



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

TERMIKUS MIKROAKTUÁTOR SZILÁRDSÁGI ÉS MEGBÍZHATÓSÁGI VIZSGÁLATA

Készítette: Hajdu Dávid

Témavezető: Dr. Kovács Ádám, egyetemi docens
Műszaki Mechanikai Tanszék

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009
"Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben"
című program támogatta.

Budapest, 2012

TARTALOMJEGYZÉK

1. MEMS SZERKEZETEK	
1.1. BEVEZETÉS	1
1.2. MEMS RÖVID TÖRTÉNELME	2
1.3. GYÁRTÁSTECHNOLÓGIA	4
1.4. ELEKTROSZTATIKUS ÉS TERMIKUS AKTUÁTOROK	7
1.5. EGY FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR	8
1.6. KETTŐS FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR	9
2. ELEKTORTERMIKUS ANALÍZIS	
2.1. FIZIKAI JELENSÉG ALAPJAI	10
2.2. ELEKTROTHERMIKUS HATÁS FIGYELEMBEVÉTELE EGYSZERŰ RÚDON	11
2.3. VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RÚD	13
2.4. EGY FORRÓ KAROS AKTUÁTOR ELEKTROTHERMIKUS ELEMZÉSE	16
2.5. DUPLA FORRÓ KAROS AKTUÁTOR ELEKTROTHERMIKUS ELEMZÉSE	18
2.6. HŐÁTADÁS FIGYELEMBEVÉTELE	23
2.7. HŐÁTADÁS A KETTŐS FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTORON	25
2.8. HŐVEZETÉS A HÁTSÓ RÉTEGBEN	29
3. TERMOMECHANIKAI ANALÍZIS	
3.1. EGY KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR EGYSZERŰ MODELLJE	32
3.2. ERŐMÓDSZER AZ EGYSZERŰSÍTETT MODELLEN	37
3.3. KETTŐS FORRÓ KAROS AKTUÁTOR TERMOMECHANIKAI ELEMZÉSE	40
3.4. SZILÁRDSÁGTANI SZIMULÁCIÓ EREDMÉNYEI	42
3.5. KÖVETKEZTETÉSEK	44
4. HIBA ÉS ELTÉRÉSEK OKAI	
4.1. TERMIKUS ANALÍZIS HIBÁI	48
4.2. MECHANIKAI ANALÍZIS HIBÁI	50
MELLÉKLETEK.....	51
IRODALOMJEGYZÉK	55

JELÖLÉSEK

Jelölés	SI mértékegység	Megnevezés
σ	Pa	Feszültség
E	Pa	Rugalmassági modulusz (Young modulusz)
ε	–	Fajlagos nyúlás
ε_m	–	Mechanikai eredetű fajlagos nyúlás
ε_t	–	Termikus eredetű fajlagos nyúlás
A	m ²	Felület, keresztmetszet
I	m ⁴	Keresztmetszet másodrendű nyomatéka (z tengelyre)
F, f	N	Erő
M, m	Nm	Nyomaték
α	1/K	Lineáris hőtágulási együttható
$\vartheta(x)$	K	Hőmérséklet-eloszlást leíró függvény
T	K	Konstans hőmérséklet
u	m	Súlypontvonal megadott pontjának x -irányú elmozdulása
v	m	Súlypontvonal megadott pontjának y -irányú elmozdulása
φ	rad	Súlypontvonal megadott pontjának z -tengely körüli elfordulása
λ	W/(m · K)	Hővezetési együttható
h	W/(m ² · K)	Hőátadási tényező
$\dot{Q}$	W	Hőáram
P	W	Teljesítmény
U	V	Feszültség
I	A	Áramerősség
R	Ω	Ellenállás
ρ	$\Omega \cdot \text{m}$	Fajlagos ellenállás

1. MEMS SZERKEZETEK

1.1. BEVEZETÉS

A hagyományos gépészeti alkalmazásokban egyre nagyobb szerepet kapnak a különféle elektromos rendszerek és szabályozások. Az integráció növekedésével és a technológia fejlődésével egyre lejjebb tolódik a határ a kicsi, akár mikro- vagy nanoméretek felé. A mikroprocesszorok méreteinek csökkenése mellett bizonyos gépészeti eszközöket is egyre kisebb méretben gyártanak. A hatékonyabb működés, kisebb energiafelhasználás és praktikusság miatt az igény is nagy a méretcsökkentésre. Például egy gyorsulásérzékelő is előnyösebb kisebb méretben, nemcsak a pontosabb működése, hanem a könnyebb kezelhetősége miatt is. Hasonlóan a gyógyászatban is nemcsak hasznos, de szükséges is, hogy az emberi szervezetbe bevezetett készülék lehetőleg minél kisebb legyen, hogy minél egyszerűbb beavatkozást igényeljen.

A Mikro-Elektro-Mechanikai Rendszer (MEMS) elnevezés a szerkezet működésére és méretére utal. Egy átlagos emberi hajszál vastagsága kb. 80 mikrométer körüli. Ehhez képest egy MEMS jellemző mérete egy-két mikrométertől néhány száz mikrométerig terjed. Ez azt jelenti, hogy a gyártás pontossága ez alatti méreteket, például tizedmikrométereket követel meg. Az ilyen méretű szerkezetek gyártásának technológiája hasonlít a mikroprocesszorokéhoz. A szerkezetet egy szilícium lapkából munkálják ki elektrokémiai úton, ezért a geometriája jellemzően egyszerű elemekből, például állandó keresztmetszetű, egyenes szakaszokból áll. Az egyszerűbb megoldások gyakran egyetlen mozgó alkatrészt sem tartalmaznak, működésük egyszerű fizikai jelenségeken alapul.

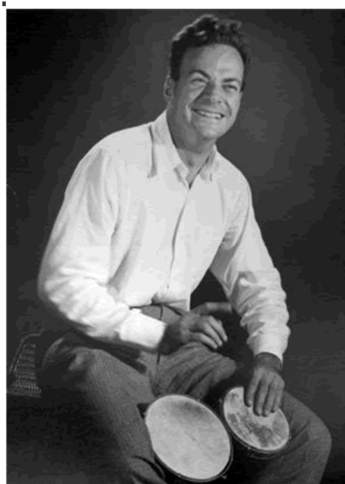
Az „elektro” szó az eszköz működésének jellegére utal. A MEMS szerkezetek általában egyszerű feladatot látnak el, de lehetnek kisebb komplexitásúak is integrált elektronikával. Ez a nagyfokú integráltság adja egyik legnagyobb előnyét. A működésre való tekintettel két csoportba sorolhatjuk őket, szenzorok és aktuátorok (érzékelők és beavatkozók). Szokás ezeket a szerkezeteket „transzduszer”-eknek is nevezni, mivel fizikai mennyiségek átalakítása a feladatuk. Szenzor esetén például hőmérsékletet, nyomást, gyorsulást, sebességet mérhetünk, amit feszültség formájában mérünk. Aktuátort használva a működtetéshez feszültségre van szükségünk, hogy hőmérséklet növekedést, elmozdulást, nyomás növekedést, stb. hozhassunk létre.

A téma nagyon tág, a TDK dolgozatomban egy speciális aktuátor típust, az ún. termikusan működtetett beavatkozót vizsgáltam. A kívülről bekapcsolt feszültség hatására a szerkezeten áram folyik keresztül, ami felmelegíti annak bizonyos szakaszait. A hőmérséklet növekedés hatására alakváltozás következik be, amely az aszimmetrikus szerkezet elmozdulását eredményezi. Egy egyszerű, többszörösen befogott tartó a mechanikai modell, amelyet szilárdságtanilag ellenőriztem. A cél az volt, hogy a működést minél pontosabban meghatározhassam analitikus úton, több jelenséget figyelembe véve. Az analitikus eredményeket végesem szimulációval vettem össze, és jó egyezést kaptam, ami bizonyítja a számítás helyességét. A dolgozatban az eszköz használhatóságát is vizsgáltam.

1.2. MEMS RÖVID TÖRTÉNELME

A technológia fejlődését az utóbbi évtizedekben meghatározta a gyártott eszköz és termék mérete. A méretek csökkentésével egyre több lehetőség nyílt kis helyigényű, ugyanakkor komplex feladatot ellátó szerkezet létrehozására. Integrált áramkörök gyártásánál is meghatározó az áramkörök mérete és azok száma. Minél kisebb egy áramköri elem, egységnyi felületen annál több helyezhető el belőle. A méretek csökkenésével azonban együtt növekszik a rezonancia frekvencia, az elérhető maximális térerősség, de csökken például a termikus válaszdő. Hamar egyértelművé vált, hogy nagyobb profit érhető el a kisebb méretű, de gyorsabb eszközökkel. Ez a tapasztalat segítette a kutatókat abban, hogy az integrált áramkörök mellett a mechanikai rendszereket is igyekezzenek kisebb méretekben gyártani [1]. Ez eredményezte a MEMS szerkezetek létrejöttét. Egy ilyen rendszernek szükségszerűen kell legyen olyan eleme, amely a funkciójától függetlenül valamilyen mechanikai szerepet lát el. Az ilyen szerkezetek elnevezése a világon eltérő lehet, legelterjedtebb a már említett MEMS, de találkozhatunk a „Microsystems Technology” illetve a „micromachined devices” kifejezéssel is [2].

Az első tranzisztort W. Shockley, J. Bardeen és W. Brattain alkotta meg 1947-ben. Megjelenése utat nyitott a miniaturizálás felé, de évekig problémát okozott a méretcsökkentés a vezetékek és csatlakozások miatt. Közel tíz évet kellett várni az első integrált áramkör megjelenésére, amelyet végül 1958-ban mutatott be J. Kilby. Nem sokkal később, tőle függetlenül, R. Noyce is bemutatta saját integrált áramkörét, amelyet végül kettőjük közül az utóbbi szabadalmaztatott 1961-ben [3].



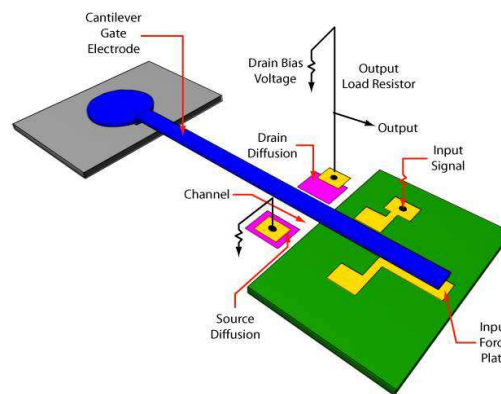
1.2.1. ábra: R. Feynman [3]

A mikro- és nanotechnológia történeti áttekintésekor szokás elsők között említeni R. Feynman (1918-1988) nevét (1.2.1. ábra). 1959-ben „There’s Plenty of Room at the Bottom” címen tartott előadásán érdekes feltételezésekkel és jóslatokkal ált elő. Feltette a kérdést, miszerint miért is ne lehetne a huszonnégy kötetes Encyclopedia Britannica oldalait egyetlen tű fejére felírni. Beszült azokról az új kihívásokról is, amelyet a mikroméretek felvetnek, például a gravitáció hatásáról és a felületi

feszültségről. Előadásában apró gépeket és robotokat is említ, amikkel majd műtési eljárásokat végezhetnek emberek. Beszéde végeztével ezer dollárt ajánlott két feladat elvégzéséért. Az első feladat egy apró motor építése, a másik pedig egy oldal lemásolása volt 1/25000-ed méretű kicsinyítéssel. Az első díjat a motorért már egy évvel később oda kellett adnia, a másodikat pedig 1985-ben a stanfordi egyetem szerezte meg. Folytatva a hagyományt, a Foresight Nanotech Institute 1997 óta osztja ki minden évben a Feynman-díjat azoknak a kutatóknak, akik a legnagyobb eredményeket érték el a témában [3].

G. Moore 1965-ben tette azt a híres kijelentését, miszerint a tranzisztor felfedezése óta az integrált áramkörökben az egységnyi felületen integrált elemek száma minden tizennyolcadik hónapra megduplázódik. Ma ezt a kijelentést „Moore-törvény” néven ismerjük és a tendencia máig tart. Kijelentésével elsők között jósolta meg a mikro- és nanotechnológia felfedezését [3].

Az első MEMS szerkezetet 1968-ban mutatta be H. Nathanson és munkatársai. Ez az ún. „Resonant Gate Transistor” (1.2.2. ábra), amely egy egy milliméter hosszú, mechanikai elemmel megépített MOS tranzisztor volt. A bemeneti jel frekvenciájától függően csak egy keskeny frekvenciatartományt engedett át a rezonanciafrekvencia környékén. Így egy egyszerű szűrőként viselkedett, más frekvenciatartományokat elnyomott. Ez volt az első elektrosztatikus aktuátor [3].



1.2.2. ábra: Resonant Gate Transistor [3]

Az 1970-es évektől kezdve megjelentek a mikroprocesszorok, amelyekkel párhuzamosan a MEMS szerkezetek is fejlődtek. A gyártástechnológia fejlődése is lehetővé tette kisebb és bonyolultabb geometriák létrehozását. Így készíthette el ebben az évtizedben K. Peterson az IBM laboratóriumában az első szilíciumból készült mikrométerű nyomásmérőt. A szenzor egy vékony membránréteget tartalmazott, amely képes volt lényegesen jobban deformálódni, mint elődei, így pontosabb és érzékenyebb volt. Előnyei miatt hamar be is építették vérnyomásmérő eszközökbe, ez volt a MEMS szerkezetek első kereskedelmi alkalmazása [3].



1.2.3. ábra: Vérnyomásmérők egy szög fején [3]

A Hewlett Packard (HP) cég 1979-ben mutatta be első tintasugaras mátrix nyomtatóját (Thermal Inkjet Technology). A működés alapja az elektromosan felfűtött tintacsepp. A csepp buborékot alkot, majd kidurranásakor egy nyíláson keresztül tinta távozik a szórófejből. A szórófejhez létrehozott apró nyílásokat egy szilíciumlapkán dolgozzák ki, kis méretben, nagy felbontással [3]. Az apró méretek miatt a jelenség nagyon gyorsan zajlik le, használhatóságát mi sem bizonyítja jobban, minthogy a hasonló elven működő nyomtatók mind a mai napig megtalálhatók a munkahelyeken és a háztartásokban.

A '80-as és '90-es években tovább gyorsult a fejlődés. 1988-ban megjelent az első elektrosztatikus motor, 1992-ben egy deformálódó rácscs fénymodulátor, 1993-ban pedig az első sorozatgyártásban gyártott gyorsulásérzékelő, amelyet légszákokba terveztek. A sorozatgyártás ellenére akkoriban nagyon drága volt még így is ez a típusú szenzor, de mára rengeteg eszközben megtalálható, például játékkonzolok érzékelőiben [3]. Az évtized végére a tudomány valamennyi területére szinte észrevétlenül kezdett beszivárogni a technológia az ipartól kezdve a hétköznapijainkig.

Az 1990-es évek végére az optikai ipar is egyre inkább MEMS szerkezeteket kezdett gyártani készülékeibe. 1999-ben a Lucent Technologies használt először ilyen eszközt optikai kapcsolónak kommunikációs hálózatokban [3]. Jellemzően ez egy olyan aktuátor, amelyhez egy kisméretű tükör van rögzítve. Elfordulásakor a visszavert fény útja megváltozik, így alkalmazható kapcsolónak, irányváltónak.

Bár az elmúlt évtizedekben jelentős fejlődésen mentek keresztül, az evolúciójuk mai napig nem állt meg. Az igény folyamatosan és egyre jobban növekszik, amit az ipar igyekszik kielégíteni. Napról napra újabb és újabb technológia jelenik meg, és kerül be hétköznapijainkba. Míg az első MEMS szerkezetek egyszerű fizikai jellemzőket mértek, mára ezek irányítják a kommunikációs hálózatainkat, mobiltelefonjainkat, autóinkat és figyelnek oda biztonságunkra [3]. Összevetve ezeket a tényeket jogos az a kijelentés, miszerint ezek az eszközök a XXI. század meghatározó fejlődési irányát képviselik.

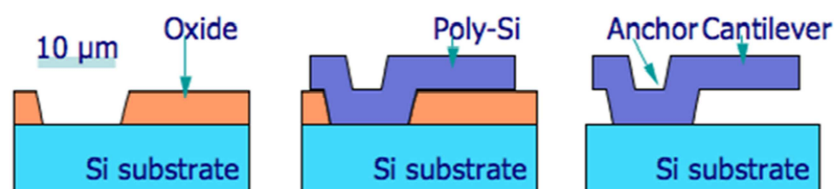
1.3. GYÁRTÁSTECHNOLÓGIA

A MEMS rendszerek legnagyobb előnyét a méret mellett a nagyfokú integráltságuk adja. Mivel az információ fénysebességnél gyorsabban nem terjedhet, ezért a méretek csökkentése lehet a sebesség növelésének megoldása. Ehhez az integrált áramkörti elemeket és a mechanikai egységeket egyetlen apró szerkezetben kell kialakítani. Így a kényelmesség mellett növelhető a működési sebesség és csökkenthető a zaj is, mindez a pontosság növelésével. Tehát egyetlen szilícium hordozófelületen kell létrehozni az integrált áramkör elemeket, a szenzorokat és az aktuátorokat is. Ahhoz azonban, hogy ilyen eszközöket mára kézbe vehessünk, a gyártástechnológiának jelentős fejlődésen kellett átmennie a XX. század második felében.

Mára a különféle gyártók különféle és egyedi gyártástechnológiákat fejlesztettek ki, de a lényegük hasonló. A mikromechanikai komponenseket ún. kompatibilis mikrogépészeti műveleti eljárásokkal állítják elő. A technológia első ránézésre hasonlít az integrált áramkörti elemekéhez, de azokkal ellentétben a MEMS rendszerek esetén a szilíciumhordozót a harmadik dimenzióban is alakítani kell [4].

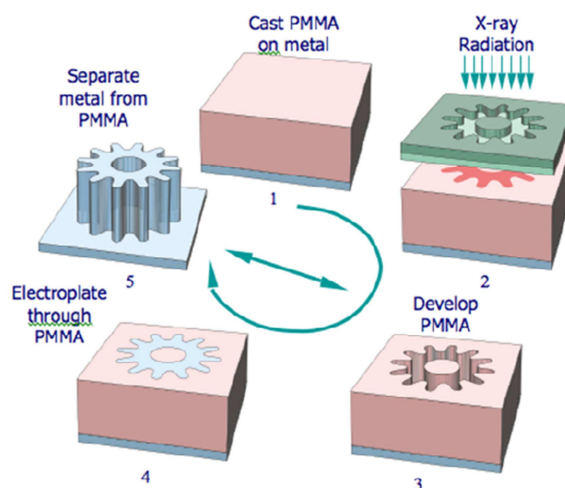
A legelterjedtebb a tömbi mikromechanika („bulk micromachining”) tömeggyártási technológia, amellyel egyszerre több ezer elemet építhetünk ki a hordozó felületén, hasonlóan az IC-k gyártástechnológiájához. Egy maszk védőréteget visznek fel a felületre valamilyen optikai úton, amellyel a szerkezet geometriája kialakítható. A fölösleges részeket vegyi úton marják le, majd utólagos megmunkálással a védőréteget is eltávolítva a kész megmunkált szerkezet marad. Ez egy olcsó, gyors, tömeggyártásra megfelelő technológia, de elsősorban kisebb bonyolultságú szerkezetek esetén használatos [4]. A kristályirányoktól függően anizotróp marási eljárással egyszerű, de sokféle geometria hozható létre [1].

Az előzővel ellentétben a felületi mikromechanika („surface micromachining”) technikával a felületre rétegenként építkezve készítik el a szerkezetet (1.3.1. ábra). Minden réteg fölé fotorezisztív réteget visznek fel, amelyen litografikus eljárással a szükséges mintázatot készítik el. Szigetelő rétegnek szilíciumoxidot használnak, amit az eljárás végén, hasonlóan az előző módszerhez, vegyi úton eltávolítanak [4]. A megmaradó geometria a kész szerkezet. Ez a módszer drágább, de pontosabb gyártást tesz lehetővé, ezért a bonyolultabb geometriák ezzel a módszerrel készíthetők [1].



1.3.1. ábra: Felületi mikromechanika [4]

A LIGA („Lithographie, Galvanoformung, Abformung”) egy olyan technológia (1.3.2. ábra), amellyel nagy felbontású, bonyolult komplexitású szerkezetek hozhatók létre, akár több száz mikron vastagságban, ami az előző két eljárással nem lenne lehetséges [1]. Ez egy nem szilíciumalapú technológia, ahol a kiinduló anyag egy röntgensugár érzékeny PMMA (plexi) réteg. A rétegre maszkot helyeznek, majd röntgensugarakkal besugározzák. A rétegnek megfelelő részei vegyi úton eltávolíthatók, amely során üregek maradnak. Ezeket a részeket nikkellel töltik ki, majd a megmaradt PMMA réteget is eltávolítják. Az olcsó eljárás ellenére az eredmény egy lényegesen pontosabb, majdnem mérőleges felületekkel rendelkező geometria [4].



1.3.2. ábra: LIGA folyamat [4]

1.4. ELEKTROSZTATIKUS ÉS TERMIKUS AKTUÁTOROK

Mikroelektromechanikai rendszerekben a mikroaktuátorok kulcsfontosságú szerepet játszanak. Ezeknek az apró beavatkozónak a feladata más egységek mozgatása, forgatása, esetleg elektromos kapcsolása. Ellentétben a hagyományos, makroszkopikus méretű beavatkozókkal és szenzorokkal, amelyek működését elektromágneses erők felhasználásával érjük el, a MEMS szerkezetekben előtérbe kerülnek az elektrosztatikus, termikus vagy piezoelektromos jelenségek [1]. Ennek ellenére a legelterjedtebbek az elektrosztatikus és termikus elven működő érzékelők és beavatkozók.

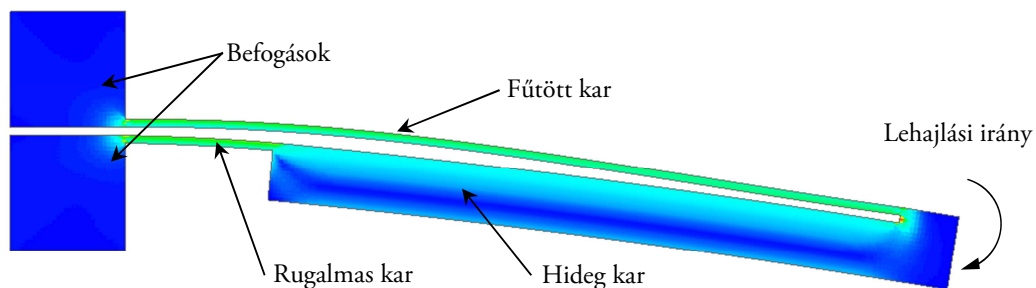
Míg az elektromágneses erő a lineáris méretek csökkenésével csökken, addig a létrehozható elektrosztatikus erő nő. Éppen ezért az elektrosztatikus elven működő aktuátorok és szenzorok igen elterjedtek a MEMS rendszerekben. Mindezek mellett a gyártását tekintve nagyon hasonló technológiával készíthető, mint a hozzá tartozó IC, ezért könnyen integrálható. További előnye, hogy szinte nincs fogyasztása, mivel a felvett áram a beavatkozás közben közel nulla. Hátránya viszont, hogy a működéshez nagy feszültség szükséges és a hiszterézisek miatt a működtetés bonyolultabb [1].

Másik nagy csoportot képviselnek a termikus aktuátorok, amelyeknek működésének alapját a hőmérsékletkülönbség hatására bekövetkező térfogatváltozás illetve fajlagos nyúlás képezi. A hőmérsékletkülönbség létrehozása általában elektromos úton történik. Egy ellenálláson átfolyó áram hatására energia disszipálódik az ellenálláson, vagyis hő keletkezik. A keletkezett Joule-hő jól szabályozható, ezért gyakran alkalmazzák MEMS szerkezetekben a módszert. Relatívén nagy erők kifejtésére alkalmasak már alacsony feszültség esetén is, de előnyei mellett hátrányokkal is rendelkeznek. Többek között nagy energiafogyasztásuk, és alacsony kapcsolási frekvenciájuk a mai napig problémát jelent [1].

Két egymás mellé szerelt, különböző hőtágulási együtthatójú fémből ún. bimetált kapunk, amely a hőmérsékletnövekedés hatására, az eltérő alakváltozás miatt deformálódik. Ezzel az alkalmazással nemcsak hagyományos méretekben, de MEMS szerkezetekben is találkozhatunk. Üzemeltethetjük a szerkezetet kapcsolóként is, vagy akár ilyen módon apró tükröket mozgathatunk. Az eltérő nagyságban megnyúló fémlemezek stabilan, meghatározható helyzetbe hozhatók, a felületüket borító fényvisszaverő réteg miatt pedig elektronikai-optikai kapcsolóként üzemeltethetők [1].

1.5. EGY FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR

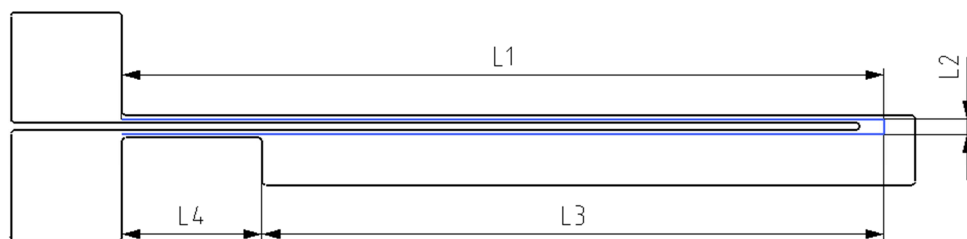
Az egy forró karos („hot-arm”) termikus aktuátorok működésének is az alapja a hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező alakváltozás (1.5.1. ábra). A szükséges hőmérséklet különbséget elektromos úton hozzák létre úgy, hogy a befogásokon keresztül áramot vezetnek a szerkezetbe. Az ellenállás miatt energia disszipálódik a karokon, ami hőmérséklet növekedésként jelentkezik. Mivel a geometria szakaszonként változó, ezért a szakaszok ellenállása is változó lesz. Ez a nem egyenletes hőmérséklet-eloszlás fogja eredményezni az eltérő megnyúlásokat. Mivel a fűtött kar hosszú és vékony, ennek az ellenállása nagyobb lesz, mint a hideg karé. Ezért a vékonyabb szál hőmérséklete fog lényegesebben megemelkedni. A fűtött kar hossza tehát megváltozik, amelyet a geometria a befogások miatt akadályozni kényszerül. Ennek hatására a szerkezet lehajlik.



1.5.1. ábra: Az egy forró karos termikus aktuátor kialakítása és lehajlása

Az így létrejövő lehajlást kell meghatároznunk, hogy a szerkezet működéséről minél több információval szolgálhassunk. A működési tartomány meghatározásához szilárdsági ellenőrzésre van szükség. Az elmozdulások ismerete tehát a működés szempontjából lényeges.

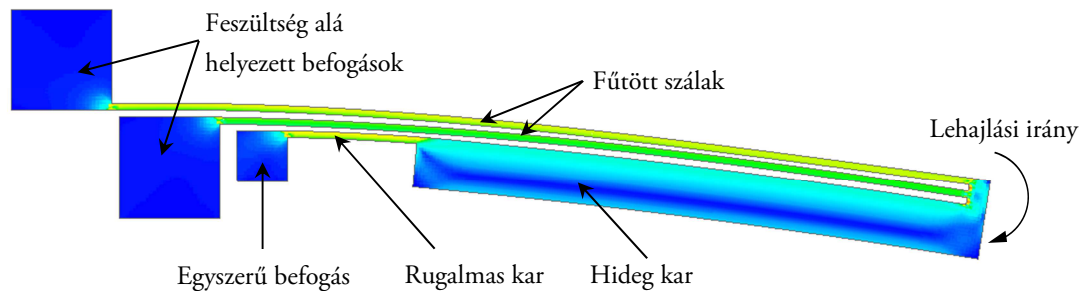
Az analitikus megoldáshoz a Bernoulli-rúdelméletet használhatjuk. Ehhez a rúdszakaszokat a súlypontvonalukkal helyettesíthetjük (1.5.2. ábra). Mivel a hideg kar keresztmetszete lényegesen nagyobb a fűtött karnál, ezért ez a szakasz tökéletesen merevnek vehető. Első közelítésben így egyszerűsíthető a feladat.



1.5.2. ábra: Helyettesítés a Bernoulli-rúdelmélet szerint

1.6. KETTŐS FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR

A kettős forró karos termikus aktuátor („double-hot-arm”) működése is hasonló az egy forró karos aktuátoréhoz (1.6.1. ábra). A különbség az, hogy áram csak a fűtött karokban folyik, mivel a három befogás közül csak kettő van feszültség alá helyezve. Ennek az az eredménye, hogy jelentős hőmérséklet növekedés csak a fűtött szálakon jelentkezik. Mivel az adott szakasz ellenállása függ annak geometriájától, ezért nem alakítható ki tetszőleges nagyságú keresztmetszet [1].

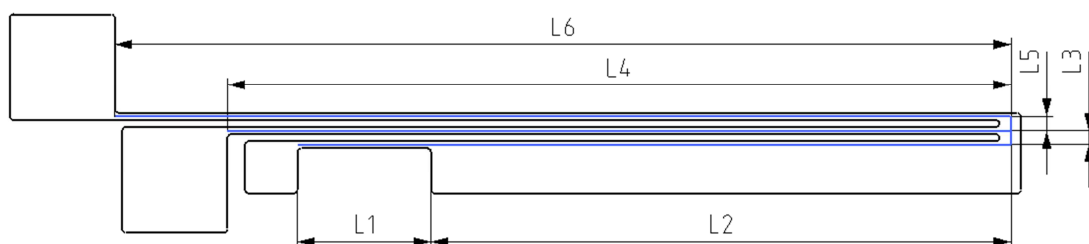


1.6.1. ábra: A kettős forró karos aktuátor kialakítása és lehajlása

Az egy fűtött karos aktuátor esetében az elektromos áram miatt korlátozottabbak a geometriai kialakítás lehetőségei. A rugalmas kar nem vehető túlságosan vékonyra, mivel az ellenállása és a hőmérséklete is túlzottan megemelkedne. Kettős forró karos aktuátor esetén ezen a szakaszon elektromos áram nem folyik keresztül, hőmérséklete csak a hővezetés miatt emelkedhet meg. Mivel a bevezetett teljesítménynek az egy forró karos esethez képest nagyobb hányada disszipálódik a fűtött karokon, ezért ugyanakkora térfogaton nagyobb lehajlás várható.

A kettős forró karos aktuátor esetén tehát vékonyabbra vehető a rugalmas szál és nagyobb lehajlás érhető el. Azonban ez a változtatás is korlátozott. Túl hosszú és vékony rugalmas kar esetén a lehajlás ahelyett, hogy növekedne, csökkenni kezd [1]. Éppen ezért fontos, hogy az optimumot találjuk meg.

A geometria helyettesítését itt is a rúdelmélet szerint végeztük (1.6.2. ábra).



1.6.2. ábra: Helyettesítés a Bernoulli-rúdelmélet szerint

2. ELEKTROTERMÍKUS ANALÍZIS

2.1. A FIZIKAI JELENSÉG ALAPJAI

Az aktuátor működéséhez a rugalmas szálak hőmérsékletét növelni kell, és az így bekövetkező alakváltozás fogja eredményezni a végpont lehajlását. Mivel a hőmérséklet-eloszlás pontos ismerete szükséges az alakváltozás meghatározásához, ezért ennek a jelenségnek a megfelelő fizikai leírása az elsődleges.

A hőmérséklet növelése elektromos úton történik. Az aktuátor megfelelő rögzítési pontjait feszültség alá helyezve a poliszilíciumból készült szerkezet keresztmetszetein áram kezd folyni. Az anyagára jellemző fajlagos ellenállás és geometria ismeretében meghatározhatjuk az eredő ellenállását és a rajta átfolyó áramot. Ezzel együtt meghatározhatjuk azt az energiát is, ami a térfogatban disszipálódik. Korábbi mérések és tapasztalatok azt bizonyítják, hogy a sugárzásos hőáram és a felületi hőátadás elhanyagolható a hővezetés nagyságához képest [5]. Ennek oka, hogy a poliszilícium hővezetési együtthatójának értéke lényegesen nagyobb a levegő hővezetési együtthatójánál (vákuumban tokozott eszközöknél nincs levegő, tehát nincs hőátadás sem, csak sugárzásos hőközlés lehetséges).

A hővezetés alapegyenletét J.B.J. Fourier alkotta meg (1822.), ezt nevezzük Fourier-törvénynek. E szerint egy homogén testben a hőáram ($\dot{Q}$) a csökkenő hőmérsékletek irányába mutat, arányos a terjedés irányú, hosszegységenkénti hőmérséklet-változással ($d\theta/dx$), a test anyagára jellemző hővezetési együtthatóval (λ) és az erre az irányra merőleges keresztmetszettel (A) [6].

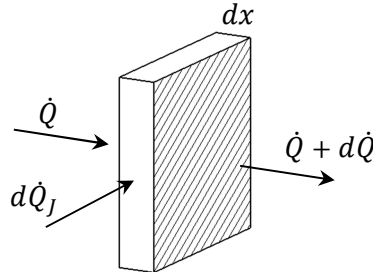
$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

A fenti törvény csak a hővezetést írja le, az elektromos áram által létrehozott hőmérsékletváltozás a Joule-hő ismeretében számítható. A Joule-hő (teljesítmény) arányos az ellenálláson eső feszültséggel (U) és a rajta átfolyó árammal (I).

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

2.2. ELEKTROTERMİKUS HATÁS FIGYELEMBEVÉTELE EGYSZERŰ RÚDON

Az egyszerűség kedvéért vehetjük úgy a Joule-hőt, mintha kívülről vezetnénk be a felületbe egy azzal megegyező nagyságú hőáramot. Ha ezt egy állandó keresztmetszetű rúd minden elemi darabján (2.2.1. ábra) fel tudjuk írni, akkor a teljes rúdszakaszra felírható az alap differenciálegyenlet.



2.2.1. ábra: Rúd elemi darabja

Az energia megmaradás alapján a kivágott rúddarabba belépő és kilépő hőáramok előjeles összege zérus.

$$\begin{aligned} \dot{Q} + d\dot{Q}_J - (\dot{Q} + d\dot{Q}) &= 0 \\ d\dot{Q} &= d\dot{Q}_J \end{aligned}$$

A rúd elemi darabjára vonatkozó Joule-hő kiszámításához át kell alakítanunk a kifejezést. A dx vastagságú felületen csak a feszültségnek egy kis hányada fog esni, de minden egyes keresztmetszeten ugyanaz az áram halad keresztül.

$$d\dot{Q}_J = dU \cdot I = U \cdot \frac{dx}{L} \cdot \frac{U}{R}$$

Az anyagra jellemző fajlagos ellenállás ismeretében tovább alakíthatjuk az összefüggést, és kifejezhetjük az ellenállás értékét a fajlagos ellenállás (ρ), a rúd hossza (L) és keresztmetszetének ismeretében.

$$\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{L}{A} \\ d\dot{Q}_J &= U \cdot \frac{dx}{L} \cdot \frac{U}{\rho \cdot \frac{L}{A}} = \frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \cdot dx \end{aligned}$$

Felhasználva az egyensúlyra kapott összefüggést, majd formálisan átalakítva, a következő egyenletet kapjuk.

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= \frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \cdot dx \\ \frac{d\dot{Q}}{dx} &= \frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \\ \frac{d}{dx} \left(-\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \right) &= \frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \end{aligned}$$

Hely szerint deriválva a belső összefüggést (állandó keresztmetszetű, homogén rudat feltételezve), majd átrendezve azt, megkapjuk az elektromosan fűtött rúd differenciálegyenletét.

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} = -\frac{U^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L^2}$$

A differenciálegyenlet megoldásához két peremfeltételre van szükségünk. Ha a rúd végeit állandó hőmérsékletet tudjuk tartani, akkor elsőfajú peremfeltételről beszélünk, amely szerint:

$$\vartheta(0) = T_s \quad \vartheta(L) = T_s$$

Ebben az esetben a $\vartheta(x)$ hőmérséklet-eloszlás parabola alakot nyer.

$$\vartheta(x)_{\text{ált.}} = -\frac{U^2 \cdot x^2}{2 \cdot L^2 \cdot \lambda \cdot \rho} + C_1 + x \cdot C_2$$

Abban az esetben, ha a rúd két végpontja eltérő hőmérsékletű, a differenciálegyenlet peremfeltételei a következők.

$$\vartheta(0) = T_{s1} \quad \vartheta(L) = T_{s2}$$

Így a differenciálegyenlet megoldása, valamint a hőmérséklet-eloszlás első differenciálhányadosa.

$$\vartheta(x)_{T_{s12}} = T_{s1} + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \cdot x + \frac{U^2 \cdot (L - x) \cdot x}{2 \cdot L^2 \cdot \lambda \cdot \rho}$$

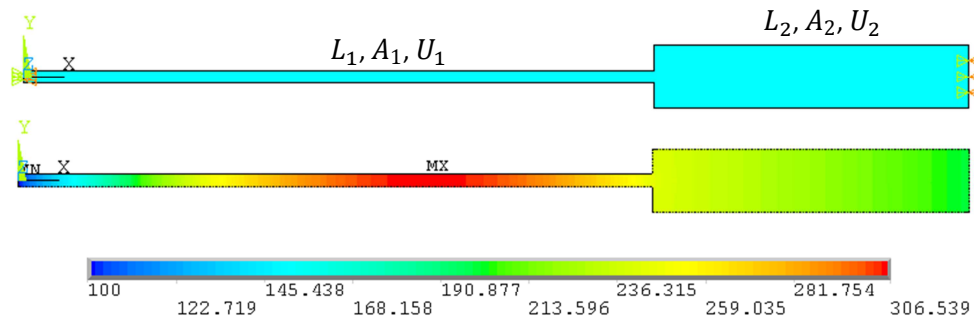
2.3. VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RÚD

A differenciálegyenletből kapott általános megoldást könnyen felhasználhatjuk más esetre is, függetlenül attól, hogy milyen peremfeltételünk van.

$$\vartheta(x)_{\text{ált.}} = -\frac{U^2 \cdot x^2}{2 \cdot L^2 \cdot \lambda \cdot \rho} + C_1 + x \cdot C_2$$

$$\vartheta(x) = T_{s1} + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{L} \cdot x + \frac{U^2 \cdot (L - x) \cdot x}{2 \cdot L^2 \cdot \lambda \cdot \rho}$$

Ha ismerjük egy rúdszakaszra a differenciálegyenletet, és meg tudjuk oldani egy változó keresztmetszetű rúd esetére is, akkor lehetőségünk van tetszőleges darabszámú rúdszakaszból álló szerkezet hőmérsékletének meghatározására (2.3.1. ábra).



2.3.1. ábra: Hőmérséklet-eloszlás két különböző rúdszakasz esetén

A hőmérséklet-eloszlást leíró differenciálegyenlet változatlan, a megoldásához azonban peremfeltételekre és illesztési feltételekre van szükségünk. A rúd két végpontjának csak a hőmérsékletét ismerjük. Használhatjuk a hőtanban elterjedtebb ellenálláshálózat-modellt is a feladat megoldására, de a legegyszerűbb az, ha a differenciálegyenlet megoldásának általános alakjából indulunk ki.

Az állandó keresztmetszetű rúd analógiája útján felírható valamennyi szükséges összefüggés. Ha a rúd teljes szakaszára U feszültséget kapcsolunk, akkor a két különböző keresztmetszetű szakaszon U_1 és U_2 feszültség fog esni (feszültségosztó).

$$U_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = \frac{U}{\rho \cdot \frac{L_1}{A_1} + \rho \cdot \frac{L_2}{A_2}} \cdot \rho \cdot \frac{L_1}{A_1} = \frac{U}{\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}} \cdot \frac{L_1}{A_1}$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{U}{\rho \cdot \frac{L_1}{A_1} + \rho \cdot \frac{L_2}{A_2}} \cdot \rho \cdot \frac{L_2}{A_2} = \frac{U}{\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}} \cdot \frac{L_2}{A_2}$$

A differenciálegyenlet általános megoldásában két-két konstans szerepel, azaz négy ismeretlent jelent. Megoldásához összesen négy perem- és illesztési feltételre van szükségünk. Ez a két szakasz esetén két peremfeltételt és a közös pontban két illesztési feltételt jelent.

$$\frac{d^2 \vartheta_1(x)}{dx^2} = -\frac{U_1^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_1^2} \quad \rightarrow \quad \vartheta_1(x) = -\frac{U_1^2 \cdot x^2}{2 \cdot L_1^2 \cdot \lambda \cdot \rho} + C_1 + x \cdot C_2$$

$$\frac{d^2\vartheta_2(x)}{dx^2} = -\frac{U_2^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_2^2} \rightarrow \vartheta_2(x) = -\frac{U_2^2 \cdot x^2}{2 \cdot L_2^2 \cdot \lambda \cdot \rho} + C_3 + x \cdot C_4$$

$$\vartheta_1(0) = T_{s1}$$

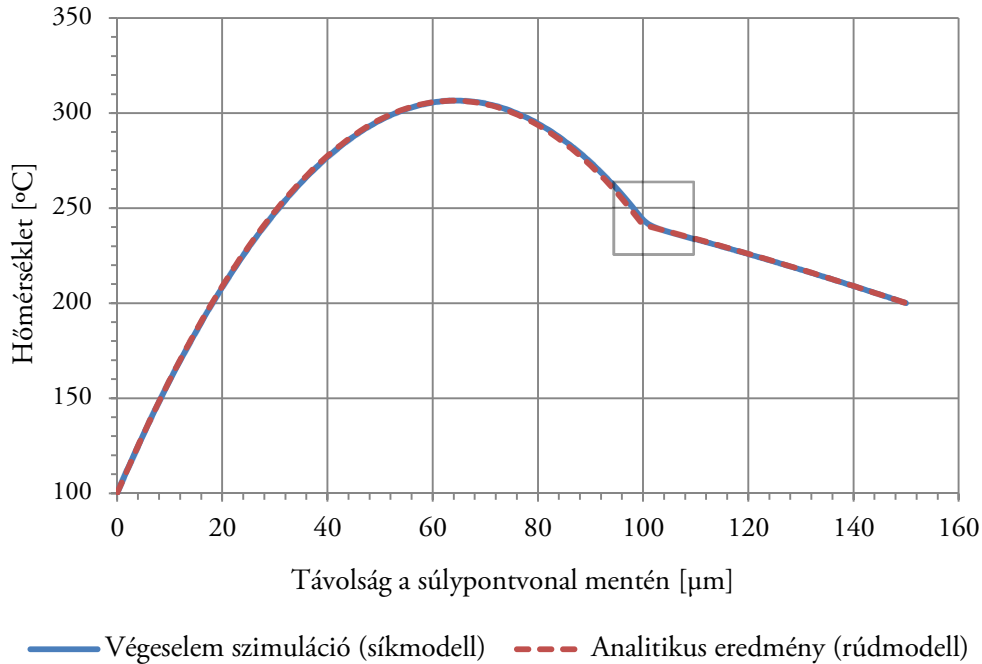
$$\vartheta_2(0) = \vartheta_1(L_1)$$

$$\vartheta_2(L_2) = T_{s2}$$

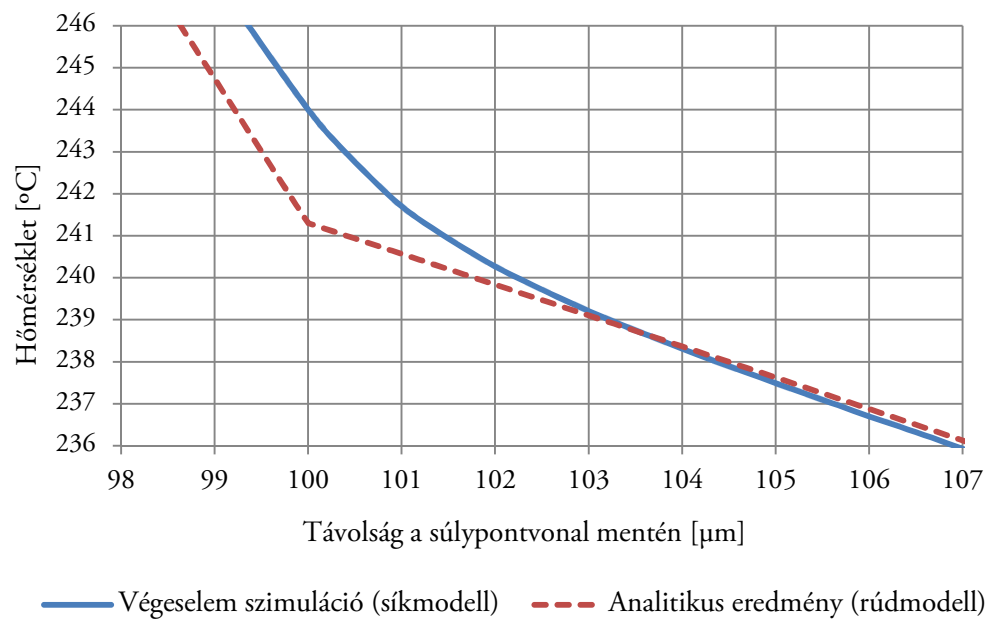
$$\vartheta_2'(0) \cdot A_2 = \vartheta_1'(L_1) \cdot A_1$$

Az egyenletrendszer ilyen formában már könnyen megoldható, de már mátrix alakban, a Cramer-szabály alkalmazásához ez is egy 4x4-es mátrix determinánsának kiszámítását igényelné. A megoldás viszont több ismeretlen esetén is könnyen elvégezhető matematikai program segítségével.

A végeelem szimuláció eredményét 150 pontban elmentettem, majd az analitikus számítás eredményét 15 pontban összehasonlítottam a szimuláció eredményeivel. A pontokra illesztett görbékből, valamint a nevezetes pontok összehasonlításából az látszik, hogy a két görbe jó pontossággal fedik egymást (2.3.2. ábra). A maximális hőmérséklet értéke mindkét esetben kerekítve 306,539 °C, a csatlakozási pont viszont 241,302 °C illetve 244,01 °C-ra adódott (2.3.3. ábra). Ez utóbbi 1,12 % eltérést jelent. Ez az eltérés könnyen magyarázható, hiszem a rúdmodell esetén a csatlakozás átlépésekor a hőáramsűrűség közvetlenül, törésszerűen megváltozik, ellenben a síkmodell esetében ez átmenetszerű. Ennek következtében az átlépési keresztmetszet nem jellemezhető egyetlen hőmérsékletértékkel, mert a hőáramnak keresztmetszetre merőleges irányú komponense is van. Így a hőmérséklet is változik a súlypontvonalra merőlegesen. Az eltérés azonban nagyságrendileg elfogadható.



2.3.2. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a rúd hossza mentén

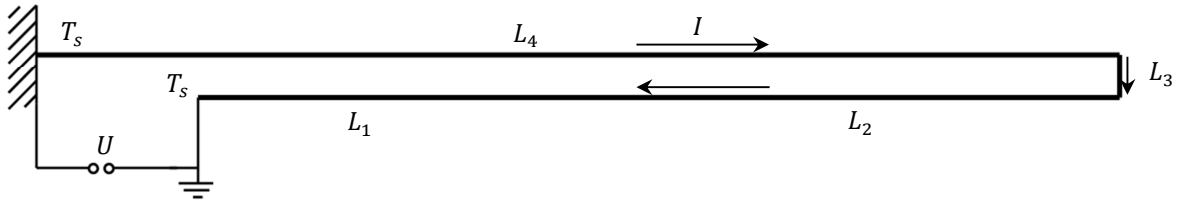


2.3.3. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a csatlakozási pontban

2.4. EGY FORRÓ KAROS AKTUÁTOR ELEKTROTHERMIKUS ELEMZÉSE

A korábbi módszerekkel az egy forró karos aktuátornak is elkészíthetjük az elektrotermikus rúdmodelljét (2.4.1. ábra). Ha ismerjük a geometriai méreteket, a feszültség értékét, valamint valamennyi szükséges anyagjellemzőt, felírhatjuk a differenciálegyenletet itt is szakaszonként, az illesztési peremfeltételekkel együtt. A szakaszokon eső feszültségeket itt is feszültségosztóval határozzuk meg.

$$U_i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot R_i = \frac{U}{\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_3}{A_3} + \frac{L_4}{A_4}} \cdot \frac{L_i}{A_i}$$



2.4.1. ábra: Feszültség alá helyezett karokban folyó áram

A szakaszok egyenletei és peremfeltételei ez esetben így írhatók.

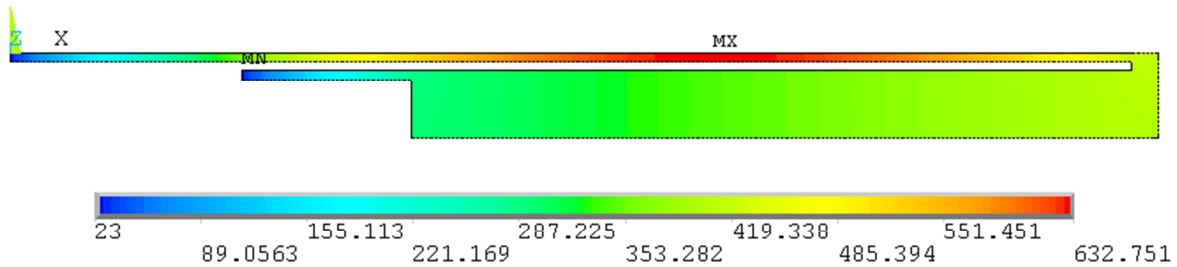
$$i = 1, 2, 3$$

$$\frac{d^2 \vartheta_i}{d\xi^2} = -\frac{U_i^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_i^2} \quad \vartheta_i(0) = \vartheta_{i+1}(L_{i+1}) \quad \vartheta_i'(0) \cdot A_i = \vartheta_{i+1}'(L_{i+1}) \cdot A_{i+1}$$

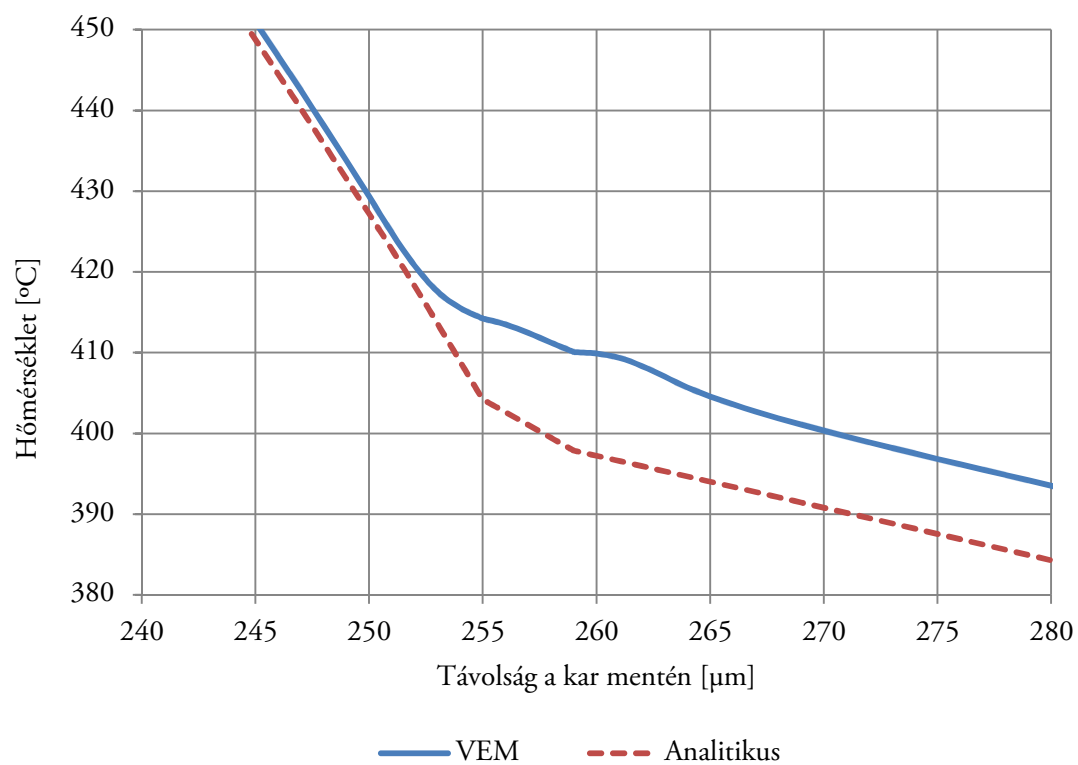
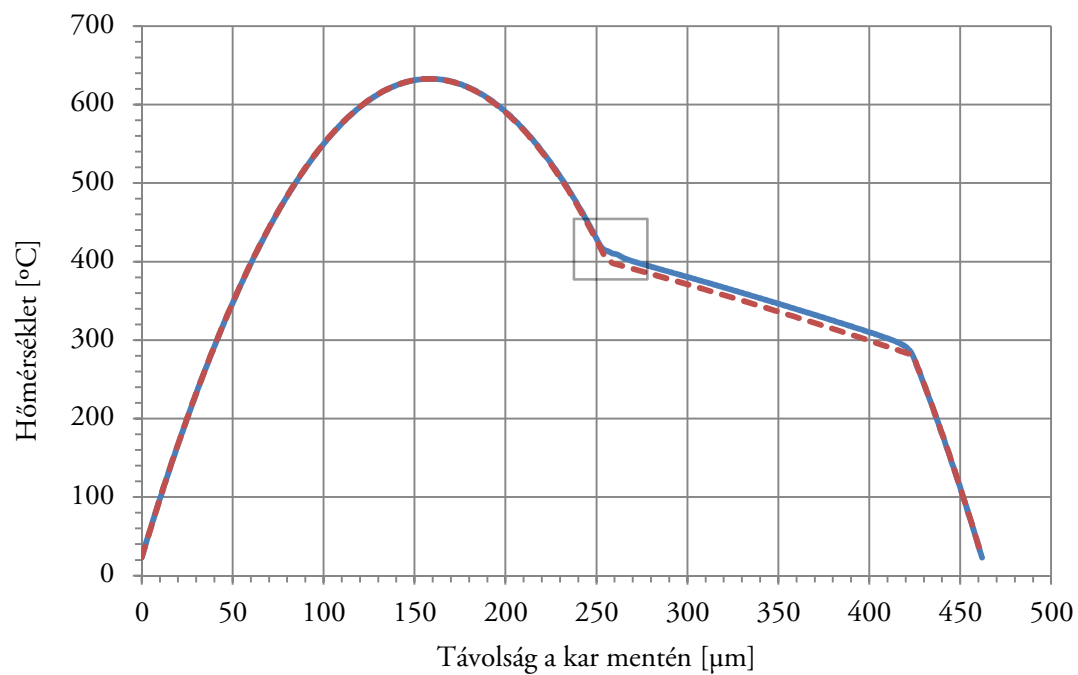
$$\vartheta_1(0) = T_s$$

$$\vartheta_4(L_4) = T_s$$

Megoldva a négy differenciálegyenletet, egy diagramban kirajzolhatjuk a megoldást, összehasonlítva a szimulációs eredménnyel (2.4.2. ábra). A görbék alapján látható, hogy a vékonyabb szakaszok mentén a rúdmodell jó közelítést ad, ellenben a hideg kar esetében már jelentősebb az eltérés. Ez utóbbi esetében az eltérés 2,6 % körüli, míg a maximális hőmérséklet szinte század pontossággal megegyezik (2.4.3. ábra).



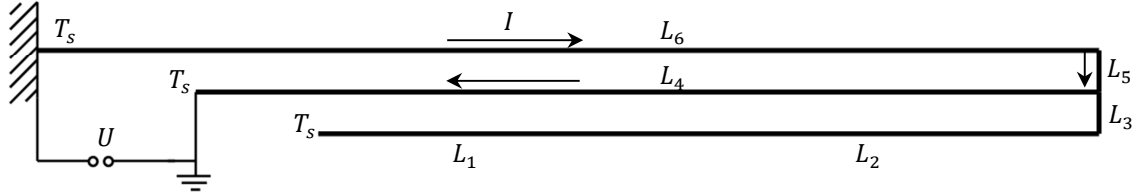
2.4.2. ábra: Hőmérséklet-eloszlás végelem modellel



2.4.3. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a szakaszok mentén

2.5. KETTŐS FORRÓ KAROS AKTUÁTOR ELEKTROTHERMIKUS ELEMZÉSE

A kettős forró karos aktuátor termikus modelljéhez is egyszerű rúdmodellt alkalmazhatunk (2.5.1. ábra), és a korábban levezetett képleteket itt is használhatjuk. Mivel a geometria az előző esetről bonyolultabb, ezért a szerkezetet darabokra kell vágni, és az illesztési feltételeket valamint a differenciálegyenleteket is körültekintőbben kell felírni.



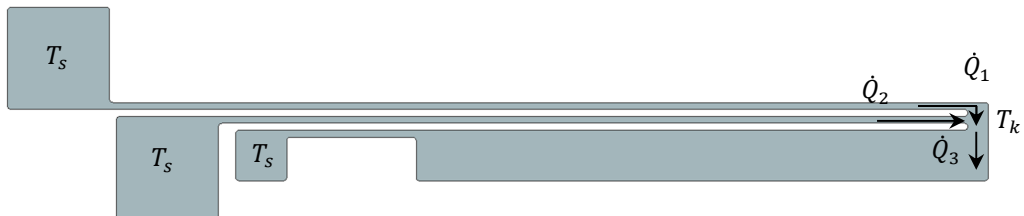
2.5.1. ábra: A feszültség alá helyezett karokban folyó áram

Azokon a szakaszokon, ahol feszültség esik, ott a korábbi egyenletek igazak. Ellenben a hideg karon áram nem halad át, ezért a feszültség értéke is zérus. A hővezetés hőforrásmentes, általános egyenletét kapjuk most vissza [6]. A hat szakaszra tehát három-három egyenletet kell felírni.

$$\frac{d^2\vartheta_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} = 0 \quad i = 1,2,3 \quad 0 < \xi_i < L_i$$

$$\frac{d^2\vartheta_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} = -\frac{U_i^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_i^2} \quad i = 4,5,6 \quad 0 < \xi_i < L_i$$

A peremfeltételek felírása egyszerű, az illesztési feltételek azonban eltér az előzőektől. A peremeken a hőmérséklet adott, ellenben a hármas csatlakozási pontnál a hőáram különbözik, itt ugyanis három változót kell figyelembe venni (2.5.2. ábra). Az energia megmaradás alapján azonban a be- és kilépő hőáramok előjeles összegének nullának kell lennie, így felírhatók a szükséges feltételek. Összesen tizenkét ismeretlennel tizenkét egyenletünk van, vagyis az egyenletrendszer megoldható! Ezek körül három elsőfajú peremfeltétel és kilenc illesztési feltétel.



2.5.2. ábra: Hőáramok a közös pontban

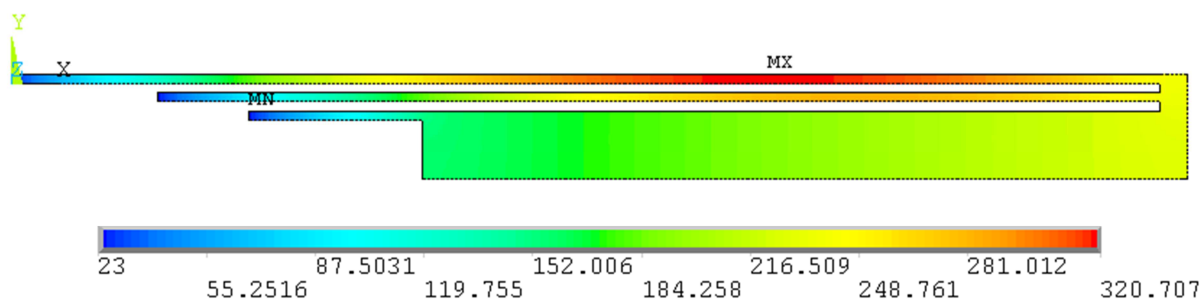
Az általános ξ helykoordináta irányától függően a csatlakozási pontban az előjelek nem egyértelműek, mivel az irányválasztástól függően a derivált lehet pozitív és negatív is egyaránt. A fenti ábra szerint a fűtött karokból a hő a hideg kar felé áramlik, de a geometriától függően az illesztési feltétel változhat. A fenti esetben a perem- és illesztési feltételek a következő alakot öltik.

$$\begin{aligned}
\vartheta_6(L_6) &= \vartheta_5(0) & \vartheta_6(0) &= T_s \\
\vartheta_5(L_5) &= \vartheta_4(0) & \vartheta_4(L_4) &= T_s \\
\vartheta_5(L_5) &= \vartheta_3(0) & \vartheta_6'(L_6) \cdot A_6 &= \vartheta_5'(0) \cdot A_5 \\
\vartheta_3(L_3) &= \vartheta_2(0) & \vartheta_4'(0) \cdot A_4 - \vartheta_5'(L_5) \cdot A_5 &= \vartheta_3'(0) \cdot A_3 \\
\vartheta_2(L_2) &= \vartheta_1(0) & \vartheta_3'(L_3) \cdot A_3 &= \vartheta_2'(0) \cdot A_2 \\
\vartheta_1(L_1) &= T_s & \vartheta_2'(L_2) \cdot A_2 &= \vartheta_1'(0) \cdot A_1
\end{aligned}$$

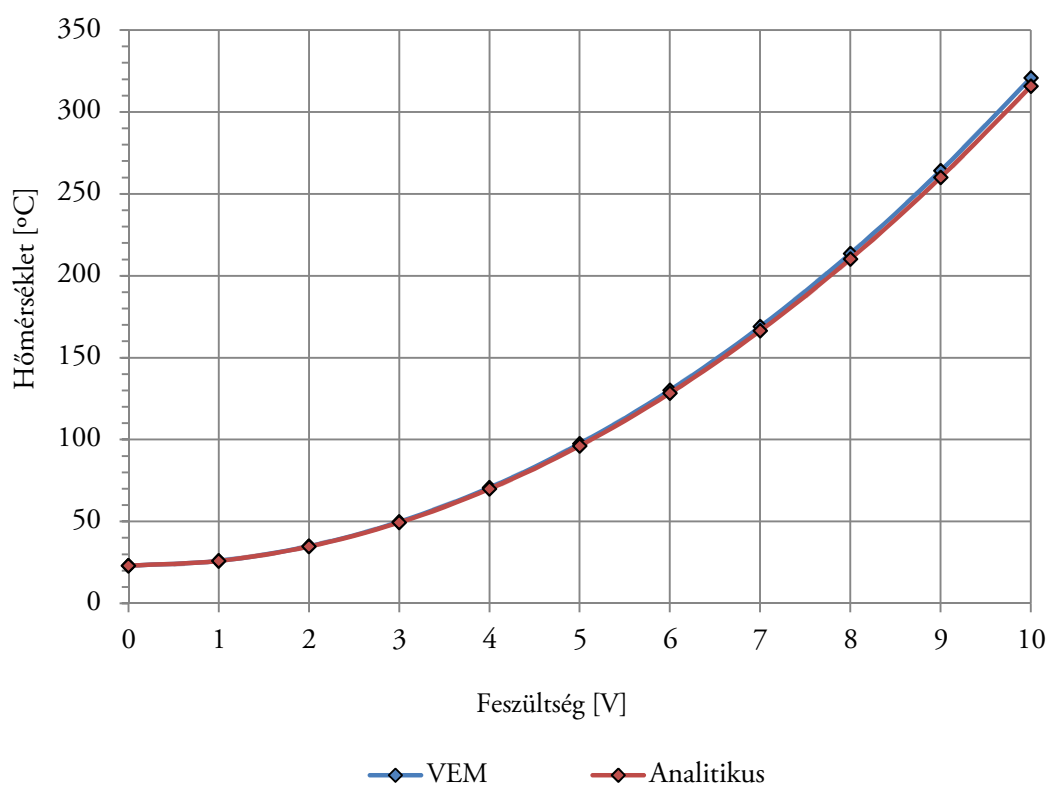
Első lépésben elektrotermikus szimulációt készítettem rúdmodellel, és az így kapott eredményeket hasonlítottam össze. Az elemek hosszát minden szakaszon egy mikrométerre vettem, a szakaszok geometriai jellemzőit pedig az analitikus számításban megegyezővé. A kapott értékek az összes kiíratott pontban kivétel nélkül (6 helyiértékben) megegyeztek az analitikus eredménnyel, ezért erről az összehasonlításról nem készítettem diagramot.

Második modellként elkészítettem az aktuátor síkmodelljét (2.5.3. ábra). T_s hőmérsékletnek 23 °C-ot választottam, ezt vettem később T_{ref} referenciahőmérsékletnek is a szilárdságtani számításoknál. Hálózáshoz 8 csomópontos kvadratikus elemet választottam egy mikrométeres mérettel. Tíz szimulációt futtattam a befogásokra kapcsolt feszültség függvényében 1-től 10 voltig, az így kapott maximális hőmérsékleti értékeket hasonlítottam össze az analitikus számítás eredményével (2.5.4. ábra).

Feszültség [V]	T_{max} [°C]		Eltérés [%]
	VEM (síkmodell)	Analitikus (rúdmodell)	
0	23	23	0 %
1	25,977	25,9265	1,726 %
2	34,908	34,7059	1,726 %
3	49,7936	49,3382	1,729 %
4	70,6331	69,8235	1,729 %
5	97,4267	96,1617	1,729 %
6	130,174	128,353	1,728 %
7	168,876	166,397	1,729 %
8	213,532	210,294	1,729 %
9	264,142	260,044	1,729 %
10	320,707	315,647	1,729 %

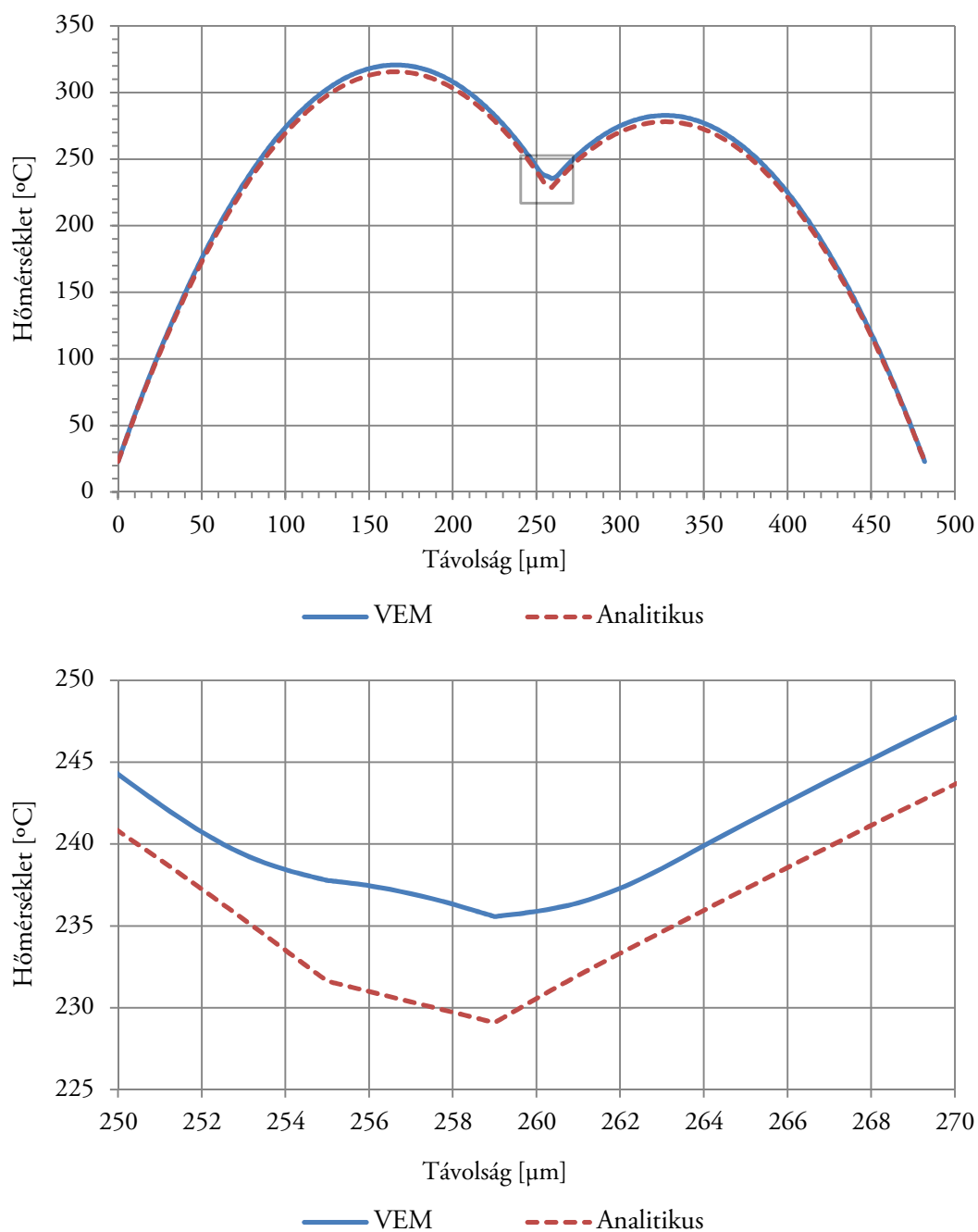


2.5.3. ábra: Hőmérséklet-eloszlás végelem modellel



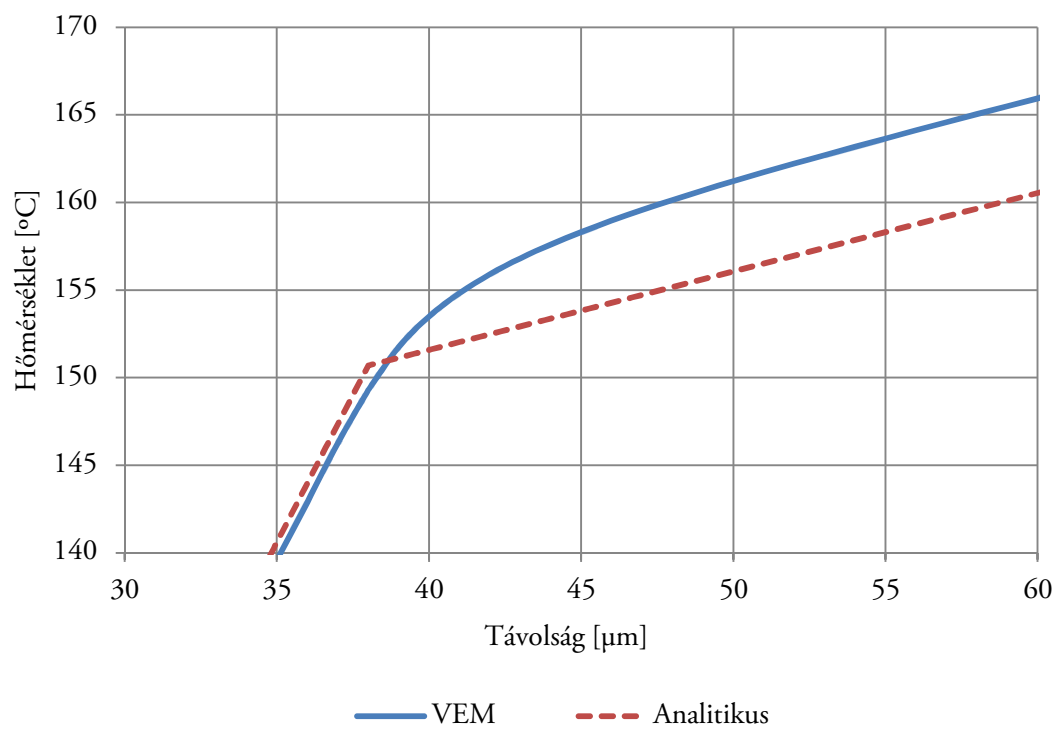
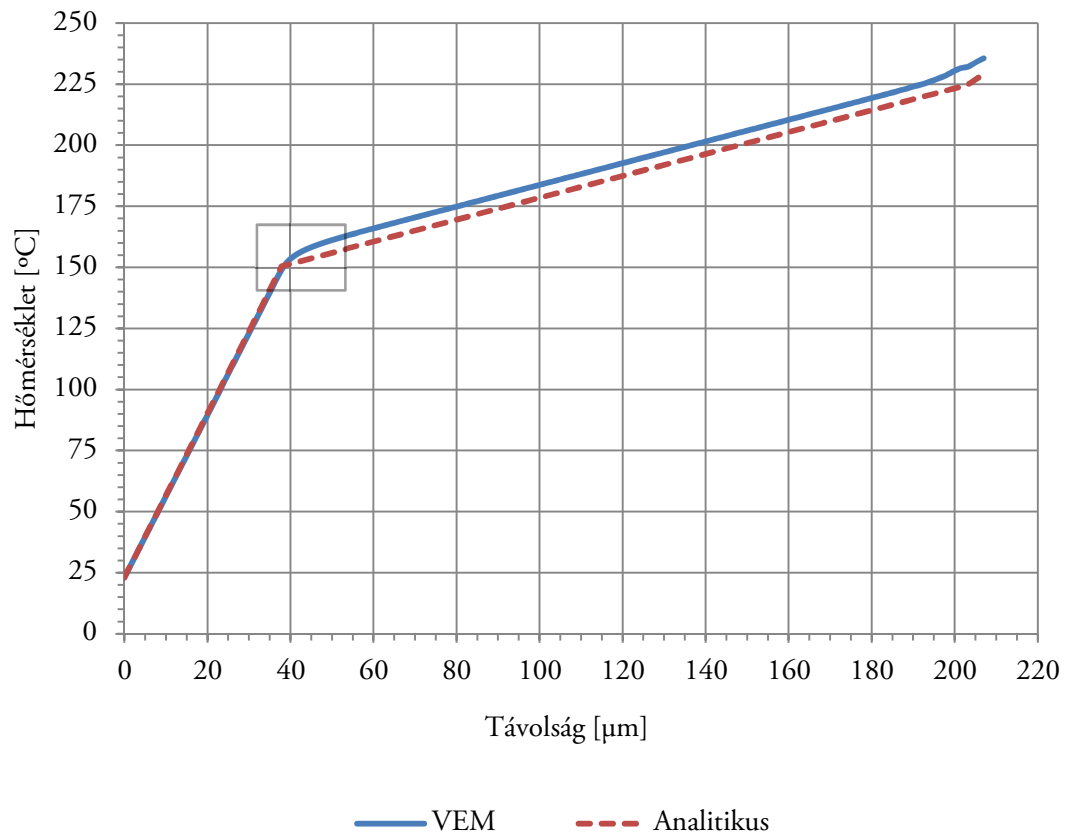
2.5.4. ábra: Maximális hőmérséklet a feszültség függvényében

Ezt követően 10 volt feszültségen összehasonlítottam a szakaszok számolt és szimulált hőmérsékletértékét. Ehhez a síkmodellen azokat a pontokat választottam ki, amelyek koordinátái a helyettesített rúdmodellel egyeztek meg, vagyis a súlypontvonalnak megfelelő pontokat. A legnagyobb eltérés a közös pont hőmérsékletében jelentkezett (kb. 3% eltérés), míg a maximális pont eltérése csak 1,7 % volt (2.5.5. ábra).



2.5.5. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a fűtött karok mentén, az áram irányában

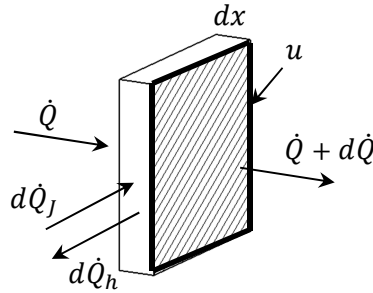
Hasonlóan a fűtött karokhoz, a hideg kar hőmérséklet-eloszlását is megvizsgáltam. Jól látszik, hogy ezeken a szakaszokon már jelentősebb az eltérés, kb. 3-3,5% (2.5.6. ábra). Mivel a további számításokhoz a hőmérséklet-eloszlás integrálja szükséges, ezért ez a hiba akár jelentős befolyással is lehet.



2.5.6. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a hideg kar mentén

2.6. HŐÁTADÁS FIGYELEMBEVÉTELE

A hőterjedési módok közül eddig csak a hővezetést vettük figyelembe, a hőátadástól pedig eltekintettünk. Abban az esetben, ha a testet valamilyen folyékony vagy gáznemű áramló közeg veszi körül, a hőátadással is számolnunk kell. Hasonlóan az előzőekhez most is fel kell írunk az egyszerű rúdelemre a differenciálegyenletet, amely segítségével általánosan fel tudjuk írni a szükséges függvényeket. A hőátadás figyelembevételével viszonylag egyszerűen módosul a modell, a Joule-hő okozta hőáram mellett egy hőátadásos hőáramot is figyelembe kell vennünk (2.6.1. ábra). Ez a testből távozó hőmennyiséget jelenti, vagyis ellentétes az előzővel. Ennek következtében minél nagyobb ez a hatás, annál kevésbé fog felmelegedni a rúd.



2.6.1. ábra: Rúd elemi darabja

A hőátadás alapegyenletét Newton nyomán a következőképpen definiálhatjuk.

$$\dot{Q} = h \cdot A \cdot (\vartheta - T_s)$$

Ennek mértéke függ a hőátadási tényező (h) értékétől, a felület (A) nagyságától illetve a felület és a környezet hőmérsékletének a különbségétől. Ez alapján már felírható az elemi rúddarabra az energia megmaradás alapján az egyensúlyi egyenlet [6].

$$\begin{aligned} \dot{Q} + d\dot{Q}_J - (\dot{Q} + d\dot{Q}) - d\dot{Q}_h &= 0 \\ d\dot{Q} &= -d\dot{Q}_J + d\dot{Q}_h \end{aligned}$$

A hőátadás egyenletét bontsuk tovább úgy, hogy az elemi rúddarab felületét írjuk fel dx segítségével. Így a palástfelület a következőképpen írható a keresztmetszet területével (u) és a vastagsággal kifejezve.

$$A = dx \cdot u$$

Ezt követően visszahelyettesíthetjük az egyenlet tagjait.

$$\begin{aligned} d\dot{Q}_J &= U \cdot \frac{dx}{L} \cdot \frac{U}{\rho \cdot \frac{L}{A}} = \frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \cdot dx \\ d\dot{Q}_h &= h \cdot u \cdot dx \cdot (\vartheta - T_s) \\ d\dot{Q} &= -\frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \cdot dx + h \cdot u \cdot dx \cdot (\vartheta - T_s) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\dot{Q} = \frac{d}{dx}\left(-\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx}\right) = -\frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A + h \cdot u \cdot (\vartheta - T_s)$$

Ez alapján az állandó keresztmetszetű rúd differenciálegyenlete a lenti alakba írható át. Az utóbbi tagot bordák differenciálegyenlete felírásához is szokás használni, ezért a második konstans szokás bordaparaméterrel helyettesíteni (m_b), amely a borda geometriai méreteit és anyagjellemzőjét tartalmazza.

$$\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} = -\frac{U^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L^2} + \frac{h \cdot u}{\lambda \cdot A} \cdot (\vartheta(x) - T_s) = -\frac{U^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L^2} + m_b^2 \cdot (\vartheta(x) - T_s)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{h \cdot u}{\lambda \cdot A}}$$

Az általános alakkal juthatunk a leggyorsabban eredményre, ezért a differenciálegyenlet megoldott alakját használjuk az integrálási konstansok meghagyásával. Mivel az egyenlet megoldható analitikusan, ezért a konstansokat később is behelyettesíthetjük. Így az egyenlet általános megoldása a következőképpen adódik.

$$\vartheta(x) = T_s + \frac{A \cdot U^2}{h \cdot L^2 \cdot u \cdot \rho} + C_1 \cdot e^{m_b \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m_b \cdot x}$$

2.7. HŐÁTADÁS A KETTŐS FORRÓ KAROS TERMÍKUS AKTUÁTORON

A minta kedvéért csak a kettős forró karos aktuátor esetére készítettem el a levezetést (2.7.1. ábra), de az egy forró karos aktuátornál is hasonlóan, sőt lényegesen egyszerűbben számítható.

A differenciálegyenlet általános alakját felhasználva, az összes szakasz egyenletét ismerjük. Szükségünk van a peremfeltételekre és az illesztési feltételekre is, hogy a konstansokat meghatározhassuk. Az előzőekhez hasonlóan ezek ugyanazok, csak a szakaszok hőmérsékletét leíró differenciálegyenletek változnak.



2.7.1. ábra: Az aktuátor rúdmodellje

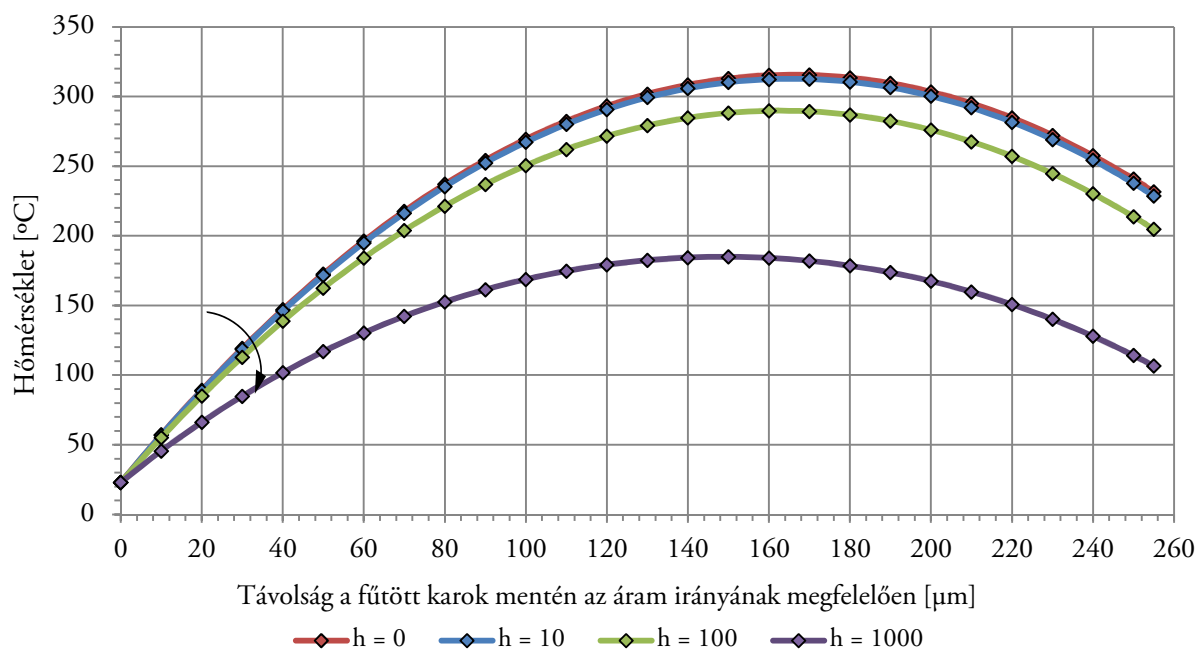
A szakaszok differenciálegyenletei általános alakban kifejezve.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\vartheta_1(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{h \cdot u_1}{\lambda \cdot A_1} \cdot (\vartheta_1(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_1 \\
 \frac{d^2\vartheta_2(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{h \cdot u_2}{\lambda \cdot A_2} \cdot (\vartheta_2(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_2 \\
 \frac{d^2\vartheta_3(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{h \cdot u_3}{\lambda \cdot A_3} \cdot (\vartheta_3(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_3 \\
 \frac{d^2\vartheta_4(\xi)}{d\xi^2} &= -\frac{U_4^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_4^2} + \frac{h \cdot u_4}{\lambda \cdot A_4} \cdot (\vartheta_4(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_4 \\
 \frac{d^2\vartheta_5(\xi)}{d\xi^2} &= -\frac{U_5^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_5^2} + \frac{h \cdot u_5}{\lambda \cdot A_5} \cdot (\vartheta_5(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_5 \\
 \frac{d^2\vartheta_6(\xi)}{d\xi^2} &= -\frac{U_6^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_6^2} + \frac{h \cdot u_6}{\lambda \cdot A_6} \cdot (\vartheta_6(\xi) - T_s) & 0 \leq \xi \leq L_6
 \end{aligned}$$

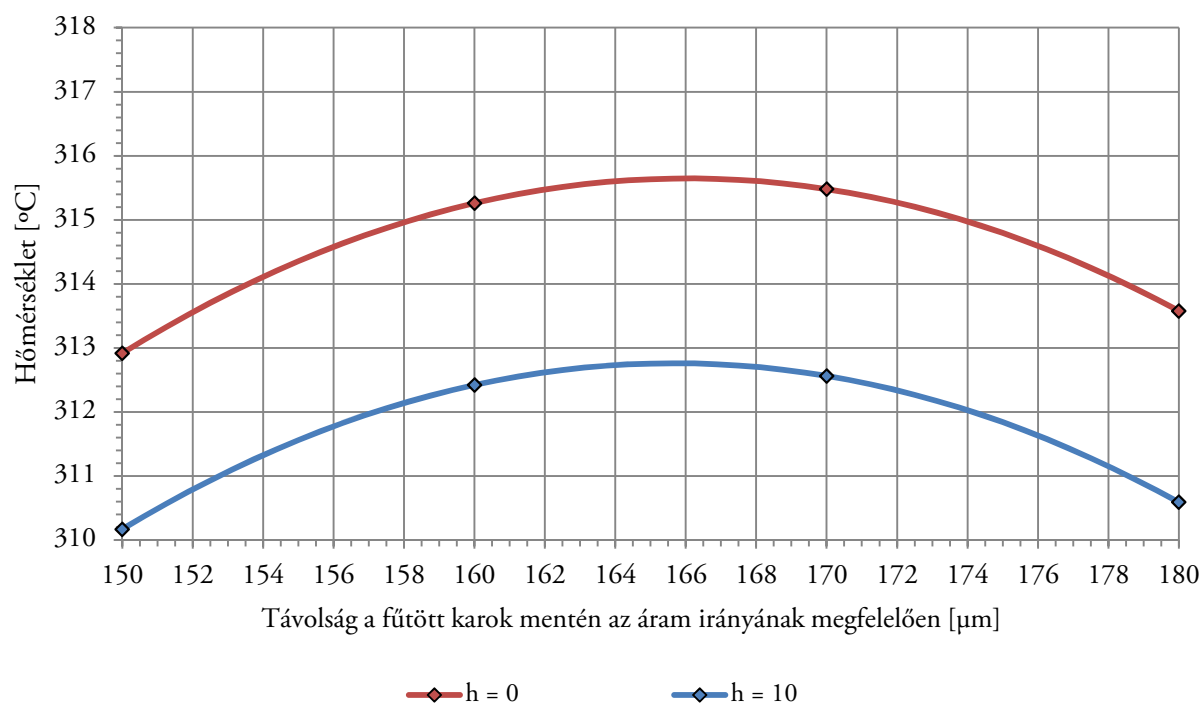
A tizenkét integrálási konstans így már meghatározható és a függvényekbe visszahelyettesíthető.

A fentiek alapján több hőátadási tényezővel kapott eredményt is összehasonlítottam az aktuátor felső fűtött karján (2.7.2. ábra). Normál méretekben természetes áramlás esetén a h hőátadási tényező értéke $8...20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ körüli. Kényszerített áramlás, illetve hűtés esetén növelhető a hőátadás, de extrém esetekben sem lehetséges tetszőlegesen nagy érték elérése. Maximálisan $100...1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ -re növelhető, de ez már egy szélsőséges, egyáltalán nem jellemző eset. $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ hőátadási tényezővel számolva az eltérés a hőátadás nélküli esettől a jelen esetben kb. $3 \text{ }^\circ\text{C}$, ami 1 %-nak felel meg (2.7.3. ábra). Ennek oka, hogy a lineáris méretek csökkenésével a felületek négyzetesen, a térfogatok pedig köbösen csökkennek. Így bizonyos jelenségek előtérbe kerülnek másokkal szemben. Ennek következtében

előfordulhat, hogy korábban elhanyagolt körülményekkel számolni kell (például folyadék esetén a felületi feszültséggel), míg másokat elhanyagolhatunk.

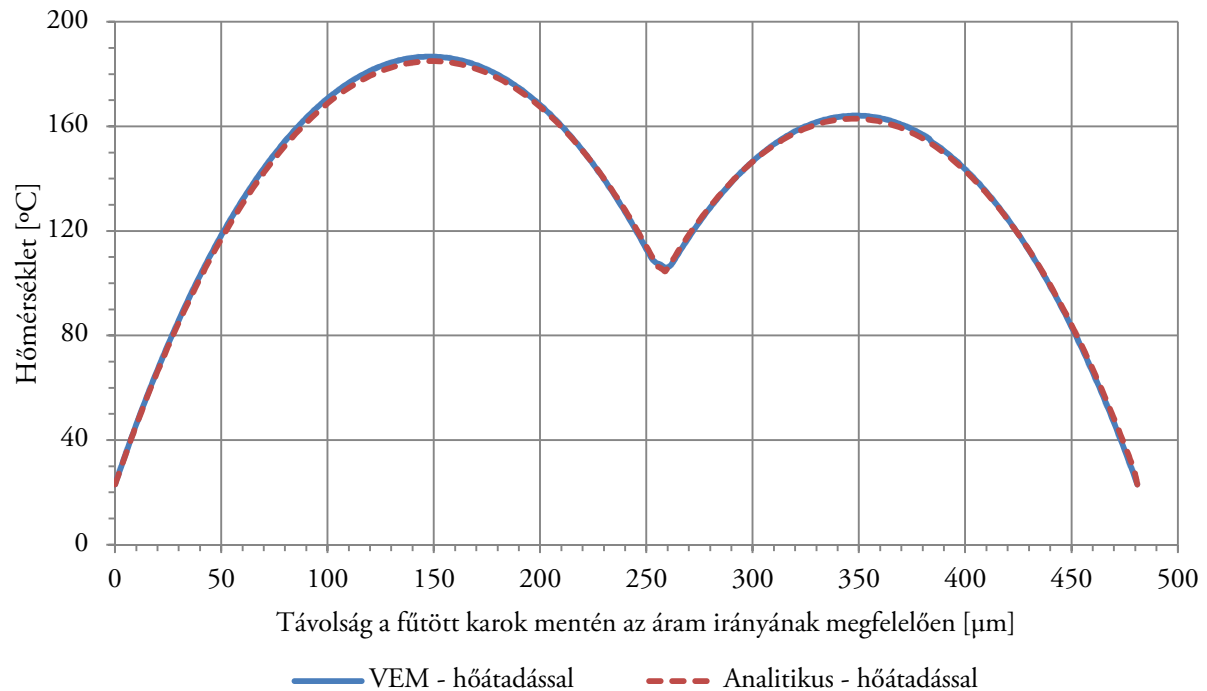


2.7.2. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a hőátadás növekedésével



2.7.3. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a maximális értékű pontnál

A számított eredményeket szimulációval is összevettem, de ehhez nem elegendő síkmodellt vizsgálni. A pontos eredményekhez elkészítettem a test 3D solid modelljét, majd annak minden felületére megadtam a hőátadás értékét. Mivel az analitikus számítás esetén hőátadás csak a palástfelületen történik, a solid modell ehhez képest nagyobb felületen ad át hőt a környezetének. Ez ismételt a csatlakozások miatt alakul így. Ebben az esetben azonban az eltérés kisebb lesz, mint hőátadás nélküli szimulációval, mert a végelem eredményét pozitív irányban torzítja (2.7.4. ábra).

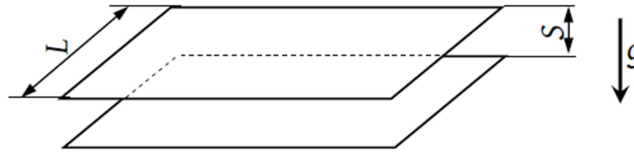


2.7.4. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a forró karok mentén

A probléma a hőátadási tényezővel viszont nem ér véget. A kérdés az, hogy mekkora értékkel számolhatunk? A hőátadási tényezőt a Newton- és Fourier-törvény szerint definiálhatjuk [6]. Az összefüggést megfogalmazva a hőátadási tényező függ a közeg (fluid, f) hővezetési tényezőjétől és az adott pontbeli határréteg δ_f vastagságától:

$$h_f \cdot (\vartheta - T_s) = \frac{\lambda_f}{\delta_f} \cdot (\vartheta - T_s) \quad \rightarrow \quad h_f = \frac{\lambda_f}{\delta_f}$$

Makroszkopikus méretekben a hőátadási tényező meghatározására félempirikus modellek állnak használatunkra. Ez azonban egyszerű geometriákra levezett összefüggések, hasonlósági kritériumok a Navier-Stokes egyenletből, amelyek érvényességi tartománya korlátozott. A jelen geometriára nem áll módunkban összefüggést találni, de izotermikus síklapokra igen. Ha például a hideg kart tekintjük, akkor jó közelítéssel használhatjuk a modellt. Vízszintes izotermikus síklap közötti résben történő hőátadás esetén (2.7.5. ábra), ha a felső sík a melegebb, az áramlások hasonlóságát leíró Nusselt-szám értéke 1, a Grashof-száma nincs is szükségünk. A hőátadási tényező innen meghatározható (S a lemezek távolsága).



2.7.5. ábra: Vízszintes helyzetű síklapok között hőátadás

$$Nu = \frac{h \cdot S}{\lambda_f} \quad \rightarrow \quad h = Nu \cdot \frac{\lambda_f}{S} \quad \rightarrow \quad h = \frac{\lambda_f}{\delta_f}$$

Ez az összefüggés a korábban levezetett képlethez vezet. Ha a kényszerített áramlásnál definiált határréteg, vagy ez esetben a lemezek távolságának értéke a 1...3 milliméteres tartományba esik, a levegő hővezetési tényezőjének értéke pedig $0,026 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, akkor a hőátadási tényező értéke valóban $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ érték körüli. Ellenben ha a méretek mikronméretűek, a hőátadási tényező értéke a képlet alapján $10\,000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ nagyságrendjébe esik. Más geometria esetén is, ahol az érvényességi tartományok engedik, hasonló értékű a hőátadási tényező.

Vegyünk például a hőátadást izotermikus gömb külső felületén [7], amely esetben a levezetett képletek használhatók, mivel az érvényességi tartományon belül maradunk. Természetesen ez a példa nem felel meg a feladatnak, de nagyságrendi becsléshez elfogadható.

Ez esetben szükségesek a közeg mértékadó hőmérsékletén vett anyagjellemzői (M.3.), illetve a jellemző méret, az átmérő. A hőátadás kiszámításához meg kell határoznunk a hőfokvezetési tényezőt (α), a Grashof-számot (Gr), a Prandtl-számot (Pr), Rayleigh-számot (Ra) és a Nusselt-számot (Nu) [6], [7].

$$T_m = \frac{T_w - T_\infty}{2}$$

$$Nu = \frac{h \cdot D}{\lambda}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot D^3 \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty)}{\nu \cdot \alpha}$$

$$Nu = 2 + \frac{0,589 \cdot Ra^{1/6}}{\left(1 + \frac{0,653}{Pr^{9/16}}\right)^{4/9}}$$

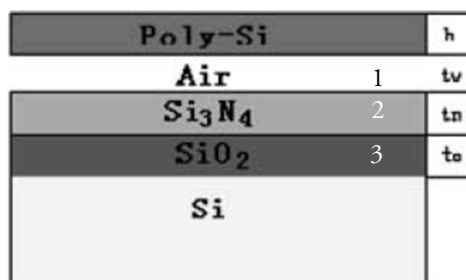
Ha a mértékadó hőmérséklet értékére kb. $300 \text{ }^\circ\text{C}$ -ot becslünk, és $160 \text{ }^\circ\text{C}$ -on keressük meg a levegő anyagjellemzőit. Ez esetben a hőátadási tényező értéke egy 2 mikrométer átmérőjű gömb esetén természetes áramlásnál $10\,834 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ -re adódik. Ugyanez, egy 2 milliméter átmérőjű gömbnél csak $13 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy a hőátadás nem hagyható figyelmen kívül, hanem továbbmenőkben vizsgálni kell, milyen körülmények között, mekkora értékkel szükséges ezt figyelembe venni.

2.8. HŐVEZETÉS A HÁTSÓ RÉTEGBEN

Sok korábbi, szakirodalmi levezetésben a hőátadás és a levegő hatása eltérő módon vannak definiálva. Nem a globális hőátadási tényezőt veszik figyelembe, hanem egy, az aktuátor hátsó felülete és az alapréteg között történő hővezetést. Ebben a hővezetésben csak a hátsó lap hatását számolják [1], [8].

Az aktuátor és a hátlap között egy vékony réteg húzódik, amely levegővel teli. Ezt követően az alapréteg is további rétegre bontható, egy Si_3N_4 és egy SiO_2 rétegre [8] (2.8.1. ábra). Mivel a levegőréteg nagyon vékony, itt figyelembe vehető egy hővezetés, de a jelenség leírása hasonló a korábban levezetettekhez.



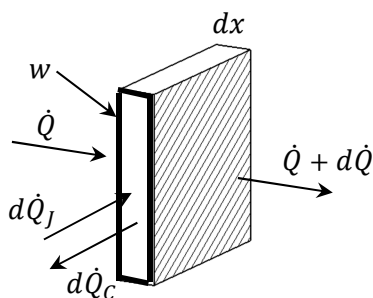
2.8.1. ábra: Aktuátor keresztmetszete [8]

Ebben az esetben három réteg sorbakapcsolásáról van szó a termikus ellenállás tekintve. Síklap esetén a termikus ellenállás a síklap vastagságától, felületétől és hővezetési tényezőjétől függ [6].

$$R_{t,síklap} = \frac{\delta}{\lambda \cdot A}$$

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3$$

A rúd elemi darabjára itt is felírhatjuk a differenciálegyenletet. A hőátadáshoz képest az egyenlet keveset módosul. A hő leadó felület négy felületdarab helyett itt csak egyetlen felület (2.8.2. ábra), ellenben nem egy hőátadási tényezőt definiálunk, hanem egy termikus ellenállást.



2.8.2. ábra: Rúd elemi darabja

Ez esetben tehát a differenciálegyenlet a következő alakot nyeri:

$$d\dot{Q}_c = \frac{\Delta T}{dR_t} = \frac{\vartheta - T_s}{\frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot w \cdot dx} + \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot w \cdot dx} + \frac{\delta_3}{\lambda_3 \cdot w \cdot dx}} = \frac{w \cdot dx}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot (\vartheta - T_s)$$

$$d\dot{Q} = -d\dot{Q}_J + d\dot{Q}_c$$

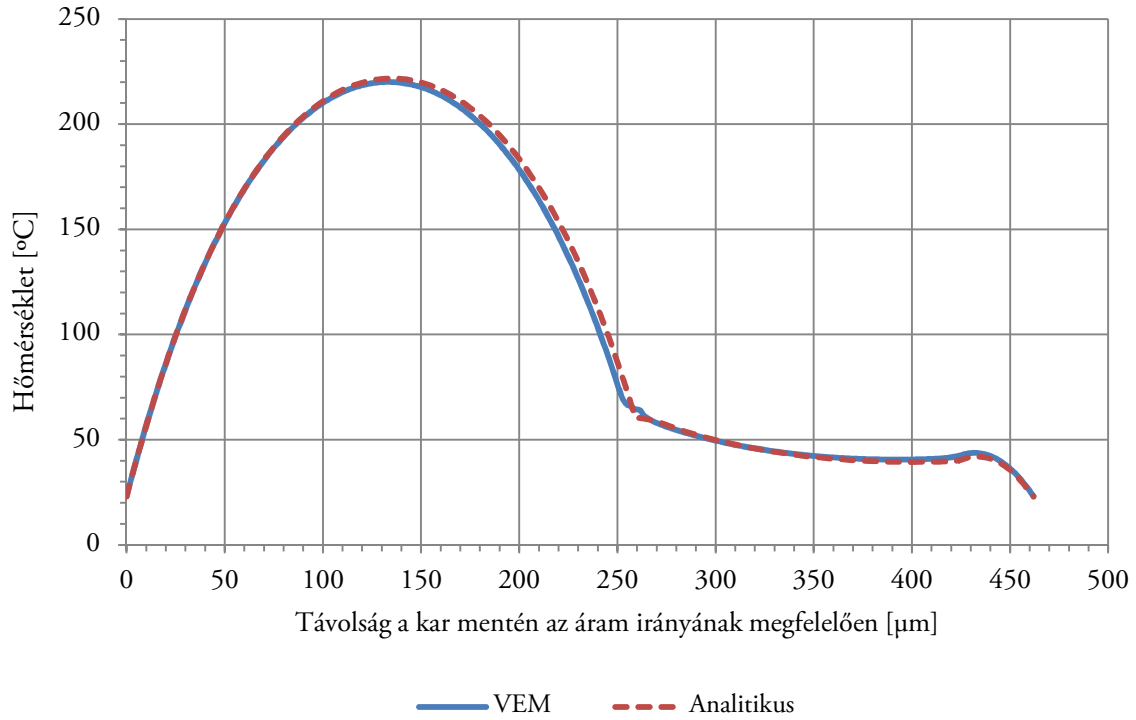
$$d\dot{Q} = -\frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A \cdot dx + \frac{w}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot (\vartheta - T_s) \cdot dx$$

$$\frac{d}{dx} \dot{Q} = \frac{d}{dx} \left(-\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \right) = -\frac{U^2}{\rho \cdot L^2} \cdot A + \frac{w}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot (\vartheta - T_s)$$

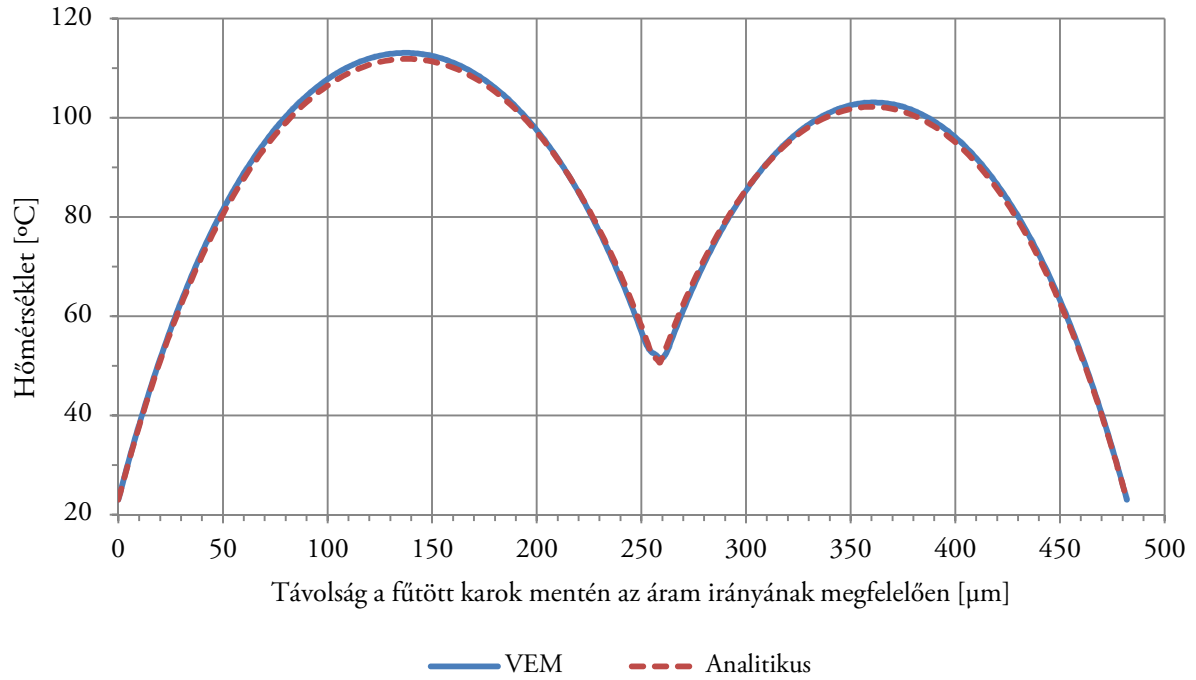
$$\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} = -\frac{U^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L^2} + \frac{w}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right) \cdot \lambda \cdot A} \cdot (\vartheta(x) - T_s)$$

Láthatóan a forma teljesen hasonló a hőátadásnál levezetetthez, a paraméterek egymásnak megfeleltethetők, a dimenziók is megegyeznek, és a perem- és illesztési feltételek is változatlanok.

$$u \rightarrow w \quad h \rightarrow \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right)^{-1}$$



2.8.3. ábra: Egy forró karos aktuátor hőmérséklet-eloszlása



2.8.4. ábra: Kettős forró karos aktuátor hőmérséklet-eloszlása

Ha megnézzük a dimenziókat a hővezetés esetén, azt tapasztaljuk, hogy az egyenértékű hőátadási tényező értéke is $10\,000\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ nagyságrendű. Más forrásban a keresztirányú hővezetés miatt egy alaktényező is figyelembe van véve, amely egy 1-nél nagyobb szorzótényező [1], [8] (M.2.). A megoldásban ez úgy jelenik meg, mintha minden szakasznál eltérő lenne a hővezetési tulajdonság. Ez esetben az egyenlet a következőképpen módosulna.

$$S_i = \frac{v}{w_i} \cdot \left(\frac{2 \cdot \delta_1}{v} + 1 \right) + 1 \quad i = 1 \dots 6$$

$$\frac{d^2 \vartheta_i(x_i)}{dx_i^2} = - \frac{U_i^2}{\lambda \cdot \rho \cdot L_i^2} + S_i \cdot \frac{w}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right) \cdot \lambda \cdot A} \cdot (\vartheta_i(x) - T_s)$$

Ez az alaktényező egy szakaszonként állandó konstans jelent, az analitikus számításnál könnyen figyelembe vehető.

Az alaktényező nélkül számított eredményeket itt is végelem szimulációval vettetem össze, mind az egy forró karos (2.8.3. ábra), mind pedig a kettős forró karos aktuátor esetében (2.8.4. ábra). Az eredmények hasonlóak a hőátadásos esethez, hiszen visszavezethetők arra.

3. TERMOMECHANIKAI ANALÍZIS

3.1. EGY FORRÓ KAROS TERMIKUS AKTUÁTOR EGYSZERŰ MODELLJE

Első közelítésként egyszerűsítsük a hő bevezetésének, illetve terjedésének a módját. A hő bevezetésének leírásától tekintsünk el és tételezzünk fel elsőfajú peremfeltételt a fűtött szakasz végén. Ennek értelmében a hőmérséklet állandó a bevezetési ponton. Ha figyelmen kívül hagyjuk a hőátadást a kar felülete és a környezete között, akkor a hőmérséklet-eloszlás lineáris lesz a súlypontvonal mentén. Vegyük úgy a termikus terhelést, mintha a fűtött kar hőmérsékletét emelné csak meg, a hideg kartól tekintsünk el. Tovább egyszerűsíthetjük a feltevésünket, ha a fűtött szakasz mentén állandó hőmérsékletet feltételezünk. Ez áll a legmesszebb a valóságtól, de a közelítő képletben alkalmazható [9].

A termikus terhelést helyettesítsük külső erővel (F), amely által létrehozott nyúlás megegyezik a termikus terhelés által létrehozott megnyúlással (3.1.1. ábra) [9]. Konstans hőmérséklet-eloszlást feltételezve, az egyszerű Hooke-törvény felhasználásával, a következő módon számítható az alakváltozás [10]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma}{E}$$

A külső erő hatására a megnyúlást a belső normálerővel számíthatjuk, amely a teljes szakaszon konstans.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_m = \frac{F}{A \cdot E}$$

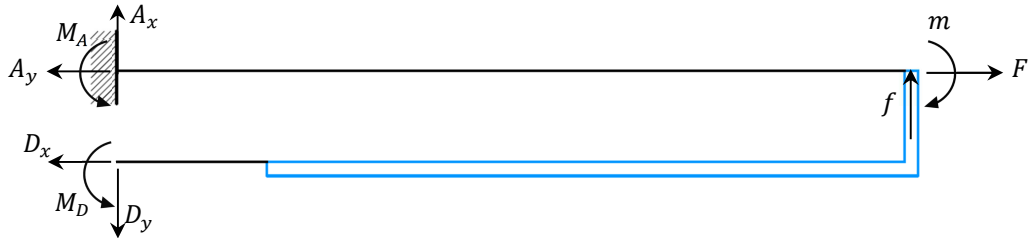
A termikus terhelés által létrehozott alakváltozást (konstans hőmérséklet esetén) a következő módon számíthatjuk.

$$\varepsilon_t = \alpha \cdot \vartheta$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_t$$

$$\frac{F}{A \cdot E} = \alpha \cdot \vartheta$$

$$F = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \vartheta$$



3.1.1. ábra: Terhelés és reakcióerők felvétele

A két befogás három-három erőkomponenst jelent, azaz hat egyenletre lenne szükségünk. Az egyensúlyi egyenletekkel csak három egyenletünk van. A hiányzó egyenleteket a szilárdságtan munkatételeivel állíthatjuk elő. Helyettesítsük a D pontban a befogásban ébredő kényszereket aktív erővel, amelyek biztosítják az eredeti peremfeltétel által előírt elmozdulást és elfordulást. Használjuk az egyenletek meghatározásához a Castigliano-tételt [10].

A felírható egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} x: \quad & -A_x - D_x + F = 0 \\ & F = A_x + D_x \\ y: \quad & A_y - D_y = 0 \\ & A_y = D_y \\ M_d^Z: \quad & M_A + M_D - D_x \cdot l_2 = 0 \\ & M_A = -M_D + D_x \cdot l_2 \end{aligned}$$

A felírt normálerő-függvények és hajlító nyomatéki függvények:

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= D_x \\ N_2(x_2) &= D_x \\ N_3(x_3) &= D_y \\ N_4(x_4) &= -D_x + F \\ M_{hz1}(x_1) &= -M_D - D_y \cdot x_1 \\ M_{hz2}(x_2) &= -M_D - D_y \cdot l_4 - D_y \cdot x_2 \\ M_{hz3}(x_3) &= -M_D - D_y \cdot l_4 - D_y \cdot l_3 + D_x \cdot x_3 \\ M_{hz4}(x_4) &= -M_D - D_y \cdot l_4 - D_y \cdot l_3 + D_x \cdot l_2 + D_y \cdot x_4 \end{aligned}$$

Az egyenletekben az x_1, x_2, x_3, x_4 változók a D ponttól az A pontig felvett koordináták a súlypontvonal mentén.

$$0 \leq x_1 < l_4 \quad 0 \leq x_2 < l_3 \quad 0 \leq x_3 < l_2 \quad 0 \leq x_4 < l_1$$

Mivel a D pontban befogás van, ezért a peremfeltételek miatt itt az elmozdulások és az elfordulás nulla. A Castigliano-tétel segítségével további három egyenletet írhatunk így fel:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^L \frac{1}{I(x) \cdot E(x)} \cdot M_{hz}(x) \cdot \frac{\partial M_{hz}(x)}{\partial F} dx + \int_0^L \frac{1}{A(x) \cdot E(x)} \cdot N(x) \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial F} dx \\ v_D &= \int_0^{l_4} \frac{1}{I_1 \cdot E_1} \cdot M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_y} dx + \int_0^{l_3} \frac{1}{I_2 \cdot E_2} \cdot M_{hz2}(x_2) \cdot \frac{\partial M_{hz2}(x_2)}{\partial D_y} dx + \\ &\quad \int_0^{l_2} \frac{1}{I_3 \cdot E_3} \cdot M_{hz3}(x_3) \cdot \frac{\partial M_{hz3}(x_3)}{\partial D_y} dx + \int_0^{l_1} \frac{1}{I_4 \cdot E_4} \cdot M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial D_y} dx \\ I_1 &= I_4, \quad I_2 = I_3 \\ E_1 &= E_4, \quad E_2 = E_3 \end{aligned}$$

Mivel a középső szakasz (világoskékkel jelzett) merevnek tekinthető a két befogott, vékonyabb szakaszhoz képest, ezért:

$$\frac{1}{I \cdot E} \equiv \frac{1}{I_1 \cdot E_1} = \frac{1}{I_4 \cdot E_4} \gg \frac{1}{I_2 \cdot E_2} = \frac{1}{I_3 \cdot E_3} \cong 0$$

Ezeket az egyszerűsítéseket figyelembe véve az egyenletek így a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} v_D &= \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_y} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial D_y} dx = 0 \\ \varphi_D &= \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial M_D} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial M_D} dx = 0 \\ u_D &= \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_x} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial D_x} dx + \\ &\quad \frac{1}{A \cdot E} \int_0^{l_4} N_1(x_1) \cdot \frac{\partial N_1(x_1)}{\partial D_x} dx + \frac{1}{A \cdot E} \int_0^{l_1} N_4(x_4) \cdot \frac{\partial N_4(x_4)}{\partial D_x} dx = 0 \end{aligned}$$

A nyomatéki függvények parciális deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_y} &= -1 & \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_x} &= 0 \\ \frac{\partial M_{hz1}(x_4)}{\partial D_y} &= -l_4 - l_3 + x_4 & \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial D_x} &= l_2 \\ \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial M_D} &= -1 & \frac{\partial N_1(x_1)}{\partial D_x} &= 1 \\ \frac{\partial M_{hz4}(x_4)}{\partial M_D} &= -x_1 & \frac{\partial N_4(x_4)}{\partial D_x} &= -1 \end{aligned}$$

A D pontban ébredő reakcióerők kiszámításához a fenti egyenleteket kell megoldani. Az A pontban ébredő reakciók az egyensúlyi egyenletekből adódnak. A megoldásként kapott paraméteres reakcióerők az M.2 mellékletben megtalálhatók.

A B pont y -irányú elmozdulásához fel kell vennünk egy új, $f = 0$ nagyságú erőt, majd a deriválásokat az új az erő szerint végezni. Ha a D pont felől kezdjük el felírni a függvényeket, akkor csak az utolsó l_1 -es hosszúságú szakaszon okoz változást a nyomatéki függvényben. Így a derivált is csak ezen a szakaszon lesz különböző.

$$M'_{hz4}(x_4) = -M_D - D_y \cdot l_4 - D_y \cdot l_3 + D_x \cdot l_2 + D_y \cdot x_4 - f \cdot x_4$$

$$\frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial f} = -x_4$$

Deriválás után $f = 0$ helyettesítéssel visszkapjuk az eredeti függvényt, ezért valójában:

$$M'_{hz4}(x_4) = M_{hz4}(x_4)$$

$$v_b = \int_0^L \frac{1}{I(x) \cdot E(x)} M'_{hz}(x) \cdot \frac{\partial M'_{hz}(x)}{\partial f} dx = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial f} dx =$$

$$- \frac{Al_1^3 l_2 l_4 (l_4^3 + l_1^2 (2l_3 + l_4)) \alpha \vartheta}{2(l_1 + l_4) (Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I (l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2)))}$$

A B pont szögelfordulását is így határozhatjuk meg, csak ebben az esetben egy $m = 0$ nagyságú nyomatékokat helyezünk a B pontba. A nyomatéki függvény az előzőekhez hasonló módon alakul, csak az utolsó szakaszon fog megváltozni, ezért az m nyomaték szerinti derivált is csak ezen a szakaszon lesz nullától különböző.

$$M''_{hz4}(x_4) = -M_D - D_y \cdot l_4 - D_y \cdot l_3 + D_x \cdot l_2 + D_y \cdot x_4 + m$$

$$\frac{\partial M''_{hz4}(x_4)}{\partial m} = 1$$

$$\varphi_b = \int_0^L \frac{1}{I(x) \cdot E(x)} M''_{hz}(x) \cdot \frac{\partial M''_{hz}(x)}{\partial m} dx = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M''_{hz4}(x_4)}{\partial m} dx =$$

$$\frac{Al_1^2 l_2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) \alpha \vartheta}{Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I (l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2))}$$

Hasonló módon határozhatjuk meg a blokkoló erő nagyságát is. Ezt az erőt felhelyezve a B pontba, annak y -irányú elmozdulását gátolhatjuk. Tehát ebben az esetben nem fog elmozdulni a végpont. Az egyszerűség kedvéért jelöljük ezt az erőt is f -fel, de ez esetben az ne nulla nagyságú legyen. A nyomatéki függvény ebben az esetben is csak az l_1 -es szakaszon módosul, de az egyensúlyi egyenletek is módosulnak. A három peremfeltétel továbbra is megmarad, tehát:

$$v'_D = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_y} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M'_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial D_y} dx = 0$$

$$\varphi'_D = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial M_D} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M'_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial M_D} dx = 0$$

$$u'_D = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_4} M_{hz1}(x_1) \cdot \frac{\partial M_{hz1}(x_1)}{\partial D_x} dx + \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M'_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial D_x} dx +$$

$$\frac{1}{A \cdot E} \int_0^{l_4} N_1(x_1) \cdot \frac{\partial N_1(x_1)}{\partial D_x} dx + \frac{1}{A \cdot E} \int_0^{l_1} N_4(x_4) \cdot \frac{\partial N_4(x_4)}{\partial D_x} dx = 0$$

Ezekből az egyenletekből eltérő reakcióerőket kapunk, amelyek függvényei maradnak az f erőnek, hiszen ezzel az erővel hat egyenlet helyett, hét egyenletünk, hét ismeretlenünk maradt. A hetedik egyenletet a B pont nulla elmozdulásából kapjuk, amelyet hasonlóan az előzőekhez határozhatunk meg. Ez az egyenlet nem egyezik meg az előző egyenlettel, hiszen $f \neq 0$.

$$v'_b = \int_0^L \frac{1}{I(x) \cdot E(x)} M'_{hz}(x) \cdot \frac{\partial M'_{hz}(x)}{\partial f} dx = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M'_{hz4}(x_4) \cdot \frac{\partial M'_{hz4}(x_4)}{\partial f} dx = 0$$

Megoldva az egyenletrendszert, az f erőre a következő paraméteres megoldás adódik:

$$f = \frac{6AEIl_2(2l_1^2l_3 + l_1^2l_4 + l_4^3)\alpha\vartheta}{12Il_1^2l_3^2 + 12Il_1^2l_3l_4 + 12Il_1l_3^2l_4 + 4Il_1^2l_4^2 + 12Il_1l_3l_4^2 + 8Il_1l_4^3 + Al_1l_2^2l_4^3 + 4Il_4^4}$$

3.2. ERŐMÓDSZER AZ EGYSZERŰSÍTETT MODELLEN

Az erőmódszer során statikailag határozatlan tartóból statikailag határozott, ún. törzstartót készítünk, amelyen olyan aktív erőket működtetünk, amik biztosítják ez eredeti peremfeltételeket. Állóteher esetén a geometriai feltételi egyenletrendszer alakja [11]:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{a_0} = \underline{0}$$

Az egyenletben $\underline{x}$ vektor X_i elemei az átvágási kapcsolati erők (3.2.1. ábra), az $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrix a_{ij} elemei pedig az ún. egységtényezők, amelyek az átvágási helyen keletkező elmozdulások egységnyi kapcsolati erők hatására (3.2.2. ábra). Az a_{ij} egységtényező az i -edik átvágási helyen keletkező elmozdulás értéke az $X_j = 1$ kapcsolati erő hatására. Éppen ezért az $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrixot a szerkezet hajlékonysági mátrixának nevezzük [11].

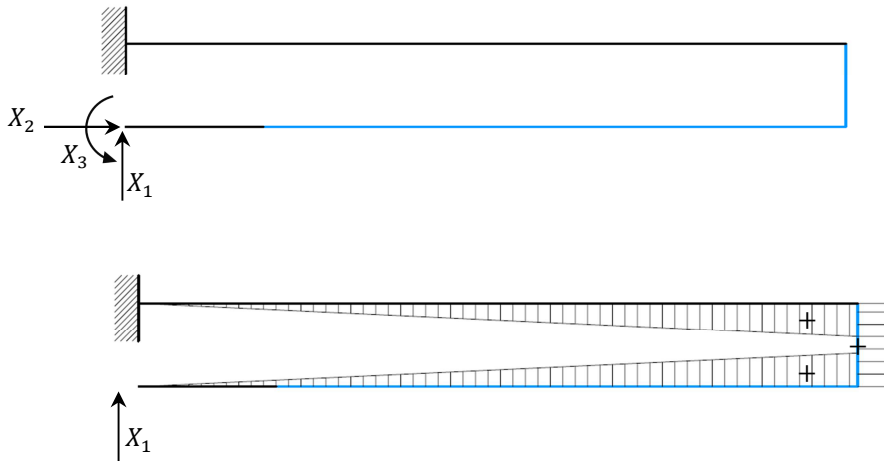
$$\underline{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maxwell felcserélhetőségi tétele értelmében a külső elmozdulások felcserélhetők, vagyis az $\underline{\underline{A}}$ mátrix szimmetrikus, azaz $a_{ij} = a_{ji}$. Az egyenletrendszerben ismeretlenek a csomóponti erők, ezért ezekre rendezhetjük az egyenletrendszert. Az $\underline{a_0}$ vektor tartalmazza az a_{i0} terhelési tényezőket. Ezek a terhelési tényezők az átvágási kapcsolatok helyén keletkező elmozdulások értékei a szerkezetre ható terhekből [11].

Mátrixműveletekkel gyorsan elvégezhető az átalakítás, valamint a számítás.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X} = -\underline{a_0}$$

$$\underline{X} = -\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{a_0}$$

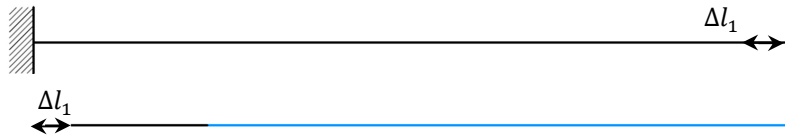


3.2.1. ábra: Virtuális erő felvétele

Az A hajlékonysági mátrix egy elemének kiszámításához ábrázoljuk a hajlítónyomatéki függvényeket. Első lépésben számítsuk ki a területüket ($X_1 = 1$), majd szorozzuk meg a terület súlypontjának távolságával ezt az értéket. Adjuk össze a különböző szakaszokra vett értékeket, így adódik a mátrix egy eleme [11]. A mátrix többi elemének paraméteres alakja az M.5 mellékletben található.

$$a_{11} = \frac{1}{I \cdot E} \cdot \left(\frac{l_1^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_1 + \frac{l_4^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_4 \right) = \frac{1}{3 \cdot I \cdot E} \cdot (l_1^3 + l_4^3)$$

Az elmozdulás meg fog egyezni az első szakasz megnyúlásával, mivel a határozott esetben a D pont elmozdulását kényszer nem gátolja (3.2.2. ábra). Az X_2 reakcióerőnek ezt az elmozdulást kell kompenzálnia.



3.2.2. ábra: D pont elmozdulása

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mátrixegyenlet kifejtésével visszkapjuk azokat az egyenleteket, amelyeket a Castigliano-tétellel kaptunk. A korábbi feltételezés során a külső terhelést egy koncentrált erő jelentette, ez okozta az alakváltozást. Termikus terheléssel számolva, tetszőleges hőmérséklet-eloszlás mellett meghatározhatjuk a teljes szakasz alakváltozását. Az egyszerűség kedvéért számoljunk csak a fűtött kar megnyúlásával. Ezt is egyszerűsítve, egy mintán bemutatva, legyen a hőmérséklet lineáris, a bevezetésnél ϑ_1 , a kar végénél $\vartheta_2 = T_{ref}$.

$$\Delta l_1 = \alpha \cdot \int_0^{l_1} \vartheta(x) dx = \alpha \cdot \int_0^{l_1} \vartheta_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) dx = \left[\alpha \cdot \vartheta_1 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2 \cdot l_1} \right) \right]_0^{l_1} = \frac{\alpha \cdot \vartheta_1 \cdot l_1}{2}$$

A mátrixegyenlet megoldásából megkapjuk a D pontban ébredő reakcióerőket előjelhelyesen. Az elmozdulás meghatározásához írjuk fel a paraméteres nyomatéki egyenletet az előző feladatmegoldáshoz hasonlóan:

$$\begin{aligned} M_{hz1}(x_1) &= -X_3 + X_1 \cdot x_1 \\ M_{hz2}(x_2) &= -X_3 + X_1 \cdot l_4 + X_1 \cdot x_2 \\ M_{hz3}(x_3) &= -X_3 + X_1 \cdot l_4 + X_1 \cdot l_3 - X_2 \cdot x_3 \\ M_{hz4}(x_4) &= -X_3 + X_1 \cdot l_4 + X_1 \cdot l_3 - X_2 \cdot l_2 - X_1 \cdot x_4 \end{aligned}$$

Használjuk a Betti-tételt és vegyünk fel a B pontban egy egységnyi nagyságú, lefelé mutató P erőt:

$$m_{hz1}(x_1) = m_{hz2}(x_2) = m_{hz3}(x_3) = 0$$

$$m_{hz4}(x_4) = x_4$$

Az egyenlet megoldásából adódik a B pont y irányú lehajlása:

$$v_b = \int_0^L \frac{1}{I(x) \cdot E(x)} M_{hz}(x) \cdot m_{hz}(x) dx = \frac{1}{I \cdot E} \int_0^{l_1} M_{hz4}(x_4) \cdot m_{hz4}(x_4) dx =$$

$$\frac{Al_1^3 l_2 l_4 (l_4^3 + l_1^2 (2l_3 + l_4)) \alpha \vartheta}{2(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I (l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2)) \right)}$$

3.3. KETTŐS FORRÓ KAROS AKTUÁTOR TERMOMECHANIKAI ELEMZÉSE

A lehajlás kiszámításához itt is a Castigliano-tételt [10] alkalmazhatjuk, annyi különbséggel, hogy a deformációt közvetlenül bele vesszük a számításba, és nem külső erővel helyettesítjük. Ha elvesszük az alsó két befogást, majd felmelegítjük a szerkezet szakaszait, akkor a deformációt semmilyen kényszer sem fogja gátolni. Kis áttekintéssel könnyen meghatározhatók az eredetileg befogott pontok elmozdulásának értékei x és y irányban (3.3.1. ábra). Minden egyes rúdszakaszhoz tartozik egy hőmérséklet-eloszlás, amely alapján minden l_i szakaszhoz tartozóan meghatározható a δ_i abszolút hosszváltozás.

$$\delta_i = \alpha \cdot \int_0^{l_i} (\vartheta_i(x) - T_{ref}) dx$$

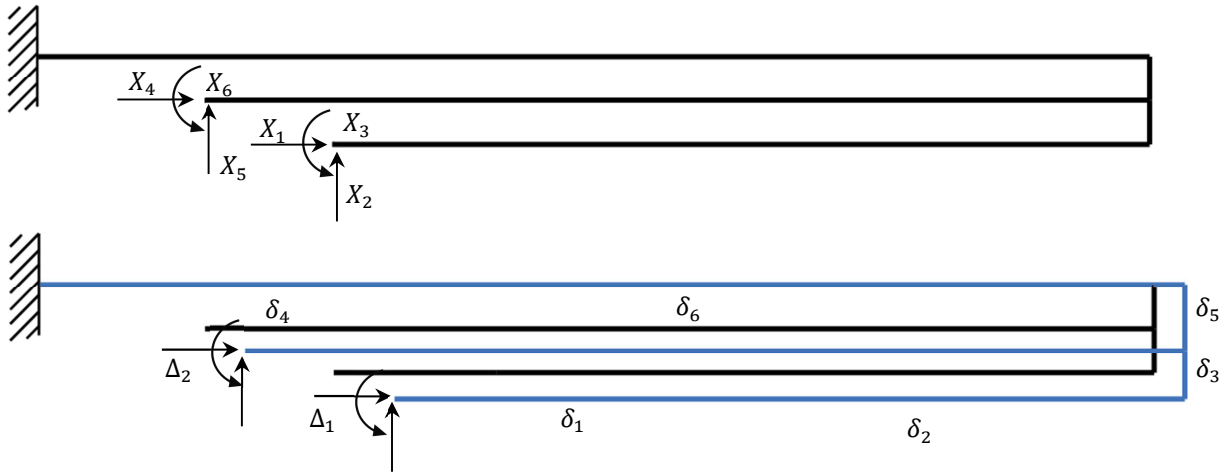
A befogástól indulóan az elmozdulások a következőképpen írhatók fel:

$$\Delta_{1x} = \delta_6 - \delta_1 - \delta_2$$

$$\Delta_{1y} = \delta_5 + \delta_3$$

$$\Delta_{2x} = \delta_6 - \delta_4$$

$$\Delta_{2y} = \delta_5$$



3.3.1. ábra: Virtuális erők felvétele és elmozdulások

Az elmozdulások engedését követően felhelyezhetjük az erőrendszert a szerkezetre, amelynek olyannak kell lennie, hogy a befogás pontjait, az eredeti pozícióba kényszerítse vissza. A korábbiaktól eltérően így most a Castigliano-tételben meghatározott elmozdulások nem zérus értékűek lesznek. Az aktív erőként működtetett kényszererők meghatározásához szükség van a nyomatéki függvényekre. Általános koordinátának ξ -t választottam, amely mindig az adott i szakaszon értelmezendő 0-tól L_i -ig.

$$N_1(\xi) = -X_1$$

$$N_2(\xi) = -X_1$$

$$N_3(\xi) = -X_2$$

$$N_4(\xi) = -X_4$$

$$N_5(\xi) = -X_2 - X_5$$

$$N_6(\xi) = X_1 + X_4$$

$$M_{hz1}(\xi) = X_2 \cdot \xi - X_3 \quad 0 \leq \xi \leq L_1$$

$$M_{hz2}(\xi) = X_2 \cdot (L_1 + \xi) - X_3 \quad 0 \leq \xi \leq L_2$$

$$M_{hz3}(\xi) = X_2 \cdot (L_1 + L_2) - X_3 - X_1 \cdot \xi \quad 0 \leq \xi \leq L_3$$

$$M_{hz4}(\xi) = X_5 \cdot \xi - X_6 \quad 0 \leq \xi \leq L_4$$

$$M_{hz5}(\xi) = X_2 \cdot (L_1 + L_2) - X_3 - X_1 \cdot (L_3 + \xi) + X_5 \cdot L_4 - X_6 - X_4 \cdot \xi \quad 0 \leq \xi \leq L_5$$

$$M_{hz6}(\xi) = X_2 \cdot (L_1 + L_2) - X_3 - X_1 \cdot (L_3 + L_5) - (X_2 + X_5) \cdot \xi + (X_5 - X_4) \cdot L_4 - X_6 \quad 0 \leq \xi \leq L_6$$

A nyomatéki függvények felírása után a Castigliano-tétel szerint kifejezhető az elmozdulás, amit ebben az esetben előre meghatároztunk:

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^6 \left(\int_0^{L_i} \frac{1}{I_i \cdot E} \cdot M_{hzi}(\xi) \cdot \frac{\partial M_{hzi}(\xi)}{\partial X_i} d\xi + \int_0^{L_i} \frac{1}{A_i \cdot E} \cdot N_i(\xi) \cdot \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial X_i} d\xi \right)$$

Figyelembe véve az elmozdulások irányát, valamint az elfordulásokat, Δ_i a következőképpen írható.

$$\Delta_1 = -\Delta_{1x} = -(\delta_6 - \delta_1 - \delta_2)$$

$$\Delta_4 = -\Delta_{2x} = -(\delta_6 - \delta_4)$$

$$\Delta_2 = \Delta_{1y} = \delta_5 + \delta_3$$

$$\Delta_5 = \Delta_{2y} = \delta_5$$

$$\Delta\varphi_3 = 0$$

$$\Delta\varphi_6 = 0$$

A reakcióerők ismeretében már meghatározható a végpont lehajlása, valamint a keresztmetszet szögelfordulása. Hasonlóan az egykarú termikus aktuátorhoz, itt is fel kell vennünk egy $f = 0$ és $m = 0$ nagyságú erőt és nyomatékot, az igénybevételi függvényt pedig eszerint deriválni:

$$M'_{hz6}(\xi) = X_2 \cdot (L_1 + L_2) - X_3 - X_1 \cdot (L_3 + L_5) - (X_2 + X_5) \cdot \xi + (X_5 - X_4) \cdot L_4 - X_6 + f \cdot \xi + m$$

$$\frac{\partial M'_{hz6}(\xi)}{\partial f} = \xi$$

$$\frac{\partial M'_{hz6}(\xi)}{\partial m} = 1$$

$$v = \int_0^{L_6} \frac{1}{I_6 \cdot E} \cdot M'_{hz6}(\xi) \cdot \frac{\partial M'_{hz6}(\xi)}{\partial f} d\xi = \int_0^{L_6} \frac{1}{I_6 \cdot E} \cdot M_{hz6}(\xi) \cdot \xi d\xi$$

$$\varphi = \int_0^{L_6} \frac{1}{I_6 \cdot E} \cdot M'_{hz6}(\xi) \cdot \frac{\partial M'_{hz6}(\xi)}{\partial m} d\xi = \int_0^{L_6} \frac{1}{I_6 \cdot E} \cdot M_{hz6}(\xi) d\xi$$

3.4. SZILÁRDSÁGTANI SZIMULÁCIÓ EREDMÉNYEI

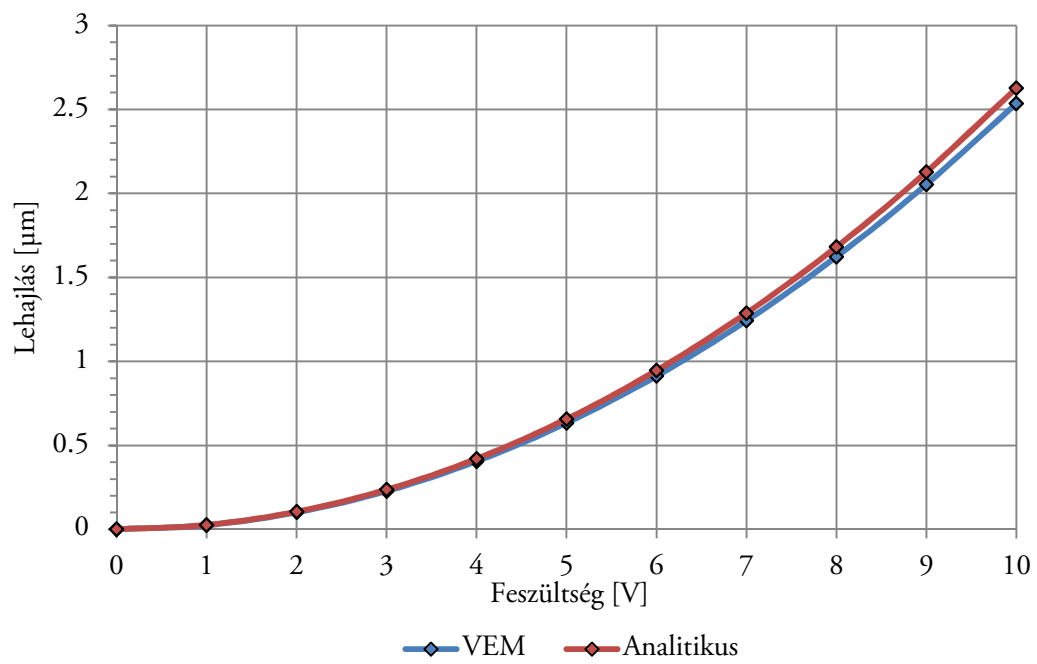
Hasonlóan a korábbiakhoz, a számított rúdmodell helyességét VEM programban készített rúdmodellel hasonlítottam össze. A kapott lehajlás értékek teljes mértékben megegyeztek a számított értékekkel.

Ezt követően a korábban elkészített síkmodellt használtam. Mathematica programban nulla volt a feszültség értékét, de $T_s \neq T_{ref}$ esetén homogén hőmérséklet-eloszlást feltételeztem. A szimulációban egyszerű megadni ilyen hőterhelést, így vizsgálhatjuk a mechanikai rúdmodell és síkmodell viszonyát, anélkül, hogy az elektrotermikus számítás hibája jelentkezne. Öt esetet megvizsgálva, az eltérés a két módszer között rendre 2,22 %-ra adódott.

T_s ($T_{ref} = 23$ [°C])	Lehajlás [μm] ($U = 0$ [V])		Eltérés [%]
	VEM (síkmodell)	Analitikus (rúdmodell)	
23	0	0	0 %
50	0,13139	0,13431	2,22 %
100	0,37472	0,38303	2,22 %
150	0,61804	0,63176	2,22 %
200	0,86136	0,88048	2,22 %
250	1,10468	1,12921	2,22 %

Ismerve a két modellt külön-külön, a két számítási eredmény összevonható. A VEM szimuláció során a csomópontok hőmérséklet értékét elmentve, szilárdságtani szimulációval ez termikus terhelésként adható hozzá. Így már közvetlen értéket kaphatunk az alkalmazott feszültség és lehajlás között (3.4.1. ábra). A 3.4.1 ábrán a hátsó lapon történő hővezetés figyelmen kívül hagyásával kapott eredmény látható. A hővezetés figyelembevételével is hasonló karakterisztika kapható a feszültség és lehajlás között, ennek eredménye a következő alfejezetben látható.

Feszültség [V]	Lehajlás [μm]		Eltérés [%]
	VEM (síkmodell)	Analitikus (rúdmodell)	
0	0	0	0
1	0,02536	0,02627	3,601 %
2	0,10143	0,10508	3,599 %
3	0,22820	0,23643	3,601 %
4	0,40571	0,42032	3,600 %
5	0,63393	0,65675	3,600 %
6	0,91286	0,94572	3,600 %
7	1,2425	1,2872	3,600 %
8	1,6229	1,6813	3,600 %
9	2,0539	2,1279	3,601 %
10	2,5357	2,6270	3,600 %



3.4.1. ábra: Lehajlás a feszültség függvényében (hővezetés nélkül a hátsó lapon)

3.5. KÖVETKEZTETÉSEK

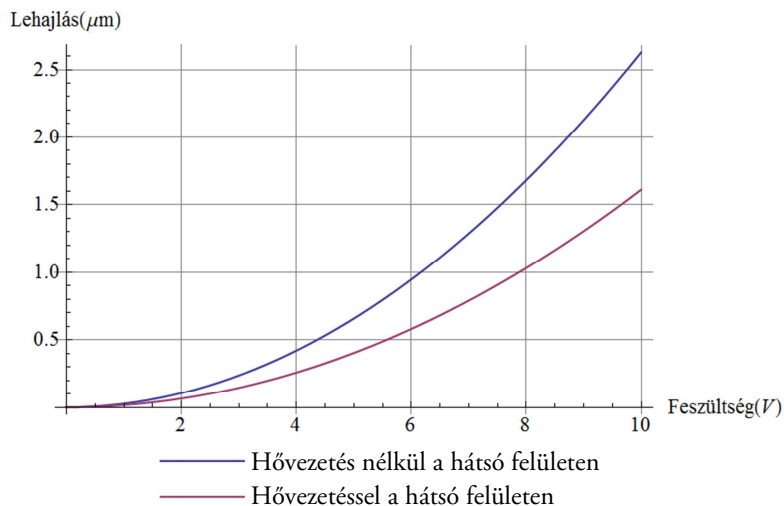
A fenti diagramok alapján látható, hogy a befogásokra kapcsolt elektromos feszültség és lehajlás között négyzetes kapcsolat áll fenn. A különbség is azonosra adódott, hiba a numerikus számítás miatt van. Ha tehát meg tudjuk határozni a fenti adatok alapján a kapcsolatot leíró függvény minden egyes paraméterét, akkor szimuláció nélkül is előállíthatjuk az eredményt. Ennek oka az, hogy a lehajlást lineárisan közelítettük. Vagyis egy befogott tartó esetén a végpont lehajlása lineárisan függ a végpontra helyezett terheléstől. Ez az összefüggés csak ebben a közelítésben áll fenn, nemlineáris lehajlással számolva ez nem mondható el. Ez esetben viszont a következő összefüggés állítható:

$$y = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot I \cdot E} = C \cdot F$$

A fent jelzett C konstans anyagjellemzőket és geometriai paramétereket tartalmaz, tehát egy konkrét konstrukció esetén állandó. A négyzetes összefüggés oka az, hogy a befektetett teljesítmény a feszültségtől négyzetesen függ. Vagyis kétszer akkora feszültség esetén négyszer akkora a disszipálódott teljesítmény. Ez az energia pedig alakváltozásra fordítódik. Vagyis végigvezetve az összefüggéseket, a lehajlás és feszültség kapcsolata felírható:

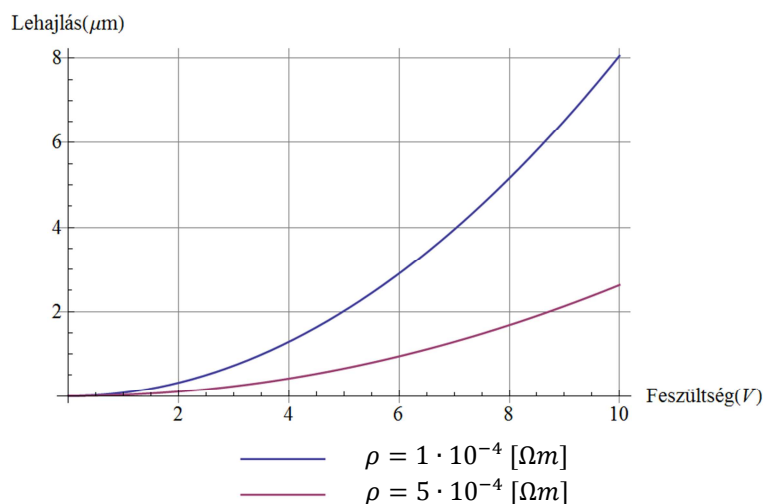
$$y = C_y \cdot U^2$$

A kettős forró karos aktuátor esetén túl bonyolult ennek a C_y paraméteres leírása, de az eredmények alapján számértékben meghatározó, visszahelyettesítve pedig ellenőrizhető. Ezzel a módszerrel, ha egyszer meghatározzuk a maximális mechanikai egyenértékű feszültség helyét és értékét, akkor könnyen visszaszámolható az a maximális elektromos feszültség, amelynél nagyobb esetén a szerkezet tönkremehet. Ellenben ez is csak kis lehajlások esetén igaz.



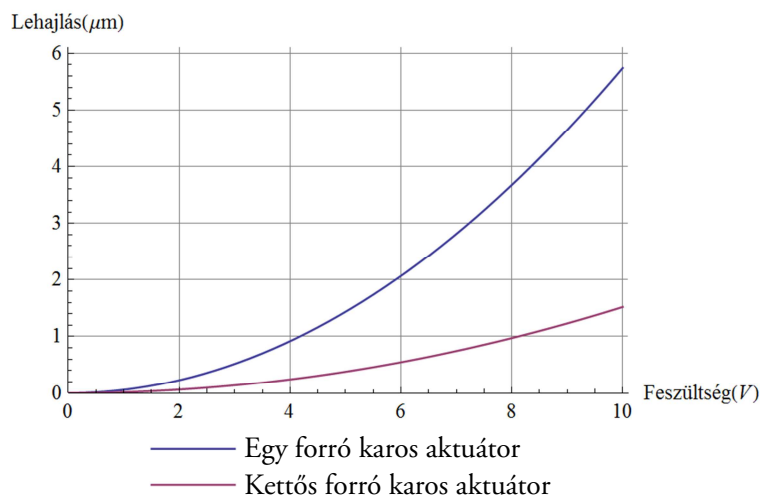
3.5.1. ábra: Lehajlás a feszültség függvényében a hővezetés figyelembevételével és nélküle

Így már könnyebben megmutatható a kapcsolat a különböző esetek figyelembe véve például a hátlapi hővezetés (3.5.1. ábra) vagy a különböző konstrukciókkal, például eltérő anyagjellemzőkkel (3.5.2. ábra).



3.5.2. ábra: Eltérő fajlagos ellenállás

Összehasonlítható egy egy forró karos és egy kettős forró karos aktuátor is, ehhez azonban hasonló konstrukciókat kell vennünk [12]. Az összehasonlítás eredményeképpen könnyen kirajzolhatjuk egyetlen diagramban a lehajlásokat a feszültség függvényében (3.5.3. ábra).

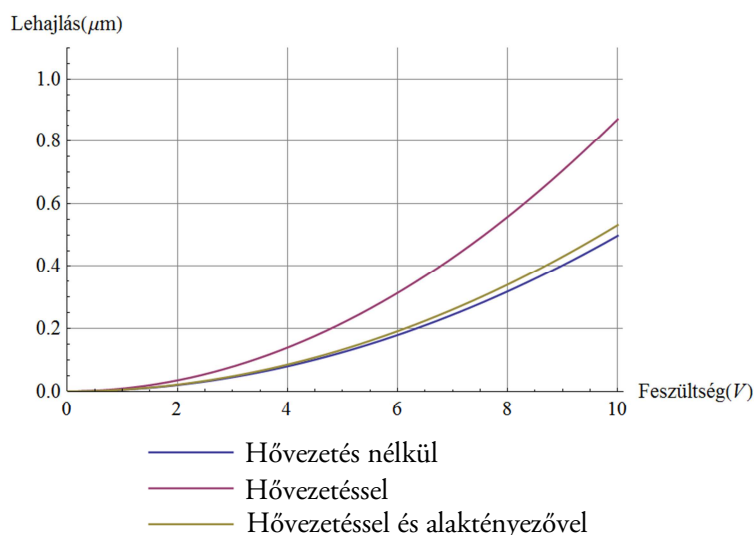


3.5.3. ábra: Egy és kettős forró karos aktuátorok összehasonlítása (262,5 μm)

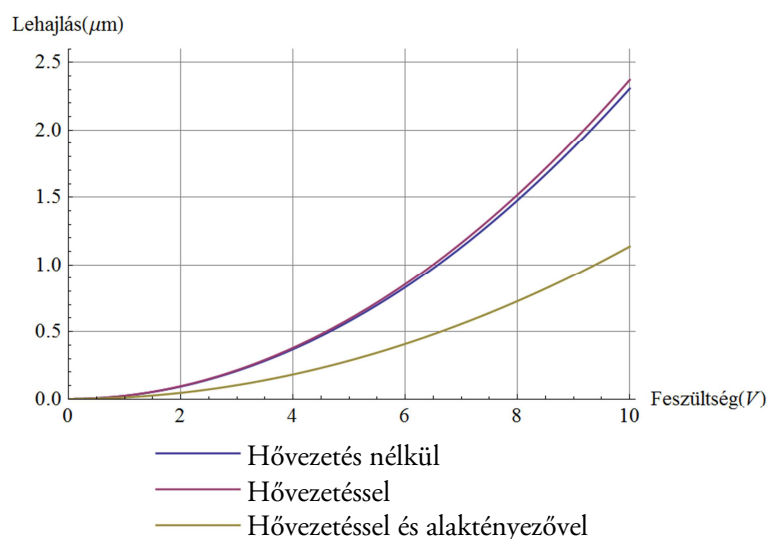
Az alaktényező hatását is könnyű volt figyelembe venni. Az egyenleteket kiegészítettem az alaktényezővel és összehasonlítottam különböző esetekre. Ennek hatása azonban függ a geometriától, lehetséges, hogy rontja a hatásfokot, de előfordulhat az is, hogy növeli. Egy teljesen eltérő konstrukció esetén például a hátsó felületi hővezetés figyelembevétele is javítja a lehajlást. Éppen ezért általános hatás nem mondható ki. A diagramokon az látható, hogy az alaktényező milyen hatással van egy

162,5 μm (3.5.4. ábra) és egy 362,5 μm (3.5.5. ábra) hosszú aktuátorra [12]. Előbbi esetben javul kicsit a hatások, míg utóbbi esetben lényegesen romlik.

A levezetett összefüggésekkel jól becsülhető a működés illetve a használhatósági tartomány. Minél több paramétert ismerünk, annál pontosabb működést érhetünk el, az analitikus modellel pedig gyorsan vizsgálhatók a különféle paraméterekre mutatott érzékenységek. Így könnyen optimálható is a szerkezet, nem szükséges minden esetre újabb végelem modellt készíteni.



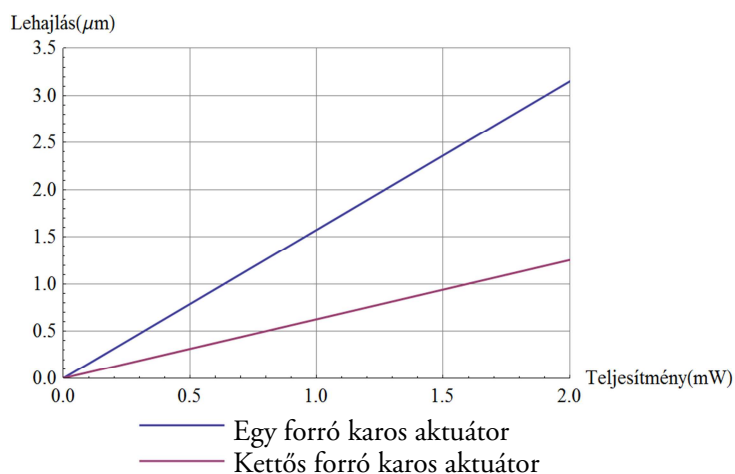
3.5.4. ábra: Alaktényező figyelembevétele kettős forró karos aktuátoron (162.5 μm)



3.5.5. ábra: Alaktényező figyelembevétele dupla forró karos aktuátoron (362.5 μm)

Bár az eredmények azt mutatják, hogy a végelem modell jól közelíti a számított eredményeket, az előzetesen várttal ellentétben viszont az egy forró karos aktuátor tűnik megfelelőbbnek (3.5.6. ábra). A kettős forró karos aktuátor a számítás alapján lényegesen rosszabb hatásokkal működik, mint az egy forró karos. A szakirodalomban közölt mérésben két olyan aktuátort hasonlítottak össze, aminek a hideg

karja, valamint a fűtött karja azonos hosszúságú volt, ellenben a karok vastagsága eltért [12]. A mérés eredménye azt mutatta, hogy a felvett teljesítmény függvényében a lehajlásokat összehasonlítva a kettős forró karos aktuátor mutatott néhány tíz százalékkal nagyobb lehajlást. Ebben a cikkben számítási levezetés, eredmény és anyagjellemzők nem voltak adottak, így a mérés eredményét nem tudtam közvetlenül összehasonlításra felhasználni, de láthatóan az eredmény nem is alkalmas erre (3.5.6. ábra).



3.5.6. ábra: Egy- és kettős forró karos aktuátor összehasonlítása (312,5 μm)

Bár a szakirodalmi mérés [12] eredménye lényegesen eltér a számítottaktól, ez nem jelenti a számítás helytelenségét. Összességében azt mondhatjuk, hogy a modell helyes, a végelem eredménnyel jól összevethető, de további pontosításokra szorul. Sok körülményt figyelmen kívül hagytam a számítás során, mert a modellt túlságosan elbonyolította volna, analitikus eredményt pedig nem lehetett volna levezetni. A hőmérsékletfüggő ellenállás figyelembevételén túl vizsgálható még a sugárzásos hőátadás szerepe [1], [8], illetve további hőveszteségek és egyéb körülmények is (például a hővezetés a karok között). Mivel a két geometria eltér egymástól, ezért lehetséges, hogy ezeknek a figyelembevételével és egy pontosabb végelem modell elkészítésével az eddigiektől eltérő eredményt kaphatunk.

4. HIBA ÉS ELTÉRÉSEK OKAI

4.1. TERMIKUS ANALÍZIS HIBÁI

A rúdmodell használata a geometriától függően gyakran korlátokba ütközik, ez igaz a termikus és a mechanikai analízisre is. Rúdról akkor beszélhetünk, ha a geometriai méreteit tekintve két mérete lényegesen kisebb, mint a harmadik. Ez azonban a síkmodellel összevetve láthatóan nem minden esetben teljesül. Továbbá a változó keresztmetszetek megfelelő helyettesítése, illetve töréspontok figyelembevétele is problémát okozhat.

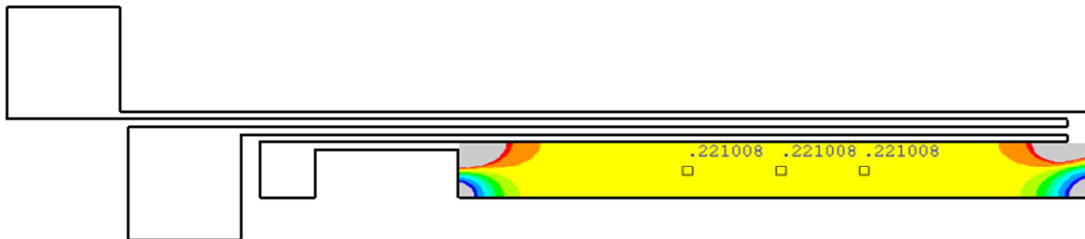
A termikus analízis során figyelembe vettük a rúd különböző szakaszainak termikus ellenállását, amelyet a következőképpen definiáltunk állandó keresztmetszetű rúd esetén.

$$R_t = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{L}{A \cdot \lambda}$$

Az összefüggésből látszik, hogy a termikus ellenállás definíciószerűen két pont közötti hőmérsékletkülönbségből és a köztük átmenő változóként jelentkező hőárammal írható fel. Ez a feltételezés azonban egydimenziósként kezeli a problémát, amely síkmodellel összehasonlítva láthatóan csak közelítés. Kiemelve az aktuátor alsó hideg karját, látható, hogy sem a hőmérséklet, sem a hőáram nem jellemzhető a keresztmetszet mentén egyetlen értékkel, ráadásul a hőmérsékletgradiens sem egydimenziós (4.1.1.ábra).

Végelemes szimulációval azonban egyszerűen számíthatjuk az adott szakasz termikus ellenállását. Az alábbi összefüggés alapján peremfeltételként adjunk meg a két csatlakozási keresztmetszetre például $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ különbséget.

$$R_t = \frac{\Delta T}{\dot{Q}}$$

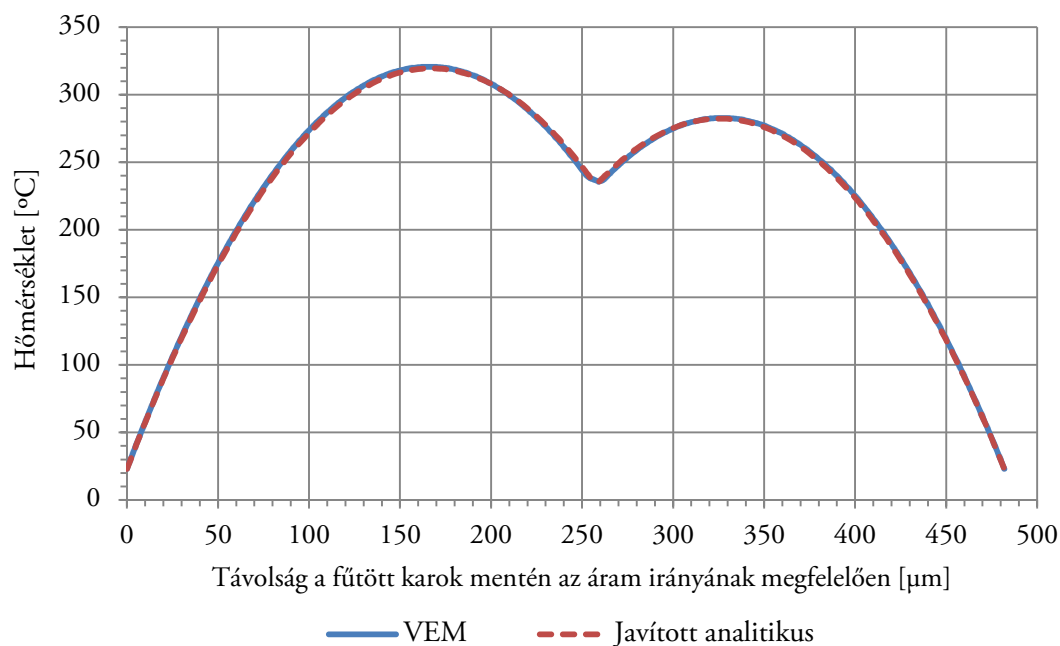


4.1.1. ábra: Hőáram a hideg karban

A hideg kar középső szakaszán a hőáram már nagyon jó közelítéssel egyetlen értékkel jellemezhető, amely csak a hossz mentén változik, de ez csak a középső szakaszra igaz. A szimulációval a hőáramsűrűséget számíthatjuk, innen a következőképpen adódik az ellenállás.

$$R_t = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{\Delta T}{\dot{q} \cdot A}$$
$$R_{t \text{ számított}} = \frac{L}{A \cdot \lambda} \cong 0,1341 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$
$$R_{t \text{ szimulált}} = \frac{\Delta T}{\dot{q} \cdot A} \cong 0,1508 \left[\frac{\text{K}}{\text{W}} \right]$$

A fenti különbség kb. 12% eltérést jelent. Az analitikus számításba így visszahelyettesítettem a szimulált eredményt a megfelelő paraméterek helyett, kísérletképpen pontosítás céljából. Az alábbi eredmények adódtak (4.1.2. ábra).



4.1.2. ábra: Hőmérséklet-eloszlás a forró karok mentén

A fűtött kar hőmérséklet-eloszlását ezzel a módszerrel lényegesen sikerült pontosítani, a jellegzetes pontok hőmérsékletének eltérése 1% alá csökkent. Ezzel szemben a hideg kar hőmérséklet-eloszlása változott, de az eltérés megmaradt. A hatására a lehajlás számításánál a hiba megnőtt, 5,7 %-ra emelkedett.

Eltérés T_{max} -tól [°C]		
VEM	320,707	-
Eredeti analitikus	315,647	1,60 %
Javított analitikus	319,532	0,36 %

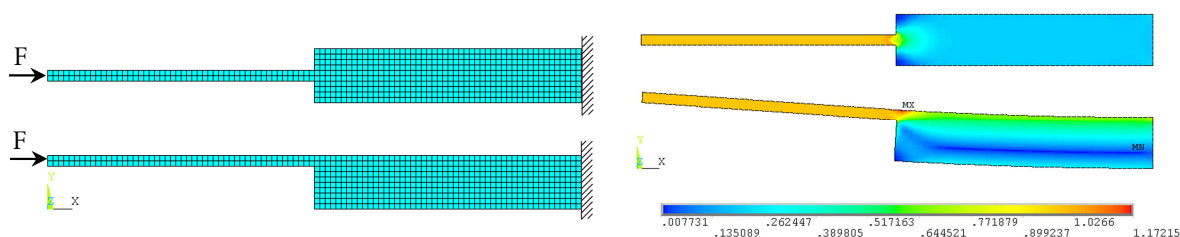
Eltérés T_k -tól [°C]		
VEM	235,57	-
Eredeti analitikus	229,92	2,46 %
Javított analitikus	235,07	0,21 %

Összességében ezzel az egy lépéssel a maximális hőmérsékleti értéket jobban tudjuk becsülni, de ez a módszer nem alkalmas a síkmodell teljes helyettesítésére, ugyanis minden rúdszakaszt külön kellene vizsgálni. Ezzel a próbálkozással azonban bizonyítani tudtuk, hogy a két modell milyen különbségekkel rendelkezik, és vissza tudtuk vezetni a hiba egyik forrását.

4.2. MECHANIKAI ANALÍZIS HIBÁI

A mechanikai modell hibája is magyarázható. A hideg kar vastagsága miatt csak nagy hibával kezelhető rúdmodellként. Két változó keresztmetszetű rúd esetén is lehet jelentős az eltérés, de abban az esetben, ha nem szimmetrikus elhelyezkedésű a két szakasz, akkor még jelentősebb a különbség. A rúdmodellel történő helyettesítés során a keresztmetszet másodrendű nyomatékát átszámoltam, de ez nem veszi figyelembe a szakaszok helyzetét. Egyszerű példán megmutatva, ha a hideg karhoz hasonló síkmodellre terhelünk normálerővel, a rúdmodellhez képest egy elhajlás is jelentkezik (4.2.1. ábra). A csatlakozási ponton a feszültségeloszlás nem szimmetrikus, hiszen a szerkezet sem szimmetrikus. Ennek eredményeképpen az alsó és felső szakasz alakváltozása is eltérő. Ez eredményez egy elfordulást, vagyis számolni kell a vékonyabb szakasz kihajlásával is. Mivel az aktuátor esetén viszonylag hosszú szakaszokról van szó, ezért már kis szögelfordulás is jelentős elmozdulást eredményez a rúd végén.

Megnézve az feszültségeloszlásokat az is látszik, hogy a csatlakozási keresztmetszet környezetében lokálisan nagy feszültség ébred, míg attól távolodva ez lényegesen lecsökken. A rúdmodell szerint állandó feszültség lenne az azonos vastagságú szakaszokon, de ez láthatóan közel sem teljesül. Vagyis ha az elmozdulásokat hasonlítanánk össze a rúdmodellel, az is eltérésekkel jelentkezne.



4.2.1. ábra: Példa nyomott rúd esetére

A fenti ábrán láthatóan ez az eltérés igencsak jelentős is lehet, és ha a geometriai méretek nem engedik, nem kezelhető a feladat megfelelő pontossággal rúdmodellként.

MELLÉKLETEK

M.1. Anyagjellemzők – poliszilikon [5]

Anyagjellemzők			
Rugalmassági modulusz	E	$162 \cdot 10^9$	Pa
Poisson-tényező	ν	0,22	–
Hőtágulási együttható *	α	$4,7 \cdot 10^{-6}$	K^{-1}
Hővezetési együttható	λ	41	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Elektromos fajlagos ellenállás*	ρ	$5 \cdot 10^{-4}$	$\Omega \cdot m$

* Különböző forrásokban nagyságrendileg eltérő értékeket találtam, amik jelentősen befolyásolják az eredményeket.

M.2. Geometriai méretek egy- és dupla forró karos aktuátor esetén

Egy forró karos aktuátor **			
Rugalmas kar	L_1	38	μm
Hideg kar	L_2	165	μm
Csatlakozási szakasz (kiadódó)	L_3	4	μm
Forró kar	L_4	255	μm
Forró és hideg kar közötti távolság	L_g	2	μm
Rugalmas kar vastagsága	w_1	2	μm
Hideg kar vastagsága	w_2	15	μm
Csatlakozó szakasz vastagsága	w_3	6	μm
Forró kar vastagsága	w_4	2	μm

Kettős forró karos aktuátor [1] **			
Külső forró kar	L_6	255	μm
Belső forró kar	L_4	223	μm
Rugalmas kar	L_1	38	μm
Hideg kar	L_2	165	μm
Forró karok közötti távolság	L_{g1}	2	μm
Forró és hideg kar közötti távolság	L_{g2}	2	μm
Forró karok vastagsága	w_4, w_6	2	μm
Csatlakozó szakaszok vastagsága	w_3, w_5	6	μm
Rugalmas kar vastagsága	w_1	2	μm
Hideg kar vastagsága	w_2	15	μm
Alsó csatlakozási szakasz (kiadódó)	L_3	4	μm
Felső csatlakozási szakasz (kiadódó)	L_5	4	μm

** Méretek a rúdmodell szerint helyettesített rúdszakaszokra vonatkozik.

Közös jellemzők [1][8]			
Poliszilíciumlap vastagsága	ν	2	μm
Levegőréteg vastagsága	δ_1	2	μm
Si_3N_4 réteg vastagsága	δ_2	0,6	μm
Si_3O_2 réteg vastagsága	δ_3	1	μm
Levegőréteg hővezetési együtthatója	λ_1	0,026	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Si_3N_4 réteg hővezetési együtthatója	λ_2	2,25	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Si_3O_2 réteg hővezetési együtthatója	λ_3	1,4	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

M.3. Száraz levegő fizikai jellemzői egy bar nyomáson, 160 °C-on [7]

$$\rho = 0,8036 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 1,020 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

$$\beta = 2,311 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$$

$$\lambda = 36,07 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$\nu = 29,88 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

M.4. Castigliano-tétellel kapott reakcióerők:

$$A_x = \frac{AE l_4 \left(Al_1 l_2^2 (l_1^3 + l_4^3) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right) \alpha \vartheta}{(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right)}$$

$$A_y = - \frac{6AE l_1^2 l_2 l_4 (l_1 - 2l_3 - l_4) \alpha \vartheta}{(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right)}$$

$$M_A = \frac{AE l_1 l_2 l_4 \left(4l_1^3 + l_4^3 - 3l_1^2 (4l_3 + 3l_4) + 6l_1 (2l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \alpha \vartheta}{(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right)}$$

$$D_x = \frac{AE l_1 \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \alpha \vartheta}{(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right)}$$

$$D_y = A_y$$

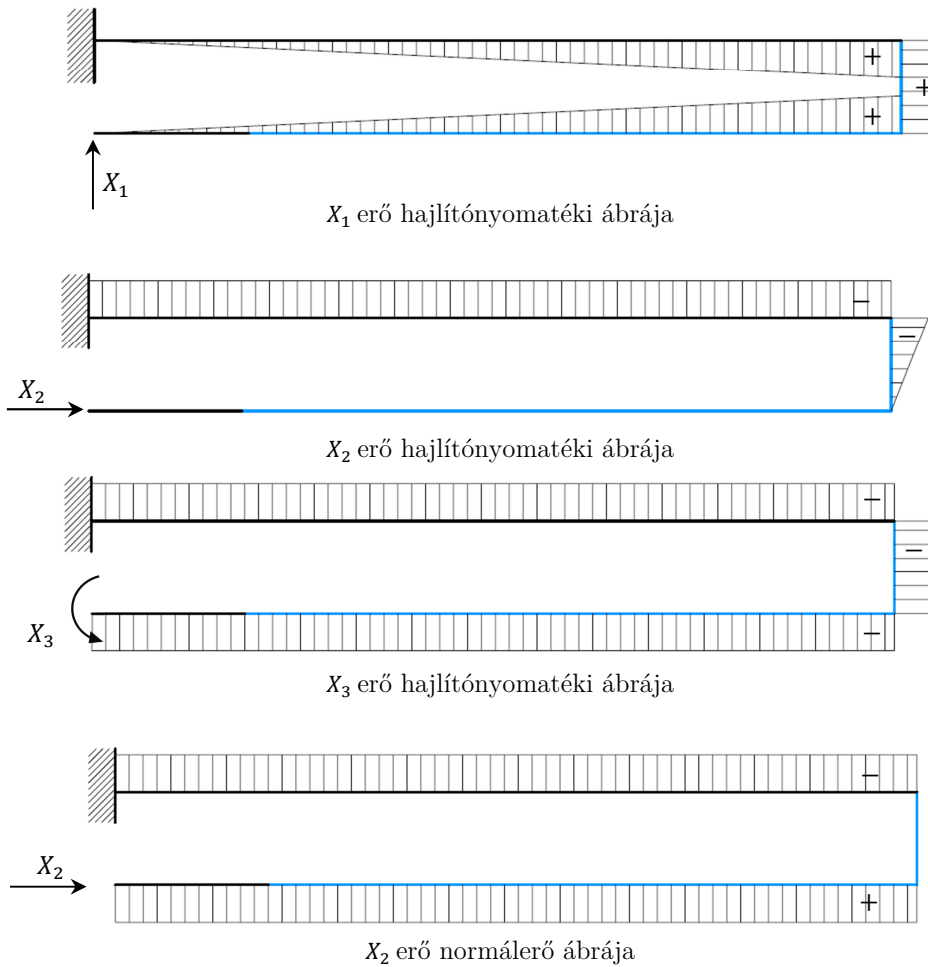
$$M_D = \frac{AE l_1^2 l_2 (l_1^3 + 3l_1 l_4^2 - 2l_4^2 (3l_3 + l_4)) \alpha \vartheta}{(l_1 + l_4) \left(Al_1 l_2^2 l_4 (l_1^2 - l_1 l_4 + l_4^2) + I \left(l_1^4 + 4l_1^3 l_4 + l_4^4 - 6l_1^2 l_4 (2l_3 + l_4) + 4l_1 l_4 (3l_3^2 + 3l_3 l_4 + l_4^2) \right) \right)}$$

M.5. Erőmódszerrel kapott eredmények

Az erőmódszerrel kapott reakcióerők abszolút értékben megegyeznek a Castigliano-tétellel kapottakkal, kivéve A'_x , ami az utóbbi esetben egyenlő a D_x erővel! Az előjeleltérés oka, hogy a két módszer esetén különböző előjellel lettek felvéve.

$$\begin{array}{lll} |A'_x| = |D_x| & |A'_y| = |A_y| & |M'_A| = |M_A| \\ |X_2| = |D'_x| = |D_x| & |X_1| = |D'_y| = |D_y| & |X_3| = |M'_D| = |M_D| \end{array}$$

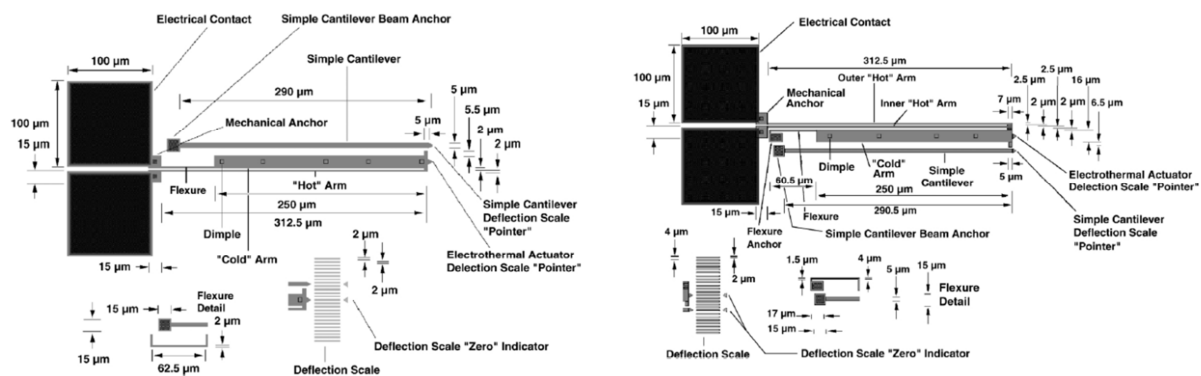
Hajlékonysági mátrix elemei



A nyomatéki és normálerő-ábrákból meghatározható rugalmassági együtthatók:

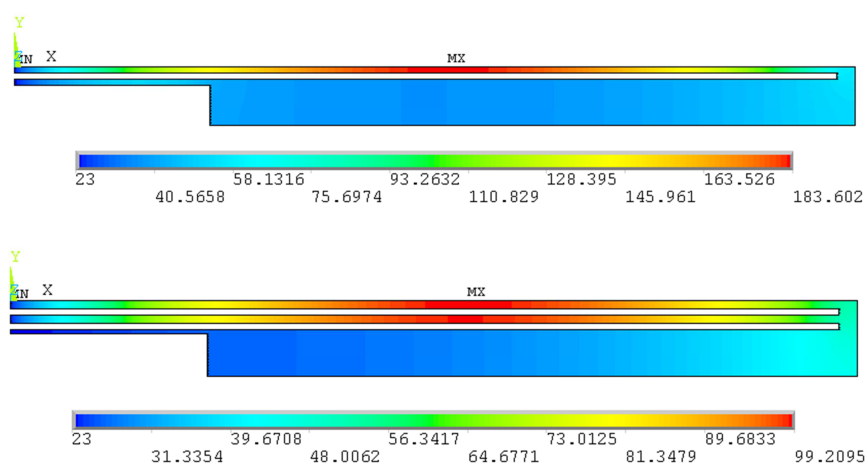
$$\begin{array}{ll} a_{11} = \frac{1}{3 \cdot I \cdot E} \cdot (l_1^3 + l_2^3) & a_{22} = \frac{1}{I \cdot E} \cdot l_2^2 \cdot l_1 + \frac{1}{A \cdot E} \cdot (l_1 + l_2) \\ a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2 \cdot I \cdot E} \cdot l_1^2 \cdot l_2 & a_{23} = a_{32} = \frac{1}{I \cdot E} \cdot l_1 \cdot l_2 \\ a_{13} = a_{31} = -\frac{1}{2 \cdot I \cdot E} \cdot (l_1^2 + l_2^2) & a_{33} = \frac{1}{I \cdot E} \cdot (l_1 + l_2) \end{array}$$

M.6. Egy- és kétkaros aktuátor geometriai méretei más forrásban [12]



	Egy forró karos aktuátor			Két forró karos aktuátor		
Hideg kar hossza	200	300	400	200	300	400
Hideg kar szélessége	15	15	15	15	15	15
Rugalmas kar hossza	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5
Rugalmas kar szélessége	2	2	2	1,5	1,5	1,5
Forró kar hossza	262,5	362,5	462,5	262,5	362,5	462,5
Forró kar szélessége	2	2	2	2,5	2,5	2,5
Hideg és forró kar távolsága	2	2	2	2	2	2
Forró karok távolsága	-	-	-	2	2	2

Hőmérsékleteloszlás két azonos hosszúságú aktuátor esetén hátlati hővezetéssel.



IRODALOMJEGYZÉK

- [1] D. Yan: Mechanical Desing and Modeling of MEMS Thermal Actuators for RF Applications, Waterloo, Ontario, 2002
- [2] MEMSnet – An information portal for the MEMS and Nanotechnology community (<http://www.memsnet.org>)
- [3] Southwest Center for Microsystems Education (SCME): History of MEMS, 2010
- [4] Brindzik J.: MEMS technológiák, eljárások, Óbudai Egyetem, 2010
- [5] A. B. Seng, Z. Dahari, O. Sidek, M. A. Miskam: Design and Analysis of Thermal Microactuator, European Journal of Scientific Research, 2009, 281-292
- [6] Gróf Gy.: Hőközlés (Ideiglenes jegyzet), Budapest, 1999, 5-25, 85-103
- [7] Bihari P., Gróf Gy.: Hőközlés – Gyakorlati feladatok gyűjteménye és segédlet, 2011, 69-74, 95-97
- [8] Y. Kuang, Q.-A. Huang, N. K. S. Lee: Numerical simulation of a polysilicon thermal flexture actuator, Microsystem Technologies 8, 2002,17-21
- [9] Lobontiu, N., Garcia, E.: Mechanics of Microelectromechanical Systems. Kluwer Academic Publ., 2005.
- [10] Elter Pálné: Szilárdságtan példatár, Műegyetem kiadó, 2001, 83-115
- [11] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Kar – www.epito.bme.hu
Internetes segédanyagok: Statikailag határozatlan tartók megoldása erőmódszerrel
- [12] E. S. Kolesar, M. D. Rudd, W. E. Odom, J. A. Jayachadran, J. B. McAllister, S. Y. Ko, J. T. Howard, P. B. Allen, J. M. Wilken, N. C. Boydston, J. E. Bosch, R. J. Wilks: Single- and double-hot arm asymmetrical polysilicon surface micromachined electrothermal microactuators applied to realize a microengine, Elsevier, 2002, Thin Solid films 420-421, 530-538
- [13] D. Yan, A. Khajepour, R. Mansour: Modelling of two-hot-arm horizontal thermal actuator, Insitute of Physics Publishing Journal of Micromechanics and Microengineering 13, 2003, 312-322