 = \arctg\left(-\frac{a_z}{a_x}\right), \quad (10.6)$$

ahol $a_x = -g \cos(\varphi_2)$, valamint $a_z = g \sin(\varphi_2)$.



41. ábra: Gyorsulásmérés elvi vázlata

Ha gyorsuló rendszert mérünk, akkor a nehézségi gyorsulás és a rendszer gyorsulása összeadódnak. Egyensúlyozás közben nincs egyenletes gyorsulás, ellenben gyorsulás hirtelen változását tapasztaljuk.

A gyorsulásérzékelők a hirtelen szögváltozásokra nagyon érzékenyek, azaz a hirtelen szögváltozás magas frekvenciájú jelet eredményez. Tehát szögmérés szempontjából a gyorsulásérzékelő által mért jel közül csak az alacsony frekvenciájú jelre van szükség, ezért alul áteresztő szűrőre van szükség. A gyorsulás érzékelő adatlapja alapján a gyorsulásérzékelő átviteli függvénye:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + sT_a}, \quad (10.7)$$

ahol T_a a szenzor vágási frekvenciájának megfelelő időállandója. Ha a szűréshez használt terhelő kapacitás értéke $C_t = 1[\mu\text{F}]$, akkor adatlap alapján az érzékelő vágási frekvenciája $f_a = 5[\text{Hz}]$.

A giroszkópok esetén, mért szögsebesség jel időszerinti integrálja adja a szögelfordulás jelet:

$$\phi_2 = \int_0^t (\dot{\phi}_2 + \omega_o) dt, \quad (10.8)$$

ahol ω_o jelöli a szenzor ofszet hibáját, azaz a szenzor nyugalmi helyzetben is mutat szögsebesség jelet. Az integrálás felerősíti a hibát, ezért az ofszet hibát ki kell szűrni. Ahhoz, hogy az ofszet hibát kiszűrjük felül áteresztő szűrőt kell terveznünk.

Mivel a giroszkóp közvetlenül szögsebességet mér, ezért ideális esetben a szenzor átviteli függvénye egy deriváló tag, azaz:

$$H_g(s) = s. \quad (10.9)$$

Viszont a giroszkóp adatlapja alapján a szenzor vágási frekvenciája $f_g = 140 [\text{Hz}]$, ezért figyelembe véve a vágási frekvenciát, hasonlóan a gyorsulás érzékelőhöz, a giroszkóp átviteli függvénye a következő:

$$H_g(s) = \frac{s}{1 + sT_g}, \quad (10.10)$$

ahol T_g a szenzor vágási frekvenciájának megfelelő időállandója.

Tehát a szűrő megtervezése során a gyorsulásérzékelőhöz egy alul áteresztő szűrőt kell tervezni. A giroszkóphoz pedig egy felül áteresztő szűrőt illesztünk, ami eltünteti az ofszet hibát, valamint ezután integráljuk a kapott jelet. Mivel az ideális integrátor egy alul áteresztő szűrőnek tekinthető, ezért a giroszkóp esetén egy olyan szűrőt tervezünk, amely alacsony frekvencián elnyomja az ofszet hibát, valamint a magas frekvencián, a kapcsolási frekvencia felett alul áteresztő szűrőként viselkedik, ami integrálja a jelet. Az alacsony és magas frekvencia tartomány közötti váltást kapcsolási frekvenciának nevezzük.

A szűrő megtervezése során a következő feltételnek kell teljesülni:

$$H_a(s)F_a(s) + H_g(s)F_g(s) = 1, \quad (10.11)$$

ahol $F_a(s)$ a gyorsulásérzékelő szűrője, valamint $F_g(s)$ a giroszkóp szűrője. A gyorsulás érzékelő szűrője legyen:

$$F_a(s) = \frac{P_a(s)}{(1 + sT_c)^2}. \quad (10.12)$$

A giroszkóp szűrje legyen:

$$F_g(s) = \frac{P_g(s)}{(1 + sT_i)(1 + sT_c)^2}, \quad (10.13)$$

ahol $T_i = T_a$, ugyanis az integrátor alul áteresztő szűrőként modellezhető. A (10.12)-(10.13) egyenletekben $P_a(s)$ és $P_g(s)$ tetszőleges polinomok., valamint T_c a szűrő kapcsolási frekvenciájának megfelelő időállandója. A kapcsolási frekvencia legyen $f_c = 0,3 [\text{Hz}]$.

A szűrő tervezése során a (10.9) összefüggést használjuk a giroszkóp átviteli függvényére. Visszaírva a (10.11) egyenletbe a (10.12)-(10.13)-(10.7)-(10.9) összefüggéseket:

$$\frac{1}{1 + sT_a} \frac{P_a(s)}{(1 + sT_c)^2} + s \frac{P_g(s)}{(1 + sT_i)(1 + sT_c)^2} = 1, \quad (10.14)$$

A (10.14) egyenlet közös nevezője:

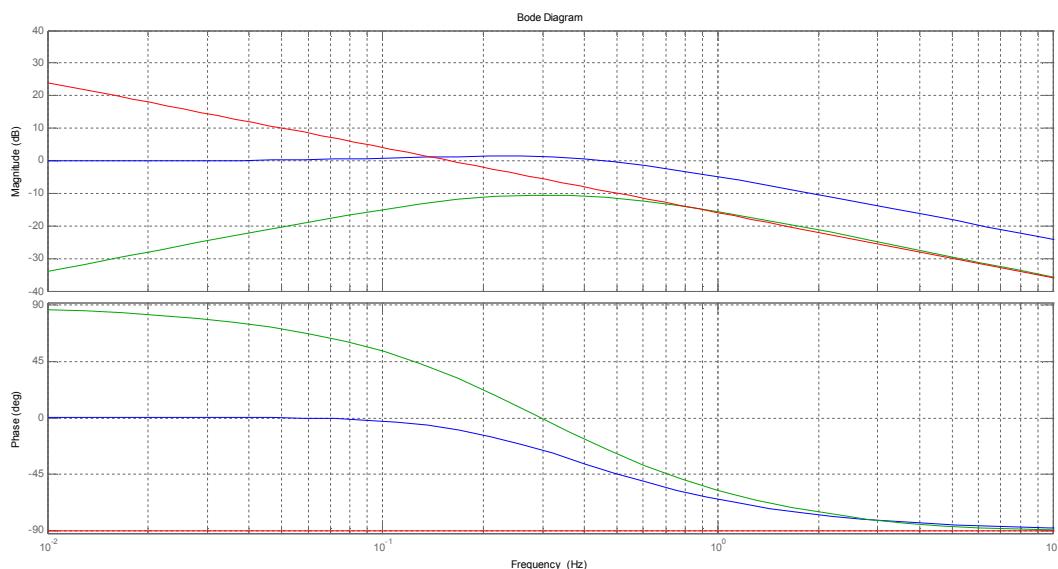
$$N(s) = 1 + (2T_c + T_a)s + (T_c^2 + 2T_cT_a)s^2 + (T_c^2T_a)s^3. \quad (10.15)$$

A (10.15) egyenletet segítségével meghatározhatjuk a $P_a(s)$ és $P_g(s)$ polinomokat, hogy eleget tegyünk a (10.14) feltételnek.

$$P_a(s) = 1 + (T_a + 2T_c)s \quad (10.16)$$

$$P_g(s) = (2T_aT_c + T_c^2)s + T_aT_c^2s^2 \quad (10.17)$$

A megtervezett szűrő Bode diagramja a 42. ábrán látható. Az ábrán kékkel jelöljük a gyorsulásérzékelő szűrőjét, valamint zölddel a giroszkóp szűrőjét, valamint pirossal jelöljük az ideális integrátor átvitelét.



42. ábra: A megtervezett komplementer szűrő átviteli diagramja

A motor tengelyére szerelt szögjeladó a kerék és az inga elfordulása közötti relatív szögelfordulást méri, azaz:

$$y_e = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (10.18)$$

Felhasználva az inga szögelfordulását, amelyet gyorsulásérzékelő és a giroszkóp jeleiből előállítottunk elő, meghatározhatjuk a kerék szögelfordulását.

A kerék szögsebességét nem tudjuk tisztán mérni, a szükséges értéket a kerék szögpozíciójából differenciálisan közelítjük:

$$\dot{y}_1(t_j) = \frac{y_1(t_j) - y_1(t_{j-1})}{h}, \quad t \in [t_j; t_{j+1}], \quad (10.19)$$

ahol $\dot{y}_1(t_j)$ a becsült szögsebesség az aktuális időpillanatban, $y_1(t_j)$ a származtatott szögpozíció a gyorsulás érzékelő jelével korrigálva az aktuális időpillanatban, $y_1(t_{j-1})$ az aktuális időpillanathoz képest egy mintavételezési idővel korábbi időpillanatban mért

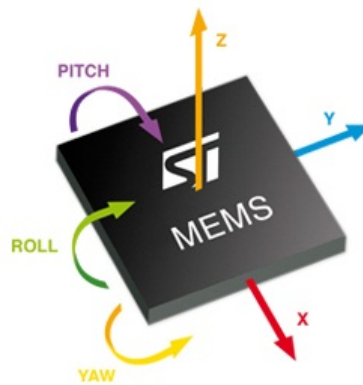
értékekből származtatott, a gyorsulásérzékelő jelével korrigált abszolút szögpozíció, h pedig a mintavételezési idő.

10.2. Az érzékelők megválasztása

A beágyazott rendszer tervezése során figyelni kell arra, hogy a mérőrendszer minél kisebb helyre felszerelhető legyen a kész szerkezeten, valamint törekedni kell arra, hogy az érzékelők kis mértékben befolyásolják a folyamatot. Ezért a mérőrendszer tervezése során egy olyan mérőkártyát készítünk, amelyen megtalálhatóak a szükséges mozgás érzékelők, valamint a hozzá tartozó elektronika [8].

10.2.1. A választott MEMS szenzorok

A kereskedelmi forgalomban található szenzorok közül a legkisebb mérettel és tömeggel a MEMS szenzorok rendelkeznek. A MEMS mozgásérzékelők orientációja a 43. ábrán látható.



43. ábra: MEMS érzékelők orientációja

A mérőrendszerhez tartozó elektronika tervezése során számos alkatrész katalógus adatlapját használjuk fel, amelyeket megtalálhatunk a gyártók, vagy forgalmazók honlapján. A fontos alkatrészek adatlapjainak hivatkozásait a mellékletben láthatjuk [8].

A kereskedelmi forgalomban kapható érzékelők közül az ST LPR4150AL két-tengelyű analóg giroszkópot és az ST LY3100ALH egy-tengelyű analóg giroszkópot választottuk. A két-tengelyű giroszkóp az X- és Y-tengely körüli elfordulás sebességét ± 1500 [°/s] mérési tartományban tudja mérni, az egy-tengelyű érzékelő pedig a Z-tengely körüli elfordulás sebességét pedig ± 1000 [°/s] mérési tartományban [8].

A kereskedelmi forgalomban kapható érzékelők közül az ST LIS352AR kapacitív elvű három-tengelyű analóg gyorsulásérzékelőt választottuk, amely mind a három tengely mentén méri a gyorsulást $\pm 2g$ mérési tartományban [8].

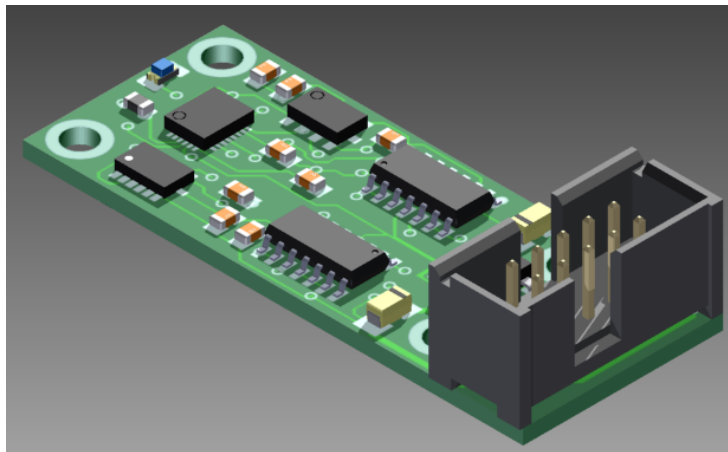
10.2.2. A választott szögjeladó

Az egyensúlyozott inga és a kerék közötti szögelfordulást a motorra felhelyezett szögjeladóval mérjük. A választott szögjeladó a Maxon Encoder MR, három csatornás szögjeladója. A jeladó felbontása 1024 cpt (az impulzusok száma körülfordulásonként), 320 kHz mintavételezési frekvencia mellett [8].

A motorra szerelt szögjeladó működése mágneses ellenálláson alapszik, miszerint egy többpólusú mágnes található a motor tengelyén, amely szinuszosan változó feszültséget hoz létre a szenzorban, az így keletkezett jeleket négyszögjel formájában használhatjuk fel [8].

10.3. A mérőkártya nyomtatott áramkör terve

A tervezés során fontos kritérium, hogy a 8 mil-es (0,2 mm) legkisebb gyártható szigetelő távolságot, valamint a 10 mil-es (0,254 mm) legkisebb gyártható vezető vastagságot betartsuk mind a huzalozás, mind pedig az alkatrészek padjainak (footprint) létrehozásánál. A megtervezett mérőkártya nyomtatott áramköri terve az 44. ábrán látható.

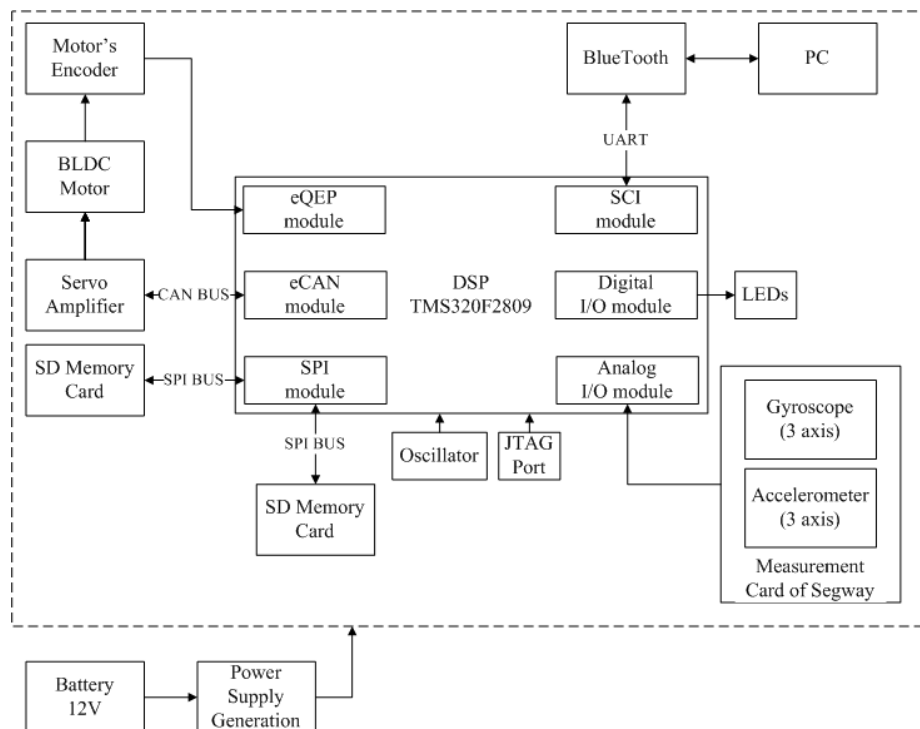


44. ábra: A megtervezett mérőkártya nyomtatott áramköri terve

11. Elektronika tervezése

A robot vezérlőelektronikájának tervezése során számos kritériumot kell figyelembe vennünk, a legfontosabb, hogy nagy mintavételezési frekvenciájú processzort tudjunk választani, hogy megvalósítható legyen a szabályozás. A szabályozáshoz mérnünk kell a szögpozíció és szögsebesség értékeket, hogy tudjuk a szükséges mennyiségeket az állapot szabályozáshoz. Az érzékelő jeleit fogadnia kell a vezérlőelektronikának.

Szabályoznunk kell a beavatkozó szerv működését, ehhez szükségünk van egy szervó erősítőre, amelyet illesztenünk kell a vezérlőelektronikához. Emellett a későbbi számításokhoz el kell tárolnunk a mért szenzor értékeket, majd a számítógépen történő feldolgozáshoz a megfelelő formátumra kell alakítanunk. A mentett értékeket el kell juttatnunk a számítógépre. Az elektronika rendszertervét 45. ábrán láthatjuk

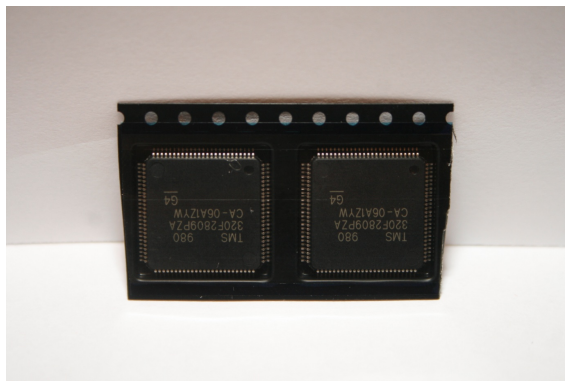


45. ábra: Az elektronika blokkdiagramja

A tervezés során fontos kritérium, hogy kompakt rendszert tervezzünk, ezért a rendszer feszültségforrásaként akkumulátort használunk. Az akkumulátor választása során figyelembe kell venni, hogy mekkora legnagyobb teljesítményigény a rendszerben, valamint milyen hosszú üzemidőt szeretnénk.

11.1. A felhasznált processzor

A szabályozás megvalósításához Texas Instruments Inc. TMS320F2809 DSP-jét használjuk. A választott DSP üzemeltethető 100 MHz-es órajellel, 32 bites fix pontos számábrázolás mellett. A processzort kifejezetten valós idejű szabályozási folyamatokhoz ajánlják. A választott processzort a 46. ábrán láthatjuk.



46. ábra: TMS320F2809 DSP

A DSP-t tartalmazó elektronika tervezéséhez a gyártó biztosítja a szükséges adatlapokat, hardvertervezési segédleteket, valamint a külső periféria elemek illesztésének leírását [8].

11.2. Tápellátás megvalósítása

A motor 12 V tápfeszültséget igényel, és legalább 10 perces működést szeretnénk elérni, ezért a választott feszültségforrás egy UPS Power 12 V-os 4,2 Ah-ás ólomzselés akkumulátor. A választott akkumulátor a 47. ábrán látható.



47. ábra: UPS Power BT4.2-12 akkumulátor

A további periféria elemek számára szükségünk van 5 V-os és 3,3 V-os tápfeszültségre egyaránt. Mindkötül a DSP tápellátása a legbonyolultabb, a processzor adatlapjából tudjuk, hogy többféle feszültség szintű tápellátásra van szükség. Megkülönböztetünk 1,8 V-os magfeszültséget, 3,3 V-os digitális és analóg periféria tápfeszültséget is.

A DSP működéséhez stabil tápfeszültségre van szükség, ha a tápellátás nem egyenletes, a tápfeszültség ingadozása befolyásolja a processzorműködés sebességét és pontosságát. A szükséges feszültség értékeket speciális feszültség stabilizáló IC-kkel állítjuk el több lépésen keresztül [8].

11.3. Kommunikáció a számítógéppel

A robot és a számítógép között szeretnénk vezeték nélküli kapcsolatot kialakítani, ezért választottuk a Bluetooth alapú kommunikációt. A kereskedelmi forgalomban kapható Bluetooth modulok közül a Bluegiga WT12 modult választottuk.

A Bluetooth modult SCI buszon keresztül tudjuk illeszteni a processzorhoz. A processzor SCI moduljának leírását szintén megtaláljuk a DSP adatlapjai között. Az SCI két vezetékből álló aszinkron működésű soros kommunikációs eszköz. Közismertebb nevén Universal Asynchronous Receiver/Transmitter (UART) [8].

11.4. Kommunikáció a motorvezérlő elektronikával

A motor mellé a Maxon EPOS P24/5 típusú szervo erősítőt választottuk. A választott erősítőt a 48. ábrán láthatjuk.



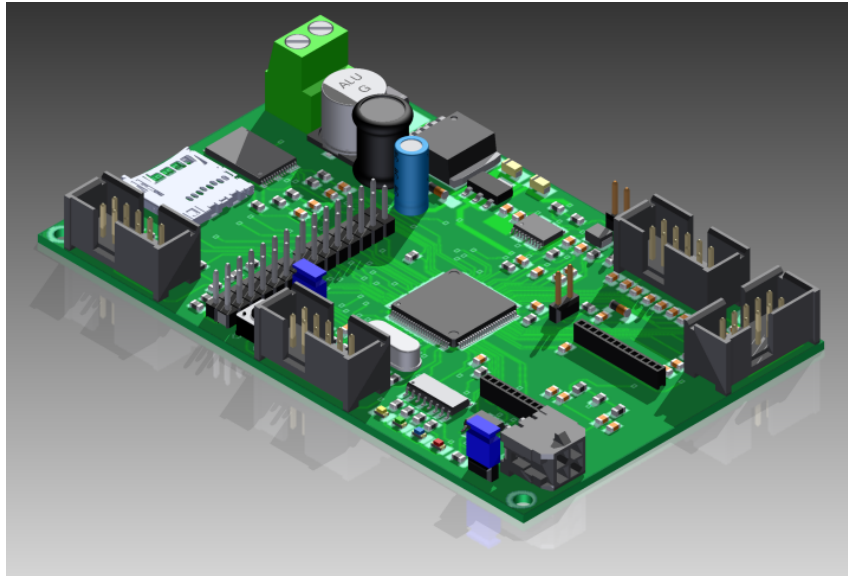
48. ábra: Maxon EPOS P24/5 szervo erősítő

A szervo erősítő RS232 és a CANopen kommunikációs protokollt. Az RS232 kommunikáció a PC és az erősítő között használható, míg a CANopen kommunikáció a szabályozó elektronika és a szervo erősítő közötti kommunikációra alkalmas. A választott szervo erősítő adatlapjának hivatkozása a mellékletben található [8].

11.5. A vezérlő elektronika nyomtatott áramköri terve

A vezérlőelektronika nyomtatott áramkörét (nyák) két oldalra terveztük. Szükséges kialakítani a processzor alá a felső nyákololdalra a digitális földfóliát az analóg földfólia sarokkal, valamint a nyák alsó oldalára a magfeszültség fóliát az analóg feszültség sarokkal. Ezzel egyfajta kondenzátor jelleget adva a processzor alatti nyákrésznek, hogy lehetőség szerint zavarmentes, stabil működést biztosítsunk a processzornak [8].

A vezérlő elektronika nyomtatott áramköri terve a 49. ábrán látható.



49. ábra: A vezérlőelektronika megtervezett ábrája

12. Összefoglalás

A TDK dolgozatban egy inverz inga egyensúlyozását vizsgáltuk. A munka során elkészítettük a rendszer mechanikai modelljét, felírtuk a rendszer mozgásegyenleteit a másodfajú Lagrange-egyenletekkel, a Newton-egyenletekkel, valamint az Appell–Gibbs-egyenletekkel.

Megterveztük a szabályozókört a kerék szabályozása nélküli esetben klasszikus PD szabályozóval, valamint a kerék szabályozását is tartalmazó esetben állapot-visszacsatolással. Vizsgáltuk a rendszer stabilitását mind analóg, mind pedig mintavételes, időkésést tartalmazó, azaz digitális esetben.

Meghatároztuk a stabilitási térképeket analitikus és numerikus módszerekkel. Beláttuk, hogy a kerék szabályozását tartalmazó esetben, a stabilitási térkép tartalmazza a kerék szabályozása nélküli esetet mind analóg, mind pedig digitális szabályozás esetén, valamint meghatároztuk a kritikus mintavételezési időt.

Kimutattuk a mintavételezési idő változásának hatását a stabilitási diagramokra, beláttuk, hogy kis mintavételezési idő esetén a stabilitási diagramok egyezést mutatnak az analóg esetben vizsgált stabilitási diagramokkal, valamint megmutattuk, hogy nagy mintavételezési idő esetén veszítünk a stabil tartományok nagyságából.

Az elméleti számításokat alapul véve megterveztük a kísérleti berendezést. Megválasztottuk a működéshez szükséges beavatkozó szervet, valamint a hajtáslánchoz szükséges alkotó elemeket. Megterveztük a kísérleti berendezés működtetéséhez szükséges vezérlő elektronikát. A vezérlő elektronikán kialakítottuk a beavatkozó szervet működtető teljesítményelektronika és a központi processzor közötti kommunikációs protokollt, valamint a számítógép és a központi processzor közötti kommunikációs protokollt.

Mérjük a rendszer működése során a gyorsulások, a szögsebességek, valamint a szögelfordulások értékeit, az ezekhez szükséges érzékelőket megválasztottuk. Megterveztük a gyorsulásérzékelők és szögsebességmérők működtetéséhez szükséges mérőkártyát, valamint a szabályozáshoz szükséges jeleket előállítottuk a mért jelekből.

13. Irodalomjegyzék

- [1] Béda Gy., Bezák A.: *Kinematika és dinamika*
Budapest, Tankönyvkiadó 1991
- [2] Nemes Csaba, Simon Gábor: *Inverz inga alapú egyensúlyozó robot fejlesztése*
TDK dolgozat, Budapest, 2008 (BME-VIK)
- [3] Béda Gy., Stépán G.: *Analitikus mechanika*
Budapest, Műegyetemi Kiadó, 2000
- [4] Dr. Stépán Gábor: *Robotok mechanikája előadás jegyzet*
Budapest, 2009/2010 tavaszi félév
- [5] Petrik O., Huba A., Dr. Szász G.: *Rendszerteknika*
Budapest, Tankönyvkiadó, 1986
- [6] Lantos B.: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.*
Budapest, Akadémiai kiadó, 2000
- [7] Obádovics J. Gyula, Dr. Szarka Zoltán: *Felsőbb matematika*
Budapest, Scolar kiadó, 1999
- [8] Budai Csaba: *Segwayen egyensúlyozott inga tervezési és megvalósítási folyamata*
TDK dolgozat, Budapest, 2011 (BME-GPK)

14. Melléklet

A vezérlőelektronika és a mérőkártya tervezésénél felhasznált fontos alkatrészek listája, valamint hozzájuk tartozó katalógus adatlapok hivatkozásai.

- TMS320F2809:
 - Data Manual:
<http://www.ti.com/lit/ds/sprs230m/sprs230m.pdf>
 - Hardware Design Guidelines:
http://www.newark.thinkhost.com/brands/promos/leading_edge/spraas1a.pdf
 - SPI modul:
<http://www.ti.com/lit/ug/spru059e/spru059e.pdf>
 - SCI modul:
<http://www.ti.com/lit/ug/spru051d/spru051d.pdf>
 - eCAN modul:
<http://www.ti.com/lit/ug/spru074f/spru074f.pdf>
 - eQEP modul:
<http://www.ti.com/lit/ug/spru790d/spru790d.pdf>
- TL2575:
<http://www.ti.com/lit/ds/symalink/tl2575hv-adj.pdf>
- TS1117:
<http://www.watterott.net/webradio/TS1117.pdf>
- TPS62400:
<http://www.ti.com/lit/ds/slvs681e/slvs681e.pdf>
- AT45DB642D:
http://www.atmel.com/dyn/resources/prod_documents/doc3542.pdf
- WT12:
<http://www.softelectronics.ru/docs/bt/WT12.pdf>
- SN65HVD230:
<http://www.ti.com/lit/ds/slos346k/slos346k.pdf>
- LIS352AR:
http://www.st.com/internet/com/TECHNICAL_RESOURCES/TECHNICAL_LITERATURE/DATASHEET/CD00259979.pdf

- LY3100ALH:
http://www.st.com/internet/com/TECHNICAL_RESOURCES/TECHNICAL_LITERATURE/DATASHEET/CD00254115.pdf
- LPR4150AL:
http://www.st.com/internet/com/TECHNICAL_RESOURCES/TECHNICAL_LITERATURE/DATASHEET/CD00254134.pdf
- MC3487D:
http://ronja.twibright.com/datasheets/line_receivers_driver/mc3487.pdf
- Maxon EC-max 40:
http://www.maxonmotorusa.com/downloads/EC_max_Prospekt_e.pdf
- Maxon Gear GP42C:
http://www.maxonmotorusa.com/downloads/EC_max_Prospekt_e.pdf
- Maxon Encoder MR:
http://www.maxonmotorusa.com/downloads/EC_max_Prospekt_e.pdf
- Maxon Epos P24/5:
http://test.maxonmotor.com/docsx/Download/Product/Pdf/323232_EPOS_P_Hardware_Reference_E.PDF