



MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR



TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Hatványközeg határréteg áramlását leíró egyenletek numerikus és elméleti megoldása

Csáti Zoltán
IV. éves BSc gépészmérnök hallgató

Konzulens:
Vadászné dr. Bognár Gabriella
egyetemi docens
Gépészmérnöki és Informatikai Kar

Miskolc, 2012

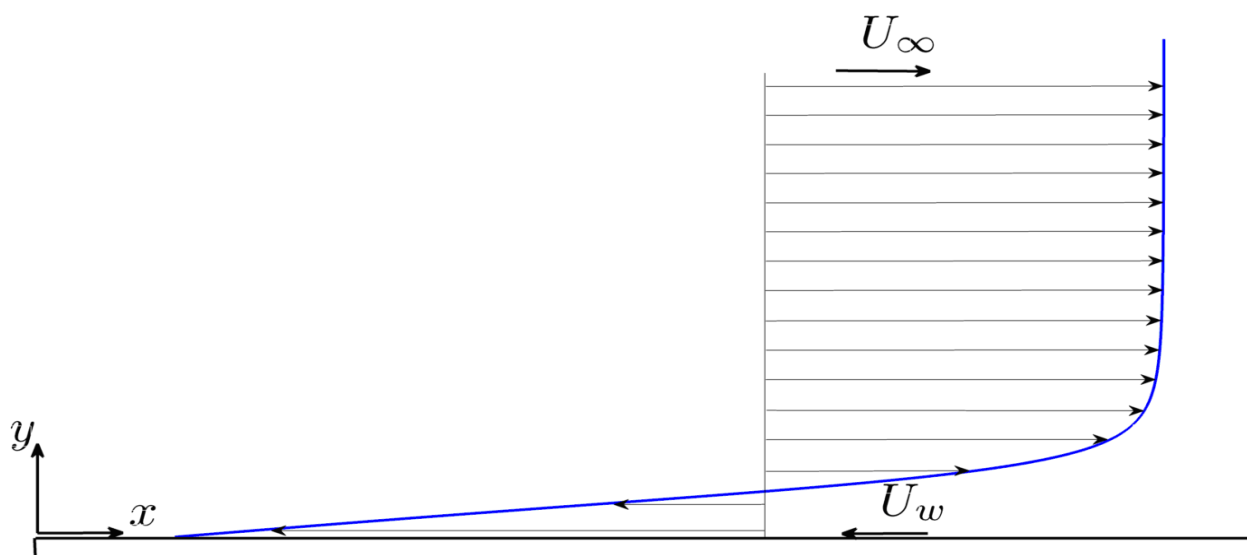
Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, korábbi eredmények	3
2. Hasonlósági egyenlet megoldása iteratív transzformációs módszerrel	
2.1. Előzetes eredmények	8
2.2. Iteratív transzformációs módszer	9
2.3. Számítási eredmények	13
3. Hasonlósági megoldások összevetése az ANSYS Fluent kereskedelmi szoftverrel kapott numerikus eredményekkel	
3.1. Bevezetés	17
3.2. Geometria megadása.....	18
3.3. Háló létrehozása	20
3.4. Megoldás előállítása	22
3.5. A megoldások diszkretizációs hibáinak becslése.....	38
3.6. A hasonlósági és az ANSYS-szal kivitelezett megoldás összehasonlítása.....	41
4. Összefoglalás	43
5. Jelölések.....	44
6. Irodalomjegyzék	45

1. Bevezetés, korábbi eredmények

Jelen dolgozatban egy folyadék mechanikai problémára, egy síklap felett kialakuló stacionárius kétdimenziós folyadékáramlás sebességeloszlásának meghatározására adunk két, egymástól elviekben eltérő módszerrel megoldást és azokat összehasonlítjuk. Az egyik megoldás az úgynevezett hasonlósági megoldás, míg a másik megoldás egy kereskedelembe kapható szoftver felhasználásával készült. Az első megoldásnál a Prandtl-féle feltételezést alkalmaztuk [10] azért, hogy a legáltalánosabb mozgásegyenletből egy egyszerűsített modellt – a határréteg egyenleteket – vezessünk le. Ezeket a parciális differenciálegyenleteket hasonlósági transzformációval közönséges differenciálegyenletté alakítottuk. A tavalyi TDK dolgozatban ezt a hasonlósági transzformációt egy azonos szerkezetű feladatra alkalmaztuk. Az ipari alkalmazhatóságot a 2011 évi TDK dolgozatban ([5]-ben) adtuk meg. A 2. fejezetben a hasonlósági transzformációval kapott differenciálegyenletet egy iteratív transzformációs módszerrel oldjuk meg. A 3. fejezetben az ANSYS Fluent program segítségével állítjuk elő a megoldásokat úgy, hogy nem tesszük meg a Prandtl-féle határréteg elméleti feltételezéseket. Számításainkban mind newtoni, mind nem-newtoni folyadékokat vizsgálunk, amikor anyagtörvényként az Ostwald-de Waele-féle hatványtörvényt alkalmazzuk.

Vegyük fel a koordináta-rendszer x tengelyét a vízszintes síklap felületére illesztve és az y tengelyt erre merőlegesen. A közeg áramlási iránya a síklappal párhuzamos, és pozitívnak vesszük az x irányában. A közeg áramlási sebességének x irányú komponense a faltól távol U_∞ és U_w -vel jelöljük az adott hosszúságú lap sebességét. Ha a lap rögzített, akkor $U_w = 0$, ha a lap és a folyadékáramlás iránya ellentétes, akkor U_w és U_∞ előjele megegyezik (lásd 1.1 ábra).



1.1. ábra: Az áramlás jellege

A síklap feletti folyadék áramlását leíró kontinuitási és Navier-Stokes egyenletekből a következő feltételezésekkel megkapjuk az úgynevezett határréteg egyenleteket.

- Síkbeli áramlással számolunk, azaz a közeg áramlási sebessége:

$$\vec{v}(x, y) = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}.$$
- A falra merőleges sebességkomponens lényegesen kisebb a fallal párhuzamos komponensnél: $v \ll u$.
- A sebességkomponensek falra merőleges változása lényegesen nagyobb a fallal párhuzamos változásnál: $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y}$.
- Az áramlás stacionárius.
- A ρ sűrűség állandó, a közeg összenyomhatatlan.
- A térerősséggel nem számolunk.

Itt u és v az x és y irányú sebességkomponenseket jelöli.

Ezen feltételezésekkel a kontinuitási egyenletből és a mozgásegyenletből a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (1.2)$$

egyenleteket kapjuk, ahol nem-newtoni hatványközeg esetén az x normálisú síkon y irányban ébredő nyírófeszültségre

$$\tau_{yx} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y},$$

ahol K a konzisztencia index és n a hatványtörvény kitevő. A közeg newtoni, ha $n = 1$, dilatáló, ha $n > 1$ és pseudoplasztikus, ha $n < 1$.

Az (1.1) – (1.2) egyenletekhez tartozó peremfeltételek:

$$u(x,0) = -U_w \quad v(x,0) = 0 \quad u(x,\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = U_\infty. \quad (1.3)$$

Először az (1.2) mozgásegyenlet alakját adjuk meg hasonlósági változók bevezetésével. A hasonlósági megoldáshoz bevezetjük a $\psi(x,y)$ áramfüggvényt

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ alapján. Így a mozgásegyenlet a következő lesz:

$$\psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} = \frac{K}{\rho} \left(|\psi_{yy}|^{n-1} \psi_{yy} \right)_y, \quad (1.4)$$

és ψ -vel a kontinuitási egyenlet automatikusan teljesül. Az alsó indexek az adott változó szerinti parciális deriváltakat jelölik.

Vezessük be az η hasonlósági változót és keressük az áramfüggvényt a következő alakban:

$$\eta = a \frac{y}{x^\beta},$$

$$\psi = b x^{-\alpha} f(\eta),$$

ahol a, b, α, β konstansok.

A peremfeltételek a ψ áramfüggvényre:

ha $y \rightarrow \infty$, tehát $\eta \rightarrow \infty$:

$$\psi_y(x,\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y(x,y) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = abx^{-\alpha-\beta} f'(\eta) = U_\infty, \quad (1.5)$$

az $y = 0$ ($\eta = 0$) helyen:

$$\psi_x(x,0) = \frac{b}{n+1} x^{-\frac{n}{n+1}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] = 0, \quad (1.6)$$

az $y = 0$ ($\eta = 0$) helyen:

$$\psi_y(x,0) = abx^{-\alpha-\beta} f'(0) = -U_w. \quad (1.7)$$

Jelöljük a sebességek hányadosát λ -val, azaz $\lambda = \frac{U_w}{U_\infty}$.

A λ paraméter pozitív, ha U_w és U_∞ előjele megegyezik, tehát a síklap az áramlás irányával szemben mozog, negatív, ha egy irányban mozognak, míg $\lambda = 0$, ha a síklap rögzített.

Ha a paramétereket megfelelően választjuk meg (lásd [5]), azaz

$$\alpha = -\frac{1}{n+1}, \quad \beta = \frac{1}{n+1},$$

$$a = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}}, \quad b = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}},$$

akkor a hasonlósági változó és az áramfüggvény alakja:

$$\eta = a \frac{y}{x^\beta} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}} \frac{y}{x^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\psi(x, y) = bx^{-\alpha} f(\eta) = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}} f(\eta).$$

A megoldandó (1.4) mozgásegyenlet a peremfeltételekkel együtt az alábbiakban írható fel:

$$\left[|f''|^{n-1} f'' \right]' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0 \quad (1.8)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\lambda, \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1. \quad (1.9)$$

Az eredeti sebesség összetevők a dimenziómentes változókkal:

$$u(x, y) = U_\infty f'(\eta),$$

$$v(x, y) = \frac{U_\infty}{n+1} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)),$$

ahol

$$\eta = \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{n+1}} \frac{y}{x} \quad \text{és} \quad \operatorname{Re}_x = \frac{U_\infty^{2-n} x^n \rho}{K}$$

a lokális Reynolds-számot jelöli.

A kapott harmadrendű nemlineáris közönséges differenciálegyenletnek a félig végtelen intervallumon egzakt megoldása nem ismert. Az (1.8) – (1.9) peremérték feladat numerikus megoldását az [5] dolgozatban közöltük. Nehézségek merültek fel a számítások során, ugyanis sem a Matlab, sem a Maple szoftverekkel nem voltunk képesek megfelelően nagy tartományon megoldani a peremérték feladatot, főként $n > 1$ esetén. Mivel [5]-ben a félig végtelen intervallumot egy véges intervallummal helyettesítettük, a szükségesnél kisebb számolási tartomány pontatlanságot eredményezhet. A Matlab bvp5c kollokációs peremérték feladat megoldójához egy kezdőfüggvényt kellett megadnunk, melynek nem-newtoni folyadékok esetén nagyon közel kell esnie a kiszámítandó megoldáshoz, máskülönben nem talál rá a közelítő megoldásra.

Ezek a nehézségek motiváltak, hogy más módszert keressünk az (1.8) – (1.9) feladat megoldására. Az elméleti megoldás előállítására egy iterációs módszert alkalmazunk, amellyel a megoldandó peremérték feladatot kezdetiérték feladat megoldására vezetjük vissza. Innen kapjuk majd meg az (1.8) – (1.9) megoldásait.

Ezt az áramlástan feladatot a Prandtl-féle határrétegbeli feltételezések nélkül numerikusan az ANSYS Fluent kereskedelmi szoftverrel is megoldjuk és megvizsgáljuk, hogy az így kapott megoldások mennyire egyeznek meg az elméleti hasonlósági megoldással.

2. Hasonlósági egyenletek megoldása iteratív transzformációs módszerrel

2.1. Előzetes eredmények

Megemlítjük, hogy $n = 1$ esetben az (1.8) egyenlet a jól ismert Blasius-egyenlet:

$$f'''' + \frac{1}{2} f' f'' = 0. \quad (2.1.1)$$

A hozzá tartozó peremfeltételek $\lambda = 0$ -ra:

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1. \quad (2.1.2)$$

A (2.1.1) – (2.1.2) peremérték feladatot az irodalom Blasius-feladatként említi. Blasius [2] a $[0, L]$ intervallumon a megoldásokat hatványsorral közelítette. Töpfer megmutatta [11], hogy a (2.1.1) Blasius-egyenlethez szükségtelen az $f''(0)$ ismerete. A peremfeltételek helyett kezdeti feltételeket vezetett be a következőképpen. Legyen $g(\eta)$ a (2.1.1) egyenlet megoldása a $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ és $g''(0) = 1$ kezdeti feltételek mellett. Ekkor f -re a megoldás az $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = \gamma$ kezdeti feltételekkel az alábbi módon kapható meg:

$$f(\eta) = \gamma^{1/3} g(\gamma^{1/3} \eta).$$

Nem-newtoni hatványközegre álló lap esetén az (1.8) – (1.9) peremérték feladatot a [3] cikkben vizsgálták. Az $f''(0) = \gamma$ meghatározásához Töpfer-típusú transzformációt vezettek be a következő szerint:

$$f(\eta) = \gamma^{(2n-1)/3} g(\gamma^{(2-n)/3} \eta).$$

Ha $\lambda \neq 0$, akkor a fentebb leírt módszer nem alkalmazható, mert a differenciálegyenlet a peremfeltételekkel nem lesz a skálázásra invariáns.

A 2.2 részben nem-newtoni közeg mozgó síklap feletti áramlásával foglalkozunk.

2.2. Iteratív transzformációs módszer

A skálázási csoport fontos szerepet játszik közönséges és parciális differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek megoldásában. A módszer lényege, hogy a peremérték feladatot kezdetiérték-feladattá alakítjuk, melynek numerikus megoldása egyszerűbb és a megoldás létezése és egyértelműsége is biztosított. A módszert a következő közönséges differenciálegyenletre vázoljuk.

Vegyük az η független változót, és az $f(\eta; p)$ függő változót, ahol p egy paraméter.

Vezessünk be

$$f = \sigma^\alpha f^*, \quad \eta = \sigma^\beta \eta^*, \quad p = \sigma^\gamma p^*$$

skálázási transzformációt, ahol σ a skálázási csoport alapja, az α , β , γ kitevők pedig konstansok, melyeket úgy határozzunk meg, hogy teljesüljön az egyenletre és a mellékfeltételekre az invariancia.

Az invariancia azt jelenti, hogy ha $f(\eta; p)$ a vizsgált differenciálegyenlet megoldása, akkor $f^*(\eta^*; p^*) = \sigma^{-\alpha} f(\sigma^{-\beta} \eta^*; \sigma^{-\gamma} p^*)$ is megoldása a differenciálegyenletnek bármely σ paraméter esetén. A skálázási elmélet tekinthető egyrészt a hagyományos dimenzióanalízis kibővítésének, másrészt a Lie által kifejlesztett csoport invariancia elméletnek részeként. Ha több differenciálegyenletből álló rendszert akarunk megoldani, akkor több csoportparamétert szükséges bevezetni [7].

A Lie-csoport analízist, másik nevén szimmetria analízist Sophus Lie fejlesztette ki, hogy egy adott differenciálegyenletet önmagára képezzen le. Ez a módszer egyesíti csaknem az összes egzakt integrálási technikát mind a közönséges, mind a parciális differenciálegyenletek esetén. A folyadékáramlás parciális differenciálegyenletei a nemlineáris jellegük miatt egzakt módon csak nagyon ritka esetben oldhatók meg. A folyadék mechanikában a kutatók hasonlósági megoldásokat igyekeznek találni, ha lehetséges. A skálázási csoport transzformációk esetén a csoport invariáns megoldások nem mások, mint a hasonlósági megoldások [9].

Általános elv, hogy a fizikai törvények nem függnak a mértékegységtől és hasonlóan a matematikai modellekre is igaz, hogy azok invariánsak a függő és független változók skálázására. [8]

Ebben a részben az úgynevezett skálázási elvet alkalmazzuk az (1.8) – (1.9) peremérték feladat numerikus vizsgálata során. A probléma megoldásánál a numerikusan nem számolható végtelent kell kezelünk. A $\lambda = 0$ esetben nincs szükség az iteratív transzformációs módszerre az (1.8) – (1.9) megoldásához sem az $n = 1$ [11], sem pedig az $n \neq 1$ esetben [3]. Az iteratív transzformációs módszert peremérték feladatok megoldására Fazio vezette be [6].

A jelen módszer mögötti elmélet a következő. Vegyük a skálázási transzformációnak megfelelő részleges invarianciáját az (1.8) – (1.9) feladatnak abban az értelemben, hogy a differenciálegyenlet és az egyik peremfeltétel 0-ban invariáns, míg a másik két peremfeltétel nem. Tehát módosítjuk a feladatot úgy, hogy bevezetünk egy numerikus paramétert, h -t. Az (1.8) differenciálegyenlet az alábbi peremfeltételekkel kell megoldanunk:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\lambda h, \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (2.2.1)$$

ahol bevezettük a h -t, hogy biztosítsuk a bővített skálázási csoport invarianciáját.

Bevezetjük a Töpfer-típusú transzformációt, hogy az előbbi peremérték feladatot kezdetiérték-feladattá alakítsuk. Alkalmazzuk a következő skálázási transzformációt és legyen $f''(0) = \gamma$:

$$g = \sigma^K f, \quad \eta^* = \sigma^\chi \eta. \quad (2.2.2)$$

Jelöljük $\frac{df(\eta)}{d\eta}$ -t f' -vel, $\frac{dg(\eta^*)}{d\eta^*}$ -ot g' -vel.

Az (1.8) egyenlethez először előállítjuk a deriváltakat.

$$\frac{df}{d\eta} = \sigma^{-\kappa} \frac{dg}{d\eta} = \sigma^{-\kappa} \frac{dg}{d(\sigma^{-\chi} \eta^*)} = \sigma^{\chi-\kappa} \frac{dg}{d\eta^*},$$

$$g(0) = \sigma^K f(0), \quad (2.2.3)$$

$$g'(0) = \sigma^{K-\chi} f'(0) = -\sigma^{K-\chi} \lambda h, \quad (2.2.4)$$

$$g'(\infty) = \sigma^{K-\chi} f'(\infty) = \sigma^{K-\chi}, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \sigma^{2\chi-\kappa} \frac{d^2 g}{d\eta^{*2}},$$

$$g''(0) = \sigma^{K-2\chi} f''(0) = \sigma^{K-2\chi} \gamma \quad (2.2.6)$$

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} = \sigma^{3\chi-\kappa} \frac{d^3 g}{d\eta^{*3}}$$

Célunk a χ és a κ paraméterek kifejezése ismert értékekkel. Az (1.8) első tagján elvégezve a deriválást az

$$n|f''|^{n-1} f''' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0 \quad (2.2.7)$$

egyenletet nyerjük, amelybe a fenti egyenleteket behelyettesítve:

$$n\sigma^{(2\chi-\kappa)(n-1)} |g''|^{n-1} \sigma^{3\chi-\kappa} g''' + \frac{1}{n+1} \sigma^{-\kappa} \sigma^{2\chi-\kappa} g g'' = 0. \quad (2.2.8)$$

Ahhoz, hogy g -re a $\left(|g''|^{n-1} g''\right)' + \frac{1}{n+1} g g'' = 0$ egyenletet kapjuk, (2.2.8)-ban a kitevőkre az alábbi egyenlőségnek kell fennállnia:

$$(2\chi - \kappa)(n-1) + 3\chi - \kappa = -2\kappa + 2\chi,$$

melyből a χ és a κ kapcsolata:

$$\kappa = \frac{1-2n}{2-n} \chi, \quad (2.2.9)$$

azaz (1.8) akkor invariáns a skálázásra ha $(2-n)\kappa = (1-2n)\chi$.

Legyen $\sigma = \gamma$, melyből $g''(0) = \gamma^{\kappa-2\chi+1}$, és válasszuk $g''(0)$ -t 1-nek. Így γ kitevőjére:

$$\kappa - 2\chi + 1 = 0. \quad (2.2.10)$$

A (2.2.9) és (2.2.10) lineáris egyenletekből

$$\kappa = \frac{1-2n}{3}, \quad \chi = \frac{2-n}{3}. \quad (2.2.11)$$

Ha a (2.2.4) peremfeltételt a $g'(0) = -\lambda h^*$ alakban írjuk, akkor h^* kifejezhető a többi paraméter segítségével:

$$h^* = \gamma^{-\frac{n+1}{3}} h. \quad (2.2.12)$$

Tehát megoldandó az alábbi kezdetiérték-feladat.

$$\left(|g''|^{n-1} g''\right)' + \frac{1}{n+1} g g'' = 0 \quad (2.2.13)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = -\lambda h^*, \quad g''(0) = 1 \quad (2.2.14)$$

A (2.2.13) differenciálegyenletet a (2.2.14) kezdeti feltételekkel az úgynevezett iteratív transzformációs módszerrel oldjuk meg, amelynek lépései a következők:

1. Egy numerikus paramétert, h -t, alkalmazunk, hogy az aszimptotikus peremfeltétel invariáns maradjon. Megfelelő h^* értékből kiindulva gyökkereső algoritmussal képezünk egy h_i^* sorozatot ($i = 0, 1, \dots$). Minden egyes iteráció után kiszámítjuk a σ csoportparaméter értékét úgy, hogy megoldjuk a kezdetiérték-feladatot numerikusan. A sorozatot $\Gamma(h^*) = h - 1 = 0$ módon képezzük.
2. Egy felelő leállási feltételt alkalmazunk, hogy ellenőrizzük, hogy $\Gamma(h_i^*) \rightarrow 0$, amint $i \rightarrow \infty$.
3. Az eredeti probléma megoldása a $h = 1$ -hez tartozó megoldás.

2.3. Számítási eredmények

Nem-newtoni közegre különböző n értékekre iteratív transzformációs módszerrel határozzuk meg az (1.8) – (1.9) peremérték feladat megoldásait a $[0, +\infty)$ intervallumon. A harmadik peremfeltétel a ∞ -ben adott. A (2.2.13) – (2.2.14) kezdetiérték feladatot a MATLAB program beépített, Adams-Bashforth-Moulton többlelépéses módszerén alapuló ode113 függvényével oldottuk meg az adaptivitási és hibaparamétereket alapértelmezetten hagyva. Az iterációs eljárást mindaddig folytatjuk, amíg a kapott megoldásokra $|f'(\eta^*) - 1| < 10^{-5}$ valamely $[0, \eta^*]$ intervallumon teljesül, ahol η^* egyben a határréteg vastagságát jellemzi.

A numerikus számítások eredményeit $\eta_{\max}$ -ra, $f''(0)$ -ra és h^* -ra különböző λ és n paramétereknél a 2.3.1– 2.3.3 táblázat szemlélteti.

	λ											
n	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.15		0.25		0.3	
	egy megoldás						alsó	felső	alsó	felső	alsó	felső
0.5	9001	56.3	37.4	30.3	27.1	26.1	180.44	26.90	82.98	29.28	57.83	32.53
1	300.0	31.8	25.9	23.3	22.1	21.7	81.94	21.99	47.21	22.82	38.32	23.74
1.5	4.6	6.9	6.4	6.1	5.96	5.92	11.9	4.52	8.21	5.31	7.85	5.99

2.3.1. táblázat: $\eta_{\max}$ értékei

	λ											
n	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.15		0.25		0.3	
	egy megoldás						alsó	felső	alsó	felső	alsó	felső
0.5	2.8e-6	0.071	0.161	0.244	0.306	0.331	0.007	0.311	0.033	0.262	0.067	0.213
1	1.249	0.105	0.195	0.265	0.313	0.332	0.006	0.317	0.032	0.284	0.060	0.252
1.5	3.1e-4	0.146	0.239	0.305	0.348	0.365	0.001	0.353	0.024	0.324	0.059	0.298

2.3.2. táblázat: $f''(0)$ értékei

	λ											
n	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.15		0.25		0.3	
	egy megoldás						alsó	felső	alsó	felső	alsó	felső
0.5	600	3.754	2.491	2.023	1.807	nem szükséges	12.03	1.793	5.531	1.951	3.855	2.169
1	300	4.480	2.977	2.422	2.167		29.84	2.148	9.903	2.315	6.526	2.505
1.5	830	4.960	3.3005	2.687045	2.407		303	4.521	22.658	2.556	10.58	2.738

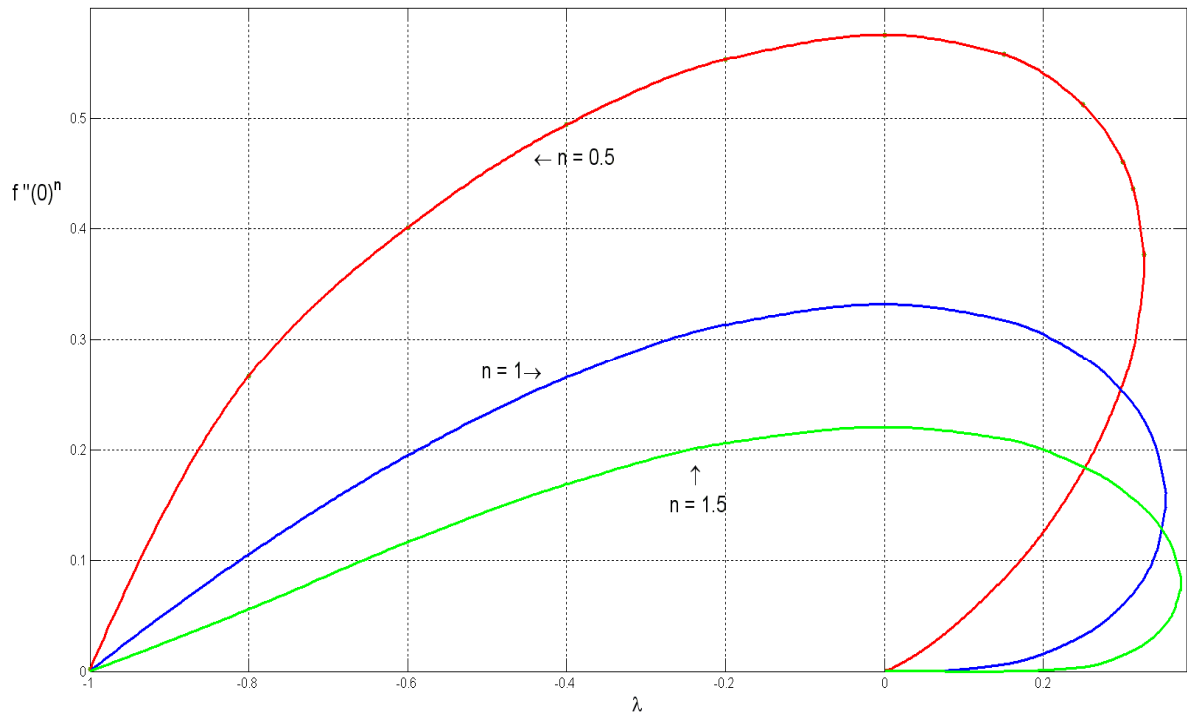
2.3.3. táblázat: h^* értékei

A 2.3.1 ábra $[f''(0)]^n$ változását mutatja, ha λ a $[-1, \lambda_{krit}]$ tartományban változik.

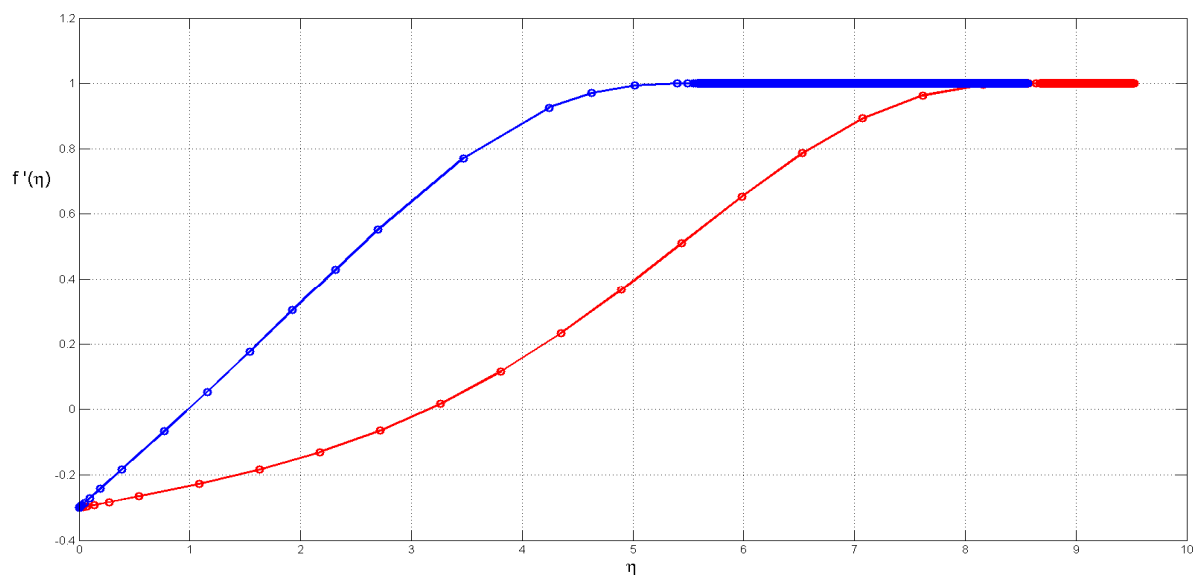
A 2.3.2 – 2.3.4 ábrákon az $f'(\eta) = u(x, y)/U_\infty$ sebességeloszlásokat mutatjuk be.

Mivel mindhárom esetben a $\lambda \in [0, \lambda_{krit}]$ volt érvényben, ezért két-két megoldást kapunk.

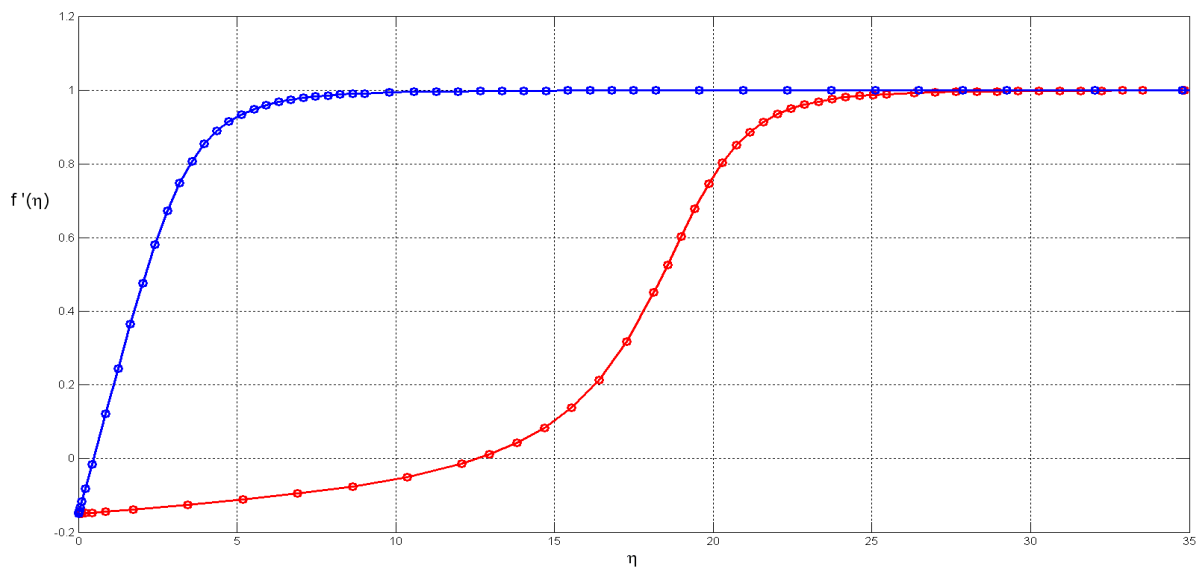
A 2.3.5– 2.3.6 ábrákon az $f''(\eta)$ grafikonjain a λ változásának hatását szemléltetjük különböző rögzített n értékekre. Mindkét esetben megfigyelhető $f''(\eta)$ eltérő viselkedése $\lambda > 0$ és $\lambda \leq 0$ értékekre.



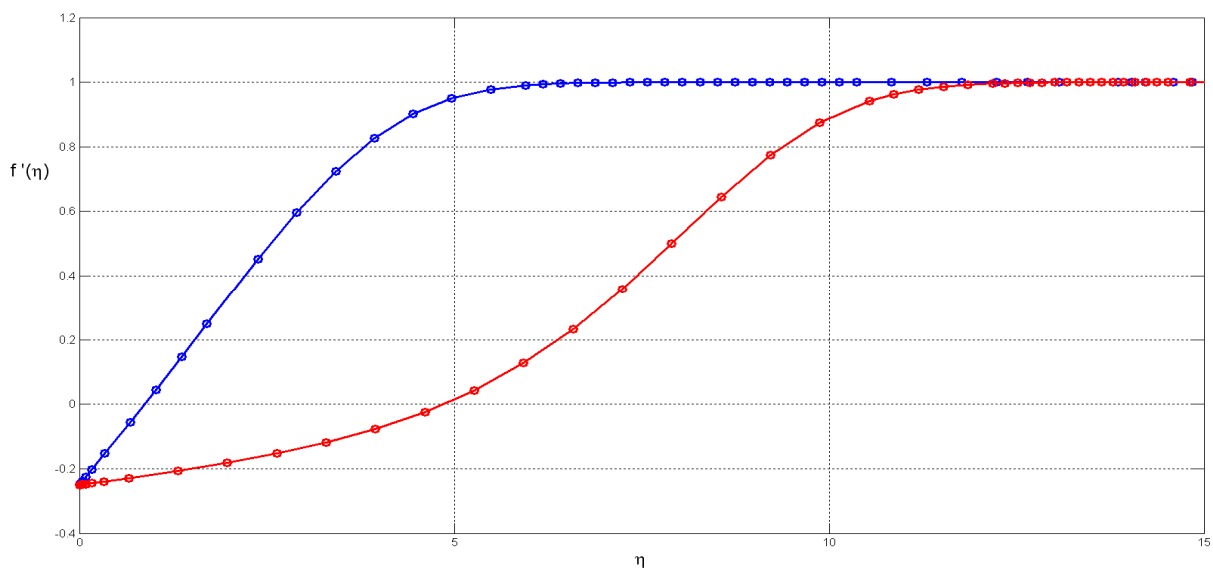
2.3.1. ábra



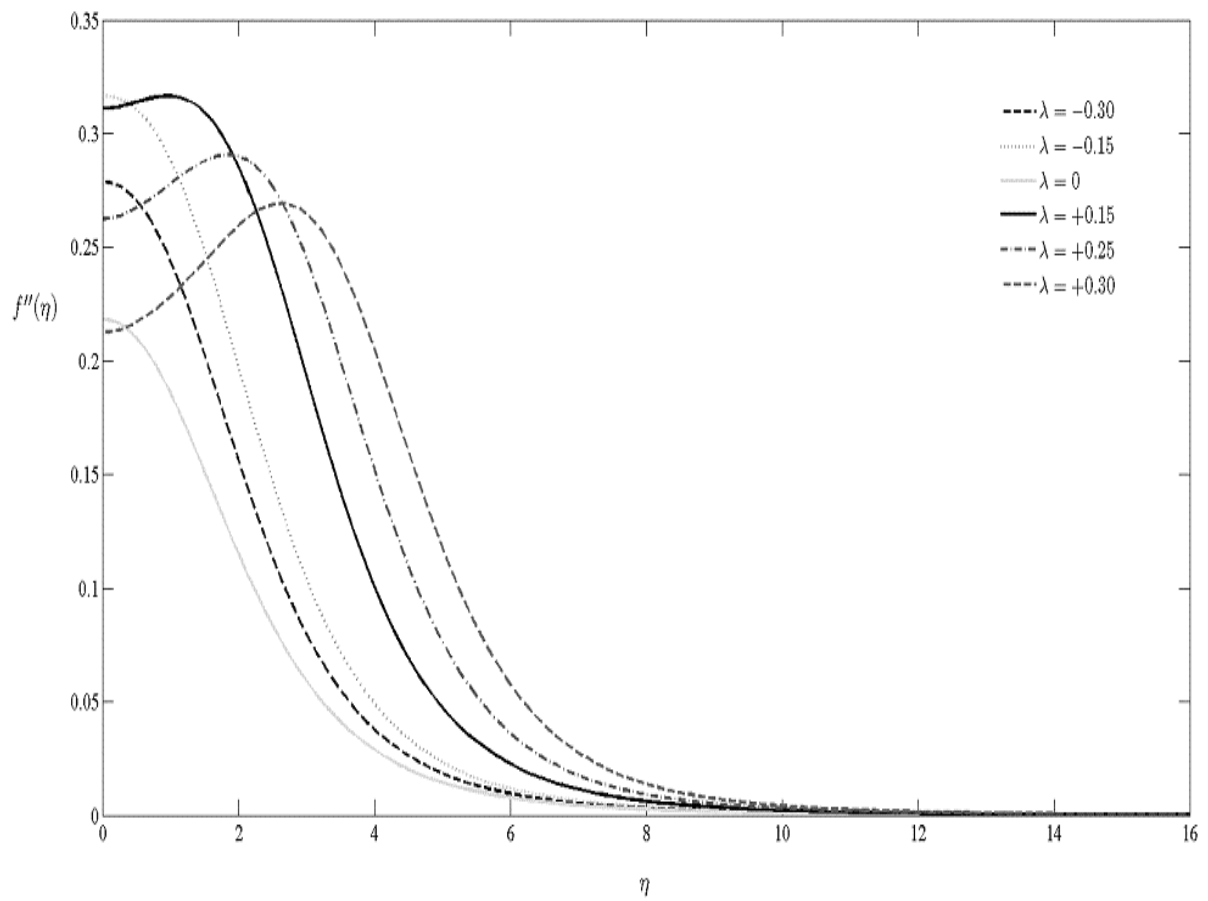
2.3.2. ábra: Sebességeloszlás $n = 1,5$ és $\lambda = 0,3$ esetén



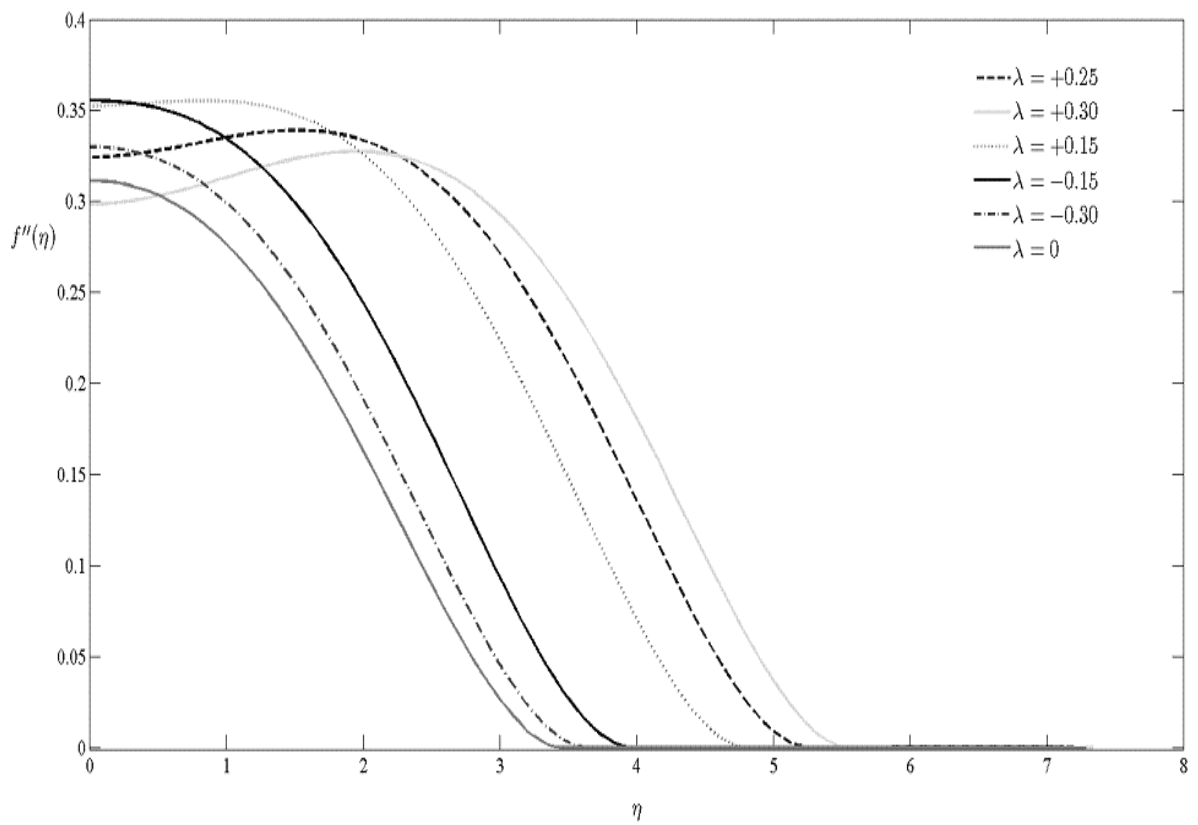
2.3.3. ábra: Sebességeloszlás $n = 0,5$ és $\lambda = 0,15$ esetén



2.3.4. ábra: Sebességeloszlás $n = 1$ és $\lambda = 0,25$ esetén



2.3.5. ábra: $f''(\eta)$ függvény menete eltérő λ -kra $n = 0,5$ esetén



2.3.6. ábra: $f''(\eta)$ függvény menete eltérő λ -kra $n = 1,5$ esetén

3. Hasonlósági megoldások összevetése az ANSYS Fluent kereskedelmi szoftverrel kapott numerikus eredményekkel

3.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben nem az (1.1)-(1.2) határréteg egyenleteket oldjuk meg, hanem közvetlenül a kontinuitási és a Navier-Stokes egyenleteket használjuk fel. A feladat jellegéből következik, hogy a mozgásegyenletek két dimenzióban a következő alakban írhatók:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (3.1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (3.1.2)$$

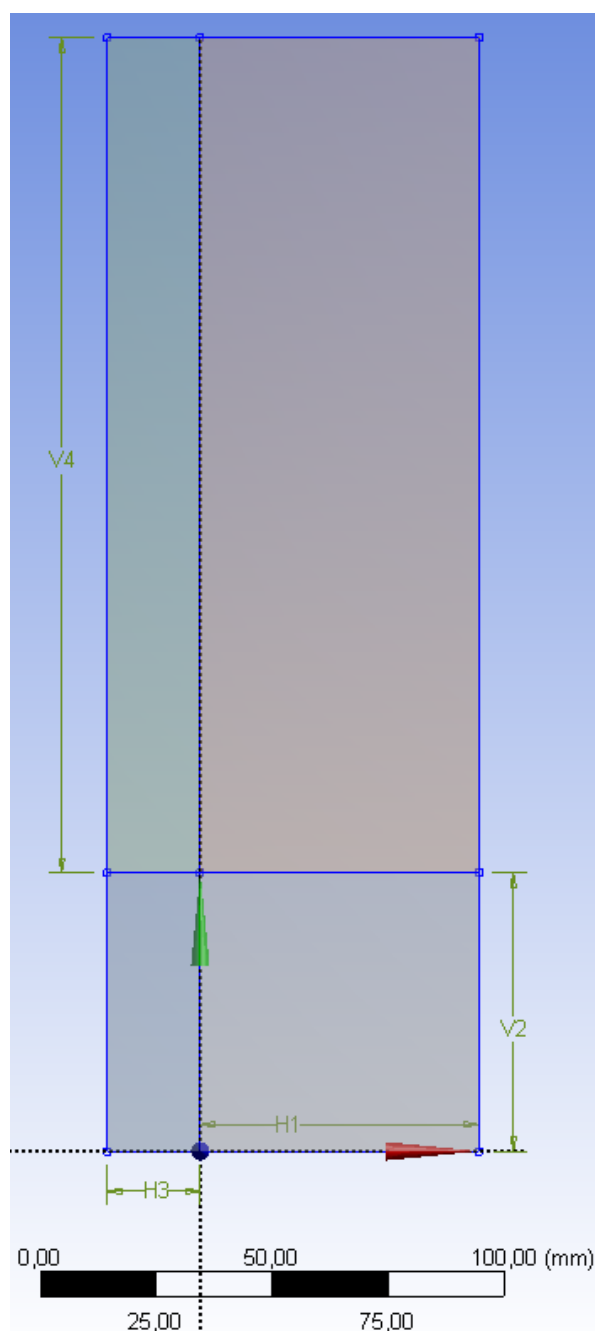
ahol hatványközeg esetén

$$\mu = K \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}.$$

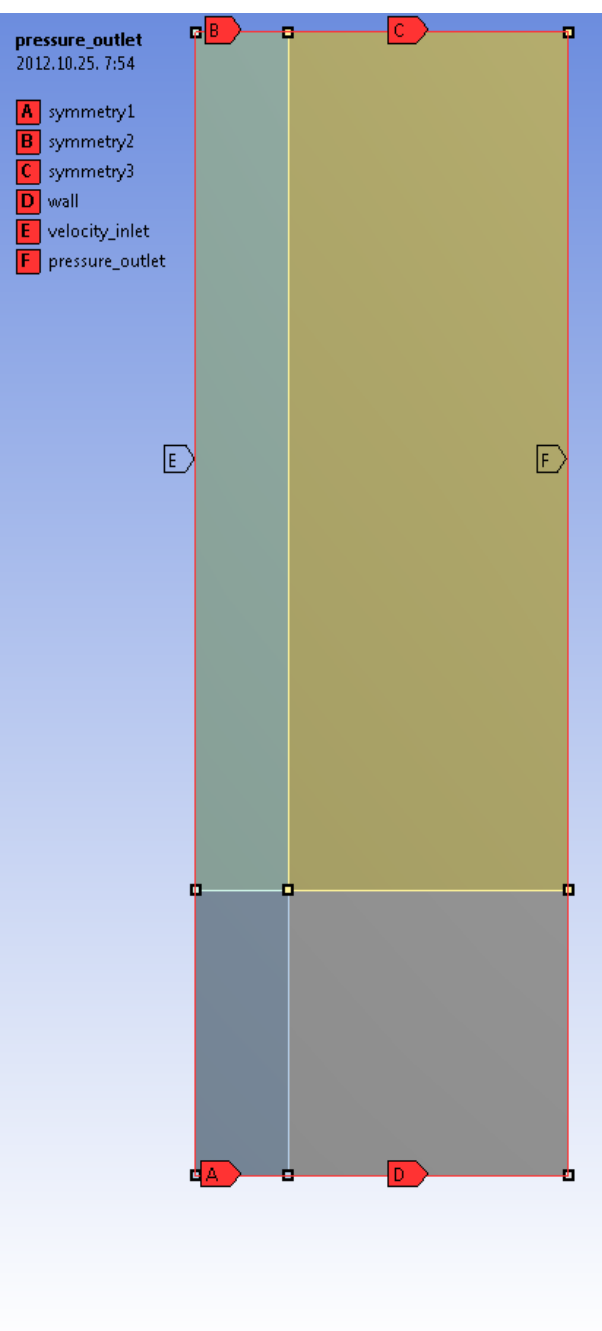
A kontinuitási egyenlet alakja megegyezik az (1.1) egyenlettel.

3.2. Geometria megadása

Az egyes modulokat (geometria felépítő, hálózó, megoldó) a *Workbench*-nek nevezett munkalapról kezeltük és ebben a sorrendben végeztük az egymás utáni lépéseket. Először létrehoztuk a geometriát a *DesignModeler*-ben, azután hálót generáltunk a *Meshing* segítségével, majd elvégeztük a megoldáshoz szükséges beállításokat a *Fluent*-ben, ahol ezek után az utófeldolgozást is megtettük.



3.2.1. ábra: Méretek



3.2.2. ábra: Oldalak elnevezései

A megoldás során az első lépés az áramlási tér létrehozása volt. Mivel a megoldásokat befolyásolja a geometria, ezért különböző típusú tartományokat és később hálókat hoztunk létre. A továbbiakban a három létrehozott geometriára illetve hálófélére *FFF1*, *FFF2* és *FFF3* néven hivatkozunk. Határréteg áramlásoknál legfontosabb az elegendően magas áramlási tér, hogy a sebesség állandó értékre tudjon beállni, így a fentebb említett három típus a tartomány magassági méretében tér el. A *Workbench*-ről először a *DesignModeler*-t nyitottuk meg, ahol *FFF3*-ra a 3.2.1 ábrán található vázlatot hoztuk létre. A három geometriára a méreteket a 3.2.1 táblázat tartalmazza.

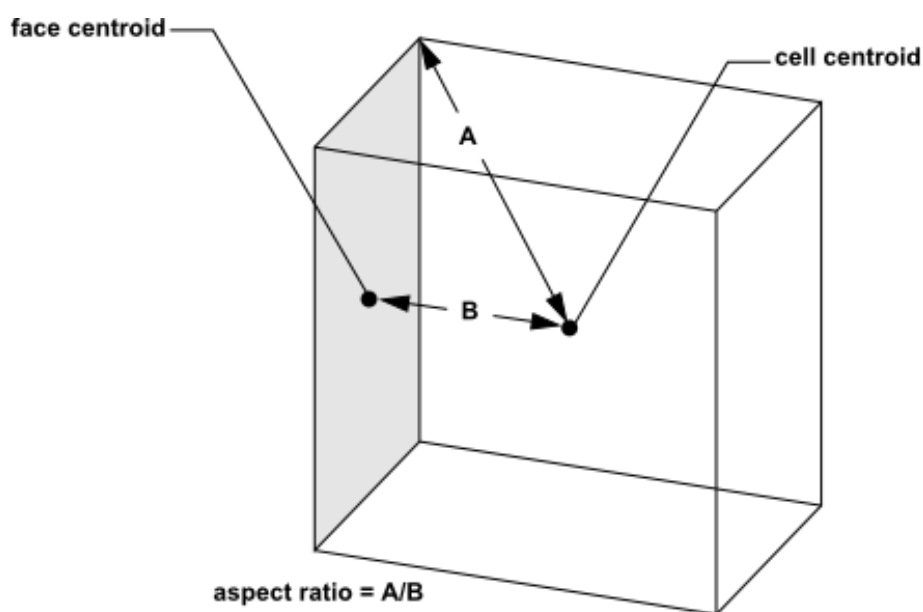
	<i>H1</i>	<i>H3</i>	<i>V2</i>	<i>V4</i>
	[mm]			
<i>FFF1</i>	60	20	60	0
<i>FFF2</i>	60	20	60	60
<i>FFF3</i>	60	20	60	180

3.2.1. táblázat

Az *FFF2* esetén a *V4-H3* és a *V4-H1* oldalhosszúságú felső két téglalap *V4* mérete kisebb, míg *FFF1* esetén csupán az alsó kettő téglalap van jelen. Minden vonalat névvel láttunk el – ahogy ez a 3.2.2 ábrán látható –, hogy a későbbiekben könnyebb legyen hivatkozni rájuk és a peremfeltételeket előírni. A *D*-vel jelölt síklap előtt hagytunk egy szakaszt, hogy ki tudjon alakulni zavartalan áramlás, amikor a folyadék eléri a lapot. Ezen kívül így kisebb lesz a síklap belépő élének hatása az áramképre. Ebben a dolgozatban csak a folyadék áramlását vizsgáltuk, a folyadéknak a síklapra és ebből következőleg a lapnak a folyadékra gyakorolt hatását nem számítottuk, így a lapot, mint külön testet nem kellett modellezni. A megfelelő pontok és szakaszok beállítása után a vázlatból felületet generáltattunk, mert csak erre lehet hálót készíteni. A projekt lementése után a hálózót nyitottuk meg.

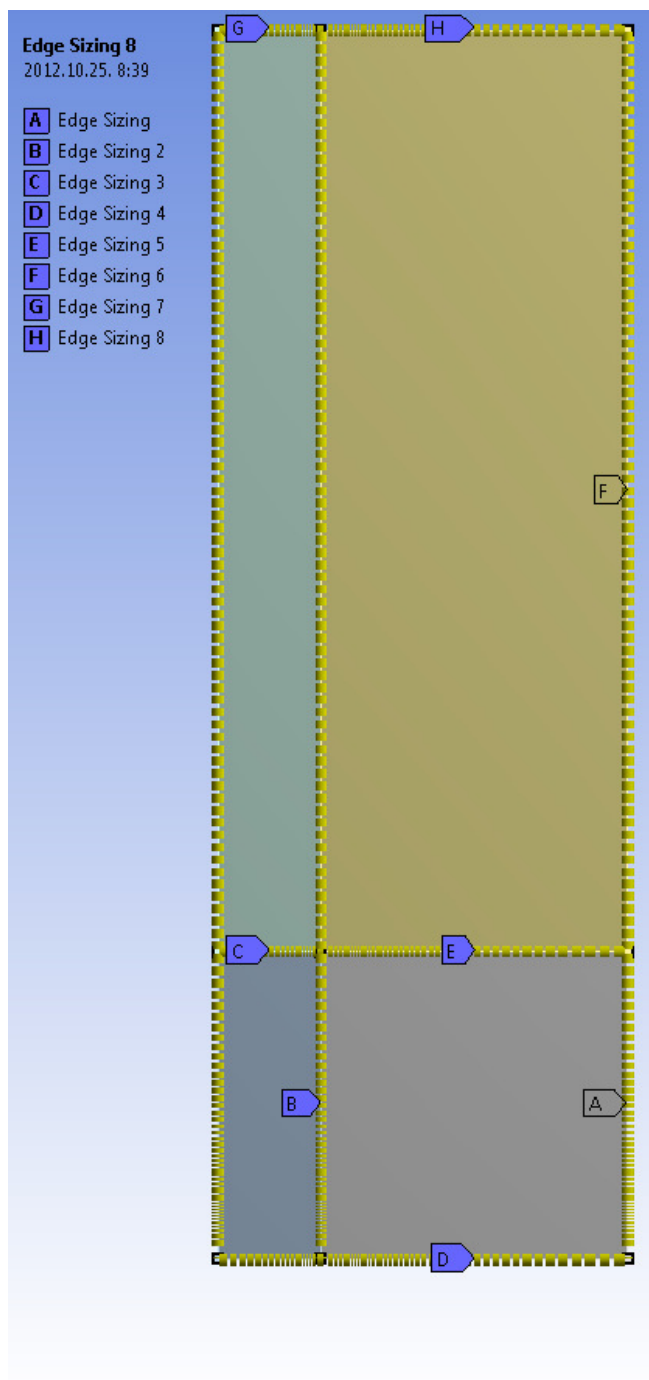
3.3. Háló létrehozása

A kétdimenziós strukturált hálót négy csomópontú négyszögelemekből építettük fel, amely az előző részben ismertetett szimmetrikus oldalosztás miatt téglalapelemekből áll. Ezzel elértük, hogy az elemek oldalai között a fajlagos szögtorzulás 0 legyen, amit a Fluent-ben megtekintve a *Minimum Orthogonal Quality* értéke 1 lett, azaz ilyen minőségi szempontból a lehető legjobb (0 és 1 között változhat az értéke). A háló minőségének másik mérőszáma az úgynevezett *Aspect Ratio*, aminek az értelmezése a 3.3.1 ábrán követhető.

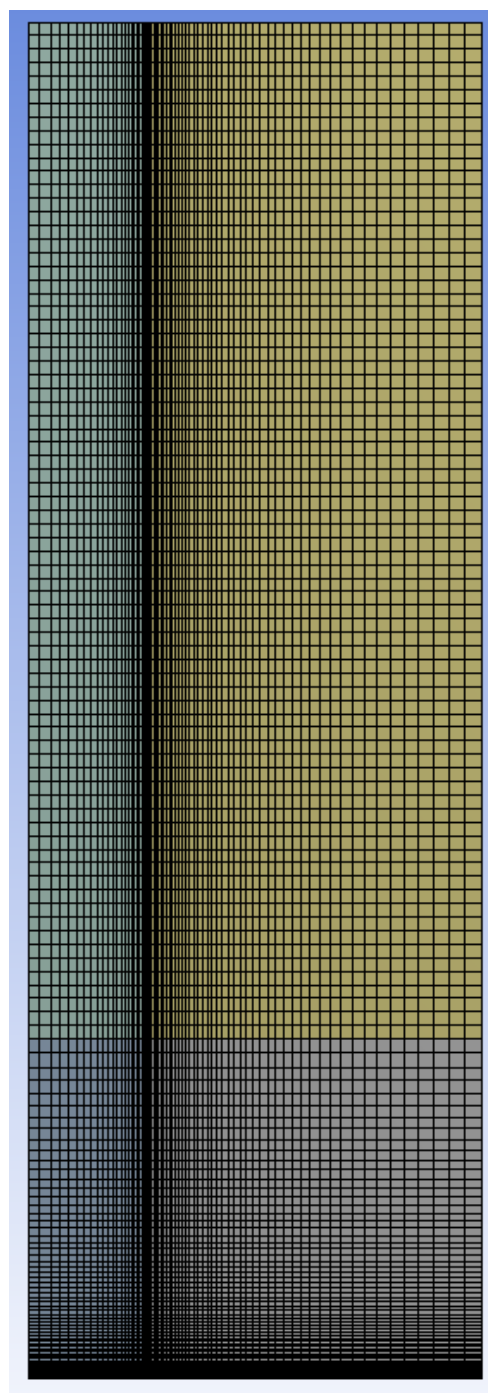


3.3.1. ábra: *Aspect Ratio* értelmezése

Az *Aspect Ratio* nagy lett – $1.20248e+01$ – ennek ellenére a megoldás gyorsan konvergált és a várt eredményt hozta. A háló létrehozása során minden beállítást alapértelmezetten hagytunk, a névvel ellátott szakaszokon megadtuk a hálózás sűrűségét. Használtunk *biasing*-et, ami az jelenti, hogy egy vonal felosztása nem egyenközű, hanem valamelyik irányban fokozatosan sűrűsödik, melynek mértéke a *bias factor*. A vonal menti felosztást a 3.3.2 ábra, az ez alapján generált hálót a 3.3.3 ábra mutatja.



3.3.2. ábra: Vonal menti felosztás



3.3.3. ábra: Generált háló

A cellaszám *FFF1*-nél 4200, *FFF2*-nél 5950, *FFF3*-nál 9450.

3.4. Megoldás előállítása

A háló exportálása után a további beállításokat a Fluent-ben tettük meg. Az előző fejezetben leírt hálóminőség ellenőrzést itt végeztük el. A Fluent nem jelzett rossz minőségű elemeket. A korábban említett nagy *Aspect Ratio* miatt dupla pontosságú számítással inicializáltuk a Fluent programot, mert az egyszeres pontosságú számítás ebben az esetben nem mindig ad jó eredményt [1].

Az ANSYS Fluent szoftver a véges térfogatok elvén működik, ahol a megoldás folyamata az alábbiakban foglalható össze [1]:

- tartomány felosztása véges térfogatokra,
- alapegyenletek integrálása az ellenőrző térfogatokon,
- ismeretlenek meghatározása (sebesség, nyomás, sűrűség, hőmérséklet, stb.),
- diszkretizált egyenletek linearizálása, majd megoldása (Gauss-Seidel-iterációval).

A Fluent-be két féle megoldó van beépítve: a *Pressure-Based* és a *Density-Based*. A megoldó típusát *Pressure-Based*-re állítottuk, ami alapvetően kis sebességű összenyomhatatlan közeg áramlásának megoldására alkalmas. Ugyanitt megadtuk, hogy állandósult állapotot vizsgálunk és síkbeli az áramlás, továbbá gravitációval nem számoltunk.

A modellek kiválasztása során minden alapértelmezett maradt, tehát az energiaegyenletet nem vettük a megoldandó egyenletek közé és a viszkozitásnál lamináris típust adtunk meg.

Ezek után az anyagot definiáltuk. Három típusú anyaggal foglalkoztunk. Az első egy newtoni folyadék, a víz. A másik két anyag egy dilatáló és egy pszeudoplasztikus nem-newtoni közeg. A jellemző adatokat a 3.4.1 táblázat tartalmazza SI mértékegységben. A dilatáló és a pszeudoplasztikus közeg adatai a [4] helyről származnak és 20% homokot, 80% vizet, illetve sáros vizet tartalmazó oldat jellemző értékei.

megnevezés	víz	dilatáló	pszeudoplasztikus
sűrűség (kg/m ³)	998	1340	1070
hatványtörvény kitevő	1	1,475	0,8
konzisztencia index (kg·s ⁿ⁻² /m)	0,001005	0,000313	0,319
minimum viszkozitás (kg/(m·s))		0,0005	0,01
maximum viszkozitás (kg/(m·s))		0,02	0,1

3.4.1. táblázat: Vizsgált anyagok adatai

A 3.4.2. táblázatban a beállított peremfeltételeket közöljük. Első oszlopában a névvel jelölt szakaszok, második oszlopában az alkalmazott peremfeltétel típusok helyezkednek el.

szakasz	peremfeltétel
symmetry1	symmetry
symmetry2	symmetry
symmetry3	symmetry
wall	wall
velocity_inlet	velocity-inlet
pressure_outlet	pressure-outlet

3.4.2. táblázat: Alkalmazott peremfeltételek

A peremfeltételek jelentései az alábbiak. A *velocity-inlet* előírt bemenő sebességet, a *pressure-outlet* a kiáramló közeg nyomását, a *wall* a falat, a *symmetry* pedig a tengelyszimmetrikus tulajdonságot jelenti. Bemenő sebességnél az *x*-irányú komponenszt adtuk meg (minden esetben $u = 0,2 \frac{m}{s}$ -ot), az *y*-irányút 0-ra állítottuk és vigyáztunk arra, hogy csak akkora értéket adjunk, ami esetén az áramlás még lamináris. A Reynolds-szám semelyik anyagnál sem haladta meg a 10^5 értéket. A kiáramlási nyomást 0-nak vettük, ami túlnyomást jelent az előzőleg felvett légköri nyomáshoz képest. A fal típusú peremfeltételt annak megfelelően állítottuk, hogy a lap mozgott-e, és ha igen, melyik irányban. Csúszással (*slip*) egyik esetben sem számoltunk. Ha állt a lap, akkor a *Stationary Wall*-t, ha mozgott, akkor a *Moving Wall*-t alkalmaztuk. A *symmetry* egy olyan feltétel, amelynél a szimmetriasíokban a normális irányú sebességkomponens és az összes változó normális irányú gradiense zérus.

A megoldási módszer beállítása a *SIMPLE* séma szerint történt. A mozgásegyenlet közelítésére a program a *Second Order Upwind* nevű, véges differenciák módszeréhez hasonló úgynevezett upwind módszerrel dolgozik. Minden mást az automatikusan felajánlott értéken hagytunk.

Ahhoz, hogy a síklapon több helyen meg tudjuk határozni az áramlási jellemzőket, a lapra merőlegesen a lap elejétől számítva $0,02\text{ m}$, és $0,04\text{ m}$ távolságokra egyeneseket vettünk fel, amelynek mentén vizsgálhattuk az y -irányú eloszlásokat.

A hibát monitoroztattuk, és amikor kisebb lett 10^{-8} -nál, leállítottuk az iterációt. A későbbi hibabecslés miatt a hálót a teljes áramlási térben egyenletesen sűrítettük a *Region Adaption* menüpontban. Először x és y irányban kétszeres, majd utána négyszeres sűrítést alkalmaztunk, így a háló cellaszáma négyszeres illetve tizenhatszoros lett. Az értékeket összefoglaltuk a 3.4.3 táblázatban

Hálótípus	alap	4-szeres	16-szoros
<i>FFF1</i>	4200	16800	67200
<i>FFF2</i>	5950	23800	95200
<i>FFF3</i>	9450	37800	151200

3.4.3. táblázat: Cellaszám alakulása az egyes hálóknál

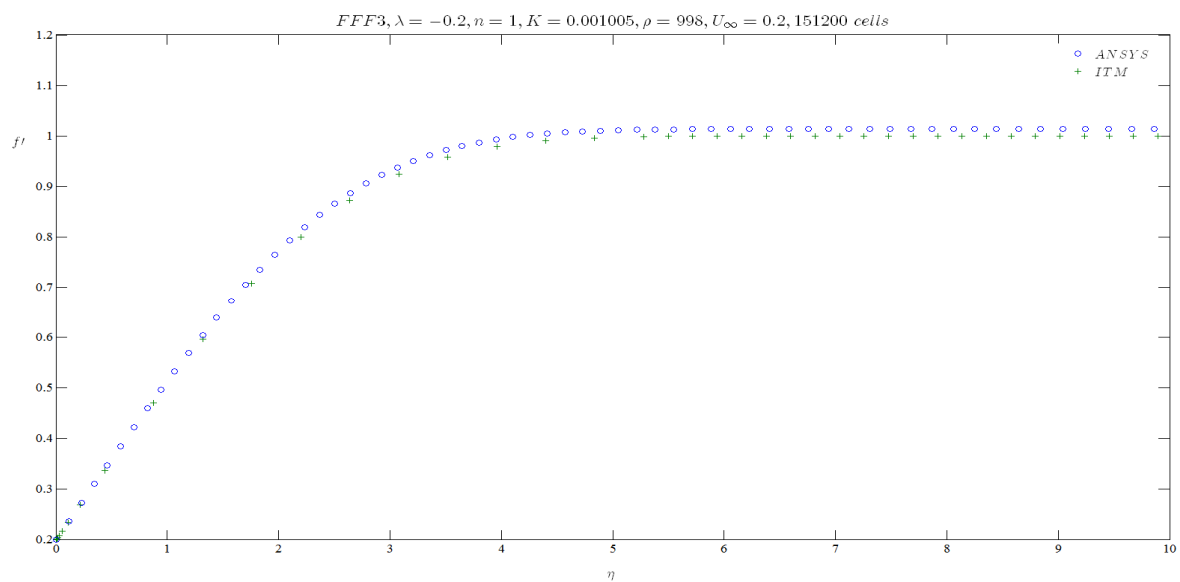
Miután megfelelő számú helyen rendelkezésünkre álltak a meghatározandó sebességértékek, ezeket ábrázoltuk az y -tengely mentén. Ezen sebességeloszlásokat ábrázolja víznél álló ($\lambda = 0$), áramlással megegyező ($\lambda = -0,2$), áramlással ellentétes irányban ($\lambda = 0,2$), a szabad áramlás sebességének ötödével mozgó lap esetén a 3.4.1, 3.4.2 és 3.4.3 ábra, megjelenítve a hasonlósági megoldásból származó görbéket is (+ : ITM). A jelmagyarázatban az ITM az iteratív transzformációs módszert rövidíti. Kék körökkel az ANSYS szoftverrel kapott numerikus értékeket, zöld keresztekkel a hasonlósági megoldásból származó pontokat jelöltük. A képaláírásoknál minden mennyiség mértékegysége SI-ben értendő. Mindegyik sebességeloszlás ábra az $f'(\eta) - \eta$ rendszerben készült, hogy az alkalmazott sebességtől függetlenül legyen összehasonlítási alap.

A megoldás pontosságát jelzi az a tény, hogy a kiáramló és a befolyó folyadék tömegáramának különbsége $1,0068391\text{e-}11$. Valójában zérusnak kell lennie, mert az áramlási térben nincsenek sem források, sem nyelők, amit a kontinuitási egyenlet $\text{div } \vec{v} = 0$ alakja is mutat.

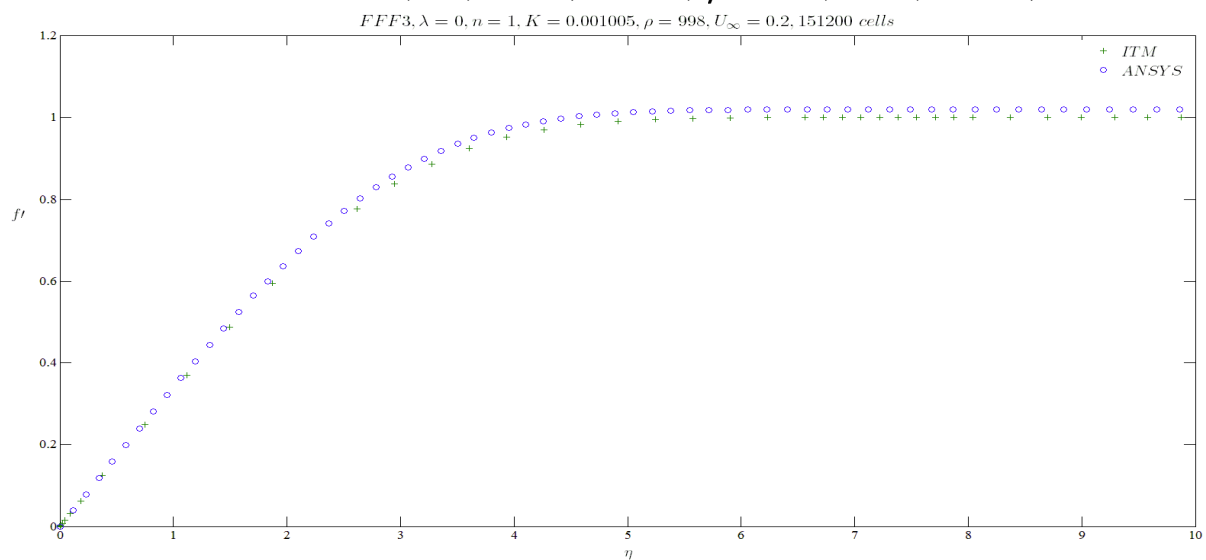
Az előző fejezetben bemutatott három háló közül a newtoni és a dilatáló folyadéknál a legmagasabb (*FFF3*) hálón készült megoldásokat szemléltettük, míg a pszeudoplasztikus közegnél mindhárom hálótípuson megmutatjuk a görbék jellegét.

Négy paramétert változtattunk: a hálótípust, a háló sűrűségét, a hatványtörvény kitevőt és a síklap és a folyadék sebességének hányadosát.

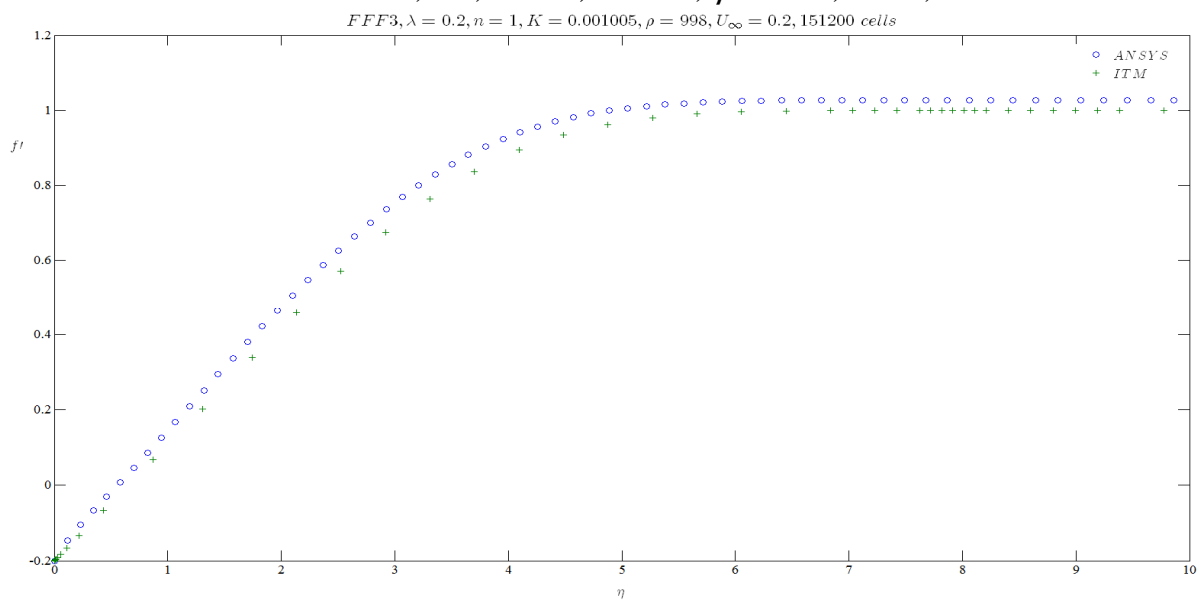
Newtoni folyadékra a sebességprofilok a 3.4.1 – 3.4.3 ábrákon, dilatáló közegre a 3.4.4 – 3.4.6 ábrákon, míg pszeudoplasztikus közegre a 3.4.7 – 3.4.11 ábrán láthatók.



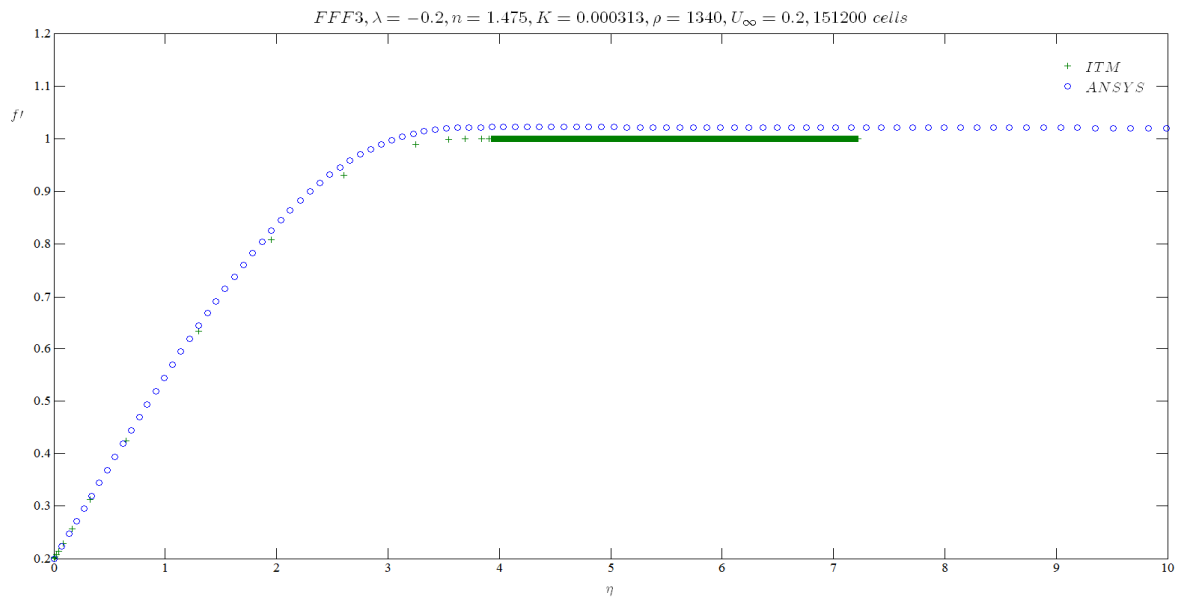
3.4.1. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = -0,2$



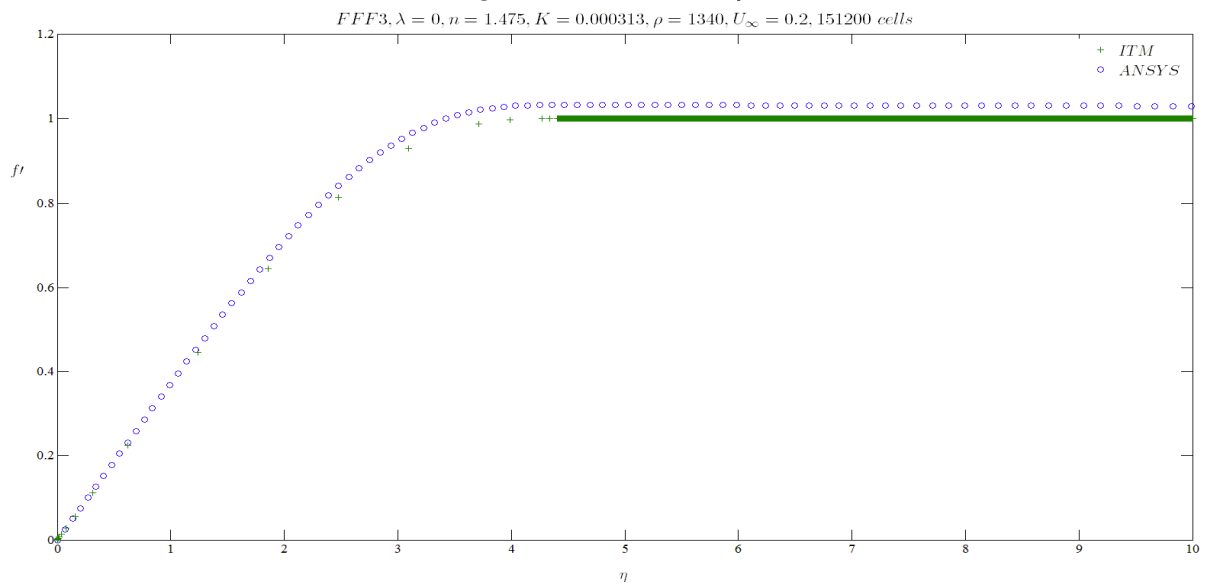
3.4.2. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = 0$



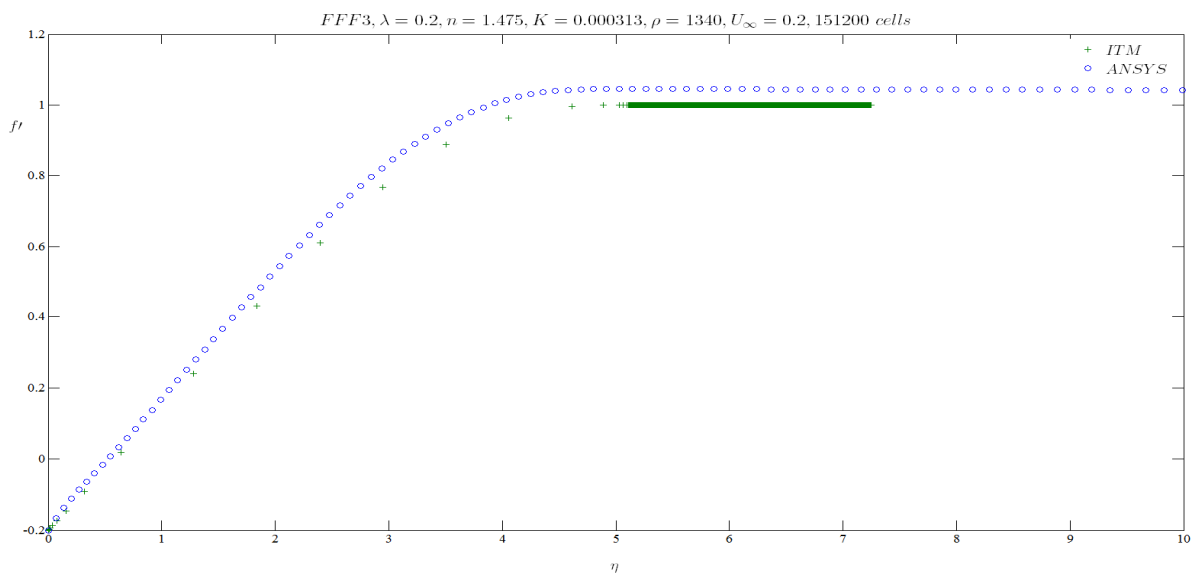
3.4.3. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = 0,2$



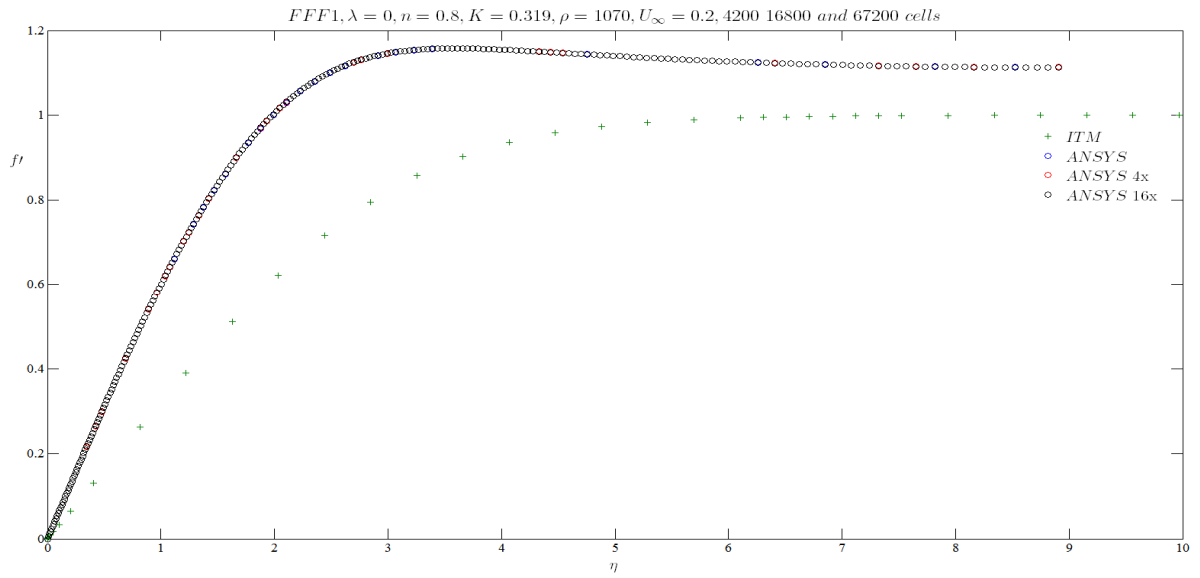
3.4.4. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = -0,2$



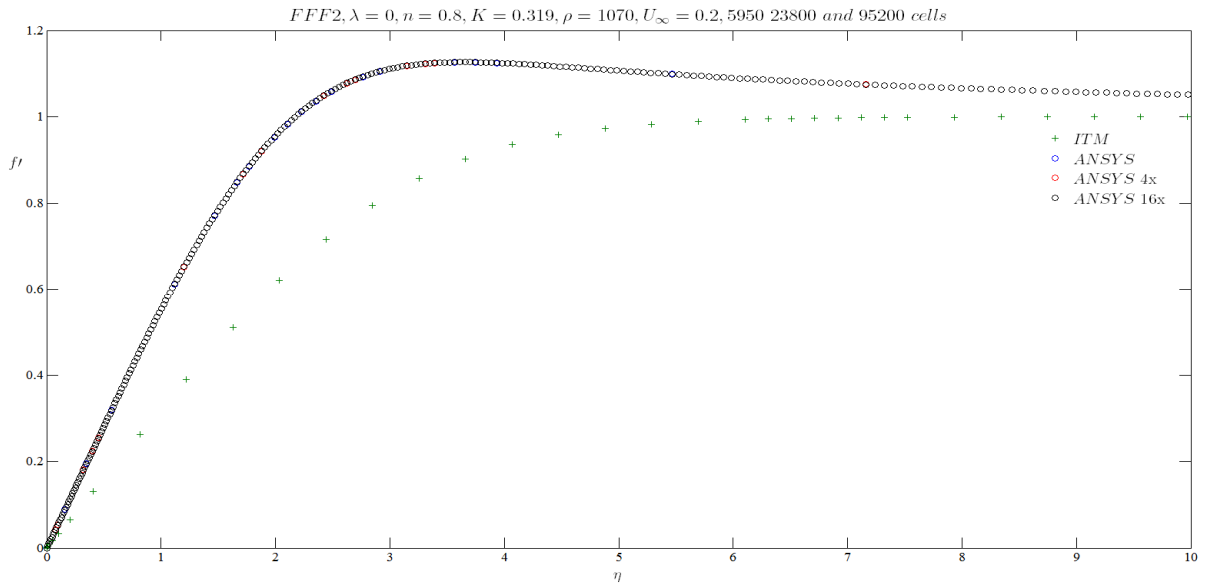
3.4.5. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = 0$



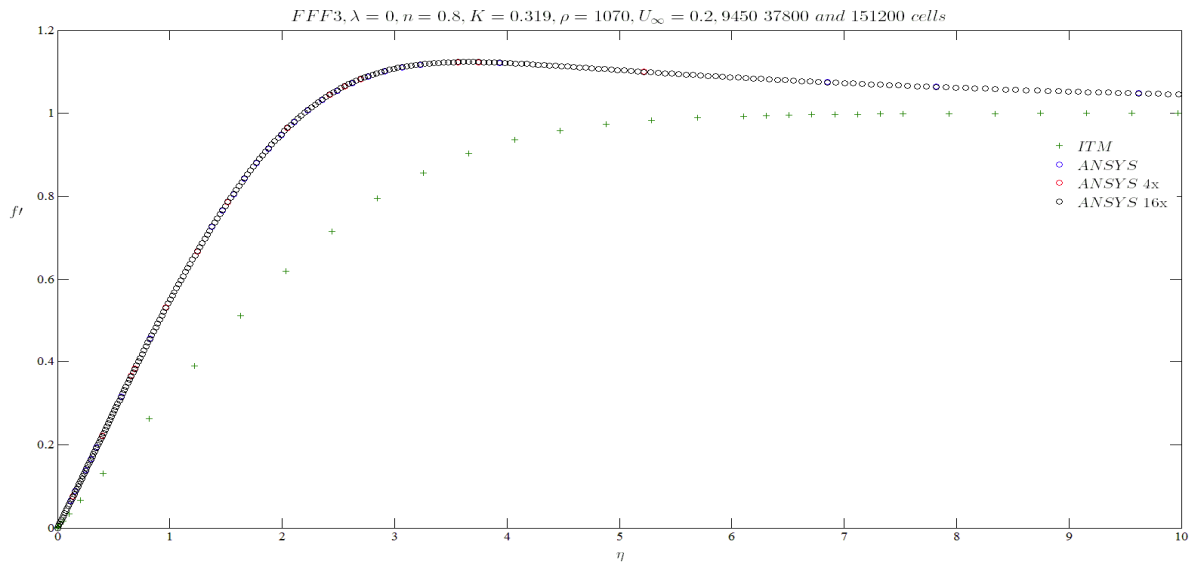
3.4.6. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = 0,2$



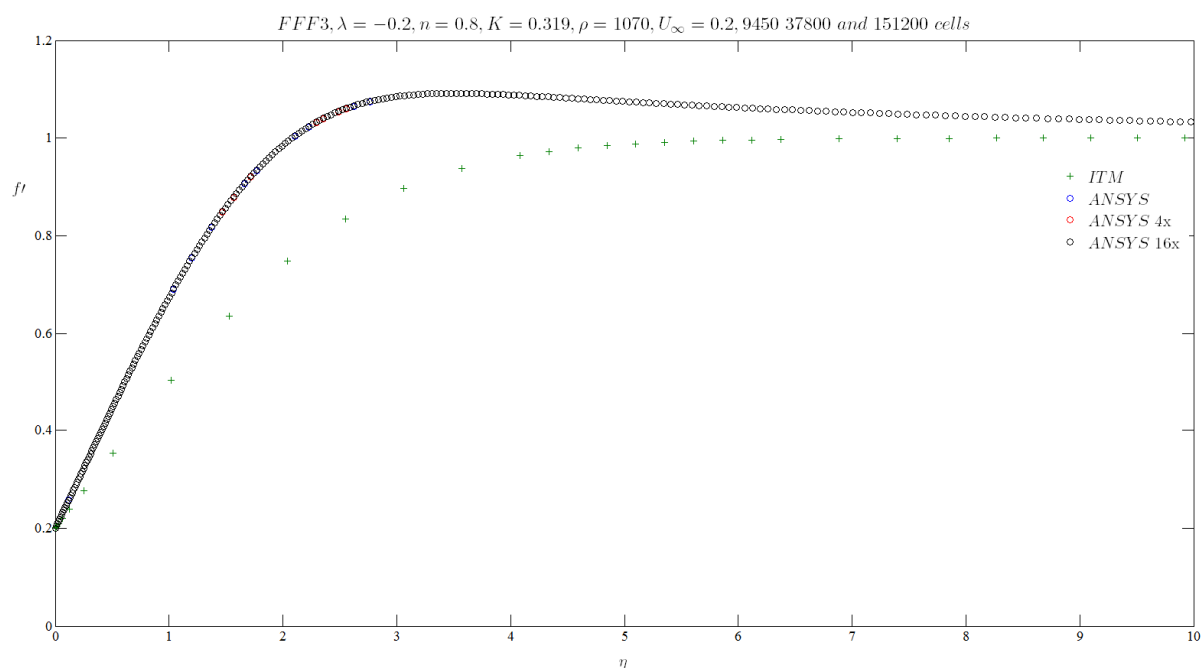
3.4.7. ábra: FFF1, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



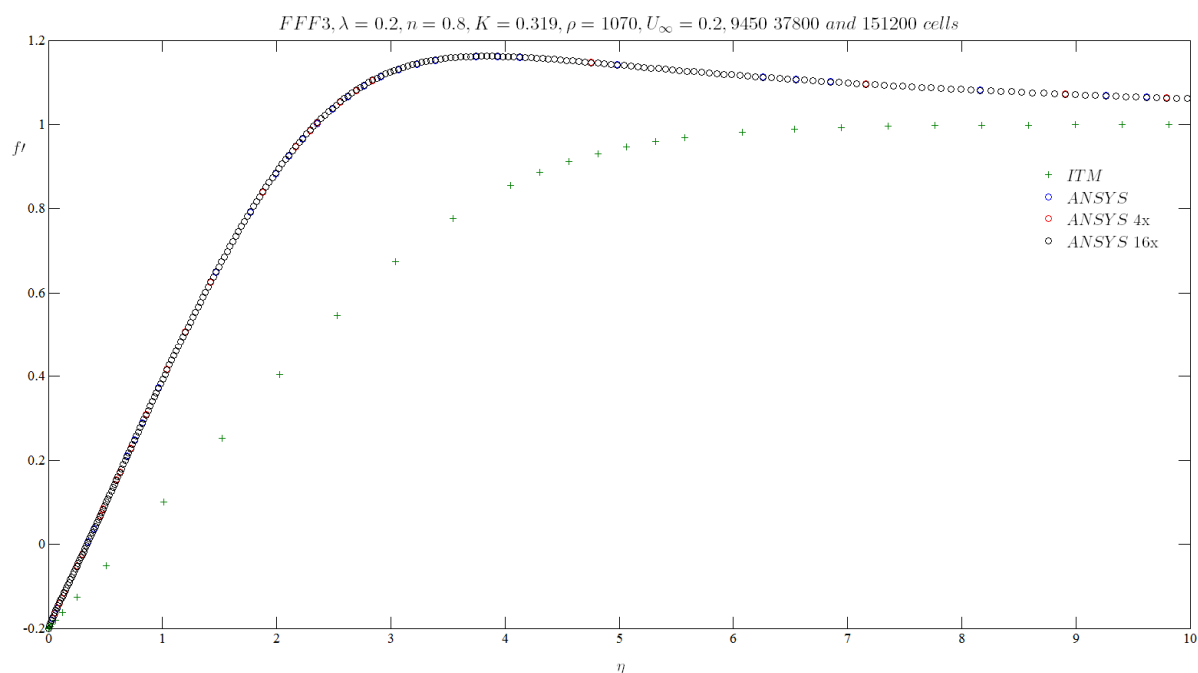
3.4.8. ábra: FFF2, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



3.4.9. ábra: FFF3, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



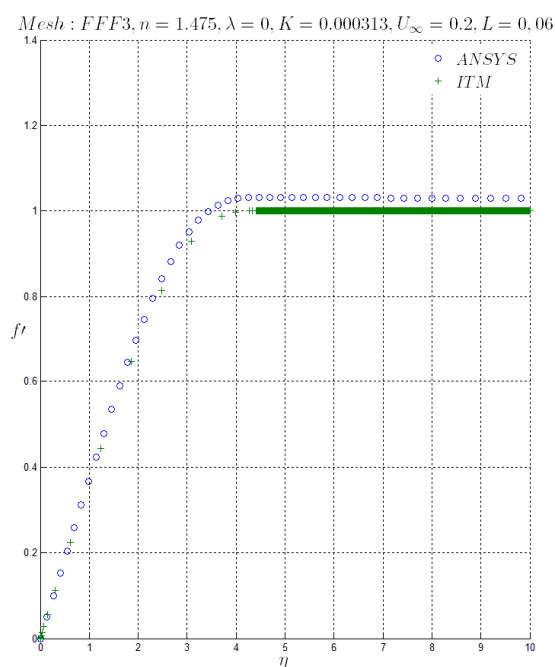
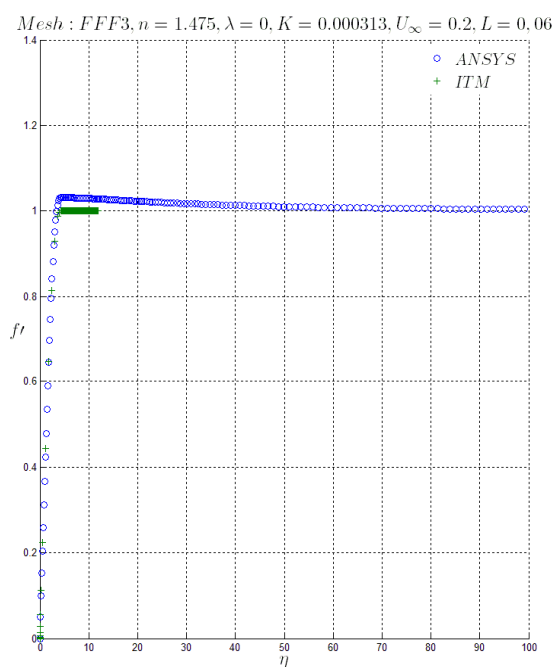
3.4.10. ábra: FFF3, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = -0,2$



3.4.11. ábra: FFF3, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0,2$

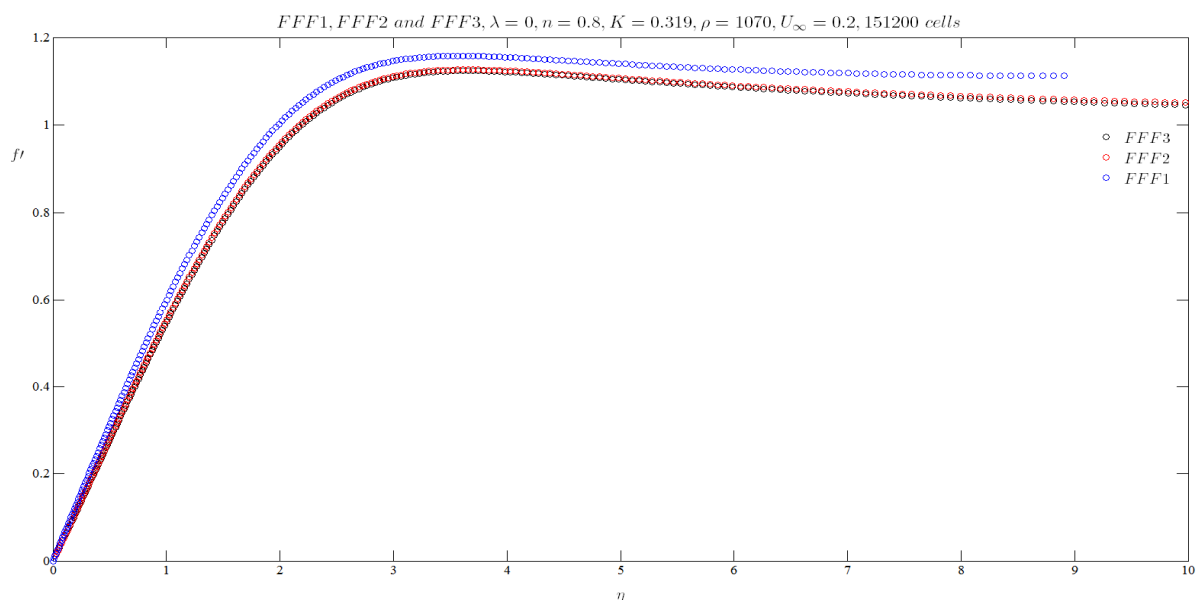
Megállapítható, hogy a görbék kezdeti, felfutó szakaszában a newtoni, és a dilatáló folyadék esetén is, mind álló, mind az áramlással egyirányban mozgó lap vizsgálata mellett jól illeszkedett az ANSYS szoftverrel kapott megoldás görbéje a hasonlósági megoldás görbéjéhez. Pszeudoplasztikus folyadéknál a közelítés nagyon rossz, ami valószínűleg a $51 \ll 10^5$ Reynolds-szám miatt van. Az összehasonlító ábrák elkészítéséhez a Fluent-tel kapott $u(y)$ függvény diszkrét értékeit átváltottuk az

$f'(\eta)$ rendszerbe. Ahhoz, hogy szemléletes képet kapjunk a sebességprofilok jellegéről, az ábrákon az $\eta \leq 10$ tartományt tüntettük fel. Viszont a Fluent által nyert megoldás vízre $\eta \approx 437$ helyen állt be az előírt U_∞ értékre, ezért tűnik úgy, mintha a numerikus megoldás nem tartana U_∞ -hez. Ezen jelleg a 3.4.12 ábrán látható, ahol az is megfigyelhető, hogy az eloszlásgörbében van egy ugrás, így az U_∞ sebességnél nagyobb sebesség adódik. Ezt a jelenséget más eljárással kapott eredmények esetén is megfigyelték [13]. Az összes többi sebességeloszlás esetén is ez a viselkedés volt látható.



3.4.12. ábra: Összehasonlító görbék $\eta > 10$ -re

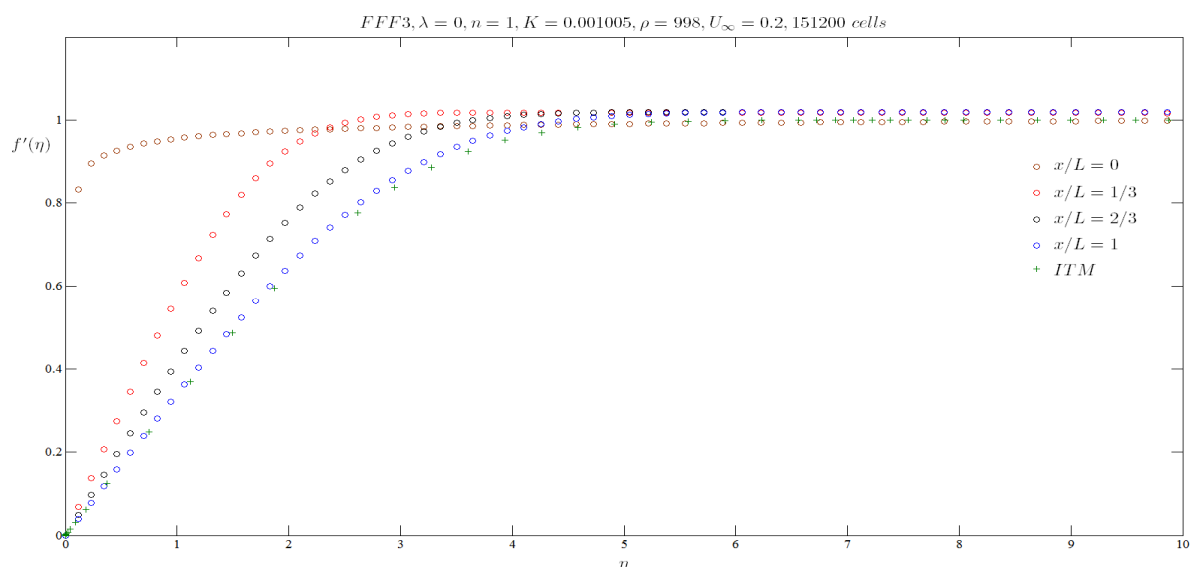
Mindhárom anyagnál a legjobban egyező megoldásokat akkor kaptuk, ha a síklap az áramlás irányával megegyezően mozgott. Különösebb eltérés akkor sem volt, ha a lap állt. Viszont ha a lap szemben mozgott a folyadékáramlással, akkor nagyobb különbséget tapasztaltunk a hasonlósági és a numerikus megoldás között. Nyírásra vékonyodó anyagnál ez a különbség szemben mozgó lapnál még jelentősebb lett. Habár csak a pszeudoplasztikus közegnél mutattunk be olyan ábrákat, ahol a különböző sűrítések hatását vizsgáltuk, a másik két anyagnál is ugyanazt a következtetést lehet levonni, hogy már a legritkább háló is elegendő a megfelelő pontokban a sebesség meghatározására. A 3.4.13 ábrán azt mutattuk be, hogy a magasság növelése hogyan befolyásolja a megoldást.



3.4.13. ábra: FFF1, FFF2, FFF3, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$,
 $n = 0,8$, $\lambda = 0$

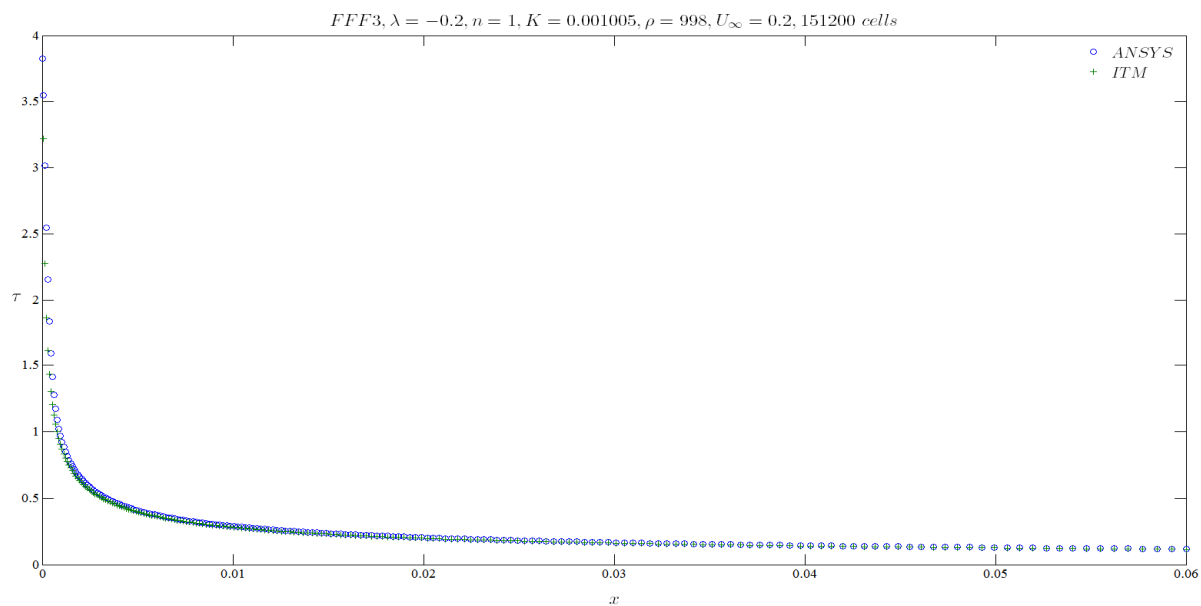
Látható, hogy szükséges a 120 mm magasság, mivel a 60 mm nem elég. Azonban a 240 mm már nem okoz jelentős változást még pszeudoplasztikus folyadék esetén sem, ahol a legvastagabb a határréteg.

A 3.4.14 ábrán szemléltettük az álló 6 cm hosszúságú, áramlásba helyezett síklap felett kialakuló sebességprofilokat a síklap belépő élétől vett különböző távolságokban. A négy görbét ($x/L = 0, x/L = 1/3, x/L = 2/3$ és $x/L = 1$) és az iteratív transzformációs eljárással kapott megoldást összevetve látható, hogy $x/L = 0$ növelésével a megoldások egyre közelítik a kilépő élnél kiszámított hasonlósági megoldást.

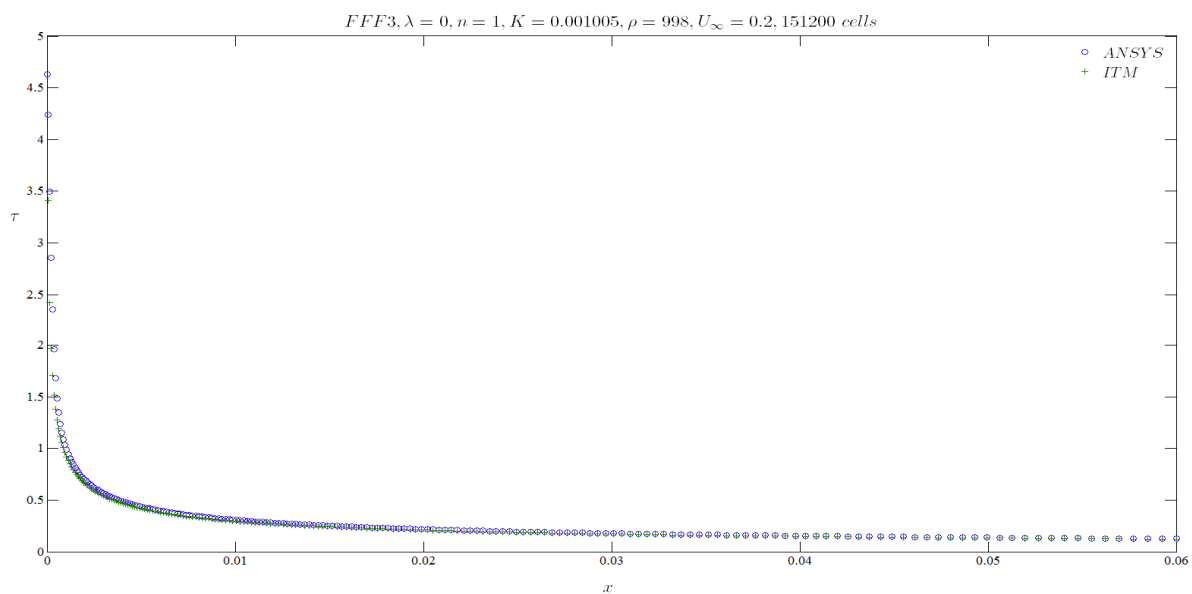


3.4.14. ábra: FFF1, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = 0$

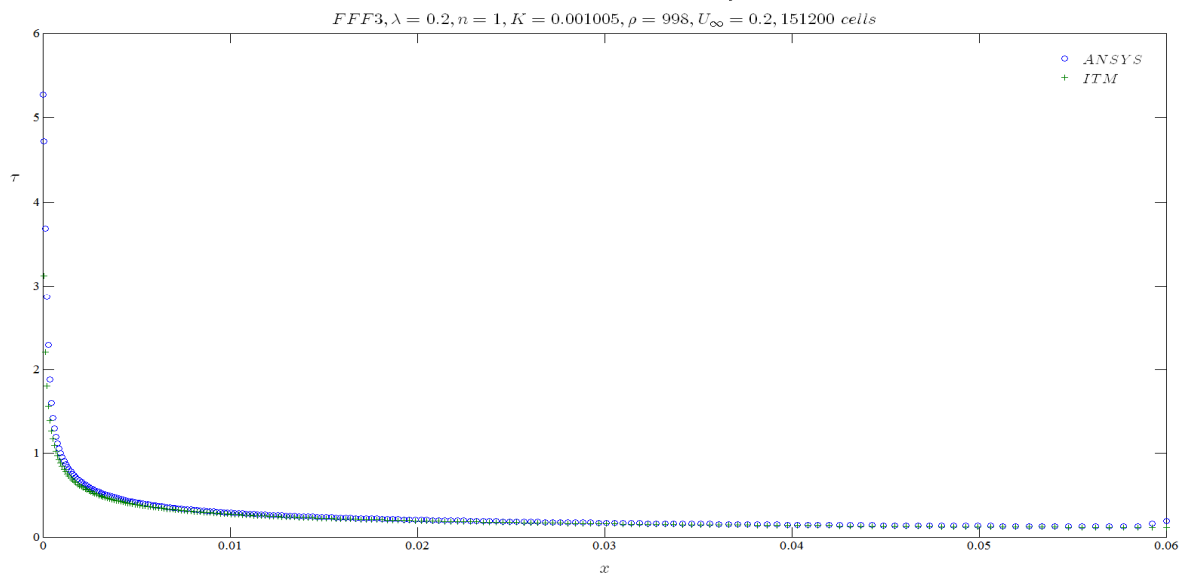
Elvégeztük a gyakorlat szempontjából fontos fal menti nyírófeszültség kiszámítását és a hasonlósági megoldással való összevetését is. A kétféle megoldás eredményét egy-egy grafikonon ábrázoltuk a 3.4.15 – 3.4.25 ábrákon látható módon. Mivel a nyírófeszültségnél a kétféle megoldásnál nem látható markáns különbség, ezért a 3.4.24 ábrán nem az $x \in [0; 0,06]$, hanem az $x \in [0; 0,005]$ intervallumon ábrázoltunk.



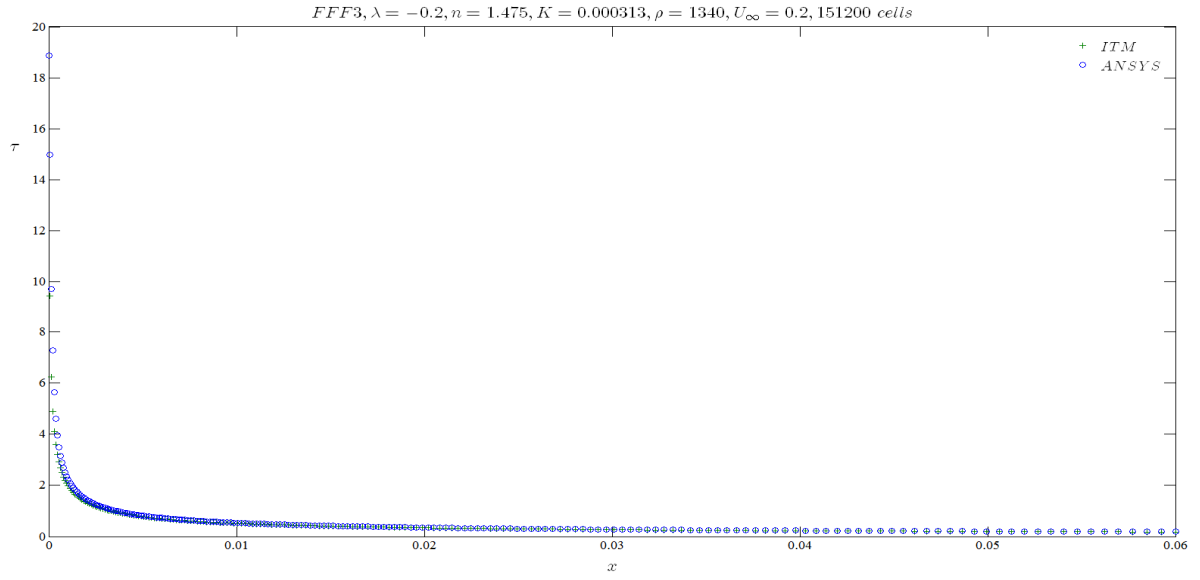
3.4.15. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = -0,2$



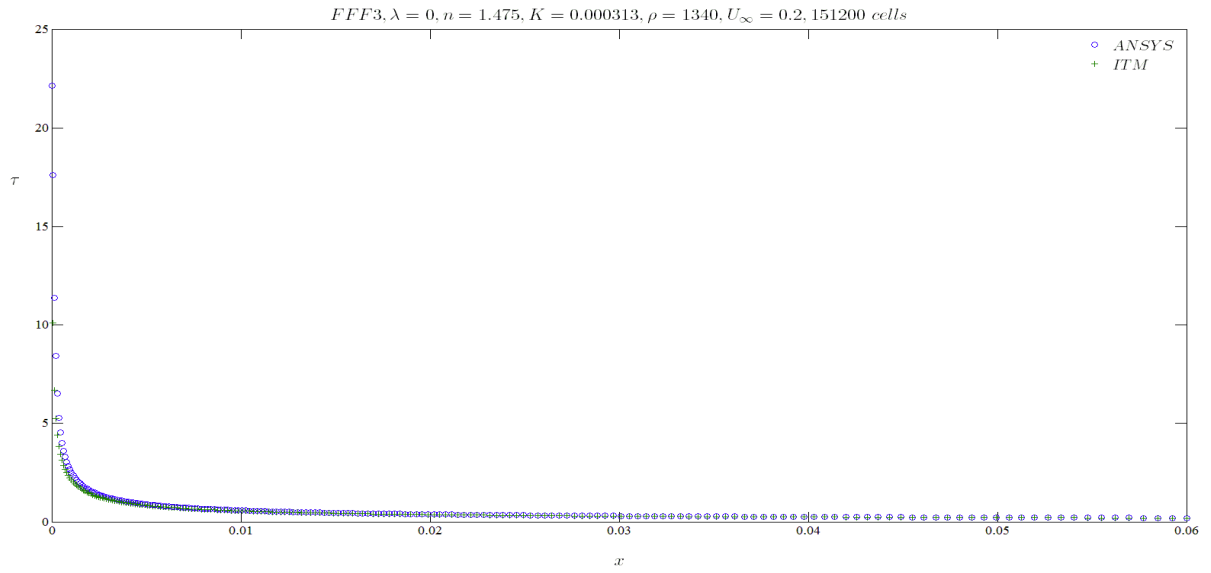
3.4.16. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = 0$



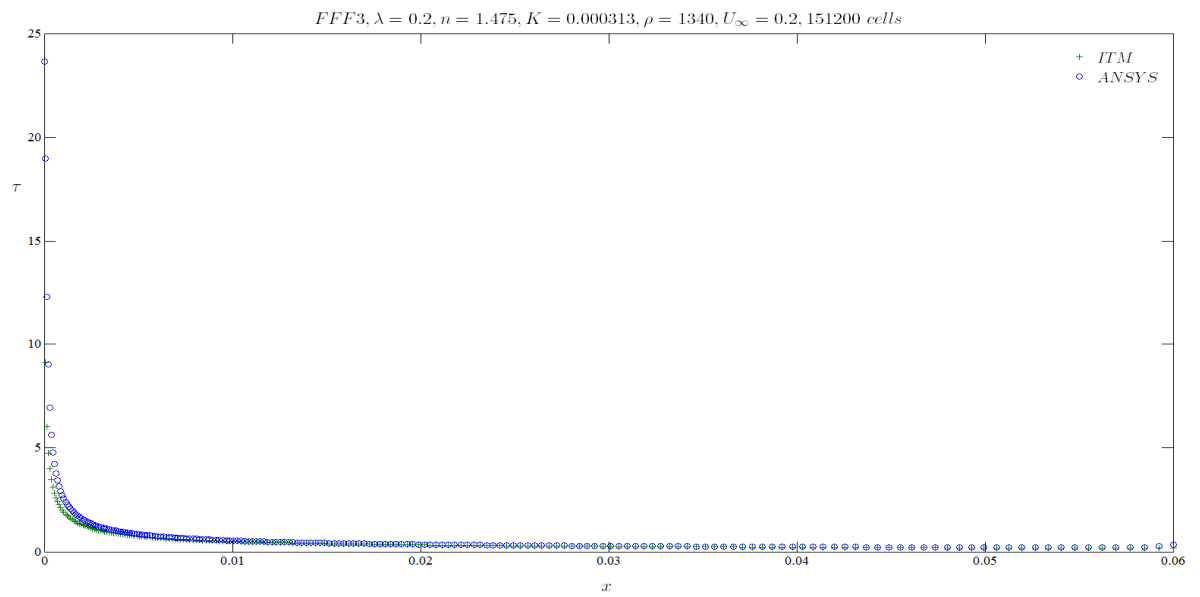
3.4.17. ábra: FFF3, víz, $K = 0,001005$, $\rho = 998$, $n = 1$, $\lambda = 0,2$



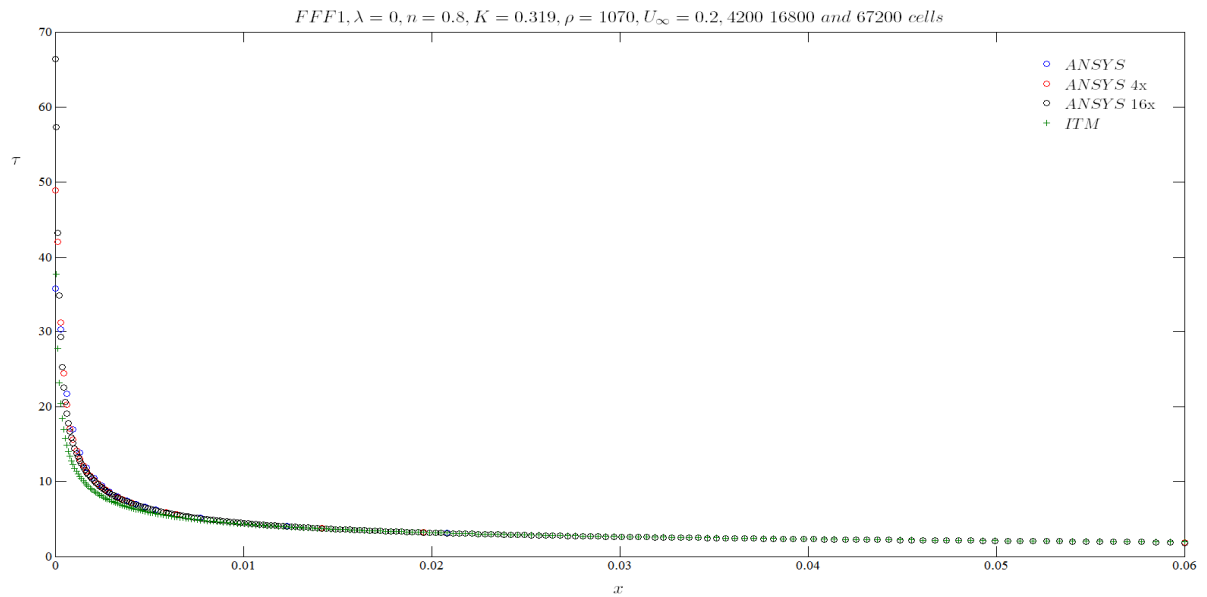
3.4.18. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = -0,2$



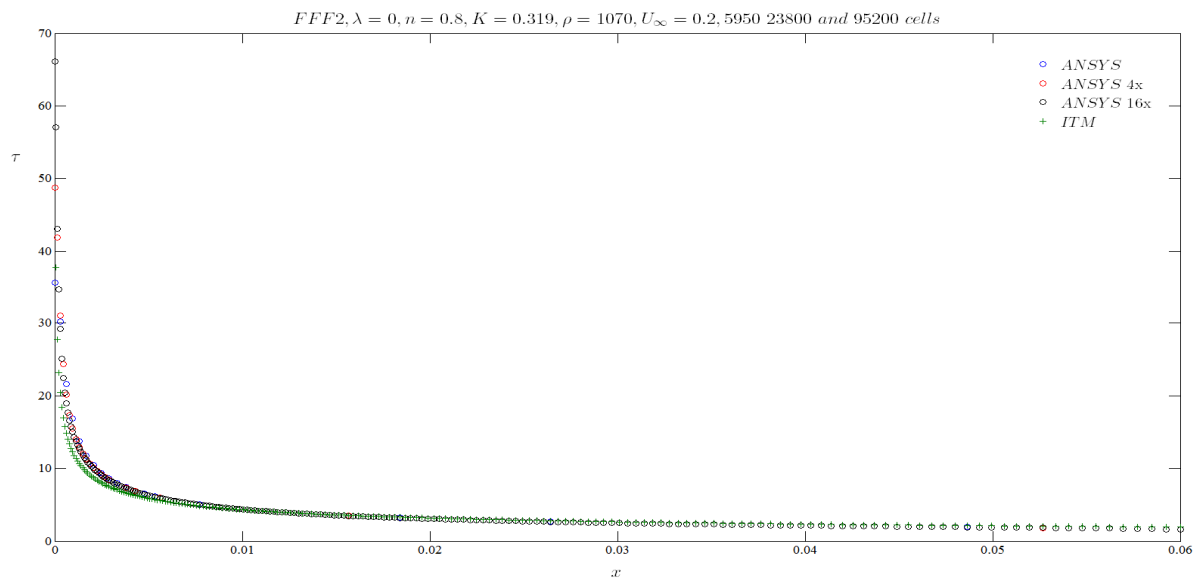
3.4.19. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = 0$



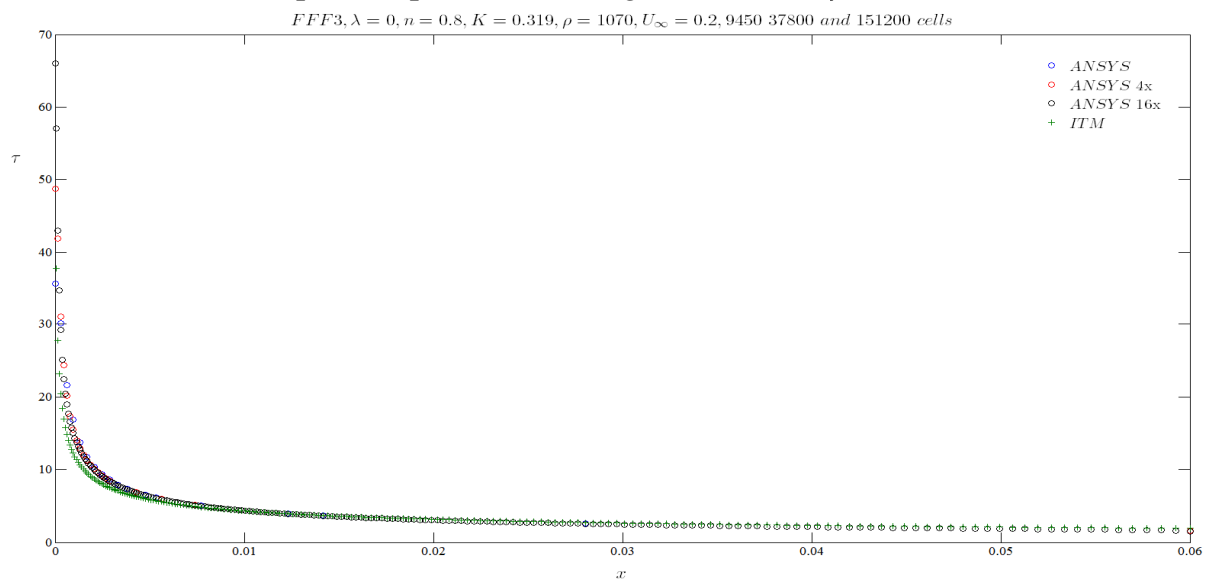
3.4.20. ábra: FFF3, dilatáló közeg, $K = 0,000313$, $\rho = 1340$, $n = 1,475$, $\lambda = 0,2$



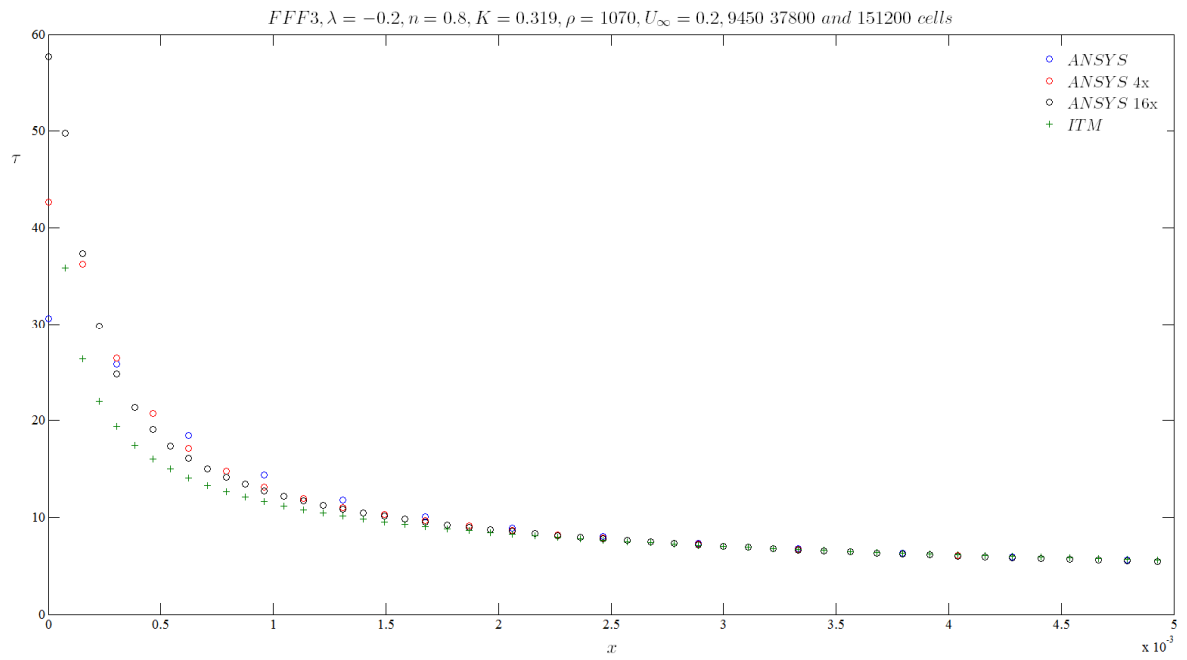
3.4.21. ábra: FFF1, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



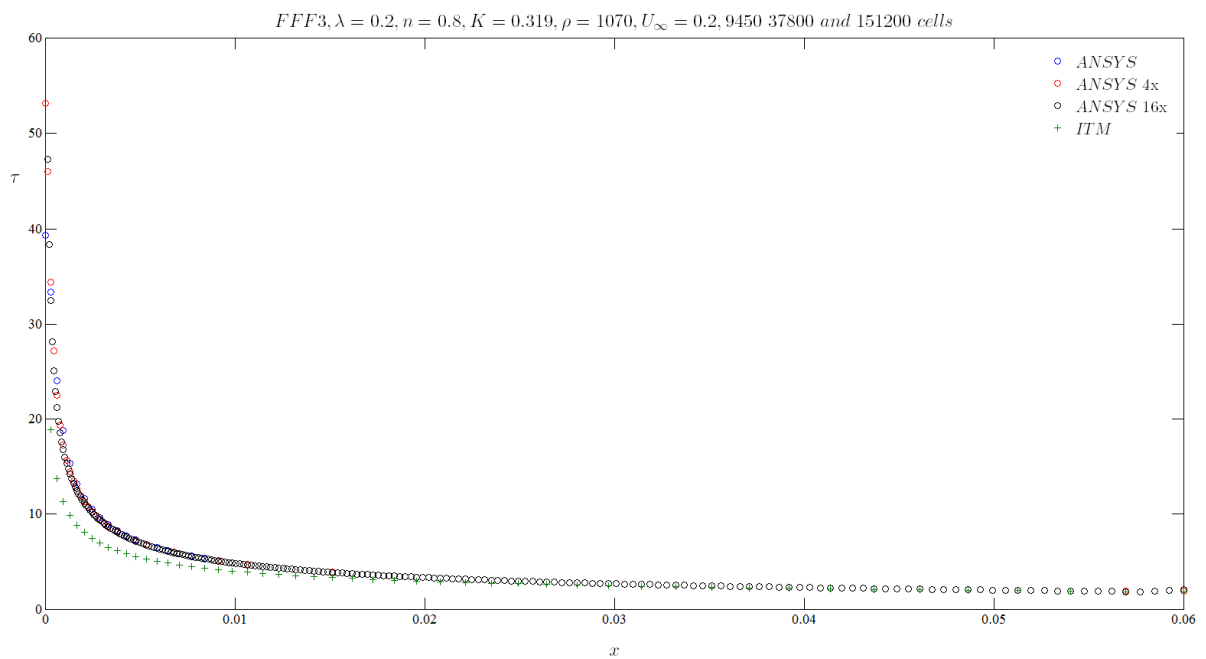
3.4.22. ábra: FFF2 pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



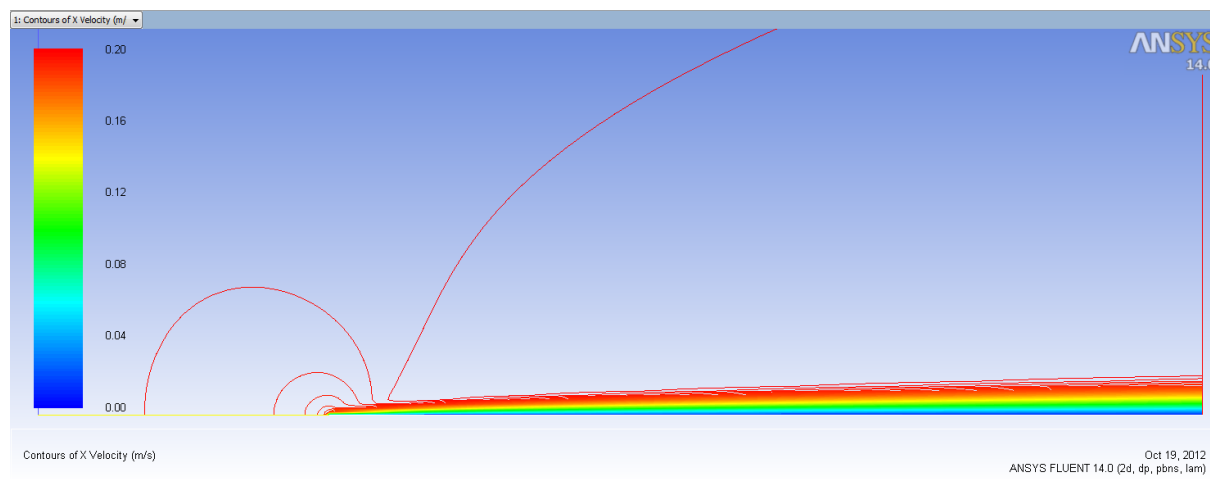
3.4.23. ábra: FFF3 pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0$



3.4.24. ábra: FFF3 pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = -0,2$



3.4.25. ábra: FFF3, pszeudoplasztikus közeg, $K = 0,319$, $\rho = 1070$, $n = 0,8$, $\lambda = 0,2$



3.4.26. ábra: Az u sebességkomponens kontúrvonalai

A hasonlósági megoldásból kiadódó nyírófeszültségnek, mint x függvényének, aszimptotája van az $x=0$ helyen, míg a Navier-Stokes egyenletek numerikus megoldása során véges érték jön ki. Viszont a belépő él közvetlen közelét leszámítva, a numerikus értékek nagyon közeliek a hasonlósági megoldáséhoz. Legnagyobb mértékű egyezés a dilatáló anyagnál van, pszeudoplasztikus folyadéknál – csakúgy, mint az x -irányú sebességeloszlásnál – kevésbé jól illeszkedik a véges térfogatú megoldás a hasonlósági megoldáshoz. A háló sűrítése az origóban kialakuló csúsztatófeszültség növekedését vonja maga után (3.4.23–3.4.25 ábrák). A megoldások eltérését $\lambda = -0,2$ esetén a belépő él 5 mm -es környezetében a 3.4.24 ábra mutatja. A háló sűrítése maga után vonja, hogy az ANSYS megoldások egyre inkább közelítenek a hasonlósági megoldáshoz.

A síklap közelében a sebességeloszlást a 3.4.26 kontúrábra mutatja.

3.5. A megoldások diszkretizációs hibáinak becslése

Ahhoz, hogy egy szimulációs program által nyert megoldás helyességéről meggyőződhesünk, konvergencia vizsgálatot és utólagos hibabecslést kell végezni. Mivel a legjelentősebb hiba a diszkretizációs hiba, ezért ezt a Richardson-féle extrapolációs módszerrel becsültük [12].

Legyen a megoldandó differenciálegyenlet pontos megoldása a csomópontokban $\tilde{u}$, a közelítő megoldással kapott érték u_h . A diszkretizációs hiba definíció szerint ezen két szám különbsége:

$$\varepsilon_h = u_h - \tilde{u}. \quad (3.5.1)$$

A Richardson-extrapolációt úgy származtatják, hogy a parciális differenciálegyenlet egzakt megoldása körül a numerikus megoldást hatványsorba fejtik. Ha három hálón áll rendelkezésünkre megoldás, akkor a konvergencia rendje:

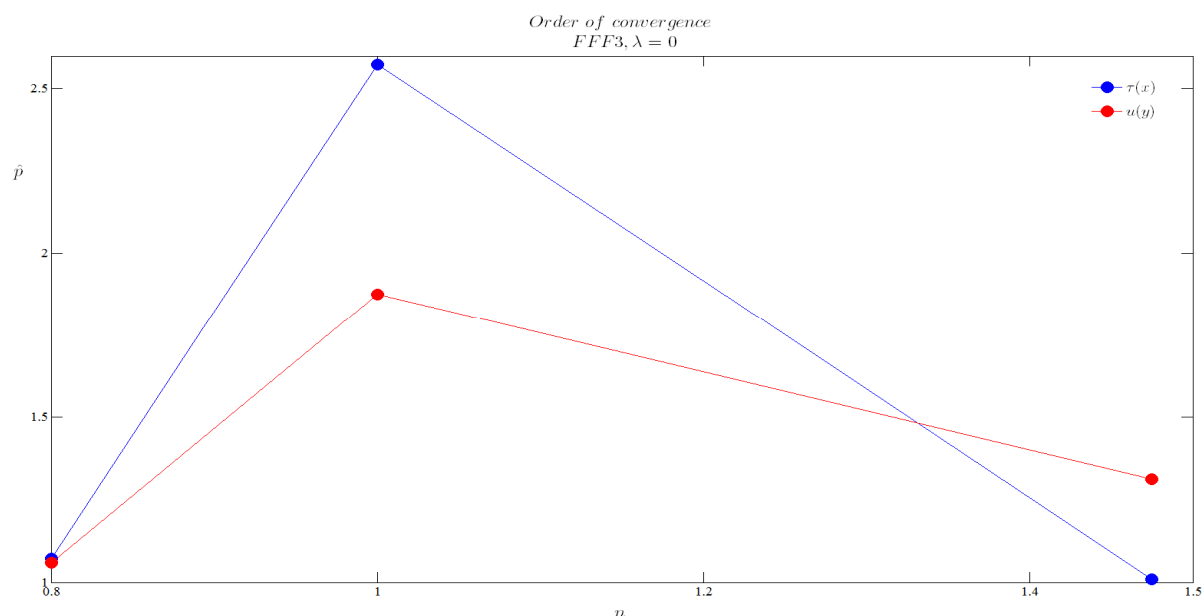
$$\hat{p} = \frac{\ln\left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1}\right)}{\ln(r)}, \quad (3.5.2)$$

ahol r a hálósűrítési tényező, f_1 a legfinomabb, f_3 a legdurvább hálón kapott megoldás. A $\hat{p}$ akkor értelmezhető, ha az eredmény monoton konvergál, azaz $|f_2 - f_1| < |f_3 - f_2|$, valamint a logaritmus argumentuma pozitív, $(f_2 - f_1)(f_3 - f_2) > 0$. A (3.5.2) összefüggést felhasználva a diszkretizációs hiba:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{f_2 - f_1}{r^{\hat{p}} - 1}. \quad (3.5.3)$$

A rácspontokban meghatároztuk $\hat{p}$ értékét (3.5.2) alapján (ahol $\hat{p}$ értelmezhető), átlagoltuk és ezek után a hibát számítottuk ki.

Álló síklap esetén *FFF3* hálónál a három anyagra a konvergencia rendje a 3.5.1 diagramon látható, a pontokkal megjelölt értékek a 3.5.1 táblázatban találhatók.

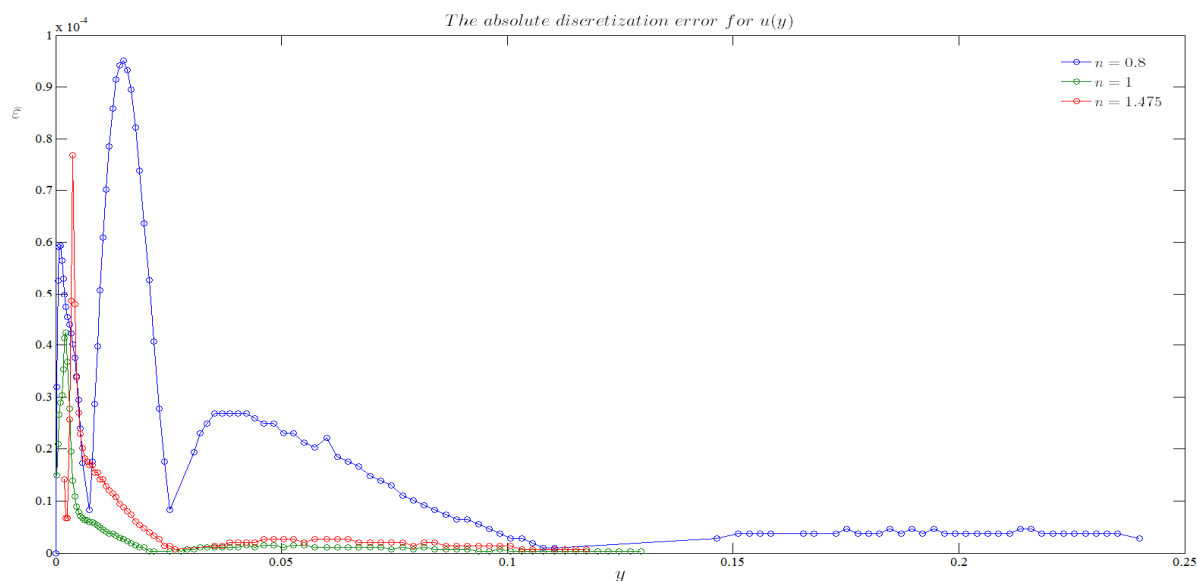


3.5.1. ábra: A konvergencia rendje $\tau(x)$ és $u(y)$ esetén

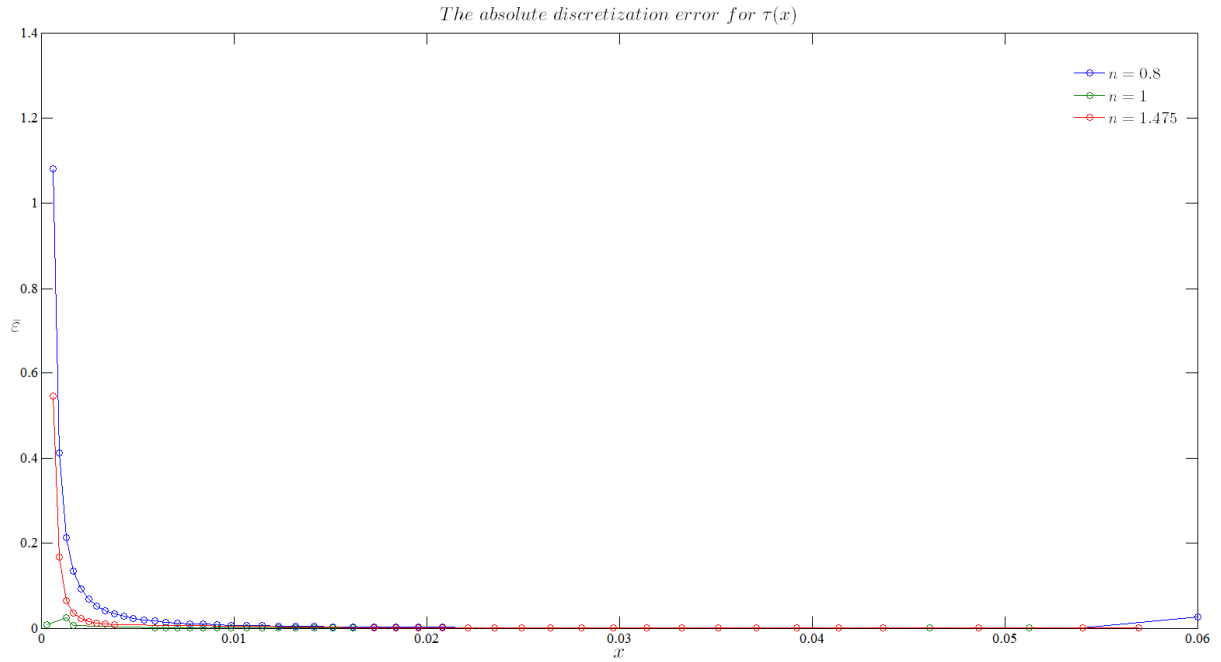
n	0,8	1	1,475
$\hat{p}_u$	1,0588	1,8737	1,3127
$\hat{p}_\tau$	1,0718	2,5742	1,0098

3.5.1. táblázat: A konvergencia rendje $\tau(x)$ és $u(y)$ esetén

Álló síklap esetén FFF3 hálónál a három anyagra az abszolút diszkretizációs hiba az $u(y)$ függvényénél a 3.5.2, a $\tau(x)$ függvényénél a 3.5.3 diagramon látható. Nem minden rácspontban értelmezhető a hiba, így az ábrákon körökkel csak azokat az értékeket ábrázoltuk, ahol a (3.5.3) kifejezés értelmezve van.



3.5.2. ábra: A diszkretizációs hiba a három anyagra $u(y)$ esetén



3.5.3. ábra: A diszkretizációs hiba a három anyagra $\tau(x)$ esetén

Mindkét ábrán látszik, hogy a pseudoplasztikus anyag esetén lép fel a legnagyobb hiba. Az u sebességkomponens abszolút hibájának nagyságrendje nem nagyobb, mint 10^{-4} , és a legnagyobb hiba a lap belépő élénél fordul elő. Csúsztatófeszültség esetén a $[0; 0,01]$ intervallumon és a síklap kilépő élénél tapasztalható jelentős hiba, a többi helyen az abszolút hiba kicsi. Newtoni folyadéknál (víz) a közelítő megoldás a lap be- és kilépő éle mentén jóval jobb, mint nem-newtoni közeg esetén.

3.6. A hasonlósági és az ANSYS-szal számolt megoldás összehasonlítása

Az előző ábrákon látható, hogy a két típusú megoldás nagy mértékű egyezést mutat. Azonban mindkét módszernek vannak előnyei és hátrányai.

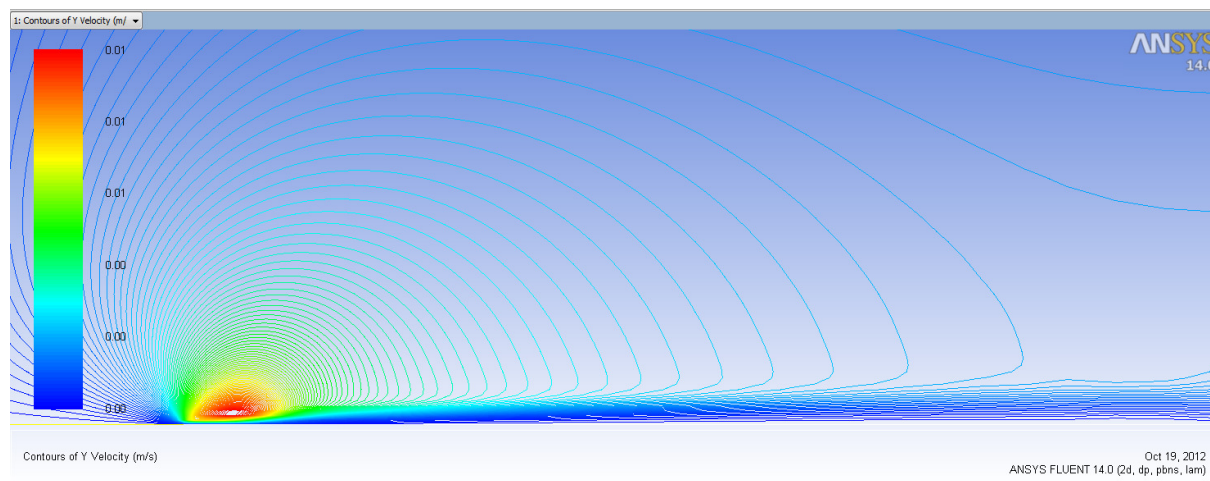
A véges térfogatos megoldás előnye a hasonlósági megoldással szemben:

- Nem teszünk feltételezéseket a nyomásra és a sebesség összetevőkre, valamint deriváltjaikra nézve. A Navier-Stokes vektoregyenlet tehát nem jelent megszorítást az előbbi változókra, így pontosabban leírja a jelenséget.
- A síklap belépő élénél ($x = 0$) a hasonlósági megoldás nem alkalmazható, mert az η változó ott nincs értelmezve.

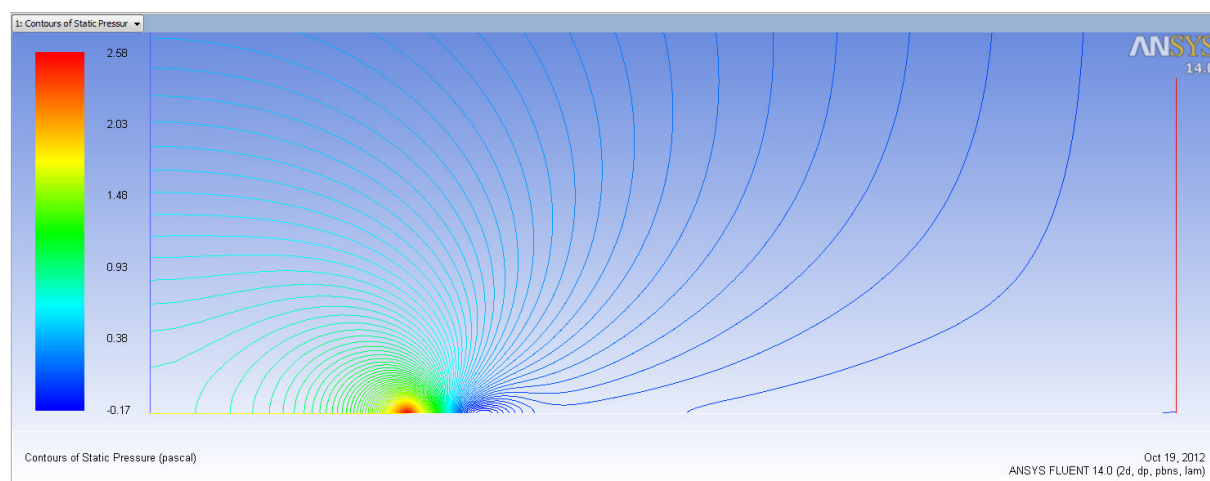
A hasonlósági megoldás előnye a véges térfogatos megoldással szemben:

- A megoldandó egyenletben nem szerepel a lap hossza. Ez ipari feladatoknál – ahol a modellezni kívánt lap nagyon hosszú is lehet – fontos, ugyanis akkor a hosszabb síklap miatt több lesz a cellák száma, így a feladat megoldása is több időt vesz igénybe.
- Az (1.8) differenciálegyenlet megoldása kezdetiérték-feladatként, vagy akár peremérték-feladatként kevesebb ideig tart, mint a Navier-Stokes egyenleté.
- Az (1.8) közönséges differenciálegyenlet kezdetiérték-feladatként való megoldására stabil módszerek állnak rendelkezésre és nem kell numerikusan kezelni a végtelent, ahova az egyik peremfeltétel elő van írva:
$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U_{\infty}.$$
- A megoldás nem igényel hálót, így az nem befolyásolja az eredményt.

Az ANSYS-féle megoldásból megállapítható, hogy a Prandtl-féle $v \ll u$ feltételezés helytálló, ahogyan az a 3.6.1 ábrán látszik. A v -nek a belépő élénél van viszonylag nagyobb értéke, de ez az érték is jóval kisebb, mint u . A statikus nyomás eloszlását a 3.6.2 ábra szintvonalai szemléltetik. Itt is az igaz, hogy lap belépő részénél van nagyobb mértékű nyomásváltozás, az áramlási tér többi részén ez minimális.



3.6.1. ábra: A v sebességkomponens kontúrvonalai



3.6.2. ábra: A statikus nyomás kontúrvonalai

4. Összefoglalás

Egy klasszikus áramlástan problémát vizsgáltunk az ANSYS Fluent numerikus program segítségével, valamint egy korábban kapott peremérték feladatot oldottunk meg egy iteratív transzformációs módszerrel. Összehasonlítottuk a numerikus eredményeket a Prandtl-féle határréteg elmélettel kapott hasonlósági eredményekkel. Megállapítható, hogy mind newtoni, mind dilatáló folyadék esetén a kétféle megoldás jó egyezést mutat. Pszeudoplasztikus közeggel a Reynolds-szám annyira kicsi volt, hogy jelentős eltérés mutatkozott. Áramlással szemben mozgó lap vizsgálata során az ANSYS-ban elvégzett szimuláció eredménye jobban eltért a hasonlósági megoldástól. Számításokkal igazoltuk, hogy az 1. részben a hasonlósági megoldások levezetésére tett egyszerűsítések nem befolyásolják jelentősen az analitikus eredményt. Megállapítható, hogy a hálósűrítés a fal melletti nyírófeszültség növekedését okozta, míg a sebességeloszlásra nem volt jelentős hatása. Az áramlási tartomány növelésének nem volt különösebb jelentősége a nyírófeszültség görbékre, viszont a sebességprofil kialakulásához szükséges a megfelelően magas tartomány. Főleg igaz ez a pszeudoplasztikus folyadékokra, amelynél a határréteg vastagsága nagyobb, mint a másik két anyagnál. Összevetettük a két módszer előnyeit.

5. Jelölések

Jelölés	Megnevezés	Mértékegység
latin betűk		
a	paraméter	-
b	paraméter	-
c	konstans	-
f	hasonlósági változó	-
g	hasonlósági változó	-
h	paraméter	-
h^*	paraméter	-
K	konzisztencia index	Pa s^n
n	hatványtörvény kitevő	-
p	nyomás	Pa
Pr	Prandtl-szám	-
u, v	x és y irányú sebességkomponensek	m/s
U_∞	szabadon áramló folyadék sebessége	m/s
U_w	síklap sebessége	m/s
x, y	derékszögű koordináták	m
Re_x	lokális Reynolds-szám	-
görög betűk		
α	paraméter	-
β	paraméter	-
γ	paraméter	-
η	hasonlósági változó	-
η^*	hasonlósági változó	-
κ	csoport paraméter	-
λ	U_w és U_∞ sebességek hányadosa	-
μ	dinamikai viszkozitás	Pas
ρ	sűrűség	kg/m^3
σ	csoportparaméter	-
σ_x, σ_y	x , illetve y irányú normálfeszültségek	Pa
τ_{yx}	x normálisú síkon y irányban ébredő nyírófeszültség	Pa
τ_w	fal menti nyírófeszültség	Pa
χ	csoport paraméter	-
ψ	áramfüggvény	m^2/s

6. Irodalomjegyzék

- [1] ANSYS FLUENT Theory Guide, Canonsburg, 2011
- [2] Blasius H.: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, 56 (1908), 1-37.
- [3] Bognár G.: On similarity solutions of boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, *IMA Journal of Applied Mathematics* 77 No.4 (2012), 546-562.
- [4] Bognár G., Gombkötő I., Hriczó K.: Power-law Non-Newtonian Fluid Flow on an Inclined Plane, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6 (2012), 72-80.
- [5] Csáti Z.: Hatványközeg hasonlósági megoldásai konvektív felületi peremfeltétellel, Miskolc, 2011, TDK dolgozat
- [6] Fazio R.: A novel approach to the numerical solution of boundary value problems on infinite intervals, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 (1996), 1473–1483.
- [7] Fazio R. : Numerical Applications of the Scaling Concept, *Acta Applicandae Mathematicae* **55**: 1–25 (1999)
- [8] Fazio R. : Numerical Scaling Invariance Applied to the van der Pol Model, *Acta Appl. Math.*, 2008
- [9] Hossen M.A. : Applications of Scaling Group of Transformation on Boundary Layer Flow and Mass Transfer Over a Stretching Sheet Embedded in a Porous Medium, *Journal of Physical Sciences*, Vol. 15, 129-137 (2011)
- [10] Prandtl L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904, S. 484-491, Teubner, Leipzig, 1905.
- [11] Töpfer K.: Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.*, 60 (1912), 397–398.
- [12] Tyrone S. Phillips, Christopher J. Roy: Evaluation of Extrapolation-Based Discretization Error and Uncertainty Estimators, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011-215.
- [13] <http://www.engr.uconn.edu/~sab03002/flolab/project%20report.pdf>, 2012.09.05

Köszönetnyilvánítás: A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.