

# Egyensúlyok sűrítetősége két dimenzióban

szerző: Mezei Márk (Építészmérnöki kar, III. évf.)

küldő intézmény: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

konzulens: Dr. Domokos Gábor (egyetemi tanár)

A dolgozat bemutatását a TÁMOP - 4.2.2.B-10/1--2010-0009 "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" című program támogatta.

## Bevezetés

A testek egyensúlyi helyzeteinek vizsgálata már régóta foglalkoztatta az embereket: az ókorban Arkhimédész a felhajtóerő vizsgálata kapcsán hajók stabilitásával foglalkozott [1]. A célja az volt, hogy egyetlen stabil helyzetet hozzon létre, azaz ha a hajó meg is billen, mindig ugyanabba a helyzetébe térjen vissza. Hasonló módon működik a „keljfeljancsi” is: mindkét szerkezet lényege, hogy a súlypont a testen belül úgy helyezkedik el, hogy megdőléskor a talaj vagy a víz által kifejtett kényszererő és a gravitációs erő egy, a kibillentő erővel ellentétes irányú nyomatékot fog adni, ami visszadönti a kezdeti állapotába a testet. Azonban mind a két példában szereplő test inhomogén, súlyok megfelelő elhelyezésével érték el a kívánt viselkedést. Sokkal nehezebb ilyen tulajdonságú testet konstruálni, ha az inhomogenitás és a konkavitás nem megengedett. Három dimenzióban létezhet olyan test, mely mindig egy adott helyzetbe tér vissza, pontosan egy stabil egyensúlyi helyzete van, ilyen például a Gömböc [2]. Ami meglepő, hogy két dimenzióban viszont nincs ennek megfelelője, minden síkbeli homogén konvex testnek legalább két stabil egyensúlyi helyzete van [3].

A dolgozatban a kétdimenziós, homogén és konvex alakzatokkal fogok foglalkozni; egyensúlyi helyzeteiket vizsgálom egy súrlódásmentes egyenesen gördülve. Az elsődleges cél, hogy olyan alakzatokat keressek, melyek viselkedésükben hasonlítanak az egyetlen egyensúlyi helyzettel rendelkező, azaz monostatikus testekre, annak ellenére, hogy egynél több stabil helyzetük van. Az első részben az egyensúlyok fizikai magyarázatából geometriai következtetéseket vonok le, majd átültetem analitikus formába ezeket a jelenségeket. A második rész csak a stabil egyensúlyok elhelyezkedését, közelségét vizsgálja, a harmadik egység pedig az instabil egyensúlyokat is beleveszi a vizsgálatba. A két esetre két különböző konstrukció adódik, melyből az elsőről egy egyszerű bizonyítás; a másodikról pedig közelítő, majd pontos számítások bemutatása kerül sorra. Végül a megfigyelt jelenségek és kialakuló tulajdonságok háromdimenziós, valóságbeli vonatkozásaival foglalkozom.

## I.

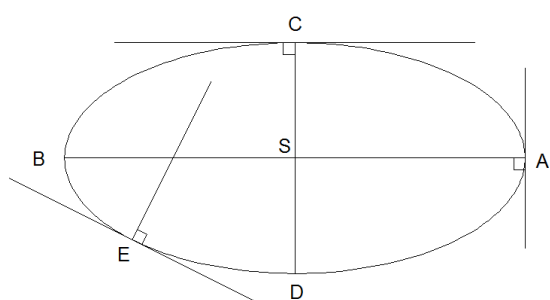
### Egyensúlyok vizsgálatának módszerei, alapfogalmak

Egy merev test egyensúlyban van, ha a rá ható erők és a belőlük származó nyomatékok eredője nulla. A egyensúlyi helyzetek megállapítása során a testekre mindössze két erő hat: a gravitációs, és a támasztófelület által kifejtett kényszererő. A kettő eredője akkor lehet nulla, ha hatásvonaluk egybeesik (és nagyságuk egyenlő). Homogén anyageloszlást és homogén gravitációs teret feltételezve a tömegvonzás helyettesíthető egy eredő erővel, aminek a támadáspontja a test súlypontja lesz. Mivel a kényszererő mindig a test felületére merőleges, ezért egyensúly csak azon a ponton nyugodva jöhet létre, ahol a test felszínének normálisa áthalad az alakzat súlypontján. Ezt a pontot egyensúlyi pontnak, a test ekkor felvett pozícióját pedig egyensúlyi helyzetnek nevezzük.

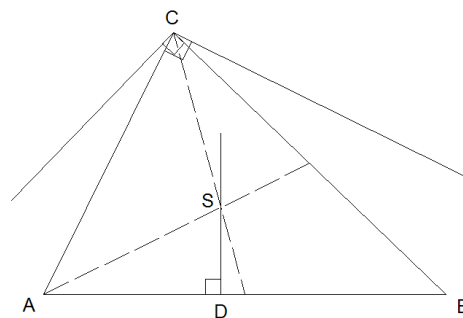
Az egyensúlyi helyzeteket osztályozni lehet aszerint, hogy egy kis kitérítés hatására hogyan viselkedik a test:

- Az egyensúly stabil. Ekkor a kitérítés után a test visszatér az eredeti helyzetébe. Ehhez az szükséges, hogy az egyensúlyi pontban a kerület görbületi sugara nagyobb legyen, mint a súlypont és a kerületi pont távolsága. Ez a geometriai feltétel biztosítja, hogy a kitérítéskor megváltozó támaszerő és a gravitációs erő olyan irányú nyomatékot hozzon létre, ami a kilendítéssel ellentétes irányba forgatja a testet.
- Az egyensúly instabil. Ekkor a test a kitérítés után a kitérítés irányába gördül tovább. Ebben az esetben a pontban vett görbületi sugár kisebb a súlyponttól vett távolságnál.

Néhány speciális eset: ellipszis, háromszög (1-2. ábra):



1. ábra: A, B illetve C, D pontokban az ellipszis kerületi normálisa áthalad az S súlyponton, A, B instabil, C, D pedig stabil helyet jelöl. E pontban az alakzat nincs egyensúlyban, S nem eleme az E-ben húzott normálisnak.



2. ábra: A háromszög stabil egyensúlyi helyzetében a teljes oldalán felfekszik. Mégis ilyenkor stabil egyensúlyi pontnak azt nevezzük az oldal mentén, ahol a normális áthalad a súlyponton, így AB oldalon csak a D-vel jelzett pont lesz egyensúlyi pont. A csúcsokban nem egyértelmű az alakzat érintője, normálisa, ezért ilyenkor a csúcspont két oldalához tartozó normálisok által bezárt szögtartományba kell esnie a súlypontnak, hogy a csúcsban a test egyensúlyban legyen. Csúcspontokban a görbület végtelen, az itt létrejövő egyensúly biztos, hogy instabil lesz.

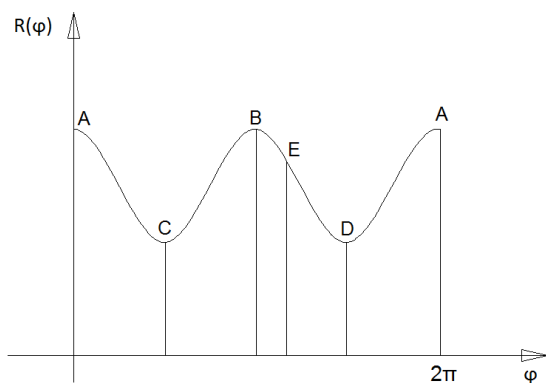
Az egyensúlyi helyzetek keresése nem csak geometriai módszerekkel történhet, a fent leírt tulajdonságokat analitikus módszerekkel is lehet vizsgálni. A véges, zárt síkidomokat célszerű  $R(\varphi): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^+$  poláris alakban megadni, ahol a koordináta-rendszer középpontja az alakzat súlypontjában van. Ez a jelölés konvex alakzatok esetén kölcsönösen egyértelmű, tehát minden kerületi ponthoz pontosan egy  $\varphi$  érték tartozik, és fordítva;  $R(\varphi)$  ismeretében egy kerületi pont csak a hozzátartozó  $\varphi$  értékkel megadható.  $R(\varphi)$  ekkor folytonos, és a  $R(0) = R(2\pi)$  feltételnek teljesülnie kell. A függvény lokális maximumhelyei az instabil, lokális minimumhelyei pedig a stabil egyensúlyi pontok helyét fogják jelölni. [4] A dolgozatban elfajuló esetekkel nem foglalkozom, tehát az alakzatokat leíró függvények szélsőértékei mindig izoláltak.

Ezek alapján az előzőleg bemutatott speciális esetek  $R(\varphi)$  függvényei megalkothatóak (3-4. ábra).

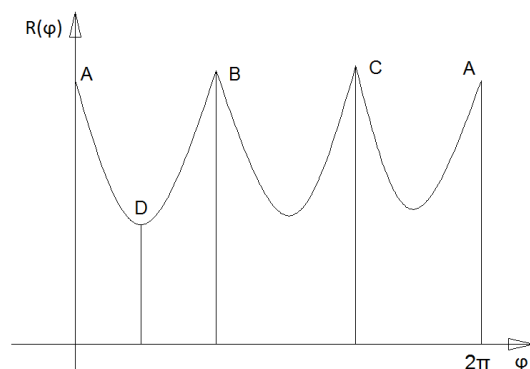
A fenti jelölésrendszer alapján néhány fogalom bevezethető:

- Két kerületi pont távolsága: a két ponthoz tartozó  $\varphi$  szögek értékeinek különbsége ( $\Delta\varphi$ ).
- Tartomány: azon kerületi pontok halmaza, melyekhez tartozó  $\varphi$  értékek egy adott intervallumba esnek.
- Egyensúlyi pont: az a  $\varphi$  érték, ahol  $R(\varphi)$ -nek lokális szélsőértéke van.
- Egyensúlyi helyzet: az a pozíciója a testnek, amikor egy egyensúlyi ponton érintkezik az alátámasztó felülettel. Az egyensúlyi ponthoz tartozó  $\varphi$ -vel lehet az egyensúlyi helyzetet is jellemezni.

$R(\varphi)$  folytonosságából, és a  $R(0) = R(2\pi)$  feltételből következik, hogy a függvénynek mindig ugyanannyi lokális minimuma van, mint amennyi maximuma. Az alakzaton emiatt az egyensúlyok mindig párosával jelennek meg: a stabil egyensúlyok száma megegyezik az instabil egyensúlyok számával. Mivel két minimum vagy maximumhely nem lehet szomszédos, ezért a stabil és az instabil egyensúlyi helyzetek váltakozva helyezkednek el a kerület mentén. Ebből az is következik, hogy  $R(\varphi)$  két szomszédos egyensúlyi helyzet között szigorúan monoton: stabil egyensúlyi ponttól instabil pontig növekvő, instabil ponttól stabil pontig pedig csökkenő lesz a függvény. Megmutatható, hogy tetszőleges alakzat esetén  $R(\varphi)$ -nek mindig legalább két minimuma és ennek megfelelően legalább két maximuma van. [3]



3. ábra: A és B pontokban lesz  $R(\varphi)$ -nek maximuma, C és D-ben pedig minimuma, ezek adják az egyensúlyi helyzetet.



4. ábra: A háromszög csúcsainál törés van  $R(\varphi)$ -ben, a példában bemutatott alakzat esetében mindhárom lokális maximumhely, így mindhárom instabil egyensúlyi pont. Köztük, valahol az oldalak mentén, a minimumoknál vannak a stabil egyensúlyok.

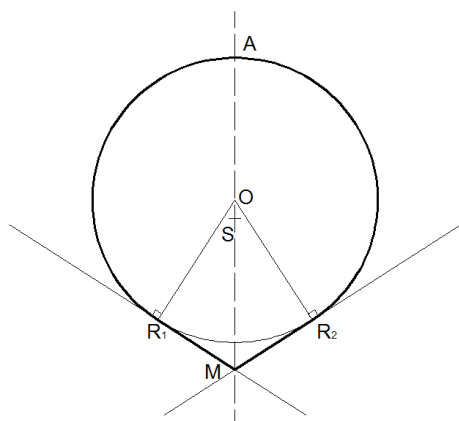
A dolgozat célja, hogy olyan kétdimenziós testeket keressek, melyek egyensúlyi helyzetei kis tartományban helyezkednek el. Ekkor a test egyensúlyi helyzetei között nincs nagy eltérés, látszólag mindig ugyanabba a helyzetbe tér vissza, véges pontosságú kísérlet esetén úgy viselkedik, mint egy monostatikus alakzat. Az egyszerűség kedvéért csak a pontosan négy egyensúlyi helyzettel ( $2S, 2I$ ) rendelkezőkkel foglalkozom. A gondolatmenet itt két részre válik: az első esetben csak a stabil egyensúlyok közelségével foglalkozom, a második – jóval bonyolultabb – esetben pedig mind a négy egyensúly kis tartományba szoríthatóságát vizsgálom.

## II.

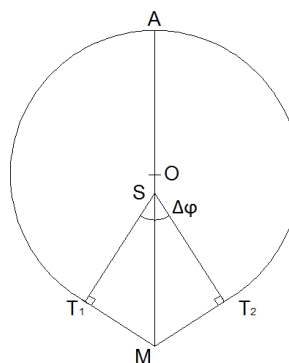
### Kis környezetbe sűrített stabil egyensúlyokkal rendelkező alakzatok vizsgálata

Ha a két stabil egyensúlyi helyzet egymáshoz közel, egymástól  $\Delta\varphi$  távolságra van, akkor egy instabil helyzet, amit közrezárnak szintén bele fog esni ebbe a tartományba. Azonban a 2. instabil helyzet a kerület mentén, a  $\Delta\varphi$  tartományon kívül akárhol lehet. Ennek megfelelően nem lehet kijelenteni, hogy minden pozícióból nagyjából ugyanabba a helyzetbe tér vissza, elméletben a kis környezetben kívüli instabil egyensúlyán is megállhatna, ám ennek a valószínűsége, hogy megtörténjen, pontosan 0. Ebben a tekintetben hasonlít a kelfeljancsira vagy a Gömböcre, elvileg azok is megállíthatóak a fejük tetején. Az instabil egyensúlyi helyzet  $\Delta\varphi$ -n kívül két részre osztja a kis tartományon kívüli kerületet: egy monoton növekvő és egy monoton csökkenő tartományra. Emiatt a test más-más irányba fog gördülni, ha a kint levő egyensúly egyik vagy másik oldalára helyezzük le a testet.

Nem nehéz megsejteni, hogy ha a kört két pontja között a pontbeli érintőivel helyettesítünk, akkor egy megfelelő alakzatot kapunk (5. ábra). Ettől a módosítástól az alakzat továbbra is konvex marad, és a középponton és az érintők metszéspontján átmenő egyenesre tengelyesen szimmetrikus lesz. A síklap súlypontja a kör középpontjától a szimmetriatengelyen az érintők metszéspontja felé tolódik. Ekkor 4 hely lesz, ahol a kerületi normálisok áthaladnak az új súlyponton: a súlypontból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai, az érintők metszéspontja és a kör szimmetriatengelyre eső pontja (a kör többi normálisa a régi súlyponton át halad, az egyenes szakaszok többi normálisa pedig az új súlypont mellett halad el). A talppontok lesznek a stabil egyensúlyi pontok, és a szimmetriatengelyre esők az instabilak (6. ábra). Ha a két érintőt egymástól  $\Delta\varphi$ -re vettük fel, akkor az új alakzat 2 stabil (és 1 instabil) egyensúlya a geometriából adódóan ugyanúgy  $\Delta\varphi$  nagyságú tartományba fog esni. Vegyük észre, hogy  $\Delta\varphi$  nem korlátozott kicsinységében. Határesetben, ha  $\Delta\varphi$  értéke tart nullához, a kört kapjuk vissza. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen teljesen nem lehet összetolni a két stabil helyzetet.



5. ábra: Egy megfelelő alakzat (vastag vonallal jelölve). Az S súlypont a kör O középpontja és a két érintő M metszéspontja között helyezkedik el. A megváltoztatott tartomány ( $R_1OR_2$ ) szöge az érintők bezárt szögével azonos.



6. ábra: Az egyensúlyok elhelyezkedése az alakzaton. A két stabil egyensúly távolsága ( $T_1OT_2$ ) azaz  $\Delta\varphi$  is az érintők bezárt szögével azonos. A másik két egyensúly (M, A) a szimmetriatengelyen vannak.

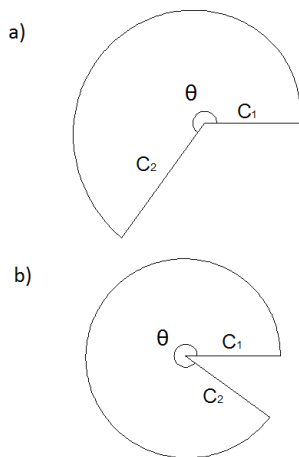
### III.

#### Kis környezetbe sűrített stabil és instabil egyensúlyokkal rendelkező alakzatok vizsgálata

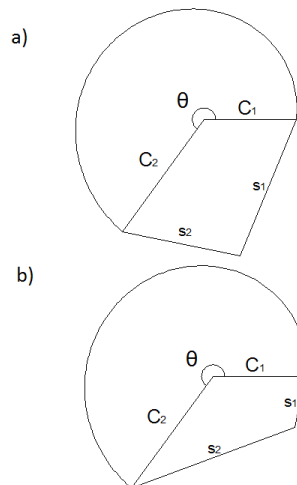
Ez a konstrukció két alapvető aspektusában tér el az előzőtől. Az egyik, hogy elméletileg sincs olyan helyzete, amiből ne ugyanabba a kis környezetbe gördülne vissza. A másik, hogy a négy egyensúly sorrendjéből  $(S, I, S, I)$  következően nem lehet szimmetrikus, hiszen az egyensúlyokat tartalmazó kis intervallumon kívüli rész monotonon nő vagy csökken. Ez az aszimmetria azt is jelenti, hogy a test mindig ugyanabba az irányba gördülve fog beállni az egyensúlyi tartományba, függetlenül attól, hogy a tartományon kívül melyik pontjára helyeztük le. Az alakzat viselkedésének egyfajta egyirányúsítását értük el ezzel a kialakítással.

Az egyensúlyokat tartalmazó  $\Delta\varphi$  tartományon kívüli rész monotonitását kihasználva alakult ki a megfelelő alakzat. A konstrukció lényege, hogy az alakzat azon tartományába, ahova nem kívánunk egyensúlyokat, egy spirált helyezünk el, míg a fennmaradó részt úgy alakítjuk, hogy a létrejövő test súlypontja az origóba kerüljön. Tetszőleges spirál (logaritmus, parabolikus) megfelelő lehet egy ilyen alakzat létrehozására, hiszen mindössze annyi szükséges, hogy az  $R(\varphi)$  függvény szigorúan monotonon növekedjen az adott tartományban. Jelen esetben az alakzat egy arkhimédészi spirál:  $R(\varphi) = C_0 + C \cdot \varphi$  képlettel írható le, azaz a centrumtól mért távolsága a szöggel egyenesen arányos.

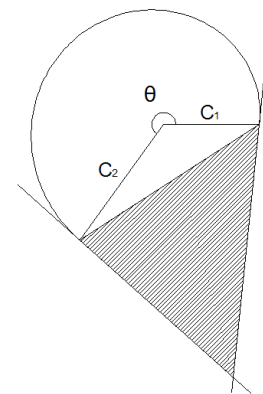
A mi esetünkben érdemes ezt a képletet  $R(\varphi) = C_1 + (C_2 - C_1) \cdot \varphi / \theta$  alakban leírni: ekkor  $C_1$  jelöli a spirál sugarát a  $\varphi = 0$  helyen, és  $C_2$  lesz a sugár  $\varphi = 0$ -tól  $\theta$  távolságban (7. ábra). A  $\theta$  szög fogja jelölni annak a tartománynak a nagyságát, ahol a spirál van, ebből a részből minden egyensúlyt kizártunk, tehát a fennmaradó  $2\pi - \theta$  tartomány lesz az a rész, ahol az egyensúlyok elhelyezkednek majd.



7. ábra: Az arkhimédészi spirál  
a)  $C_1 = 10$   $C_2 = 15$   $\theta = 0,65 \cdot 2\pi$   
a)  $C_1 = 10$   $C_2 = 11$   $\theta = 0,90 \cdot 2\pi$   
esetekben.



8. ábra: A spirált kiegészítő két szakasz két tetszőlegesen felvett helyzete  
 $C_1 = 10$   $C_2 = 15$   $\theta = 0,65 \cdot 2\pi$   
paraméterekkel adott spirál esetén.

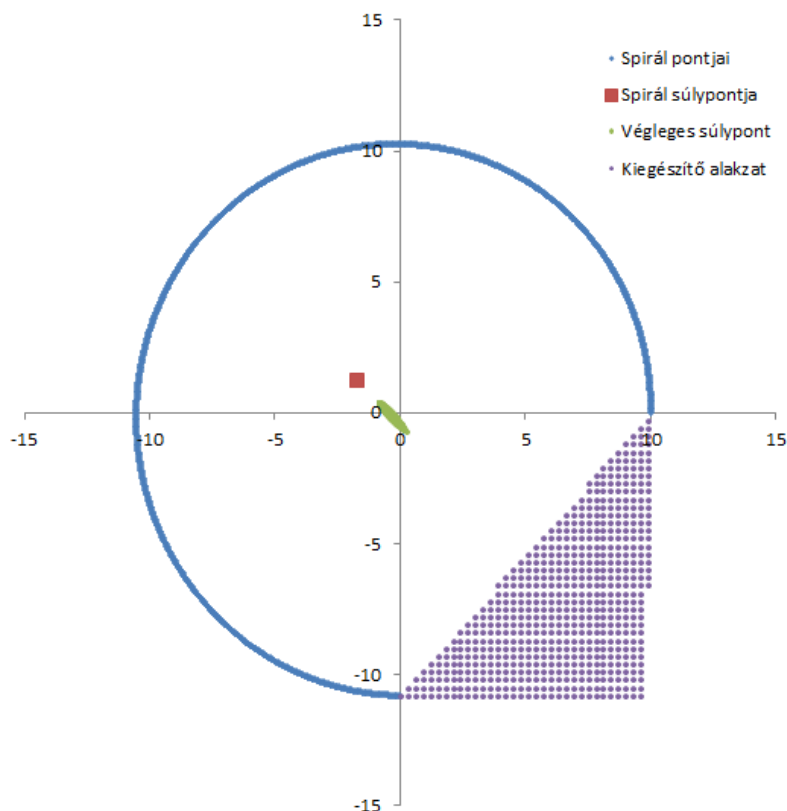


9. ábra: Az ábrán kitöltéssel jelölt részre kell, hogy kerüljön a két szakasz közös csúcspontja ahhoz, hogy az alakzat továbbra is konvex maradjon.

Ezzel csak egy felső korlátot adtunk az egyensúlyokat tartalmazó intervallum nagyságára, a kész konstrukció esetében a tényleges tartomány a korlátnál biztosan kisebb lesz. A spirálhoz tartozó két  $C$  érték közül az egyiket tetszőlegesen rögzíthetem, csak a két szám aránya számít, így ennek a spirálnak két szabadsági foka van.

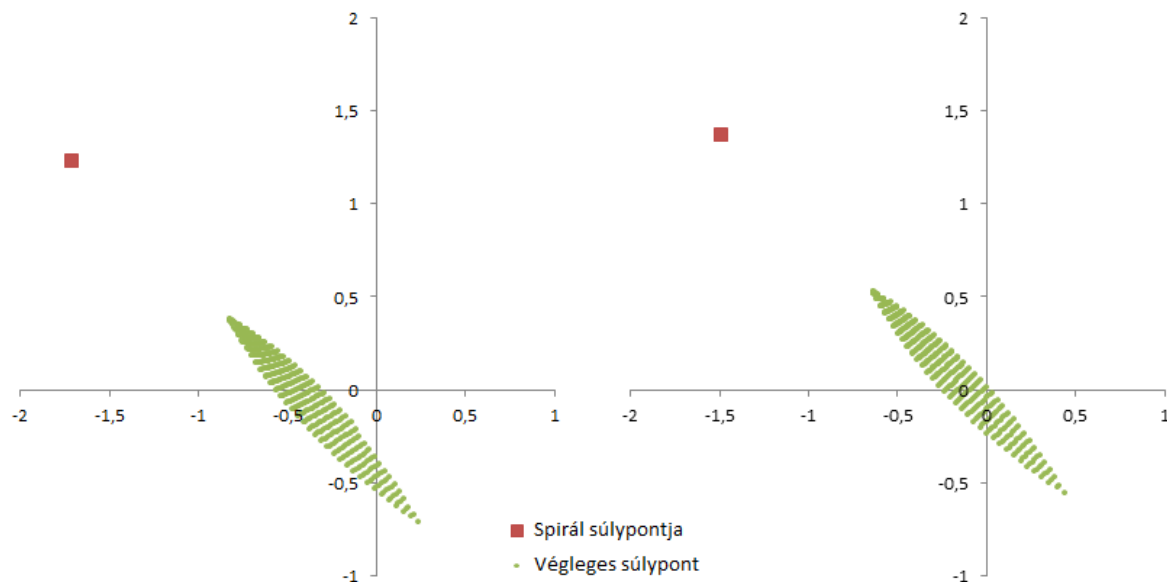
A spirált kiegészítő rész alakja a konvexitás korlátai között szabadon választható, az egyszerűség kedvéért két egyenes szakaszból álló részt választottam (8. ábra). A két szakasz egy-egy végpontja a spirál két végéhez kell, hogy kapcsolódjon. Hogy a konvexitás teljesüljön, a szakaszok másik, közös végpontja a spirál végpontjait összekötő egyenes és a spirál két végpontjában húzott érintők által meghatározott háromszögön belül a síkban szabadon mozoghat, így az alakzat ezen részének is két szabadsági foka van (9. ábra).

A fenti összefüggések, kikötések alapján kezdtem el a vizsgálatokat, először numerikus módszerekkel. MS Excel programban Visual Basic nyelven írtam a programot. A spirál területét, súlypontjának helyét explicit képlet hiányában először közelítőleg határoztam meg: a  $\theta$  tartományt 1000 részre felosztva diszkretizáltam az alakzatot, az így létrejött 1000 háromszög segítségével lehetett a számításokat végezni. Speciális esetek vizsgálatával tudtam ellenőrizni a számítás pontosságát: Ha  $C_1$  és  $C_2$  egyenlő, akkor a spirál körívré fajul,  $\theta$  értékét  $\pi$ -nek választva az alakzat egy félkör lesz.  $C_1$  értékét 10 egységnek vettem, ekkor a pontatlanság a terület és a súlypont helyének értékét illetően  $10^{-4}$  nagyságrendűnek adódott.



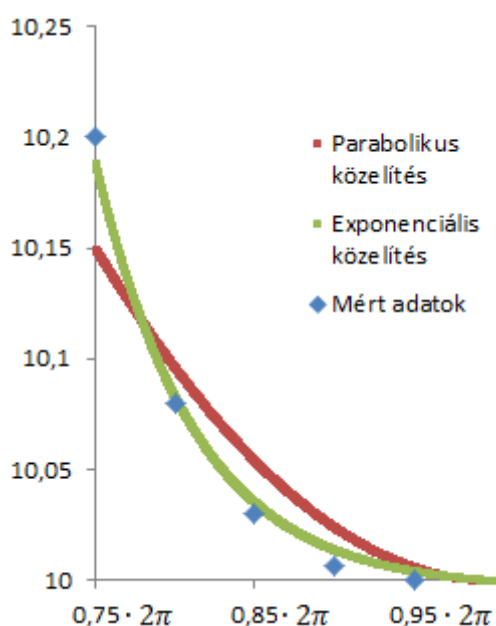
A kiegészítő két szakasz közös végpontjának lehetséges helyeit szintén diszkretizáltam: egy adott sűrűségű rács csomópontjai adták a végpontok helyeit. Az így kialakuló összes alakzat esetén kirajzoltattam a súlypont végleges helyét (10. ábra). Miközben a kiegészítő alakzat csúcspontja a síkon végigfut, a súlypontok helye is egy síkidomot fog kirajzolni. Ennek segítségével könnyű megállapítani, hogy a súlypont végleges helye valóban kerülhet az origóba, hiszen ekkor a súlypontok által kiadott síkidom lefedi az origót (11. ábra).

10. ábra: A lila pontok jelölik a kiegészítő alakzat csúcspontjának lehetséges helyeit. A piros pont a spirál, míg a zöld pontok a teljes alakzat súlypontjának elhelyezkedéseit mutatják.



11. ábra: Az a)  $C_1 = 10$   $C_2 = 10,8$   $\theta = 0,75 \cdot 2\pi$  esetben a súlypont nem, míg a b)  $C_1 = 10$   $C_2 = 10,2$   $\theta = 0,75 \cdot 2\pi$  esetben a súlypont kerülhet az origóba.

$C_1$  értékét rögzítettem 10-nek, és adott  $\theta$  értéknél vizsgáltam, hogy  $C_2$  milyen értékei mellett fog létezni megfelelő kiegészítő alakzat. Ezekből a mérésekből a következő számadatok jöttek ki:



| $\theta$          | $C_2$ maximuma |
|-------------------|----------------|
| $0,75 \cdot 2\pi$ | 10,2           |
| $0,80 \cdot 2\pi$ | 10,08          |
| $0,85 \cdot 2\pi$ | 10,03          |
| $0,90 \cdot 2\pi$ | 10,006         |
| $0,95 \cdot 2\pi$ | 10,0003        |

12. ábra:  $C_2$  lehetséges értékeinek lecsengése  $\theta$  függvényében,  $C_1 = 10$  rögzített érték mellett. A piros ív egy parabolikus, a zöld egy exponenciális közelítő görbét mutat.

Az eredményekből az látszik, hogy ha az egyensúlyokat tartalmazó tartomány ( $\Delta\varphi$ )  $\pi/5$ -nél nagyobb, akkor nagy valószínűséggel létezik megfelelő test. Az ennél kisebb intervallumokról már nem nyújt semmilyen információt a számítás, hiszen elértük a pontatlanság nagyságrendjét. Mégis, az értékek lecsengéséből az a sejtés támad, hogy nincs korlátja annak, milyen kis intervallumba lehet az egyensúlyokat sűríteni. A II. pontbeli esethez hasonlóan itt is azt láthatjuk, hogy minél jobban csökken az intervallum nagysága, annál közelebb kerülünk a körhöz az alakzattal, határesetben pedig ismét el kell érünk azt (12. ábra).

Ennél pontosabb eredményeket és a kis tartományokra vonatkozó adatokat csak a numerikus számítás adhat. A spirál terület- és súlypontszámításához át kellett térni a derékszögű koordináta-rendszer használatára. Ekkor a  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\theta$  értékekkel jellemzett spirál területére az alábbi képlet adódik (13. ábra):

$$T = \frac{1}{2} \theta \cdot \left( C_1^2 + C_1(C_2 - C_1) + \frac{1}{3}(C_2 - C_1)^2 \right) = \frac{1}{6} \theta \cdot (C_1^2 + C_1 C_2 + C_2^2)$$

A súlypont  $x_s$  és  $y_s$  koordinátái az alábbiak lesznek:

$$x_s = \left\{ \sin \theta \cdot \left[ -\frac{2}{\theta^2} C_1^2 C_2 + \frac{4}{\theta^2} C_1 C_2^2 + \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{\theta^2} \right) C_2^3 \right] + \cos \theta \cdot \left[ \frac{2}{\theta^3} C_1^3 - \frac{6}{\theta^3} C_1^2 C_2 + \left( \frac{6}{\theta^3} - \frac{1}{\theta} \right) C_1 C_2^2 + \left( \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta^3} \right) C_2^3 \right] + \left[ \left( \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta^3} \right) C_1^3 + \left( \frac{2}{\theta^3} - \frac{1}{\theta} \right) C_1^2 C_2 - \frac{2}{\theta^3} C_1 C_2^2 + \frac{2}{\theta^3} C_2^3 \right] \right\} / \left\{ \frac{1}{6} \theta \cdot (C_1^2 + C_1 C_2 + C_2^2) \right\}$$

$$y_s = \left\{ \cos \theta \cdot \left[ \frac{2}{\theta^2} C_1^2 C_2 - \frac{4}{\theta^2} C_1 C_2^2 + \left( \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{3} \right) C_2^3 \right] + \sin \theta \cdot \left[ \frac{2}{\theta^3} C_1^3 - \frac{6}{\theta^3} C_1^2 C_2 + \left( \frac{6}{\theta^3} - \frac{1}{\theta} \right) C_1 C_2^2 + \left( \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta^3} \right) C_2^3 \right] + \left[ \left( \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta^3} \right) C_1^3 + \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{\theta^2} \right) C_1^2 C_2 + \frac{4}{\theta^2} C_1 C_2^2 - \frac{2}{\theta^2} C_1 C_2^2 \right] \right\} / \left\{ \frac{1}{6} \theta \cdot (C_1^2 + C_1 C_2 + C_2^2) \right\}$$

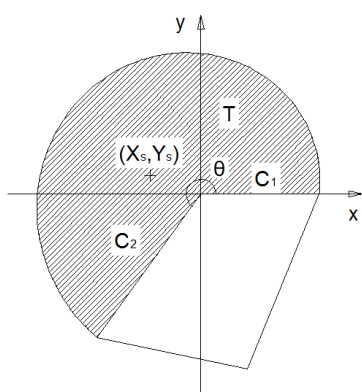
Az  $x$ ,  $y$  paraméterekkel adott kiegészítő részhez tartozó két háromszög területe és súlypontjainak koordinátái (14. ábra):

$$T_1 = \left| \frac{x \cdot C_1 \cdot \sin 0 - y \cdot C_1 \cdot \cos 0}{2} \right|; \quad x_{s1} = \frac{0 + C_1 \cdot \cos 0 + x}{3}; \quad y_{s1} = \frac{0 + C_1 \cdot \sin 0 + y}{3}$$

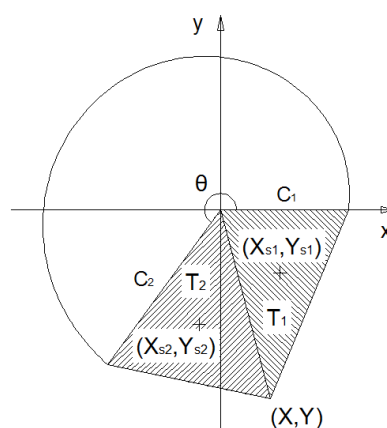
$$T_2 = \left| \frac{x \cdot C_2 \cdot \sin \theta - y \cdot C_2 \cdot \cos \theta}{2} \right|; \quad x_{s2} = \frac{0 + C_2 \cdot \cos \theta + x}{3}; \quad y_{s2} = \frac{0 + C_2 \cdot \sin \theta + y}{3}$$

Ekkor, hogy az alakzat súlypontja a megfelelő helyen legyen, az alábbi egyenleteket kell megoldani  $x$ -re és  $y$ -ra:

$$\begin{cases} 0 = T \cdot x_s + T_1 \cdot x_{s1} + T_2 \cdot x_{s2} \\ 0 = T \cdot y_s + T_1 \cdot y_{s1} + T_2 \cdot y_{s2} \end{cases}$$



13. ábra: A spirál területét  $T$ , súlypontjának helyét  $(x_s, y_s)$  adja meg.



14. ábra: A kiegészítő alakzat felbontható két háromszögre, hozzájuk az 1-es illetve 2-es indexszel jelölt értékek tartoznak.

A feltételek mellett, hogy az alakzat valóban konvex legyen, az alábbi egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie  $x$  és  $y$  értékekre:

$$(C_2 \cdot \sin \theta - C_1 \cdot \sin 0) \cdot x + (C_1 \cdot \cos 0 - C_2 \cdot \cos \theta) \cdot y - C_1 C_2 \cdot \sin \theta \geq 0$$

$$\left(C_1 \cdot \cos 0 + \frac{C_2 - C_1}{\theta} \cdot \sin 0\right) \cdot (x - C_1 \cdot \cos 0) + \left(C_1 \cdot \sin 0 + \frac{C_2 - C_1}{\theta} \cdot \cos 0\right) \cdot (y - C_1 \cdot \sin 0) \geq 0$$

$$\left(C_2 \cdot \cos \theta + \frac{C_2 - C_1}{\theta} \cdot \sin \theta\right) \cdot (x - C_2 \cdot \cos \theta) + \left(C_2 \cdot \sin \theta + \frac{C_2 - C_1}{\theta} \cdot \cos \theta\right) \cdot (y - C_2 \cdot \sin \theta) \geq 0$$

A számítások nagyban leegyszerűsödnek, ha a spirált nem paraméteresen, hanem konkrét értékekkel kezeljük. A  $C_1 = 10$ ;  $C_2 = 10,2$ ;  $\theta = 0,75 \cdot 2\pi$  adatok mentén felvett spirál esetén  $x = 9,21854$  és  $y = -6,53215$  értékek adódnak, amik megfelelnek a konvexitási követelményeknek. Ez a konkrét alakzat került kidolgozásra is (15. ábra), a távolsági adatok centiméterben lettek megadva. Ezek alapján néhány további adat a testről:

- Az egyensúlyok valójában  $0,23105 \cdot 2\pi$  távolságra vannak egymástól, ez nagyjából egy  $83,18^\circ$ -os tartományt jelent a  $0,25 \cdot 2\pi$ -os illetve  $90^\circ$ -os becslés helyett.
- A spirál két végpontjában az érintő és az origóba húzott sugár bezárt szöge  $89,75683^\circ$  illetve  $89,76160^\circ$ .
- A spirál két végpontjában vett normálisának és az origónak a távolsága  $0,04$  cm.
- A két egyenes szakasz közös végpontjának távolsága az origótól  $11,29773$  cm, a két egyenes távolsága, azaz a stabil egyensúlyi pontok helyén az  $R$  értéke:  $9,47738$  illetve  $9,92920$  cm. A harmadik tulajdonságból látszik, hogy a kivitelezési pontatlanságok nyomán a súlypontnak az origótól  $0,4$  mm-es eltérése még megengedett ahhoz, hogy a szerkezet működjön. Ezt a pontosságot lézeres vágótechnikával még meg lehet oldani. A második tulajdonság viszont megmutatja, hogy a valóságban egy ilyen test már a legkisebb zavarásra sem fog az elvártnak megfelelően viselkedni. A negyedik tulajdonság utal arra, hogy a spirál körhöz való közelsége, méreteinek korlátja nem minősül globális korlátnak, az alakzat kiegészítő részén a körtől jelentős eltérések vannak.



15. ábra: A kidolgozott alakzat  $10$  mm vastag acéllemezből készült, lézeres vágótechnikával. A nagy anyagvastagság miatt a vágási felület nem lett egyenletes, ezért a test palástját utólag le kellett köszörülni.

## IV.

### Következtetések, általánosítások

A kidolgozott eseten jól látszik, hogy a legkisebb pontatlanság is tönkretelheti az ilyen speciális alakzatokat. Az egyensúlyokat csak  $\pi/2$  méretű tartományba szorítottuk be, de a spirál eltérése a körtől már ekkor is minimális:  $C_2/C_1=2\%$ . Emiatt az elkészített test a valóságban nem működik, a súrlódás, a felületek egyenetlensége miatt nem mutatja az elvárt viselkedést. Előfordulhat, hogy más, megfelelőbben választott kiegészítő alakzat használata esetén nagyobb a  $C_2/C_1$  hányados tűréshatára adott  $\theta$  érték mellett, de a hányados nagyságrendje nem változik.

A természetben nagyon ritkák az olyan jelenségek, amik tisztán kétdimenziósként leírhatók. Ez a tény és a rendkívüli pontosság szükségessége miatt nem lehet a valóságban ilyen módon viselkedő formákat találni. Felmerül viszont a kérdés, hogy a háromdimenziós testek között van-e ehhez hasonló alakzat, lehet az összes egyensúlyi helyzetet kis térszögbe sűríteni. Előfordulhat-e egy monostatikusan egyensúlyban lévő testnél, hogy a két egyensúly nem egymással átellenben helyezkedik el? Kettőnél több egyensúlyi helyzettel rendelkező alakzatok esetén lehet-e kis részbe, esetleg egy sík mentén közel hozni egymáshoz az egyensúlyokat? Az így kialakított testek is mutatni fogják-e az III. szekcióban bemutatott testen létrejövő egyirányúságot?

A kérdésre nem könnyű a válasz, hiszen három dimenzióban nem működik a fent levezetett konstruálási módszer, a spirálnak nincs olyan térbeli megfelelője, ami a középponttól való távolodást mutatná minden irányban. A helyzetet bonyolítja az is, hogy nem csak stabil és instabil, hanem nyeregpont jellegű egyensúlyokkal is számolni kell a térbeli probléma vizsgálatakor.

### Összefoglalás

A dolgozatban beláttam, hogy kétdimenziós testek stabil egyensúlyi helyzetei tetszőlegesen közel hozhatók egymáshoz, ezen felül megadtam egy módszert, amivel az összes egyensúly közelségét lehet vizsgálni. Kiderült, hogy az olyan testek, melyek mindegyik egyensúlya kis környezetben van, alig térnek el a körtől, létrehozásuk nagy precizitást igényel, viselkedésük nem ideális környezetben nem figyelhető meg. Ezek alapján további vizsgálatok folytathatók: mi az a kiegészítő alakzat, ami mellett a körtől való eltérés növelhető és mennyi ez a növekmény; illetve mennyire kell elszórni az egyensúlyokat a testen, ha azt szeretnénk, hogy egy valóságban is működő alakzatot kapjunk. Egy másik irányba lehet a vizsgálatoknak a háromdimenziós testek elemzése, egy hasonlóan bevezetett térbeli közelség alapján. Reményeim szerint mindkét kérdéskörben jobban el fogok tudni merülni a jövőben.

## Irodalomjegyzék:

- [1] Nowacki, H., Archimedes and ship stability. In: Passenger ship design, construction, operation, and safety: Euroconference; Knossos Royal Village, Anissaras, Crete, Greece, October 15–17, 2001, 335–360 (2002). Ed: Kaklis, P.D. National Technical Univ. of Athens, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Athens.
- [2] Domokos, G., Várkonyi, P. L., Mono-monostatic Bodies: The Answer to Arnold's Question Mathematical Intelligencer 28 (4) pp34-38 (2006)
- [3] Domokos, G., Papadopoulos, J., and Ruina, A., Static equilibria of planar, rigid bodies: Is there anything new? J. Elasticity 36 (1994), 59–66.
- [4] Domokos, G., Lángi, Zs. and Szabó, T., On the equilibria of finely discretized curves and surfaces Monatshefte für Mathematik (2011), DOI: 10.1007/s00605-011-0361-x