



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Csonkolt ellipszoid egyensúlyi helyzetei

Szerző:

Hidas Anna

Hallgató, II. évfolyam

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

egyetemi tanár

Dr. Lángi Zsolt

adjunktus

Tudományos Diákköri Dolgozat

2012. október

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta

TARTALOMJEGYZÉK

Kivonat.....	2
Bevezetés	3
Irodalmi áttekintés	
Célkitűzések	
Ellipszoidok általános leírása.....	5
Euler-Monge-féle megadás (explicit megadás)	
Skalár-vektor függvénnyel való megadás (implicit megadás)	
Gauss-féle megadás	
A leírás módszere.....	8
A használt program sajátosságai	
Az ellipszoid, mint a gömb affin képe	
A síkkal való csonkolás leírása	
Paraméterezés	
Egyensúlyi pontok keresése.....	14
A síkmetszet belseje	
A határgörbe	
Az eredeti egyensúlyi pontok	
Eredmények.....	18
Felhasznált irodalom	21
Melléklet.....	22

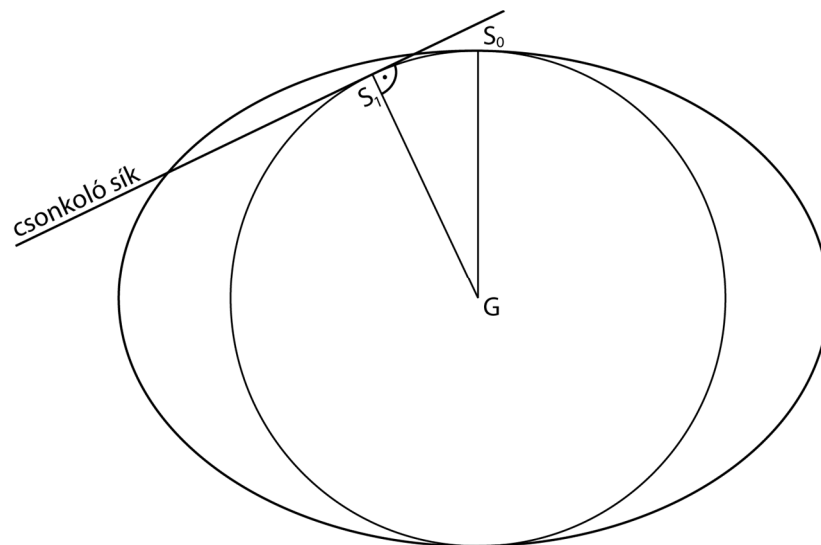
KIVONAT

A dolgozat témája az ellipszoid, mint konvex test egyensúlyi helyzeteinek vizsgálata, pontosabban azok megváltozása síkkal való csonkolás esetén. Az egyensúlyi helyzetek változása csak nagyon kis lecsapásokra tisztázott [9]. Ezen tanulmány célja olyan összefoglaló képet adni a vizsgált test statikus egyensúlyairól, mely általánosan megadja a létrejövő egyensúlyi pontok számát és fajtáját a lecsapási sík normálvektora és a lecsapás mélységének függvényében. Az ellipszoid előállításához felhasználjuk azt a tényt, hogy minden ellipszoid előáll egy gömb affin képeként. Ebben az esetben az ellipszoid pontjait úgy kapjuk, hogy egy origó középpontú, egységsugarú gömb pontjait szorozzuk egy szimmetrikus mátrixszal, melynek sajátértékei az ellipszoid féltengelyeinek hosszai, sajátalterei pedig a tengelyirányok. Egyensúlyi pontok szempontjából a vizsgálandó tartomány a létrejövő síkmetszet, illetve ennek ellipszis alakú határa. A síkmetszet belsejében egy vagy nulla egyensúlyi pont képződhet, de a határon a változás már nem ilyen egyszerű. A létrehozott algoritmus a létrejövő egyensúlyi pontokat térképezi fel egy-egy adott lecsapás esetén, továbbá vizsgálja, hogy a sík lemetsz-e az eredeti egyensúlyi pontokból. Az algoritmus egy alkalmazásaként egy adott ellipszoidra meghatározzuk a lecsapáskor létrejövő és megszűnő egyensúlyi pontok számát és típusát különböző mélységekben, a lecsapó sík helyének függvényében.

BEVEZETÉS

IRODALMI ÁTTEKINTÉS

A homogén, konvex testek alaktani osztályozására Domokos Gábor és Várkonyi Péter [1] egy új osztályozási rendszert vezetett be, amely a mechanikai egyensúly fogalmán alapszik. E rendszer ismertetéséhez tekintsünk egy konvex testet egy $R(\theta; \varphi)$ függvénynek, mely minden irányban megadja a test felszínének súlyponttól való távolságát. Ezen függvényt távolságfüggvénynek nevezzük. Az R gradiense, ∇R pedig megadja a felszín minden pontjához a távolságfüggvény legnagyobb meredekségének irányát és nagyságát. Az egyensúlyi pontokat a ∇R gradiensmező szingularitásaiként (zérushelyeiként) definiáljuk, amelyek három típusba sorolhatóak: az R függvény minimumhelyét stabil, maximumhelyét instabil egyensúlyi pontnak, a harmadik típust pedig nyeregpontnak nevezzük. (E pontokat a Morse-elméletben az R függvény kritikus pontjainak nevezik [2].) A test stabil, instabil és nyeregpontjainak számát jelölje rendre S, U, H . A Poincaré–Hopf-tétel következménye, hogy három dimenzióban az $S + U - H = 2$ összefüggés áll fenn [3], így pl. S és U ismerete meghatározza H értékét. Az (S, U) számpárt a test egyensúlyi osztályának nevezzük. Domokos és Várkonyi egy eredménye [1] alapján tudjuk, hogy minden pozitív egész (S, U) számpárhoz létezik olyan test, melynek S stabil és U instabil egyensúlyi pontja van. A bizonyítás elve az, hogy veszünk egy $(1, 1)$ osztályba tartozó testet (ilyen pl. a Gömböc), és lokális geometriai deformációk alkalmas sorozatát alkalmazzuk, melyek mindegyike valamelyik egyensúlyi pont egy környezetének síkkal vett csonkolásával egy (S, U) osztályú testből $(S + 1, U)$ vagy $(S, U + 1)$ osztályú konvex testet hoz létre. Ezeket a deformációkat hívjuk Kolumbusz-lépéseknek [1], Kolumbusz Kristóf tiszteletére, aki a legenda szerint egy tojáshoz feltételezhetően úgy állított meg a csúcán, hogy az eredeti instabil pont környezetében, kissé deformálva azt, egy új stabil pontot hozott létre. Ilyen transzformációt mutat be az 1. ábra



1. ábra

Tehát a fenti gondolatmenet szerint a Gömböcből az összes egyensúlyi osztály származtatható Kolumbusz-lépések sorozatával.

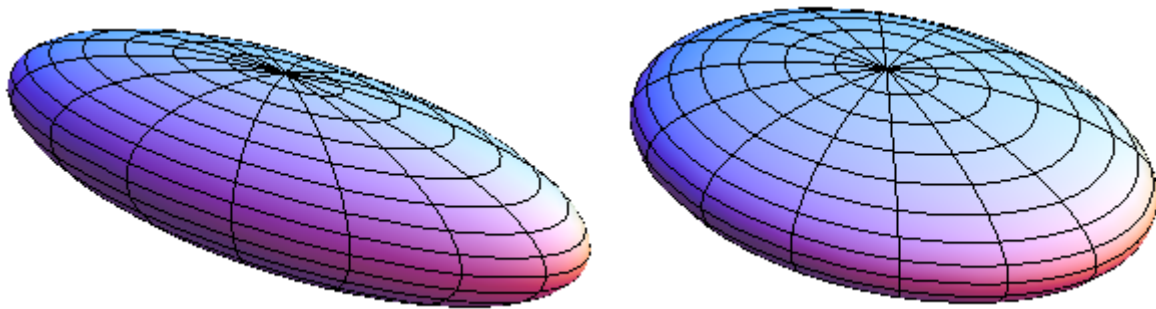
Egy finomabb osztályozást kapunk, ha az elsődleges egyensúlyi osztályokat másodlagos, topológiai alosztályokra bontjuk az egyensúlyi pontok elhelyezkedése alapján. E természetes topológiát az R függvény által definiált Morse–Smale–komplex adja meg. Ennek meghatározásához tekintsük a gradiensmező heteroklinikus pályáit, amelyek olyan görbék, amelyeknek minden pontban érintője a gradiensvektor, és végpontjai eltérő egyensúlyi pontok. Egy test felszínén végtelen sok heteroklinikus pálya található, de ezek között csak véges sok olyan izolált pálya van, melynek valamely végpontja nyeregpon. Az alosztályok meghatározásához az izolált pályákat vesszük figyelembe. Ha megrajzoljuk az izolált pályákat a test felszínén, akkor ezzel egy egyensúlyi gráfot határozunk meg, melynek pontjai az egyensúlyi pontok, élei az izolált pályák, és az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik a Gömböc kivételével [3, 2]: síkbarajzolható, három-színezhető, négyszögelt, minden nyereg fokszáma négy és teljesül a Poincaré–Hopf-tétel [4].

CÉLKITŰZÉSEK

A dolgozat célja összefoglaló képet adni az ellipszoid statikus egyensúlyáról, mely általánosan leírja annak megváltozását tetszőleges síkkal való csonkolás esetén. Ehhez egy olyan algoritmust kívánunk létrehozni, melynek kimenete egy olyan háromdimenziós tömb, melynek egyes szeletei olyan térképek, melyek az egyensúlyok megváltozásának számát és típusát mutatják, a csonkoló sík állása függvényében, továbbá az egyes szeletek adott mélységű lecsapásokhoz tartoznak. Szeretnénk megvizsgálni, hogy milyen mélységben, és irányban végezhetünk lecsapásokat úgy, hogy ne jöjjön létre a Kolumbusz-lépéseknél bonyolultabb megváltozás. (Azaz vagy egy egyensúlyi pont áthelyeződése vagy egy Kolumbusz-lépés következzen be.)

Ehhez egy egyszerűsített modellel dolgozunk, azaz nem vesszük figyelembe a súlypont lecsapás következtében való eltolódását, mely egy bizonyos mélység után már jelentős lehet, ehelyett végig az eredeti ellipszoid középpontjával számolunk. A modell egy konkrét ellipszoid leírására alkalmas, azonban a tengelyarányokat, mint bemeneti paramétereket megadhatjuk.

ELLIPSZOIDOK ÁLTALÁNOS LEÍRÁSA



Az ellipszoid, mint felület, különböző megadási módok alapján többféleképpen adható meg, írható le függvénnyel. (Fontos megemlíteni, hogy általános ellipszoidokról van szó, tehát nem szferoidokról – olyan ellipszoid, melynek két féltengelye ugyanolyan hosszú – így nem írhatóak le forgásfelületként.) A megadási módok a következők lehetnek:

EULER-MONGE-FÉLE MEGADÁS (EXPLICIT MEGADÁS)

Egy felület Euler-Monge féle alakban adott, ha az F felület minden pontjának van olyan nyílt környezete, hogy a környezet pontjainak x, y, z koordinátái közül az egyik a másik kettő kétváltozós (explicit) függvényeként adható meg. Vagyis a környezetben értelmezve van a

$$z = f(x, y); \quad y = g(x, z); \quad x = h(y, z)$$

függvények valamelyike. E megadási módban az origó középpontú, R sugarú gömb egyenlete:

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Ebben az alakban az (x, y) -síkbeli pontokra nincs a feltételeknek megfelelő nyílt környezete. Ezt a problémát úgy szoktuk áthidalni, hogy a gömböt több félgömbpár átfedéseként adjuk meg, azaz felírjuk az

$$x = \pm \sqrt{R^2 - z^2 - y^2}$$
$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$

egyenleteket is.

Egy általános ellipszoid egyenlete a fenti alapján:

$$z = \pm c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} x^2 - \frac{1}{b^2} y^2},$$

ahol a, b, c a féltengelyek hosszai. Ezen megadásmód esetén előfordulhat, hogy a felület több darabra esik szét, így pl. a gömb alsó- és felső - félgömbre. Ez megnehezíti a felület leírását.

SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNNYEL VALÓ MEGADÁS (IMPLICIT MEGADÁS)

Tekintsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert és egy $F(x,y,z)$ háromváltozós függvényt. Azon pontok mértani helye, melyek koordinátáit a függvénybe helyettesítve a kapott függvényérték konstans (pl. zérussal egyenlő), egy nívófelületet alkotnak. Ennek analitikus megadása:

$$F(x,y,z) = 0$$

Ily módon az origó középpontú, R sugarú gömb egyenlete:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Egy általános ellipszoid egyenlete a fenti alapján:

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{c^2}z^2 = 1$$

E megadási mód hátránya, hogy egy olyan függvénnyel dolgozunk, amely nem csak a felületen van értelmezve, továbbá, hogy e megadási móddal a felület definíciója nem helyettesíthető.

GAUSS-FÉLE MEGADÁS

Vegyünk fel az F felületen két vonalsereget, az úgynevezett paramétervonalakat (gömbön az úgynevezett szélességi és hosszúsági köröket). Nevezzük az egyik sereg görbét u -vonalaknak, a másik sereg görbét pedig v -vonalaknak. Megköveteljük, hogy

- mindkét görbesereg a felületet egyrétegűen fedje,
- egy u és egy v - vonal egymást egy pontban messe, és ez a metszés egy $0 < \alpha < \pi$ szögben történjék,
- az u - vonalak mentén csak az u ($v = v_0$), a v - vonalak mentén csak a v érték változzék ($u = u_0$).

Szemeljünk ki egy u és egy v - vonalat. Rendeljük ezekhez a $v = 0, u = 0$ értékeket, a metszésponthoz pedig a $(0, 0)$ számpárt. Majd mind a két paramétervonal pontjaihoz rendeljük egy (u, v) számpárt, oly módon, hogy a két vonalat irányítsuk, majd az u - vonal két különböző, U_1, U_2 pontjához az $(u_1, 0)$ ill. $(u_2, 0)$ számpárt rendeljük úgy, hogy $u_1 < u_2$, akkor és csak akkor, ha U_1 megelőzi U_2 -t. Teljesen hasonlóan járunk el a kiszemelt v - vonallal is. Ezután a kiszemelt u ill. v - vonalat metsző minden v ill. u - vonalhoz az u ill. v - vonallal alkotott metszésponthoz tartozó u ill. v - értéket rendeljük. Így a felület minden pontjához hozzárendeltünk egy (u, v) számpárt. Ha most valamely síkban felveszünk egy (u, v) koordinátarendszert, akkor ebben a síkban a felületnek megfelel egy T -tartomány. Az F -felület pontjainak helyvektorait a T -tartományon értelmezett $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$ kétváltozós vektor-skalár függvénnyel adjuk meg. Ha adott a térben egy Descartes-féle koordinátarendszer, ekkor az F felület pontjainak x, y, z koordinátái ugyancsak az u, v paraméterek függvényei [5]:

$$\underline{r}(u, v) = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Az R sugarú, origó középpontú gömb (2. ábra) megadása ebben a koordináta-rendszerben:

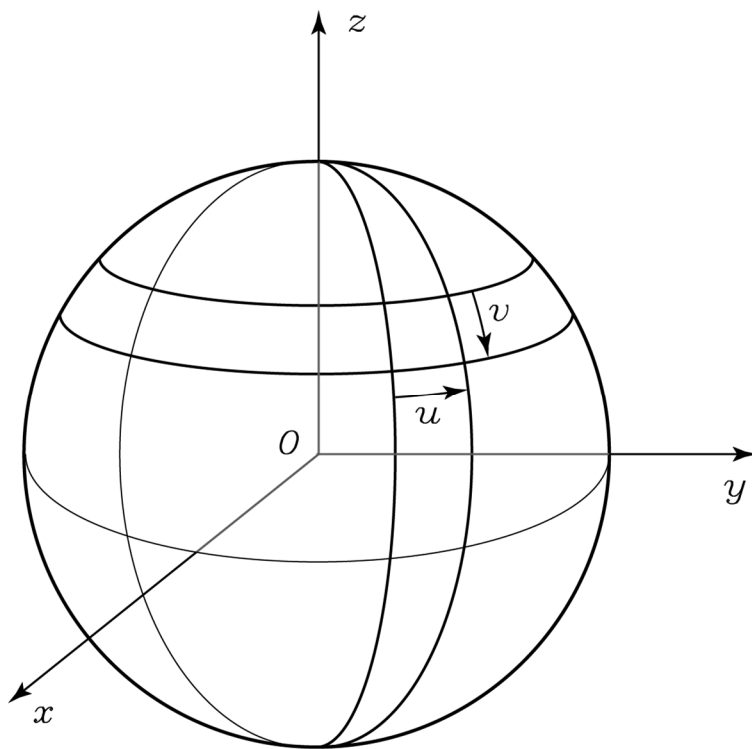
$$\underline{r}(u, v) = \begin{cases} x = R \sin v \cos u \\ y = R \sin v \sin u, \\ z = R \cos v \end{cases}$$

ahol a paramétertartomány:

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi.$$

Egy általános ellipszoid egyenlete a fenti alapján:

$$\underline{r}(u, v) = \begin{cases} x = a \sin v \cos u \\ y = b \sin v \sin u. \\ z = c \cos v \end{cases}$$



2. ábra

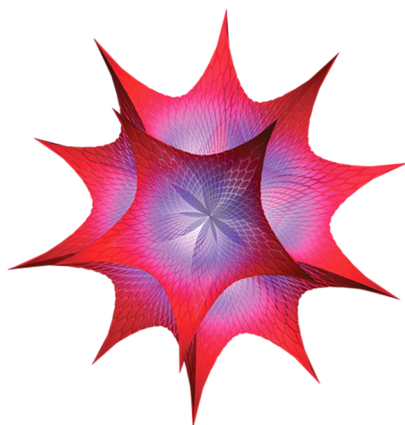
Az ellipszoid vizsgálata során a felület leírásához ezen legutóbbi megadást fogjuk használni. Ezen megadás esetén a távolságfüggvényként való felírásra könnyű áttérni, hiszen az a koordináták négyzetösszegéből állítható elő.

A LEÍRÁS MÓDSZERE

A HASZNÁLT PROGRAM SAJÁTSÁGAI

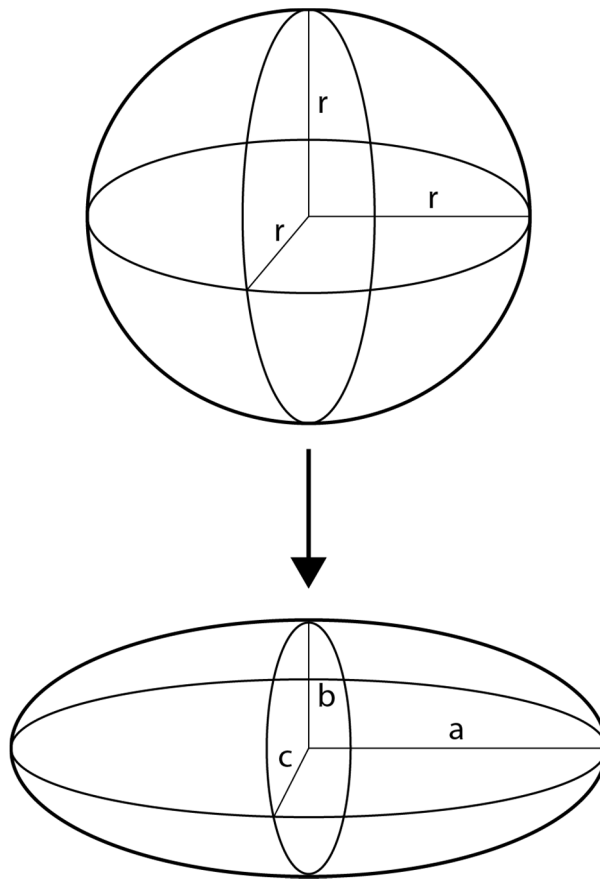
Mielőtt rátérnék a matematikai leírás ismertetésére, fontosnak vélem a használt program sajátosságait bemutatni. A számításokhoz a Stephen Wolfram által megálmodott, a Wolfram Research által kifejlesztett Mathematica szoftvert használtam. (Én a 7.0 verzióval dolgoztam, a jelenlegi legfrissebb verzió a 8.o.) Fontos kiemelni, hogy a program sajátossága, hogy listákként fogja fel a vektorokat és mátrixokat, a következőképpen: A háromdimenziós térben az (x, y, z) koordinátájú vektor itt $\{x, y, z\}$ alakú. Hasonlóképpen a mátrixok kettős listák. Például a következő lista egy 2×3 -as mátrixot definiál: $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$. Ezt úgy kell érteni, hogy az első sor elemei az 1, 2 és 3, a második sor elemei pedig a 4, 5 és 6. A műveletek a következők: *Dot* jelenti a belső (vagy skaláris) szorzást, vektor-vektor, vektor-mátrix illetve mátrix-mátrix esetén, ezt egyszerűen ponttal jelölhetjük. A *Cross* utasítás jelenti a vektoriális szorzást, ennek a jele: $\times$.

Ebből kifolyólag a számítás során mindig sorvektorokkal dolgoztam, illetve vektor mátrixszal való szorzását balról végeztem. A leírás során használt jelölések és elnevezések a programban használtakkal egyeznek meg.



AZ ELLIPSZOID, MINT A GÖMB AFFIN KÉPE

A leírásnál kihasználjuk, hogy az ellipszoid a gömb affin képe, azaz tetszőleges gömbhöz és ellipszoidhoz van olyan affin transzformáció, mely az egyik testet a másikba viszi. Az affin transzformációk azok a geometriai transzformációk, melyeknél minden egyenes képe egy egyenes, és felírhatók úgy, mint egy reguláris, azaz nem nulla determinánsú, lineáris transzformációnak és egy eltolásnak a kompozíciója [6]. Esetünkben bármilyen általános ellipszoidot előállíthatunk egy origó középpontú egységgömbből egy affin transzformáció segítségével, ehhez elég az egységgömb egyenletét felírni. Ekkor maga az affin transzformáció egy szimmetrikus mátrixszal való szorzásként adható meg, melynek sajátértékei az ellipszoid féltengelyeinek hosszai (a, b, c), sajátalterei pedig a tengelyirányok (3. ábra).



3. ábra

A térbeli affin transzformációt egy 3×3 -as, diagonalizálható mátrix írja le. Ezt a mátrixot a következőképpen állítjuk elő. Vesszünk egy M diagonális mátrixot, a főátló elemei: a, b, c az ellipszoid féltengelyeinek hosszai, azaz:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Továbbá felírunk egy P mátrixot, amely három sorvektor egymás alá rendezéséből áll össze, úgy hogy a három vektor egy (v_1, v_2, v_3) ortonormált bázist alkossanak, ehhez felírunk két tetszőleges vektort, a harmadikat pedig a kettő keresztszorzataként adjuk meg. Ezután a három vektoron elvégezzük egy Gram - Schmidt ortogonalizációt.

A Gram – Schmidt eljárás

Az eljárás egy skalárszorozatos tér véges, lineárisan független $\{v_i\}$ vektorrendszerét alakítja át olyan $\{u_i\}$ vektorrendszeré, mely elemei páronként merőlegesek, egység hosszúak és $\{v_i\}$ illetve $\{u_i\}$ ugyanazt az alteret feszíti ki. A módszer az $\mathbb{R}^3$ - ban:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 &\rightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \\
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \\
\mathbf{v}_2^* &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2^*}{|\mathbf{v}_2^*|} \\
\mathbf{v}_3^* &= \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3^*}{|\mathbf{v}_3^*|}
\end{aligned}$$

Az eljárás során kapott három vektorból előállítjuk a P mátrixot: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Ezt a mátrixot invertáljuk (azaz, ortogonális transzformációról lévén szó, transzponáljuk), majd előállítjuk a transzformációs mátrixot a következőképpen:

$$A = P M P^{-1}$$

Ekkor A szimmetrikus, sajátértékei M sajátértékeivel egyeznek meg, (a, b, c) sajátvektorai pedig P^{-1} sorvektorainak, illetve ekvivalens módon P oszlopvektorainak skalárszorosai.

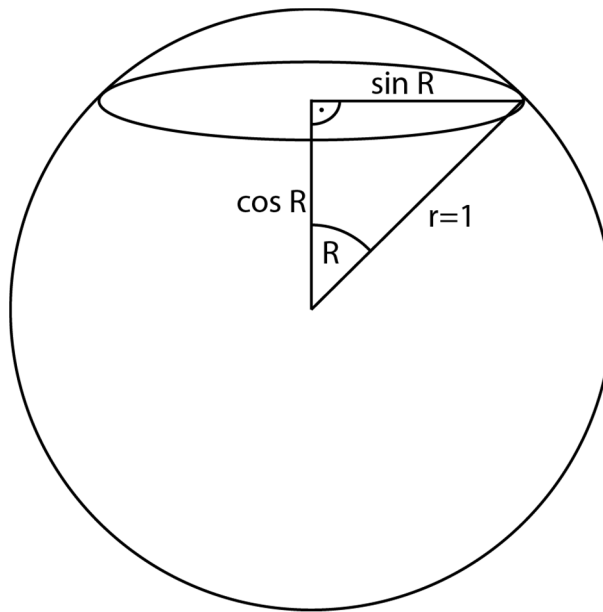
Így a vizsgálandó ellipszis egyenletét a következőképpen állítjuk elő: Felírjuk az egységgömb paraméteres vektoregyenletét (Gauss-megadás), majd elvégezzük rá a transzformációt azáltal, hogy az A mátrixszal beszorozzuk.

$$Gvec(u, v) = \begin{pmatrix} \sin v \cos u \\ \sin v \sin u \\ \cos v \end{pmatrix}$$

$$Evec = Gvec.A$$

A SÍKKAL VALÓ CSONKOLÁS LEÍRÁSA

Ismert tény, hogy egy konvex test pontosan akkor egy ellipszoid, ha minden síkmetszete ellipszis. [7, 8] Így az ellipszoid síkkal való metszése során egy ellipszist kapunk metszetgörbéként, és a síkkal való metszést ezen ellipszis leírásával adhatjuk meg. Az affin transzformáció tulajdonsága, hogy síkot síkba visz, továbbá tudjuk, hogy síknak és gömbnek a metszete kör. Így ha az egységgömbön veszünk egy kört, és azt is transzformáljuk, akkor egy ellipszist kapunk az ellipszoidon, mely az ellipszoidnak a sík transzformáltjával vett metszete. Ehhez speciálisan veszünk a kiindulási egységgömbön egy, a z tengelyre merőleges síkban lévő kört, mely megadható egy R szögparaméterrel (4. ábra), úgy, hogy a kör sugara $\sin R$ valamint a kör magassága (origótól vett távolsága) $\cos R$ lesz.



4. ábra

Felírjuk a gömbön lévő kör paraméteres egyenletét, melyet így éppen úgy kapunk, hogy a v paraméterre R -et helyettesítünk (Mivel a z tengelyre merőleges síkban fekvő körök a gömbi koordinátarendszer szélességi körei, melyek éppen a paraméterezett felület u - vonalainak feleltethetőek meg, azaz v értékét rögzítem, esetünkben $v = R$):

$$kvec(u) = \begin{Bmatrix} \sin R \cos u \\ \sin R \sin u \\ \cos R \end{Bmatrix}$$

Ekkor erre a körre ugyanúgy alkalmazható a fent leírt módon előálló A mátrix által leírható affin transzformáció. Így a mátrix megválasztásától függően különböző levágásokat kapunk. A levágásokat jellemző ellipszoid tehát előáll:

$$evec = kvec.A$$

alakban. Érdekes megjegyeznünk, hogy a konstrukciónak megfelelően a kör a transzformáció alatt a deformációtól eltekintve „helyben marad”, míg a gömb a sajátirányokban megnyúlik. Ez azt is jelenti, hogy a programunkkal készített képeken a kör mindig ugyanott marad, míg a vizsgált ellipszoid (melynek tengelyarányai minden helyzetben 1:2:3) különböző irányokból látszik.

PARAMÉTEREZÉS

A dolgozat célja általános képet adni az ellipszoid egyensúlyi helyzeteinek megváltozásáról. Ezt úgy érjük el, hogy egy algoritmust hozunk létre, mely megadott paraméterek szerint sorra veszi a lehetséges csonkolásokat. Két paraméter a csonkoló sík térbeli helyzetét (elfordulását) egy harmadik pedig a csonkoló sík mélységét írja le. Az első két paraméter két vektor, melyet a következőképpen adunk meg:

$$vv1 = \{\sin t \cos 0, \sin t \sin 0, \cos t\} \text{ és}$$

$$vv2 = \{\sin t \cos \frac{\pi}{2}, \sin t \sin \frac{\pi}{2}, \cos t\},$$

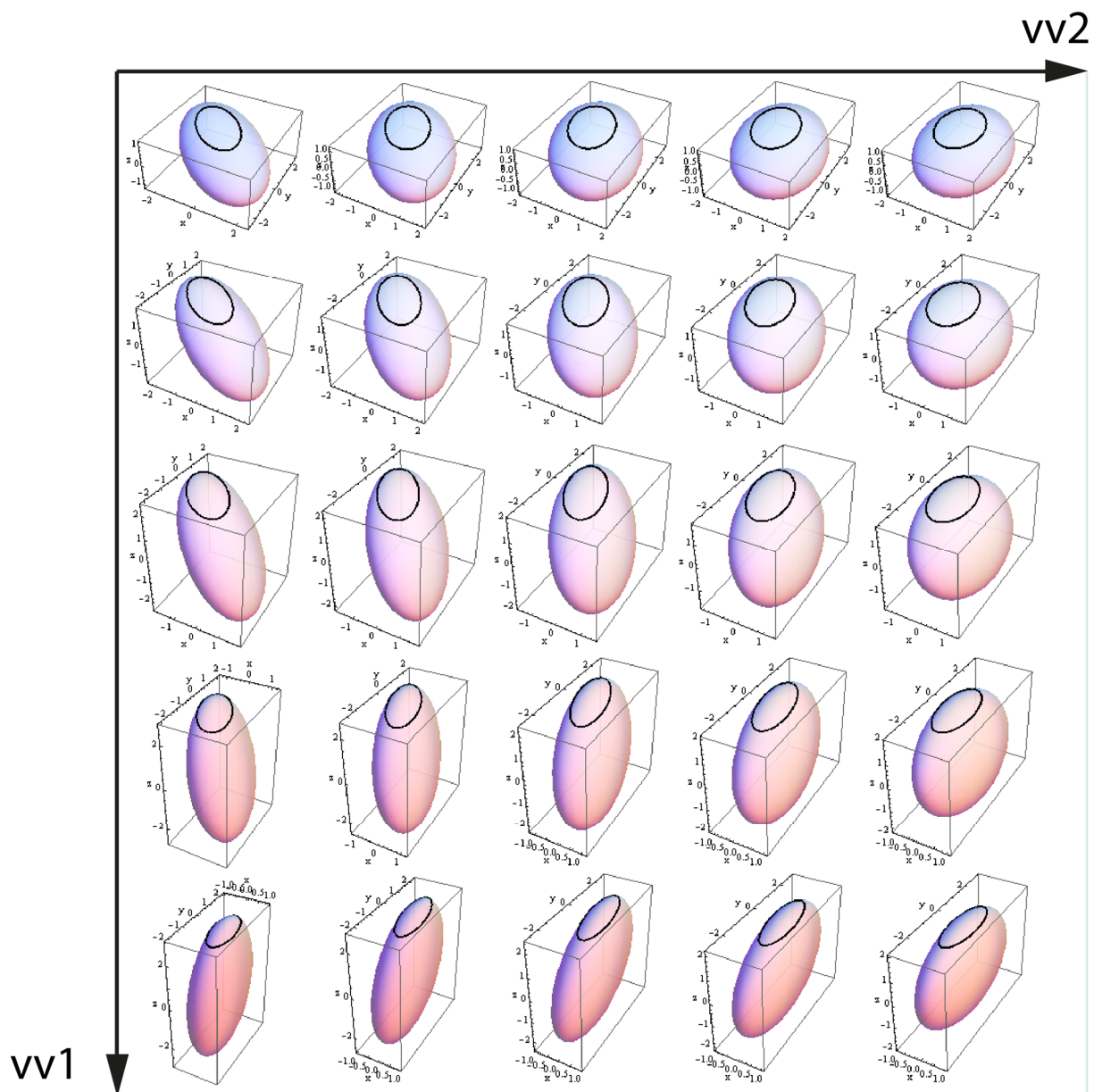
ahol $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$. Az algoritmus t paramétert lépteti végig ezen az adott tartományon, legenerálva a szükséges vektorokat. ($vv1(t=0)$ és $vv2(t=0)$ párosításnál nyilván nullvektorokat kapnánk, melyek nem adnának értelmes eredményt.) Az így kapott vektorsorozat mindegyikében egy-egy vektort választunk a P mátrix létrehozásához, míg a harmadik szükséges vektor a kettő vektoriális szorzata által meghatározott. Ez a három vektor egy lineárisan független vektorrendszert ad meg, így elvégezhető rajtuk a Gram – Schmitt ortogonalizáció. Ebből a már ismert módon állítjuk elő P^{-1} , mely lényegében meghatározza a csonkoló sík állását. A módszerünk fent leírt tulajdonságai miatt a programunkkal nem az ellipszist mozgatjuk az ellipszoidon, az mindig helyben marad, hanem a vizsgált ellipszoid fordul el a megfelelő irányokba. (5. ábra)

A harmadik paramétert a $vv3 = \sin R$ egyenlet határozza meg, ahol $\sin R$ éppen a csonkolás által meghatározott metszatkör sugara. Ez egyértelműen meghatározza a csonkolás mélységét $(1 - \cos R)$. A vizsgált tartomány: $0 < \sin R < 1$. A három paraméterrel kitöltjük a lehetséges csonkolások terét. Az algoritmus eredménye tehát egy háromdimenziós tömb lesz, mely minden eleme megadja az adott típusú lecsapás esetén az test egyensúlyainak megváltozását.

Megjegyezzük, hogy mivel az affin transzformáció a testek arányát nem változtatja, így R értékéből könnyen kiszámolható a lecsapott rész térfogatának viszonyított aránya [6], a következőképpen:

$$\begin{aligned} m &= 1 - \cos R \\ V &= \left(2 \frac{\pi}{3}\right) (\sin R)^2 m \\ V_{sz} &= \frac{V}{4 \frac{\pi}{3}} 100\% . \end{aligned}$$

Az 5. ábrán az algoritmus által létrehozott tömb egy szelete látható, melyen éppen $vv3 = \sin R = 0,5$, azaz az eredeti gömbön a metszatkör sugara 0,5. Megfigyelhetjük, hogy a $vv1$ illetve $vv2$ paraméterek léptetve, az ellipszoidunk elfordul, míg a metszetellipszis helyben marad.



5. ábra

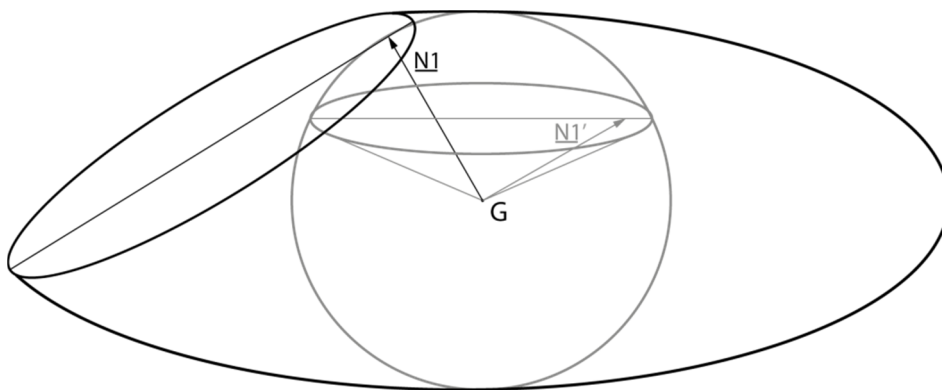
EGYENSÚLYOK VIZSGÁLATA

A vizsgálat során a csonkolt ellipszoid felületét három részre bontva fogjuk vizsgálni. Egyrészt megnézzük, hogy a lecsapás során keletkező síkmetszet belsejében jött-e létre egyensúlyi pont, másrészt megvizsgáljuk a síkmetszet határát, azaz a metszetellipszist. Harmadrészt pedig a maradék felületdarabon vizsgáljuk az egyensúlyi pontok változását.

A SÍKMETSZET BELSEJE

Könnyen látható, hogy a csonkolás során a keletkező ellipszis belsejében nulla vagy egy egyensúlyi pont keletkezhet, mely típusát tekintve stabil pont (S). Úgy tudjuk eldönteni, hogy létrejön-e ilyen pont, hogy a test középpontjából a síkra bocsátott merőleges talppontjának helyzetét vizsgáljuk. Amennyiben ez a pont az ellipszisen belül található, keletkezik, ellenkező esetben nem keletkezik egyensúlyi pont. Ez azzal indokolható, hogy a síkon a középponttól vett távolságfüggvénynek abban a pontban lesz minimuma, ahol a középpontot és a síkot összekötő szakasz éppen merőleges a síkra.

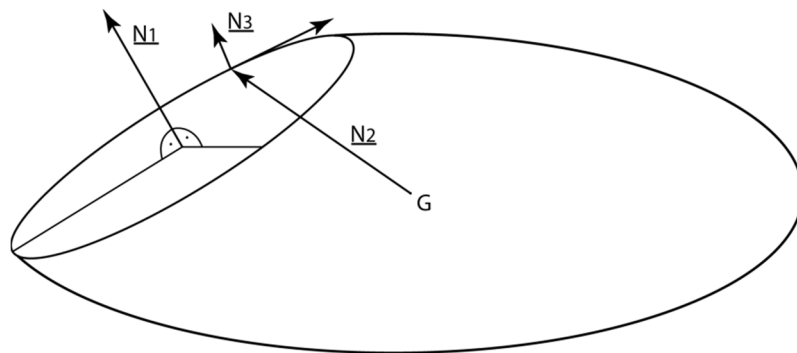
Ezt a vizsgálatot úgy tesszük meg, hogy felírjuk a metszetellipszis által meghatározott sík normálvektorát. Ehhez az ellipszis egyenletébe három tetszőleges értéket helyettesítünk. Az így kapott három pont, mint végpont meghatároz két, azonos kezdőpontból induló vektort, melyek megfelelően vett (azaz úgy, hogy a normális a felületről kifelé mutasson) vektoriális szorzata a sík normálisa ($\mathbf{NI}$). Tudjuk továbbá, hogy a sík normálisa skalárszorosa az origóból a síkra bocsátott merőleges talppontja helyvektorának. Így ezt a vektort visszatranszformáljuk ($\mathbf{NI}'$), hogy az eredeti gömbön való helyét vizsgáljuk. A visszatranszformálás az A mátrix inverzével (A^{-1}) való szorzásként írható fel. $\mathbf{NI}'$ megadja a talppont eredeti helyének irányát a kiindulási gömbön. Ha az $\mathbf{NI}'$ vektor a kiindulási körön belül van, kapunk egyensúlyi pontot, hiszen ekkor a talppont is a körön belül lesz, tehát a transzformálás után az ellipszisen belül. Mivel vektorok által bezárt szöget viszonylag egyszerűen számolhatunk, az $\mathbf{NI}'$ és a z - tengely által bezárt szöget számoljuk, és ha ez kisebb, mint a körívet jellemző R szög, a vektorunk a körvonal meghatározta kúpon belül van (6. ábra). Így elég a két szög közötti relációt felírni, ez egyértelműen megadja, hogy keletkezett-e a síkon egyensúlyi pont.



6. ábra

A HATÁRGÖRBE

A határgörbén keletkező egyensúlyok száma nem egyértelmű, azt azonban tudjuk, hogy az itt létrejövő egyensúlyi pontok instabil vagy nyeregpontok lehetnek. Az egyensúlyi pontok létezésének szükséges feltétele, hogy, egy változóval paraméterezve az ellipszist, és a távolságfüggvényt az ellipszis pontjain vizsgálva, az így kapott egyváltozós függvénynek az adott pont kritikus pontja legyen, azaz itt az első derivált nulla legyen. Hogy ezt meghatározzuk, fel kell írunk a távolságfüggvényt az ellipszis mentén, azaz rögzített R paraméter szerint. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az *avec* koordinátáinak négyzetösszegét vesszük, ezt az u paraméter, mint változó szerint deriváljuk, majd a kapott függvényt egyenlővé tesszük nullával. Az így kapott megoldások meghatározzák azon pontokat, ahol létrejöhetnek egyensúlyok. Elmondható, hogy négy vagy kettő valós megoldás van, utóbbi esetben az egyenlet másik két gyöke egy komplex konjugált pár. (Mivel a távolságfüggvény felveszi minimumát és maximumát, így legalább két valós megoldás mindig lesz.) Ezeket a pontokat tovább kell vizsgálni. Tudjuk, hogy ezekben a pontokban három jellemző vektor, a felületi normális ($N3$), a sík normálisa ($N1$) és a pont helyvektora ($N2$) éppen egy síkban vannak (a vektorokat lásd a 7. ábrán), ugyanis mindegyikük merőleges az adott pontban a metszetellipszis érintőjére. (Ezt az érintővektort úgy kapjuk, hogy az ellipszis paraméteres vektoregyenletét deriváljuk, és az adott ponthoz tartozó u paramétert helyettesítjük).



7. ábra

Mivel a vektor az ellipszis érintővektora, benne van az ellipszis síkjában, azaz a metsző síkban. Továbbá, mivel a sík normálisa merőleges minden síkbeli vektorra, így az ellipszis érintőire is minden pontban. Hasonlóan, az ellipszis benne van az ellipszoid határában, így az érintője benne van az ellipszoid adott pontbeli érintősíkjában, ami merőleges az ellipszoid normálisára az adott pontban. Az utolsó tulajdonságnál kihasználjuk, hogy az ellipszis adott pontjában a derivált nulla. Ha az ellipszis $\mathbf{r}(t)$ módon van paraméterezve, akkor:

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle.$$

Ennek deriváltja az adott pontban nulla, így:

$$2 \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \ddot{\mathbf{r}}(t) \rangle = 0,$$

azaz $\dot{\mathbf{r}}(t)$ merőleges a deriváltjára, a skaláris szorzás definíciója miatt.

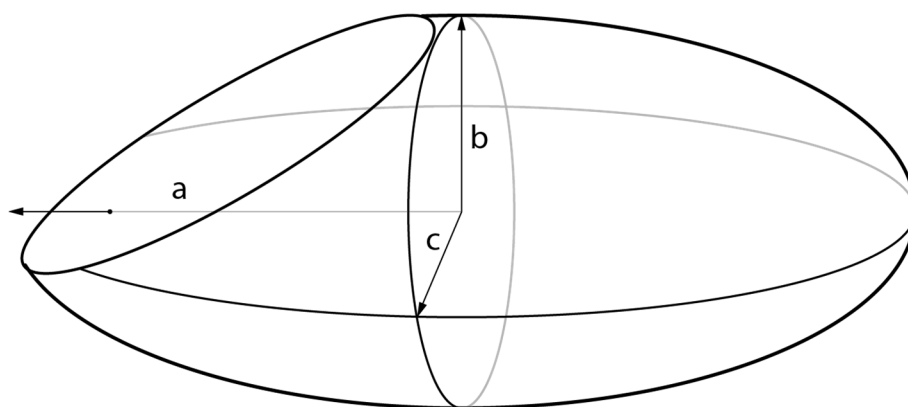
Így eldönthető, hogy hármójuk közül melyik áll középen, azáltal, hogy a vektorok páronként bezárt szögét számoljuk, majd ezeket összehasonlítjuk. Ha a helyvektor a két másik vektor közt van, a pont egyensúlyi pont, ha a vektorhármás külső vektora, akkor nem.

A számításhoz a vektorokat a következőképpen állítjuk elő: A sík normálisa a fent leírt módon előálló $N1$ vektor lesz. A helyvektorhoz a gyökkeresés során kapott megoldásokat az ellipszis egyenletébe helyettesítjük ($N2$), míg a felületi merőleget a felületi érintők (a felületet leíró vektor parciális deriváltjai az adott pontban) vektoriális szorzataként kapjuk ($N3$). Itt figyelni kell a vektoriális szorzás irányára, hogy a vektor a felületről kifelé mutasson, éppúgy, mint a sík normálvektoránál. Ha tehát az $N1$ és $N2$ által bezárt szög α , az $N1$ és $N3$ által bezárt szög β , valamint az $N2$ és $N3$ által bezárt szög γ , akkor az egyensúlyi pont létezésének szükséges és elégséges feltétele a kritikus pontokban a $\beta > \alpha$, és $\beta > \gamma$ relációk teljesülése.

Ahhoz, hogy eldöntsük, hogy a keletkezett egyensúlyi pont milyen típusú, meg kell vizsgálnunk az adott pontban a távolságfüggvény második deriváltját az ellipszis mentén. Ha ez az érték pozitív, tehát a függvénynek az ellipszisen lokális minimuma van, akkor nyeregpontot, ha negatív, azaz a függvénynek lokális maximuma van, instabil pontot kapunk.

AZ EREDETI EGYENSÚLYI PONTOK

Fontos megvizsgálnunk, hogyan változnak a maradék felületdarabon az egyensúlyok, azaz, hogy a csonkoló sík levág-e az eredeti egyensúlyi pontok közül (8. ábra). Ehhez azt használjuk fel, hogy az eredeti ellipszoid egyensúlyi pontjai a sajátvektorok irányában vannak, így csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a sajátvektorok a körvonal meghatározta kúpon belül vannak-e.



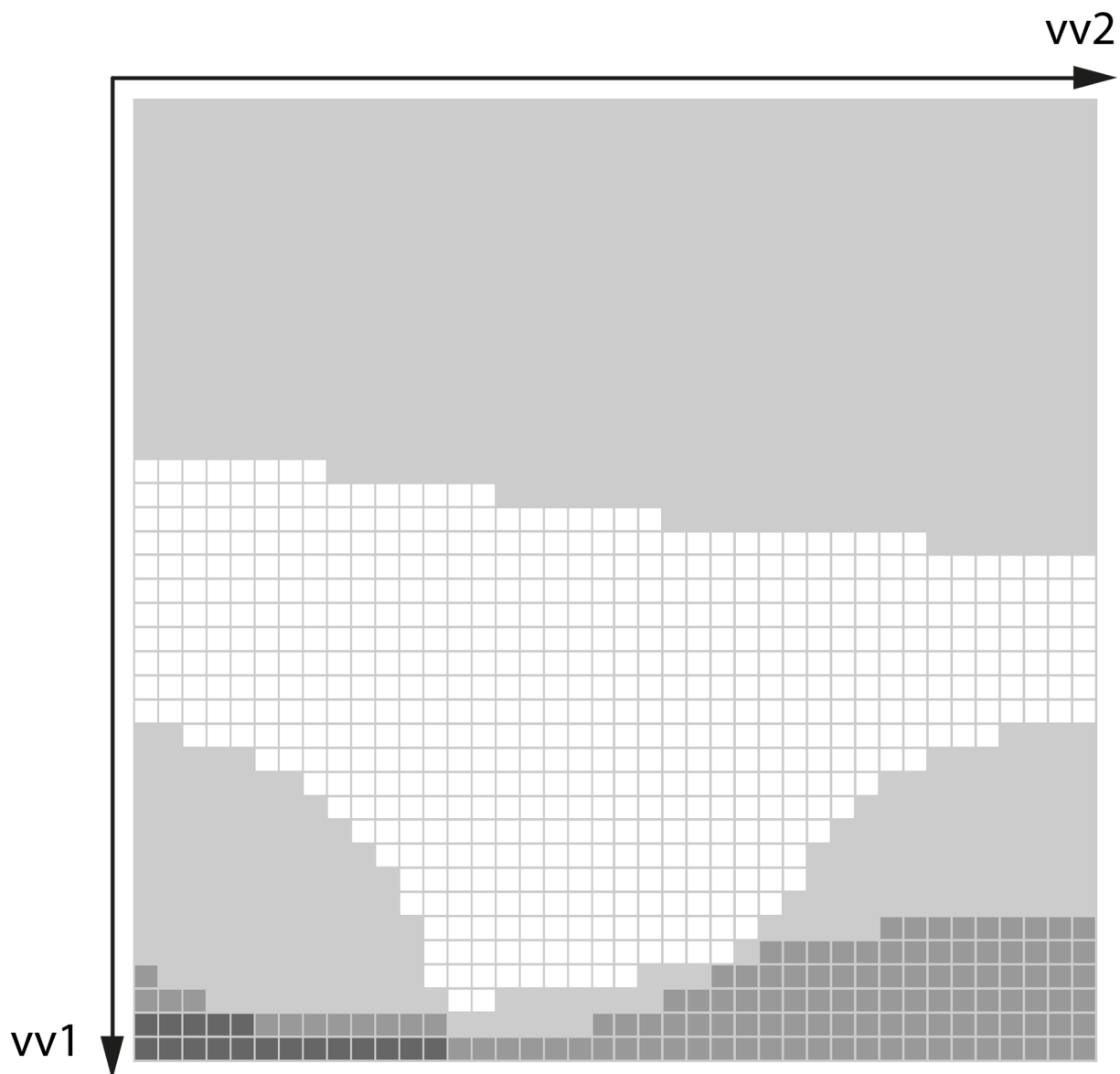
8. ábra

Ehhez elég a sajátvektorok és a z-tengely által bezárt szöget az R paraméterrel összehasonlítani (a síkmetszeten keletkező egyensúlyi pont vizsgálatához hasonlóan). Fontos figyelembe venni, hogy az ellipszoidon az egyensúlyi pontok párosával

helyezkednek el, azaz a sajátvektorok ellentettje (mínusz egyszerese) is kijelöl egy egyensúlyi pontot. Ennek a figyelembevételére a legegyszerűbb úgy, hogy ha φ jelöli a sajátvektor z-tengellyel bezárt szögét, akkor $(\pi - \varphi)$ szöget is figyelembe vesszük. Elég tehát a szögek közötti relációt felírni, ez egyértelműen megadja, hogy megszűnik-e valamely az eredeti egyensúlyok közül. Hogy stabil, instabil vagy nyeregpont szűnt-e meg úgy dönthetjük el, hogy megvizsgáljuk melyik sajátértékhez (sajátértékekhez) tartozó sajátvektor (sajátvektorok) esik a körvonal által meghatározott kúpon belülre. A legnagyobb sajátértékhez az instabil, a legkisebbhez a stabil pont tartozik.

EREDMÉNYEK

A dolgozat célja a megváltozások általános leírása volt, továbbá egy olyan térkép generálása, mely megmutatja a változások számát és típusát a csonkolás tulajdonságainak (irány és mélység) függvényében. A megváltozások száma a Poincaré–Hopf-tétel alapján csak páros lehet. Ezt a számot úgy kapjuk, hogy minden típusú változást (egyensúlyok létrejötte illetve megszűnése) összeadunk. A kapott érték nulla és hat közötti szám lesz. Ezt a képeken úgy jelöltük, hogy a nulla értékhez a fehér színt rendeltük, a többi értéket szürke szín jelöli, mely annál sötétebb, minél magasabb a számérték. A 9. ábrán a $vv3 = \sin R = 0,5$ paraméterértékhez tartozó szelet látható.



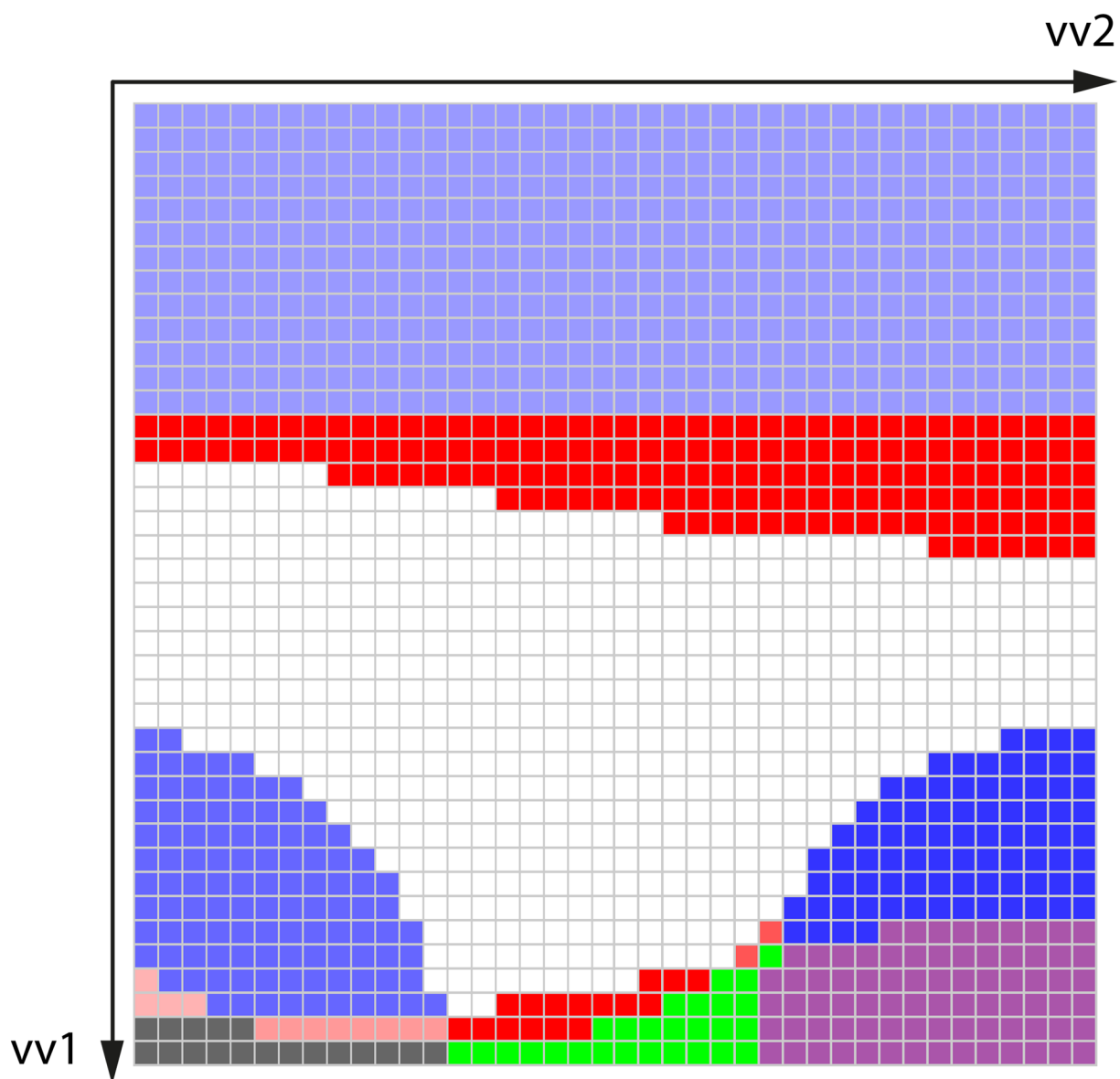
9. ábra

A megváltozás típusa sokféle lehet, de mindegyik két alaptípusból épül fel. Az egyik az egyensúlyok áthelyeződése, melyet az alapján, hogy milyen egyensúlyi pontot vágunk le, további három fajtára bonthatunk. A másik alaptípus a Kolumbusz-lépés, mely során létrejön egy stabil vagy egy instabil egyensúlyi pont és egy nyeregpont. Az egyéb megváltozások az ennél bonyolultabb változások felfoghatóak ezek kombinációjaként.

A lehetséges kombinációkat az alábbi táblázat szemlélteti. (A lehetőségek vizsgálatakor figyelembe vettük, hogy maximum egy stabil, két instabil és két nyeregpont jöhet létre, illetve, hogy egy adott lecsapás egy adott típusú egyensúlyból nem szüntetheti meg mindkettőt.) A táblázatban feltüntettük azt is, hogy a térképen milyen színnel jelöltük az adott típust.

típus	felépítés	színjelölés
H1	+H,-H	sötétkék
U1	+U,-U	középkék
S1	+S,-S	világoskék
K1	+S,+H	piros
K2	U,+H,	világos piros
K1K2	+S,+H,+U,+H	zöld
K1U1	+S,+H,+U,-U	sötétrózsaszín
K1H1	+S,+H,+H,-H	világos lila
K2H1	+U,+H,+H,-H	lila
K2U1	+U,+H,+U,-U	középrózsaszín
K2S1	+U,+H,+S,-S	világos rózsaszín
H1S1	+H,-H,+S,-S	világosbarna
H1U1	+H,-H,+U,-U	középbarna
S1U1	+S,-S,+U,-U	sötétbarna
K1K2U1	+S,+H,+U,+H,+U,-U	világosszürke ↓
K1H1U1	+S,+H,+H,-H,+U,-U	
K2H1U1	+U,+H,+H,-H,+U,-U	
K2S1U1	+U,+H,+S,-S,+U,-U	
S1U1H1	+S,-S,+H,-H,+U,-U	
		sötétszürke

A 10. ábrán a 9. ábrának megfeleltethető, a $vv3 = \sin R = 0,5$ paraméterértékhez tartozó szelet látható. Ha ezt összevetjük az 5. és 9. ábrával megállapíthatjuk többek között, hogy a szelet felső részén levágjuk a stabil pontokat, míg a jobb alsó sarokban a nyereg, a bal alsóban pedig az instabil pontokat, mely az ellipszoidok ábráján is szépen látszik.



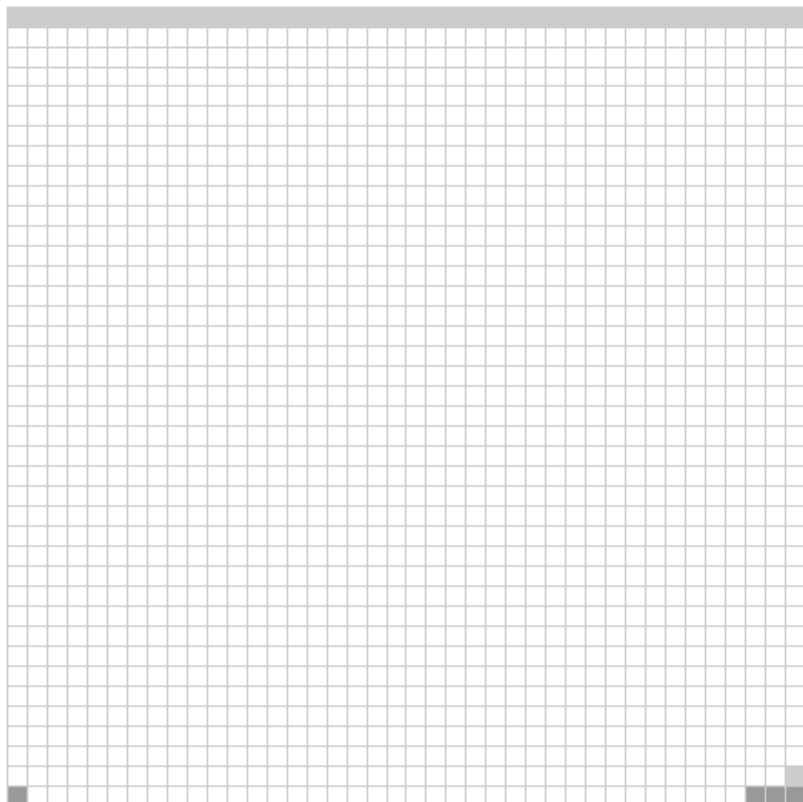
10. ábra

A melléklet tartalmazza az algoritmus által generált összes ábrát, párba rendezve, a csonkolás mélységének megfelelően növekvő sorrendben.

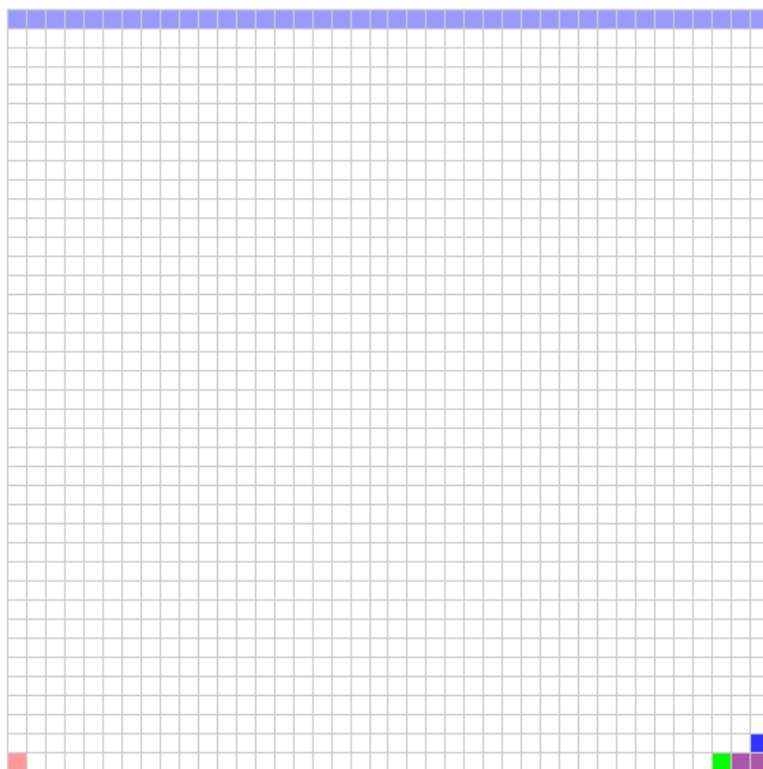
FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] G. Domokos and P. Várkonyi, Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincaré–Hopf theorem, *Journal of Nonlinear Science*, 16:255–281, 2006.
- [2] H. Edelsbrunner, J. Harer, and A. Zomorodian, Hierarchical Morse complexes for piecewise linear 2-manifolds, New York, 2001. ACM.
- [3] V. I. Arnold. Ordinary Differential Equations. The MIT Press, 1978.
- [4] Kápolnai R, Domokos G. és Szabó T., Másodlagos egyensúlyi osztályok gráfelméleti származtatása, XI. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2011.
- [5] Szolcsányi Endre, Differenciálgeometria és vektoranalízis, egyetemi jegyzet, ELTE TTK, Budapest, 1990.
- [6] Reiman István, Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház, Kisújszállás, 1999.
- [7] Szabó László, Konvex geometria, egyetemi jegyzet, ELTE TTK, Budapest, 1996.
- [8] G. R Burton, Sections of Convex Bodies, *J. London Math. Soc.* 12:331-336, 1976.
- [9] G. Domokos, Z. Lángi, T. Szabó, The genealogy of convex solids, arXiv:1204.5494v1, 2012.

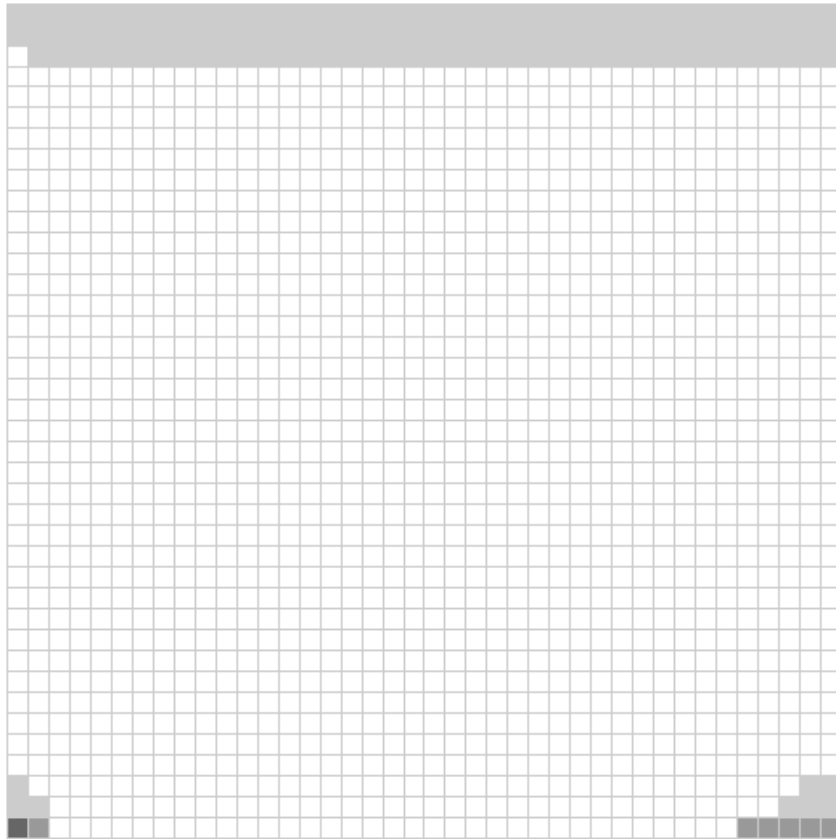
MELLÉKLET



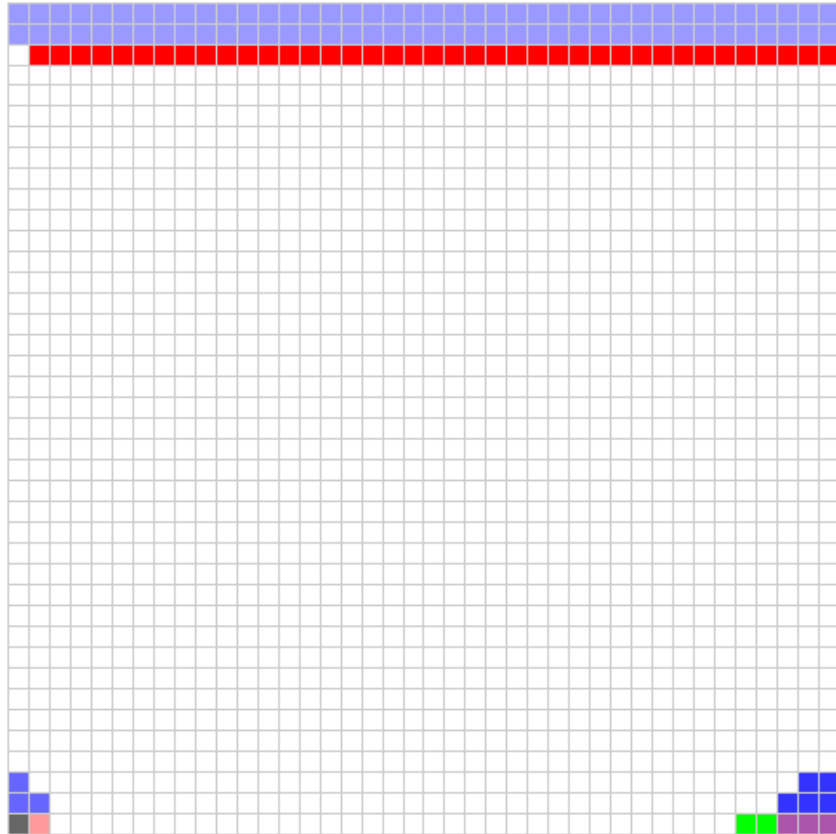
1.1



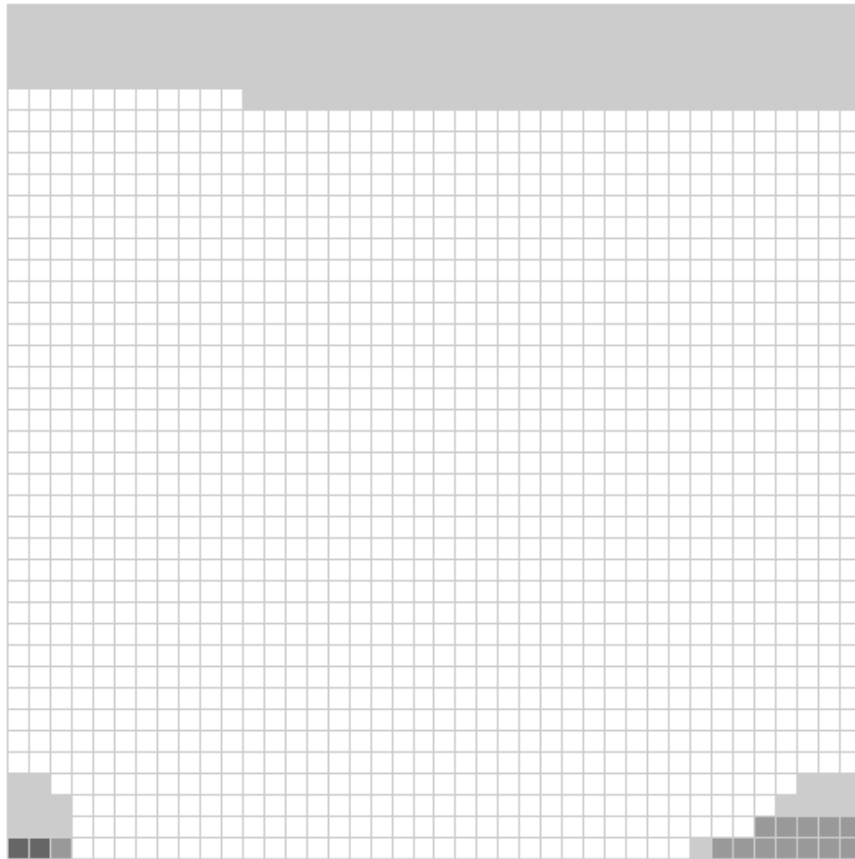
1.2



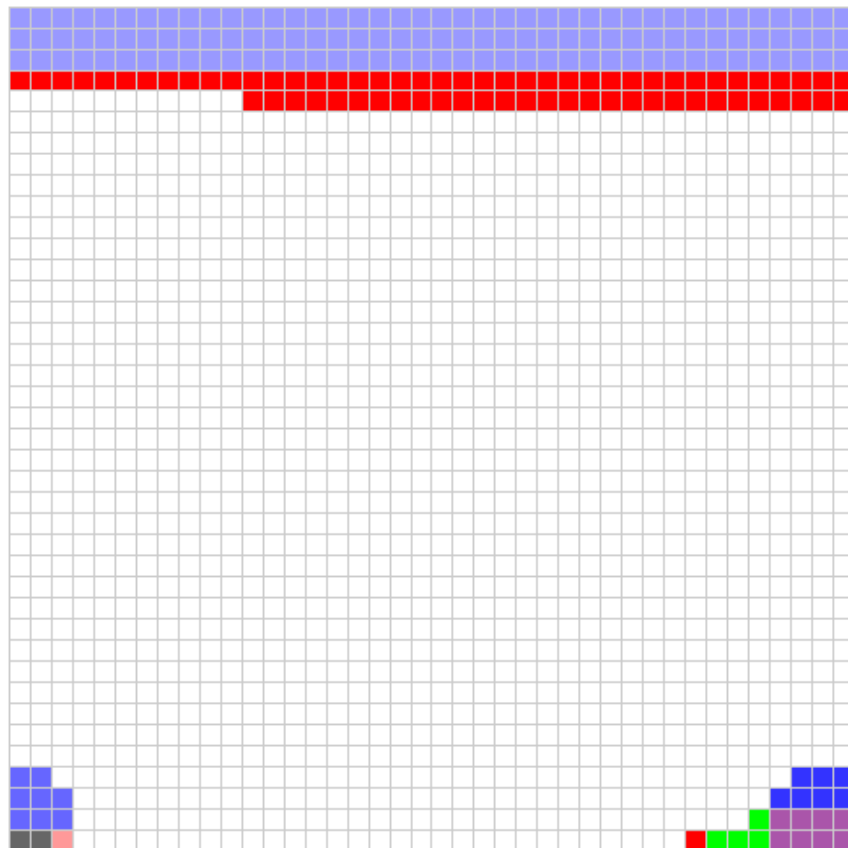
2.1



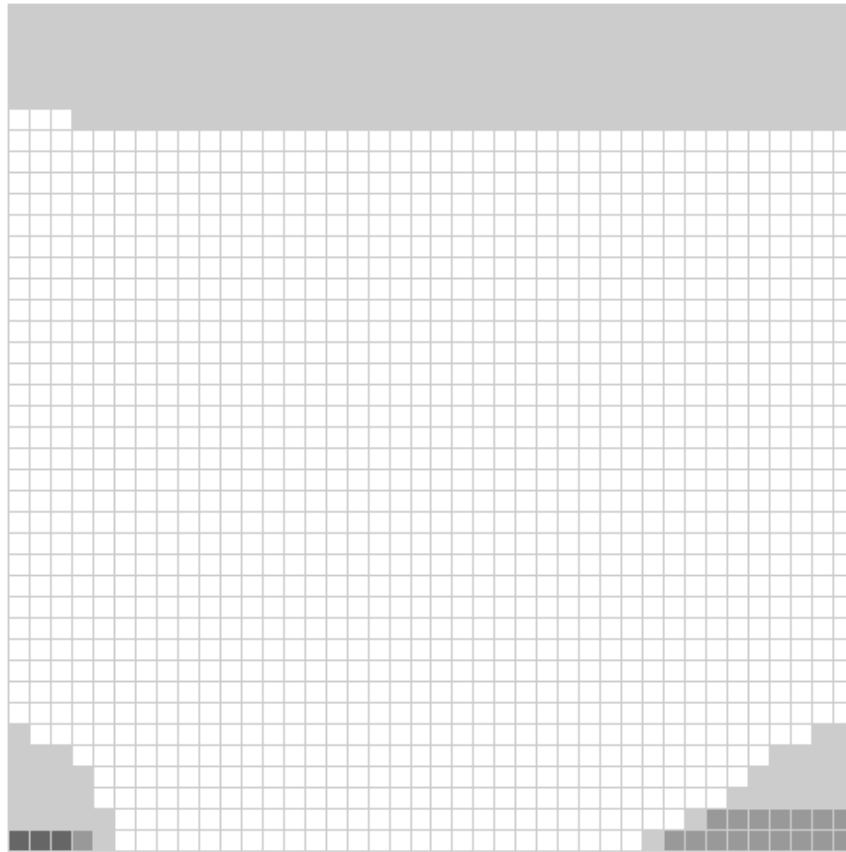
2.2



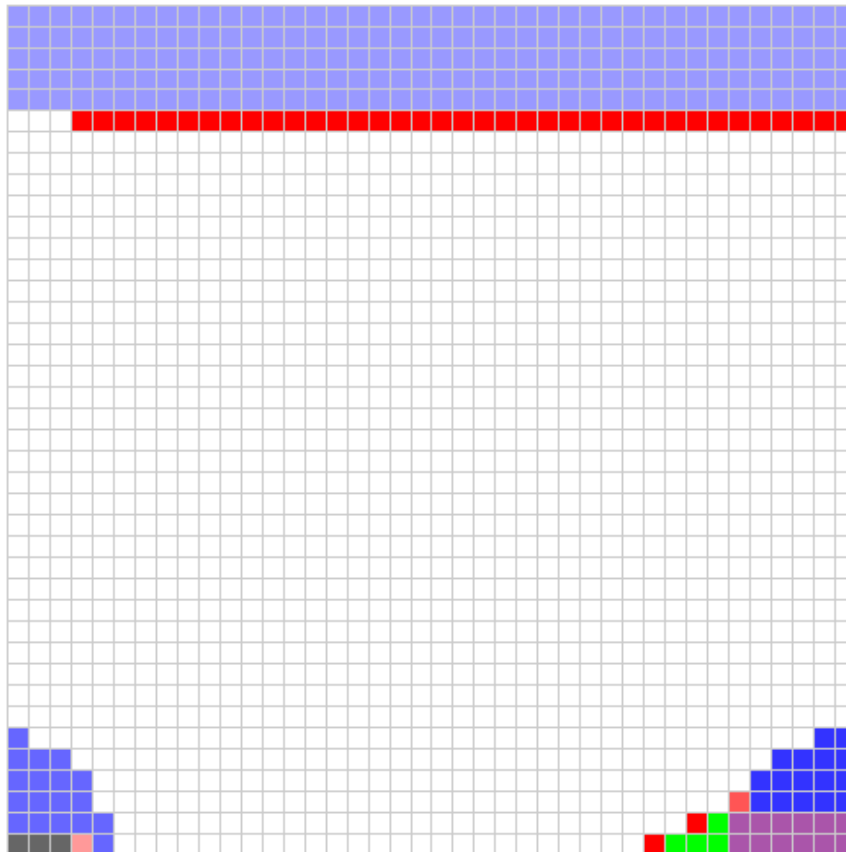
3.1



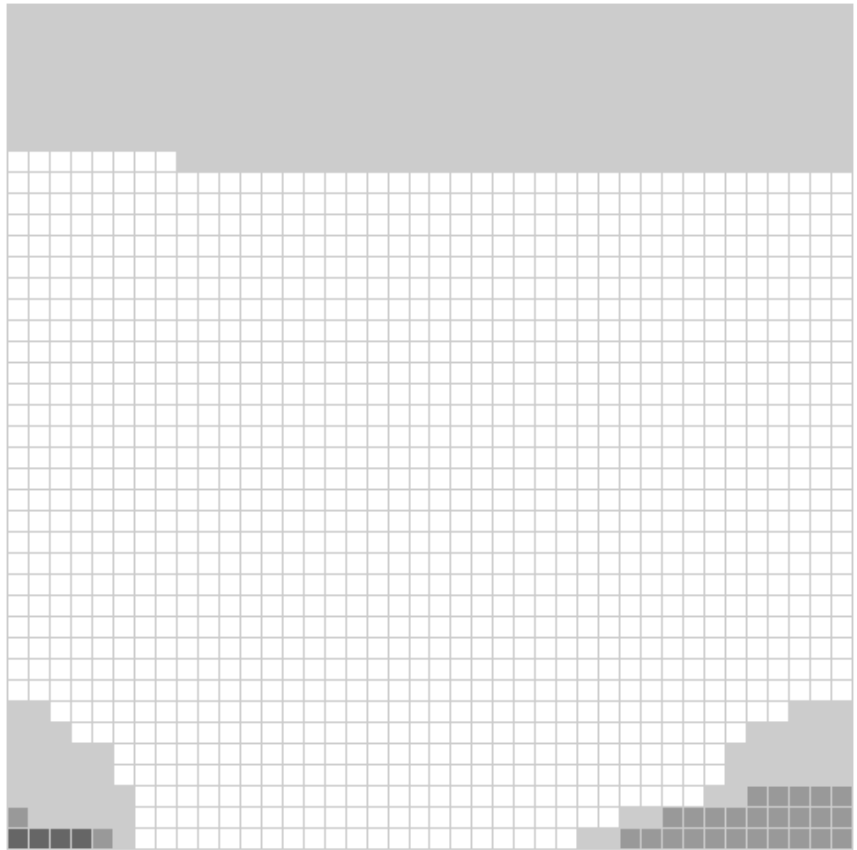
3.2



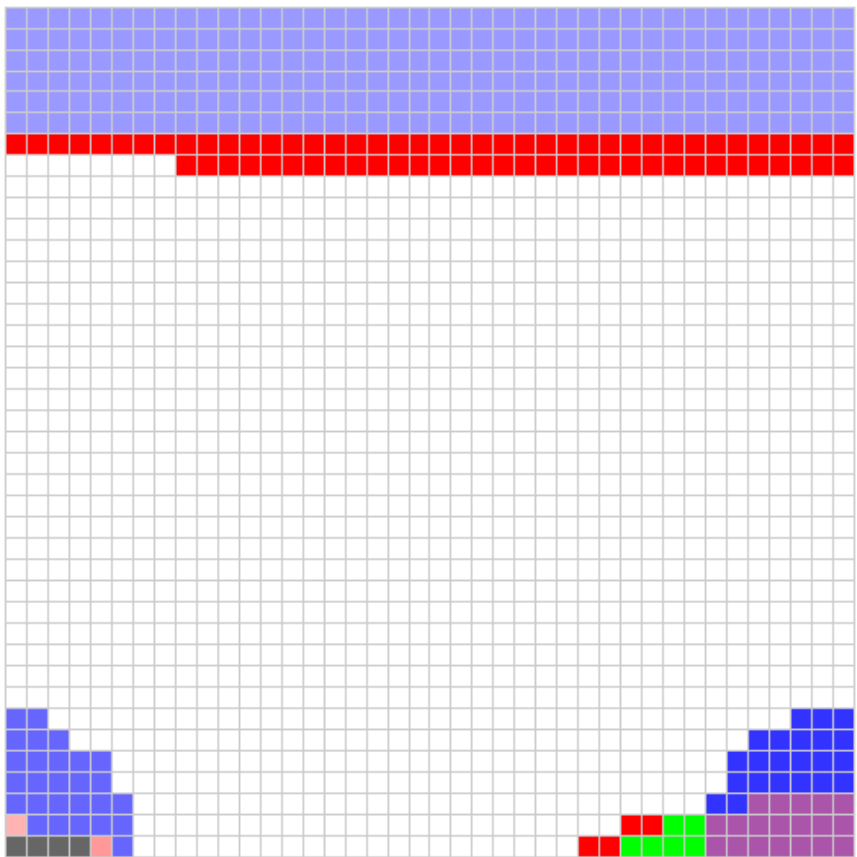
4.1



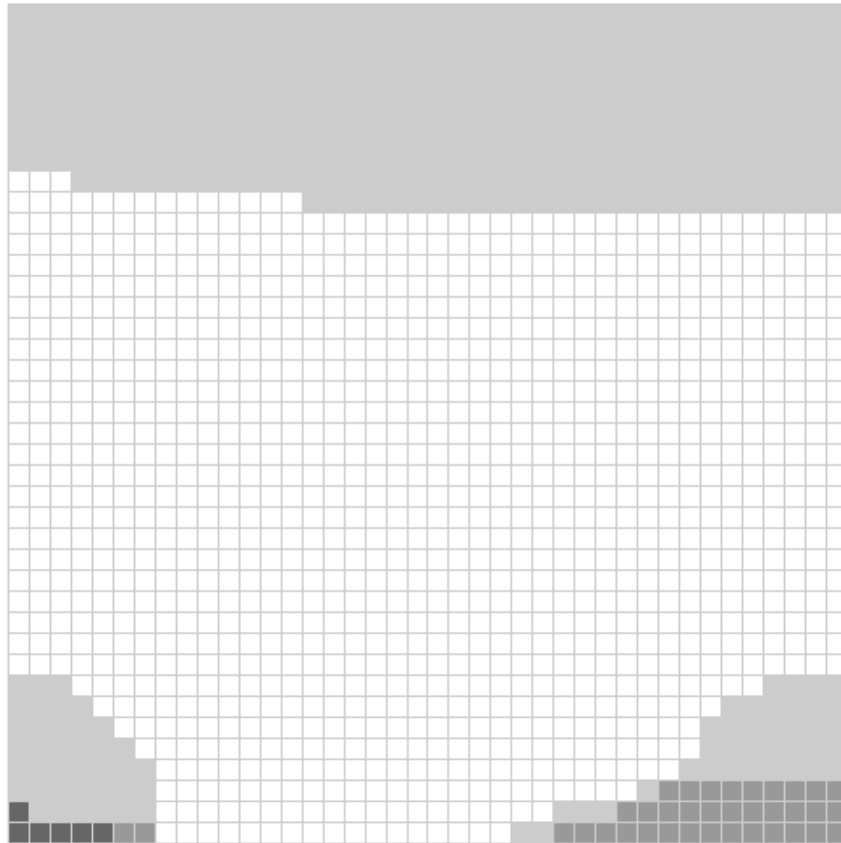
4.2



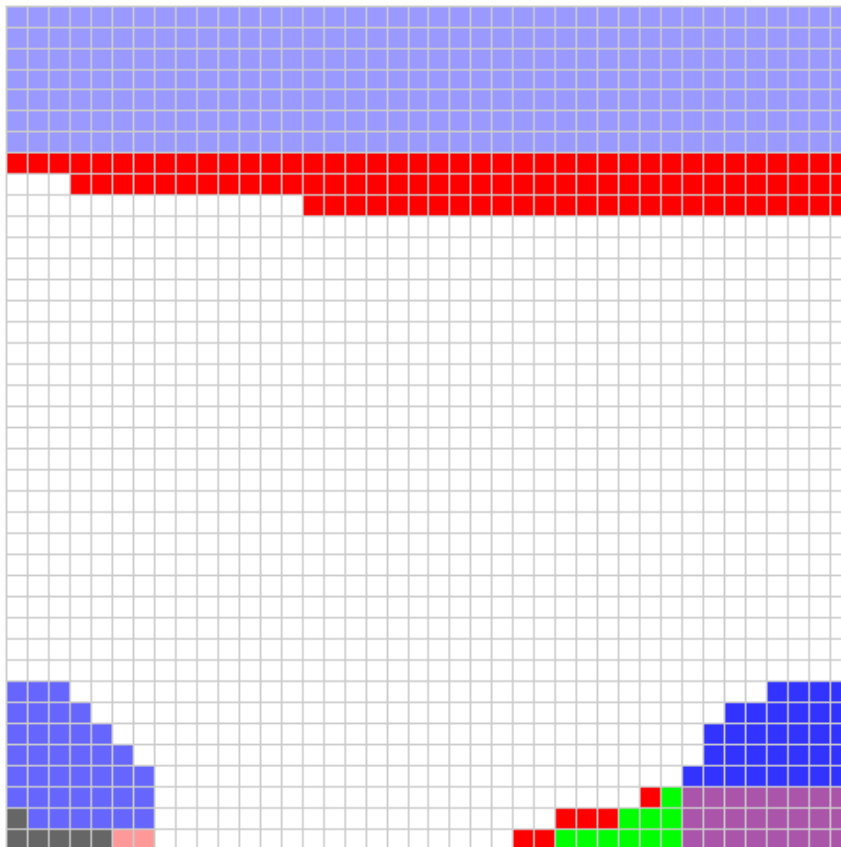
5.1



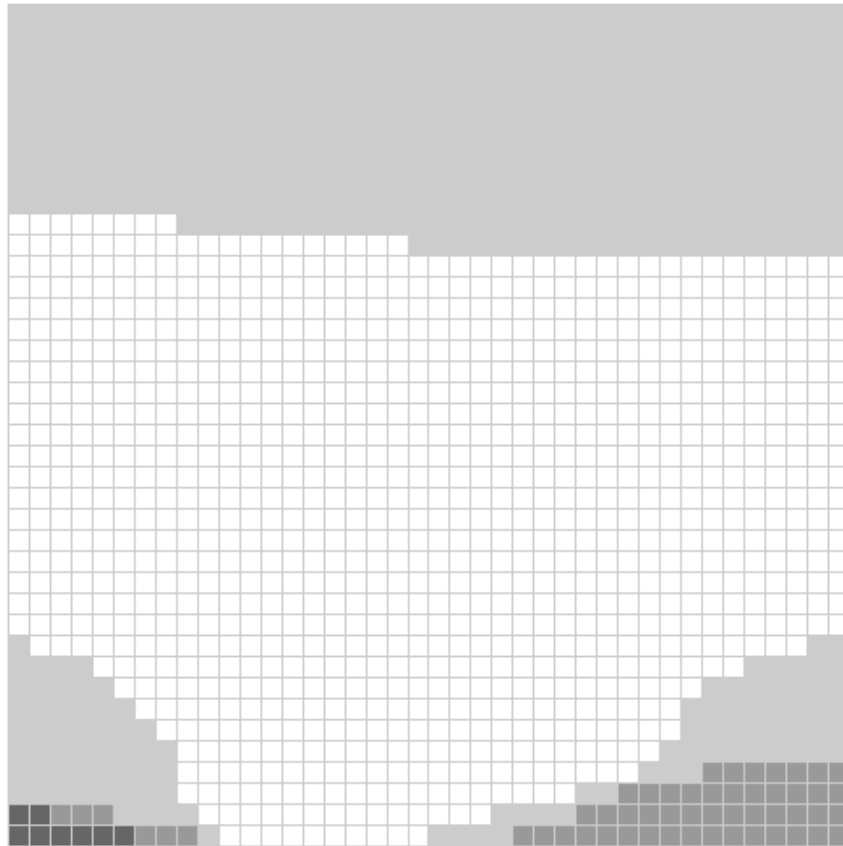
5.2



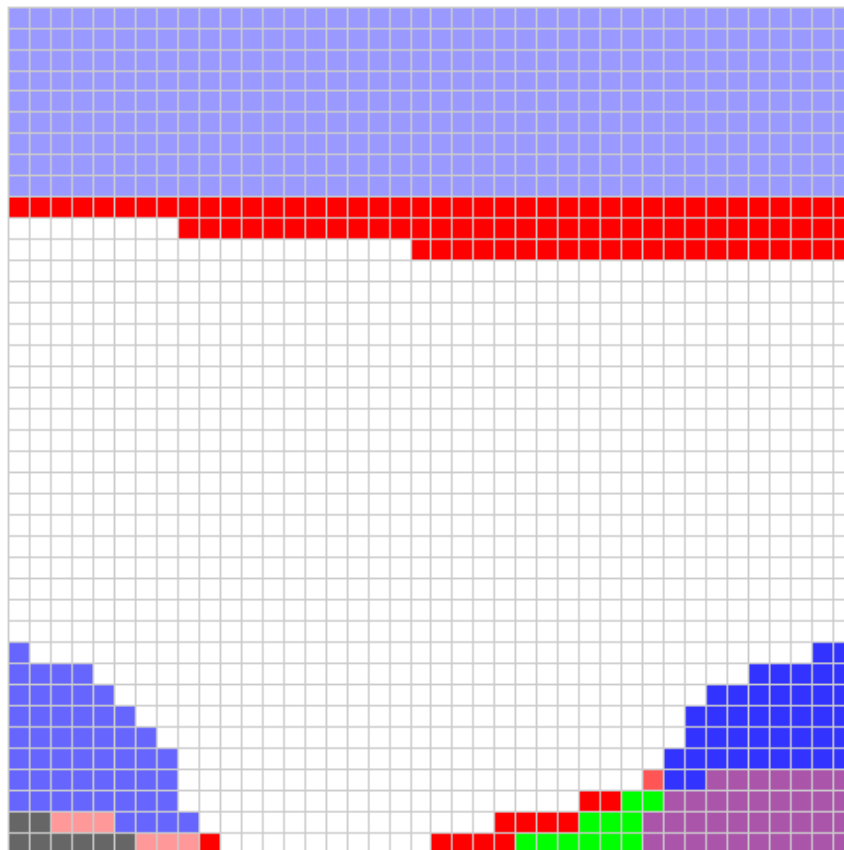
6.1



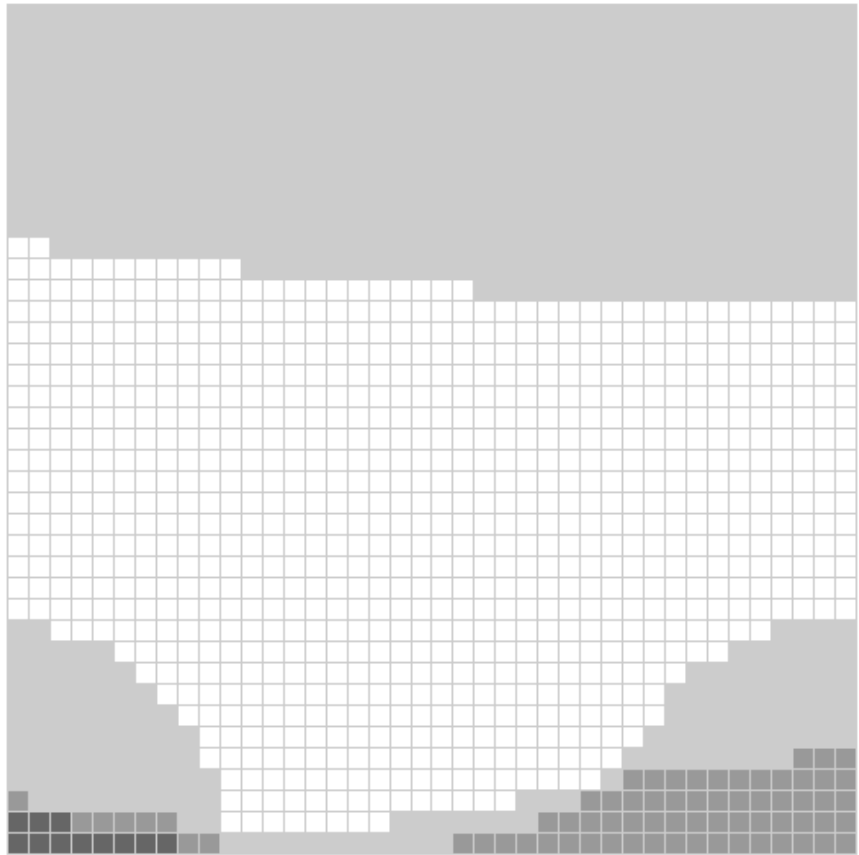
6.2



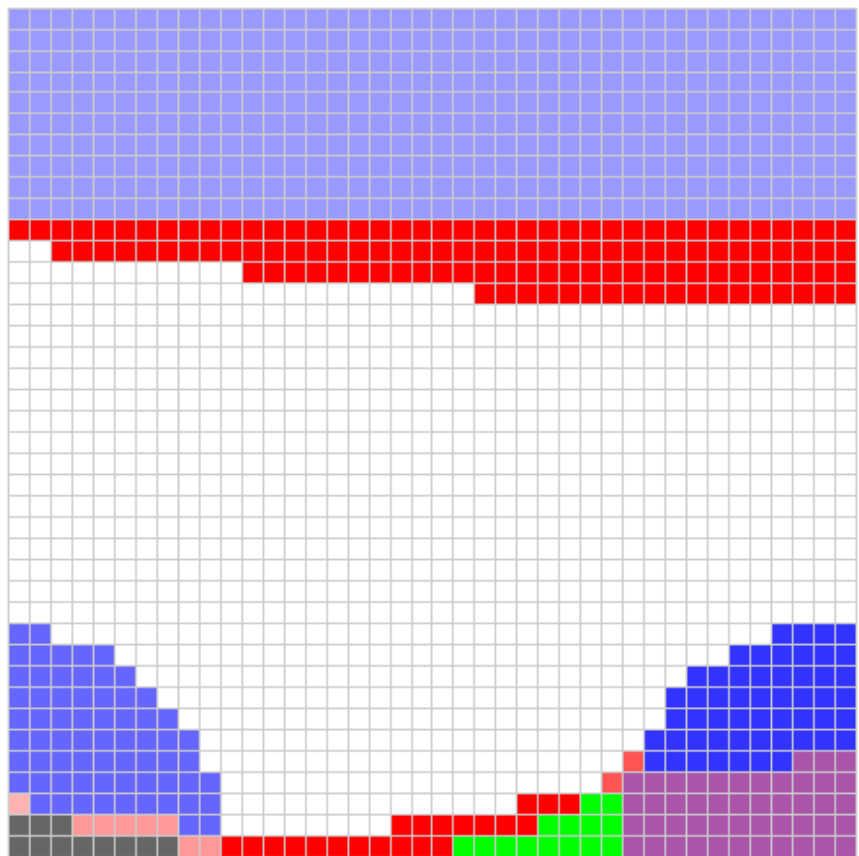
7.1



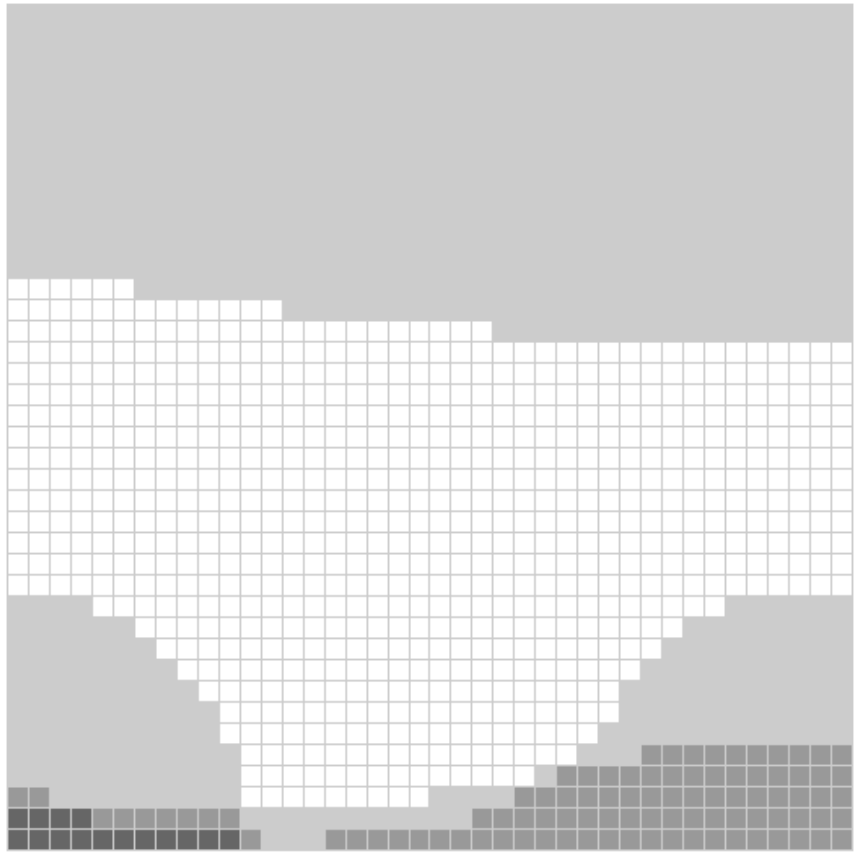
7.2



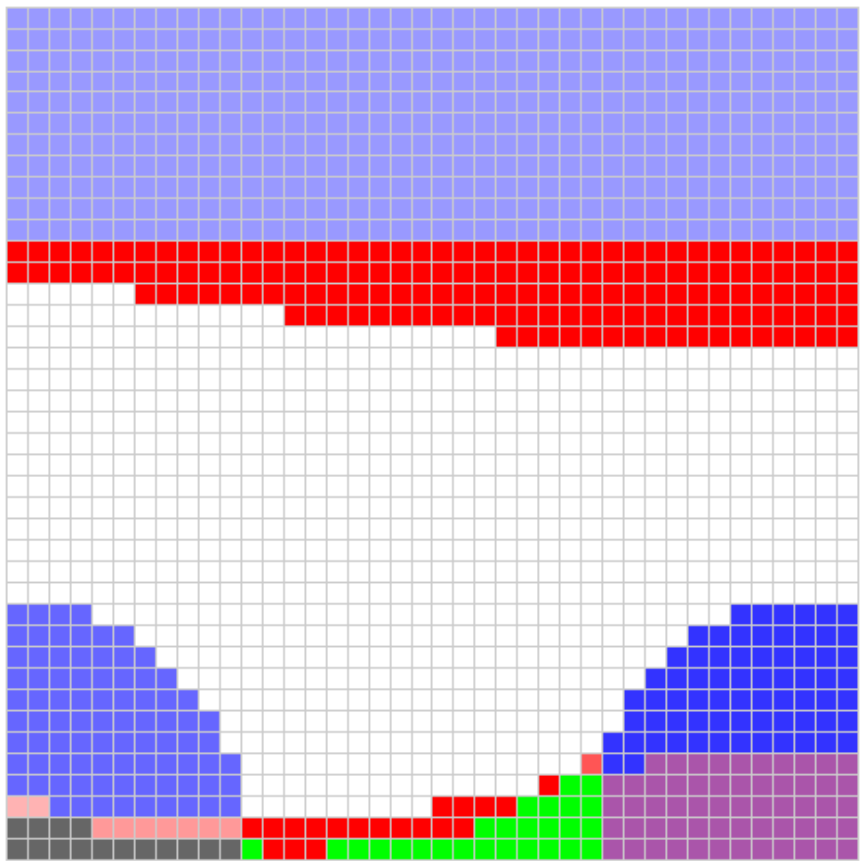
8.1



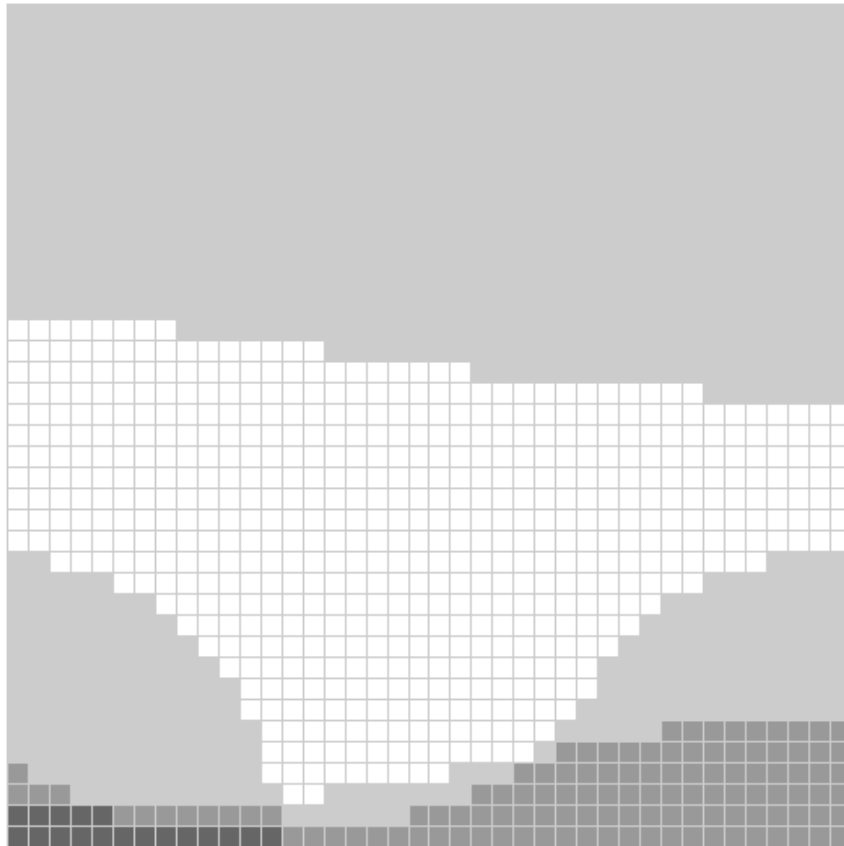
8.2



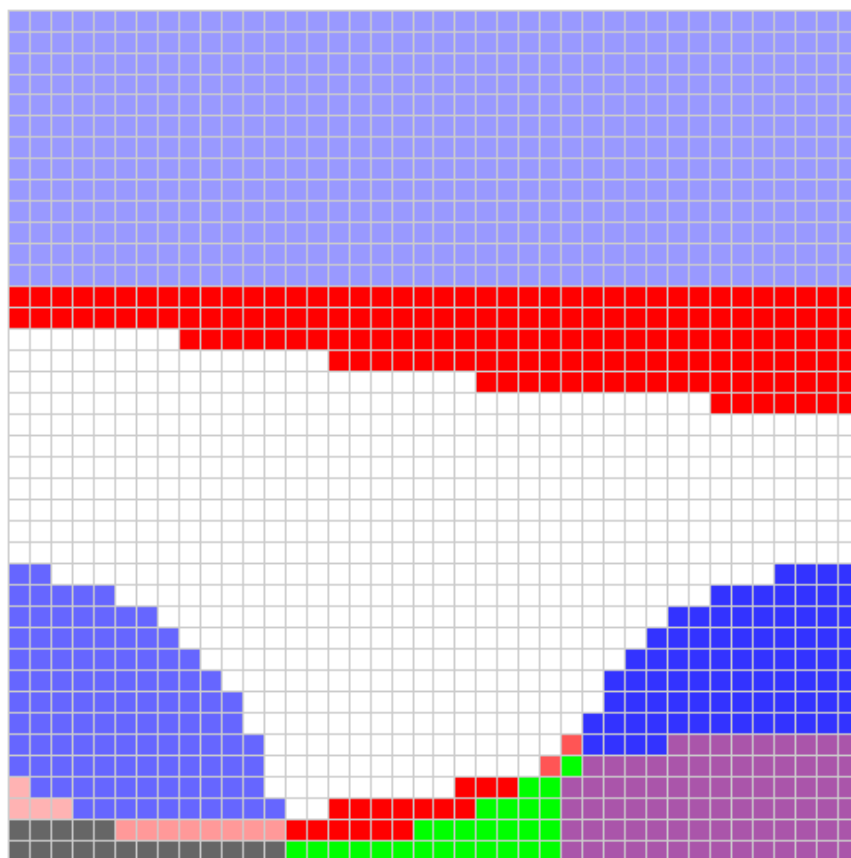
9.1



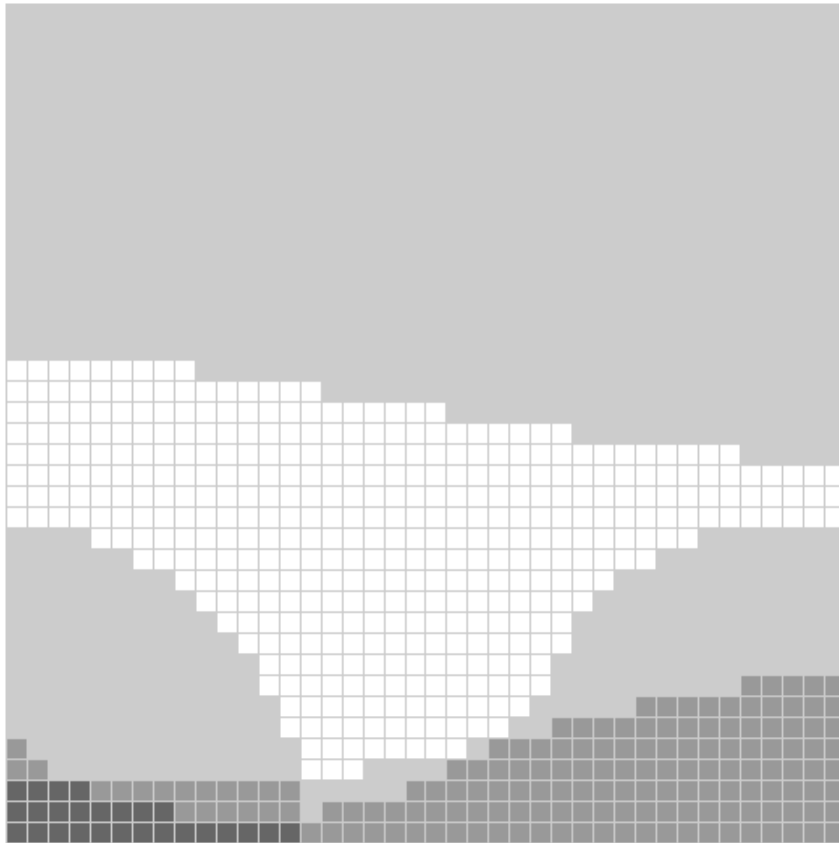
9.2



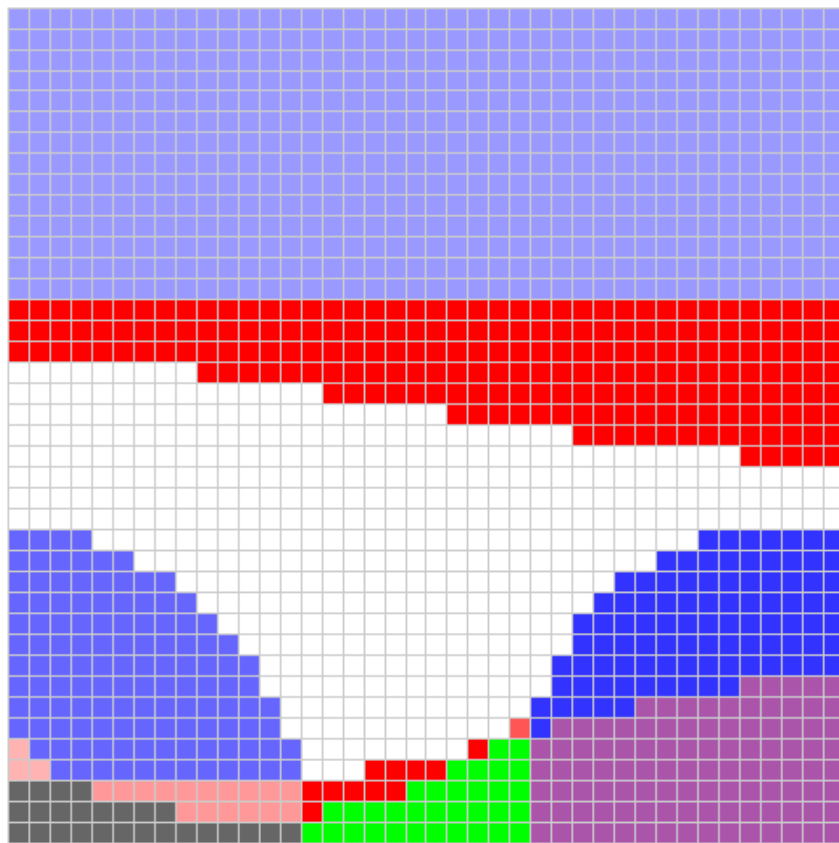
10.1



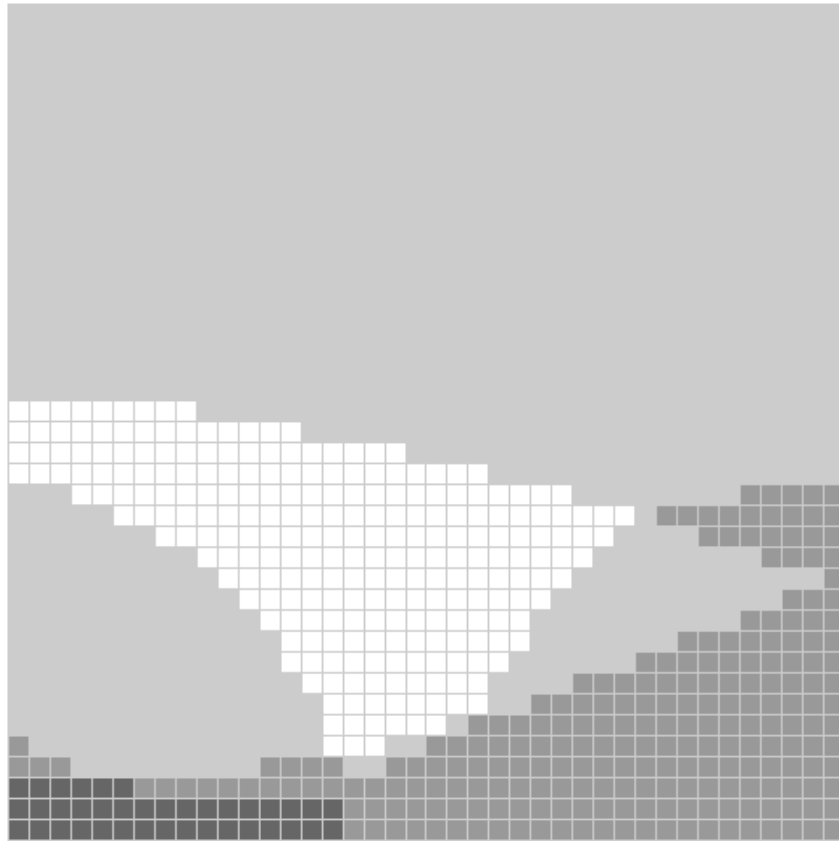
10.2



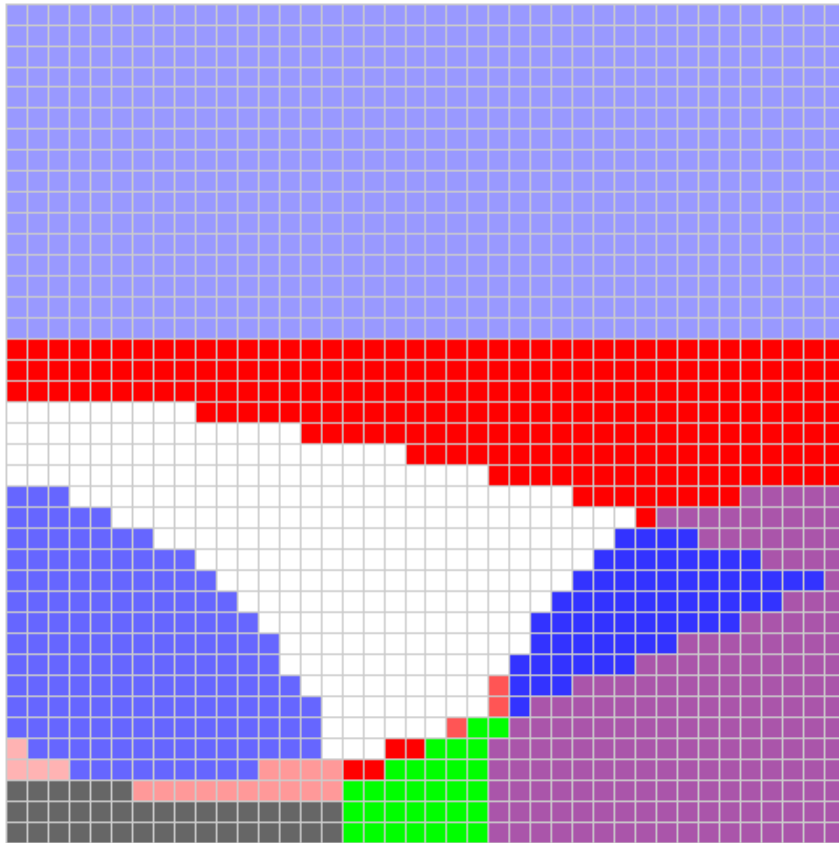
11.1



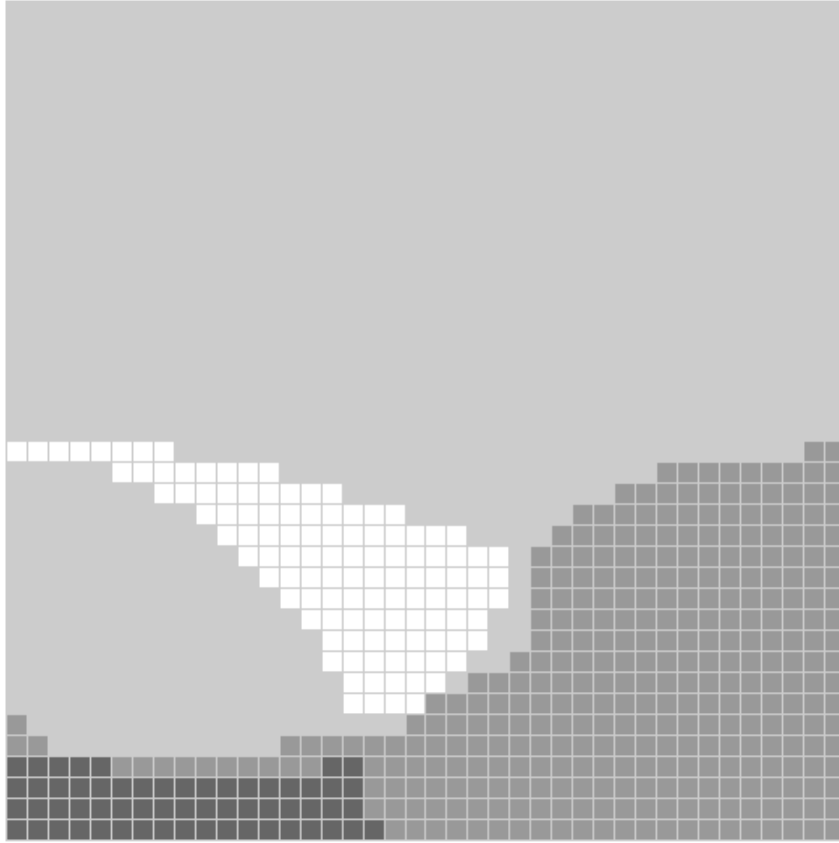
11.2



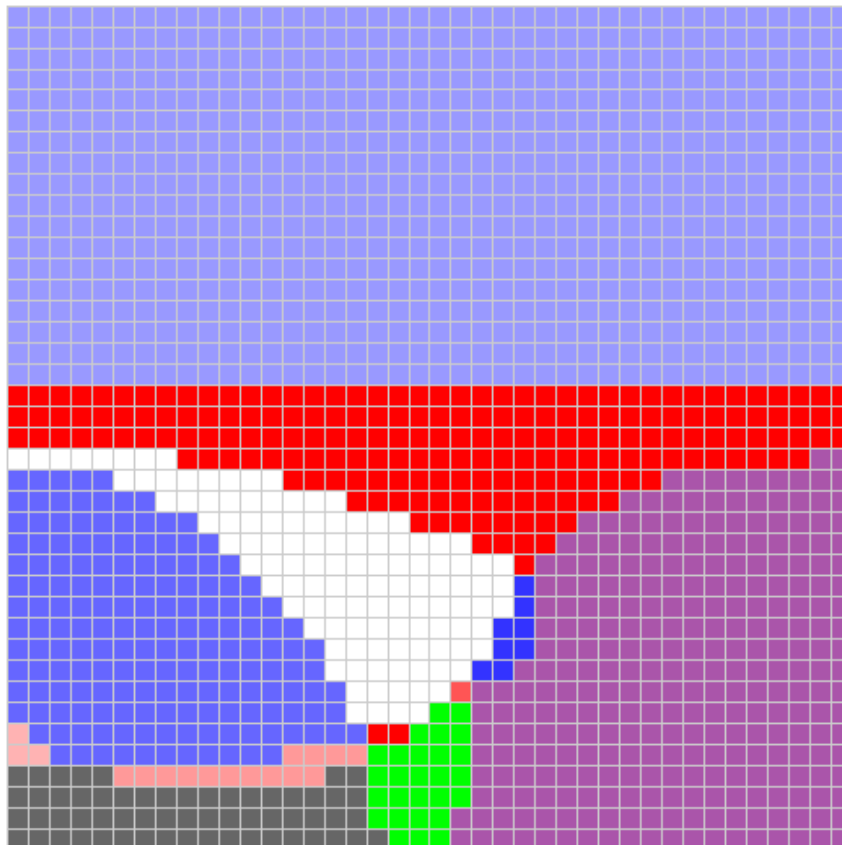
12.1



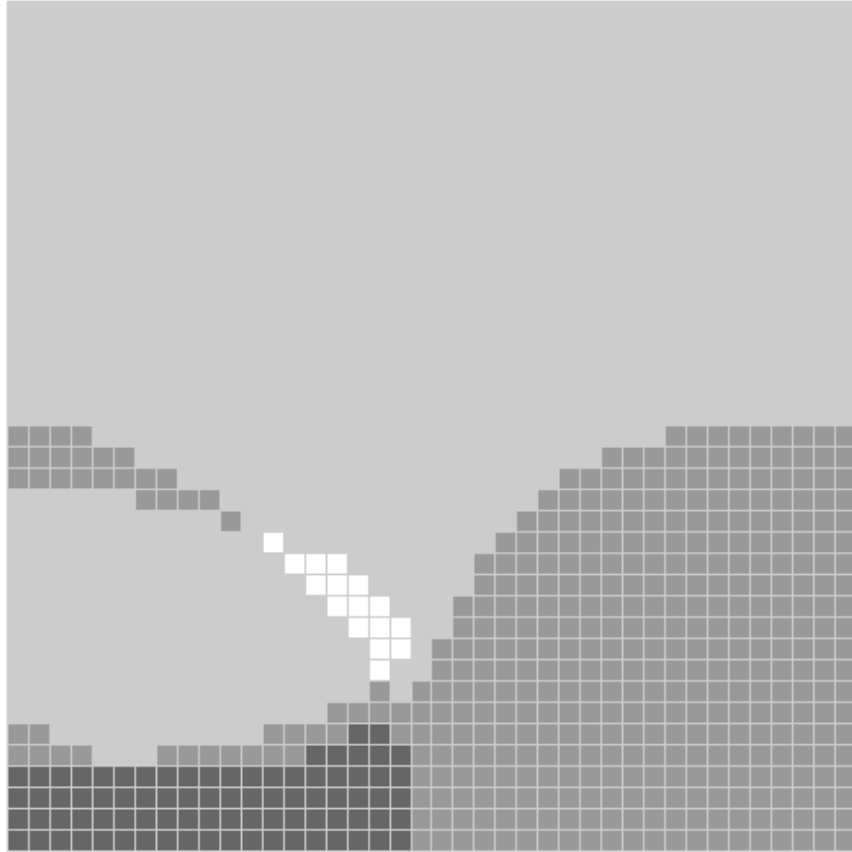
12.2



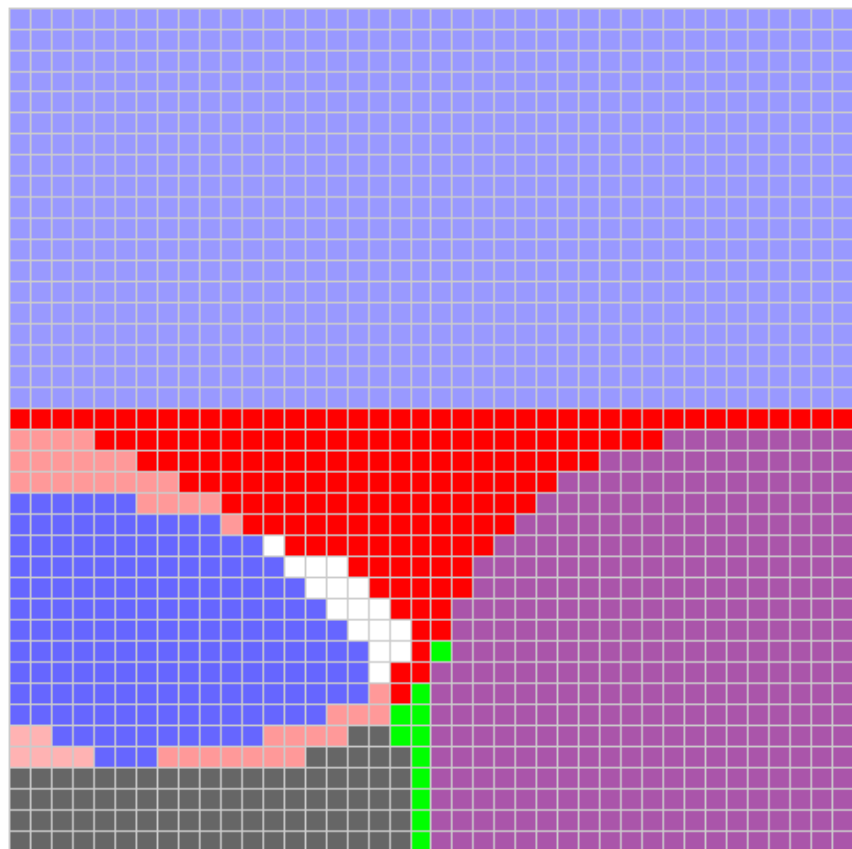
13.1



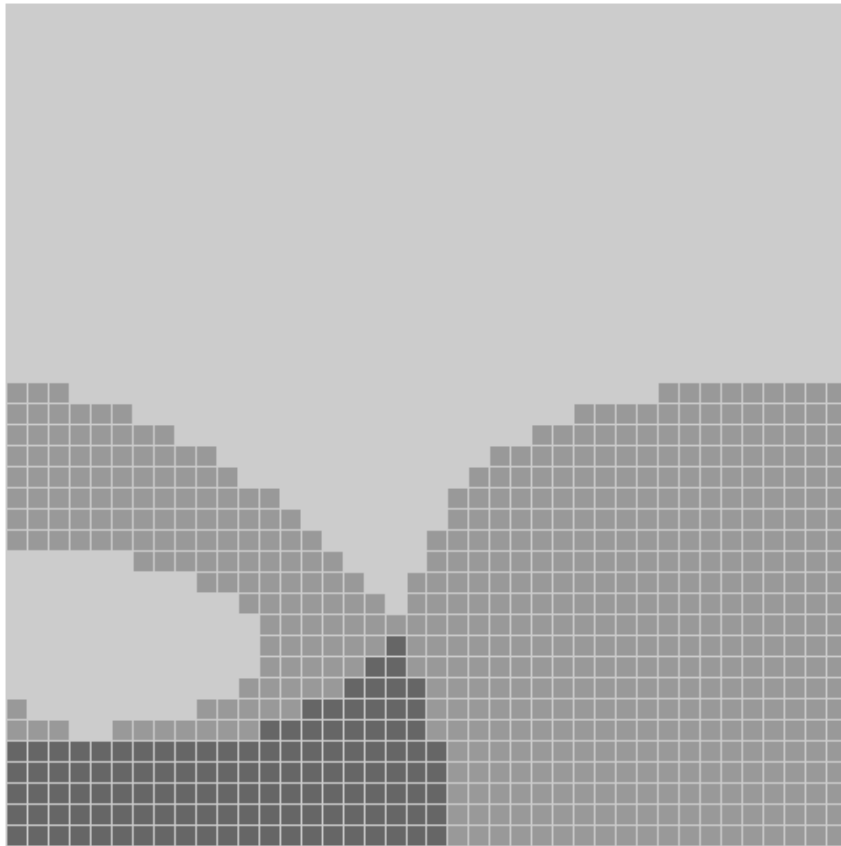
13.2



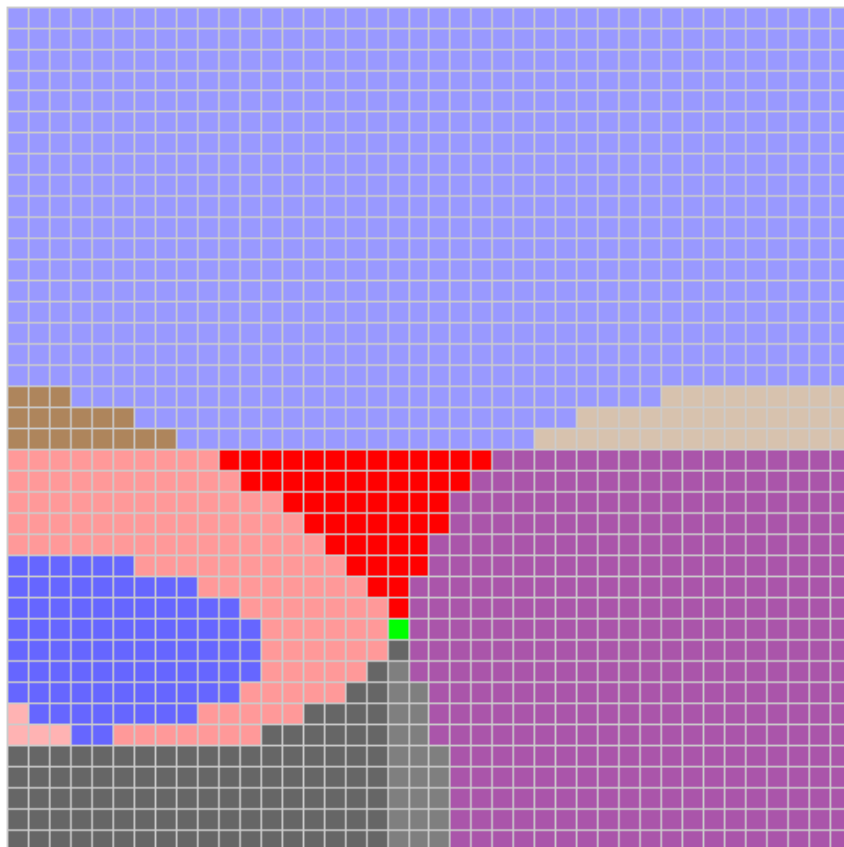
14.1



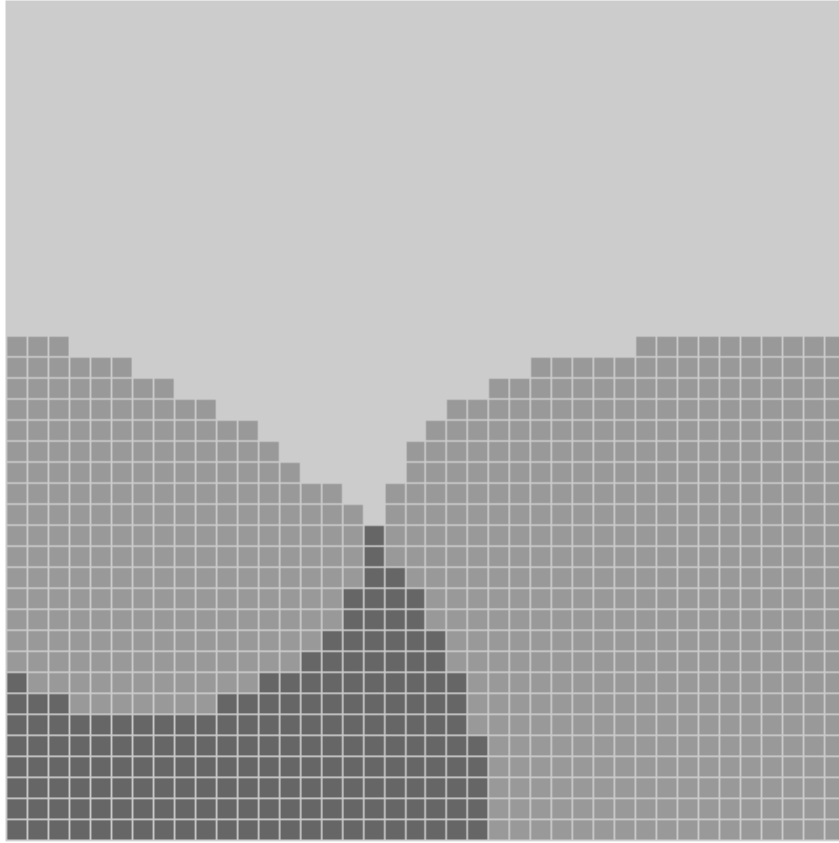
14.2



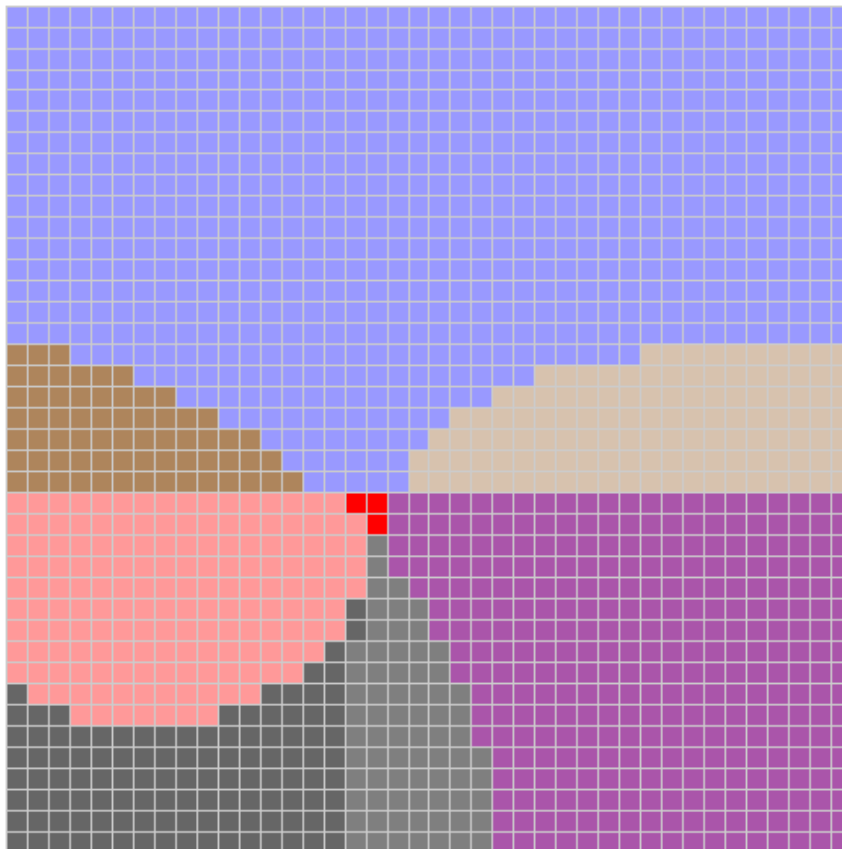
15.1



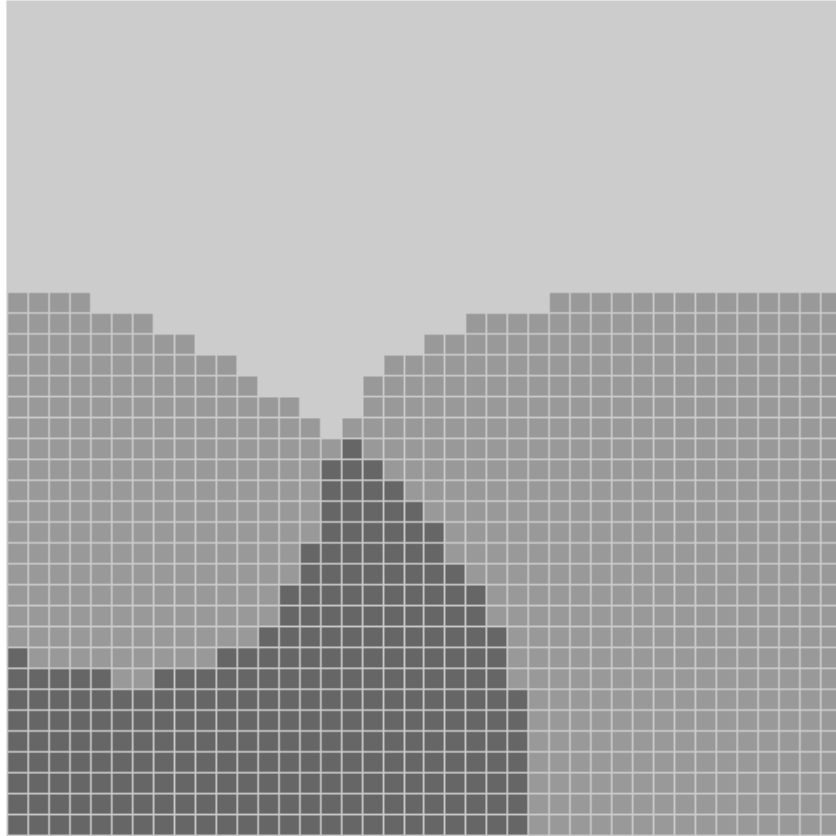
15.2



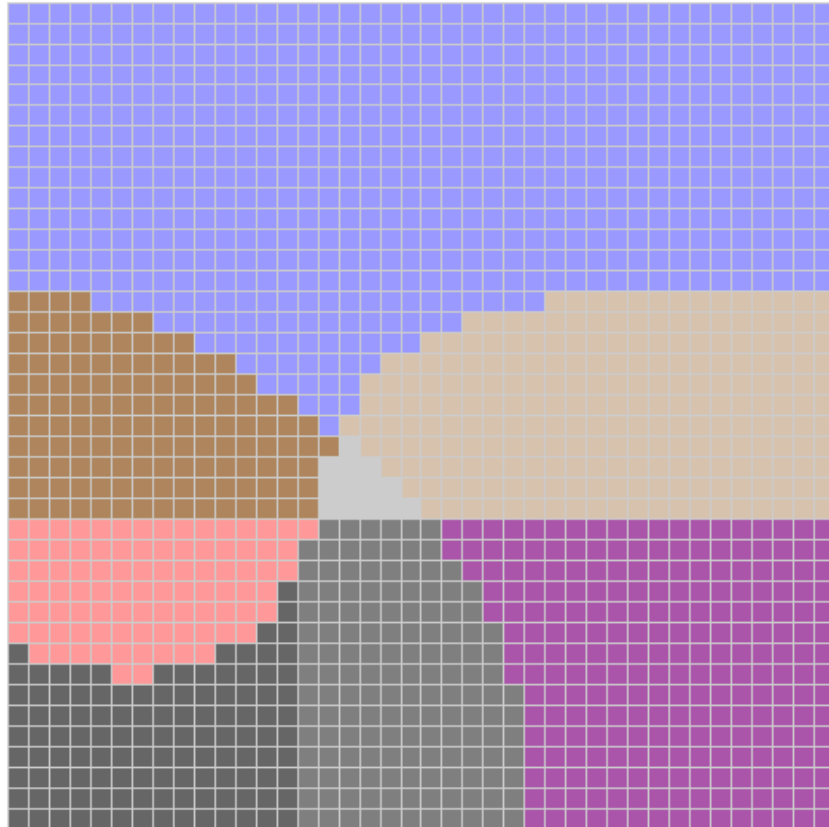
16.1



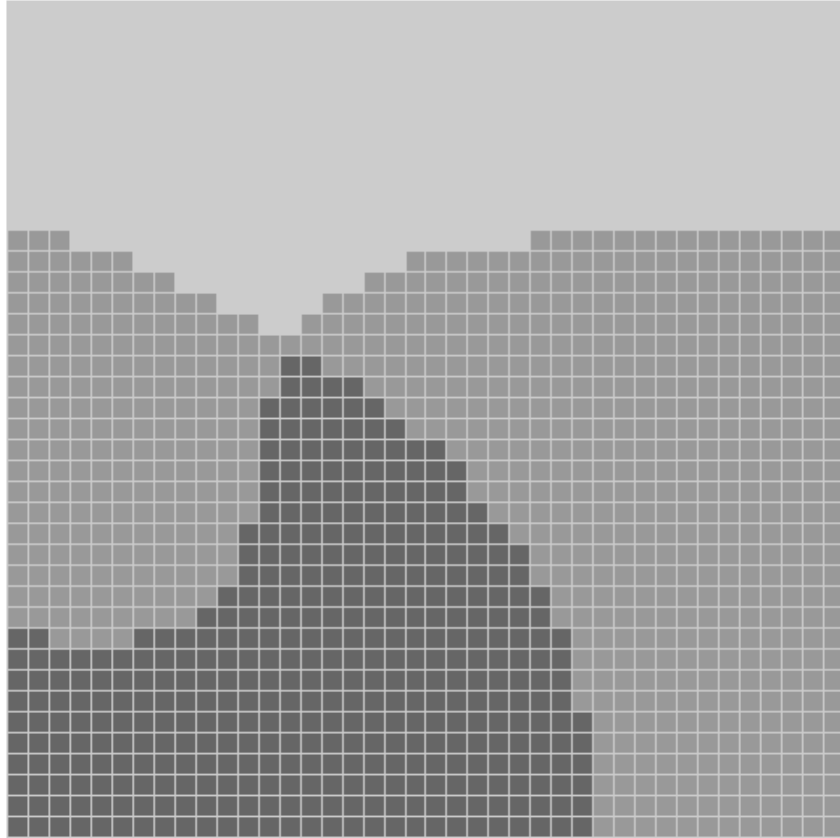
16.2



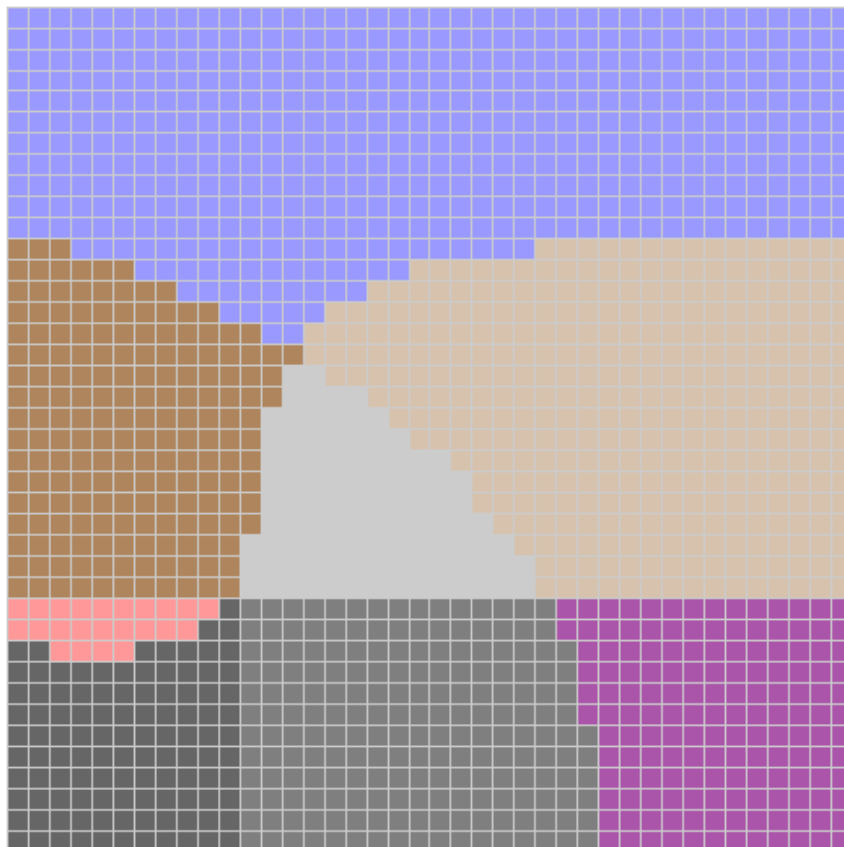
17.1



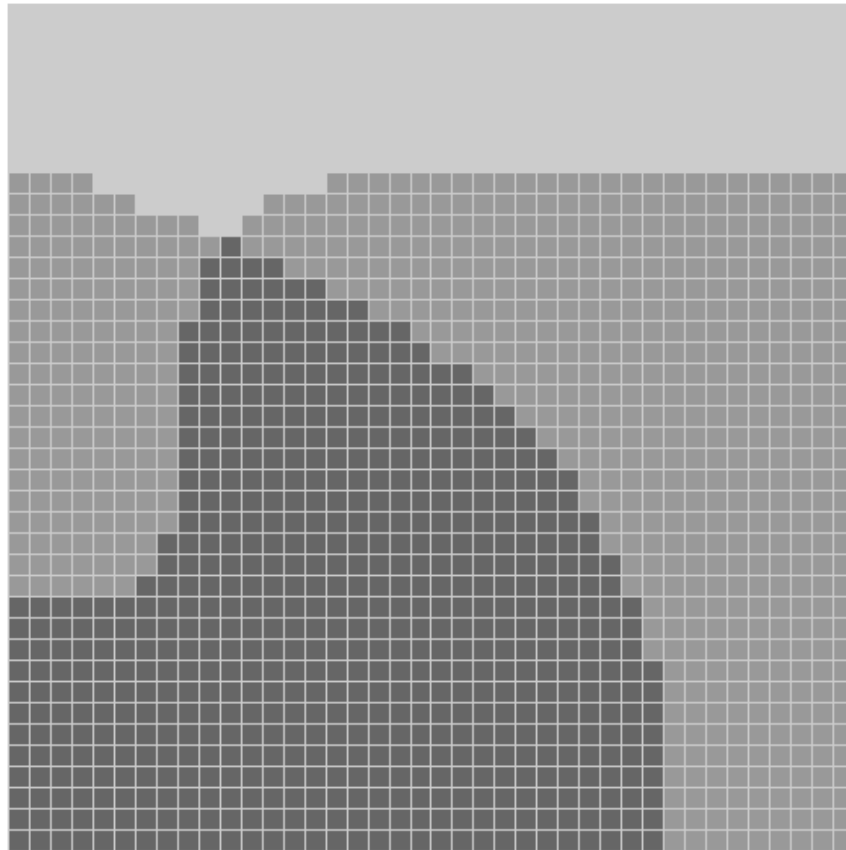
17.2



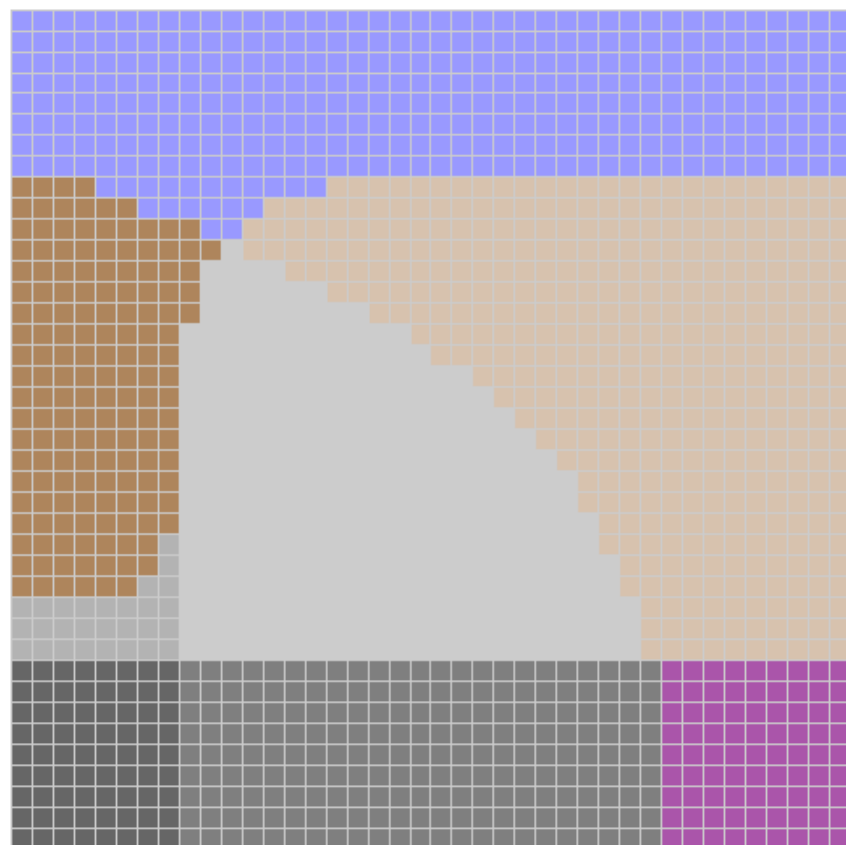
18.1



18.2



19.1



19.2