

Az arab matematikatörténet lehetséges szerepe a mai matematikaoktatásban

Jelige: CLR 923

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3. oldal
1.) Az arab (iszlám) matematika kialakulása, jelentősége	5. oldal
Az arab matematika története a IX. századtól 1000-ig és a korszak integrálhatósága a mai matematikaoktatásba	7. oldal
2.) Az algebrai egyenletek megjelenése és jelentése 1000 körül, illetve napjainkban	15. oldal
3.) Számelméleti érdekességek az arab matematikában 1000 körül és lehetséges szerepük egy szakkör keretein belül	19. oldal
4.) A teljes indukció	
Al-Karaji élete és munkássága	24. oldal
Hogyan alkalmazhatók al-Karaji matematikai eredményei a mai matematikatanításban?	25. oldal
A teljes indukciós bizonyítás nehézségei és a problémák lehetséges megoldása	29. oldal
Egy lehetséges óravázlat, tanmenet	32. oldal
Összegzés	34. oldal
Melléklet	35. oldal
Forrásjegyzék	36. oldal

Bevezetés

Az arab matematikatörténet kutatása irányába a tudománytörténet iránti érdeklődésem terelt. Azért választottam az iszlám világ matematikatörténetét, mert ez a terület még bőven tart kutatni valót [14][15][16], és a már feltárt eredmények indokolják is az alaposabb megismerést. A kiválasztott korszak és térség matematikája pedig jól alkalmazható a mai matematika-oktatásban, ennek lehetőségével foglalkozok ebben a dolgozatban.

De hogyan segíthet az arab matematikatörténet a mai középiskolásoknak? Melyek a szükséges elemek, és milyen további lehetőségeket hordoz a tudománytörténet közel-keleti fejezete? A matematika egy összetett és meglehetősen nehéz tudomány, amelynek elsajátítása sok diáknak okoz nehézséget. Ennek jeleiről, a probléma lehetséges megoldásáról alább részletesen lesz szó. A diákok részéről tapasztalt nehézségeket saját oktatási tapasztalatomból is válogattam [33], és ennek alapján választottam ki az arab matematikatörténet azon szeleteit, amelyeket részletesebb vizsgálat alá vettem.

A matematikatörténet oktatása a 2012-es Nemzeti alaptanterv (továbbiakban NAT) bevezetésével a mindennapi matematikatanítás szerves részét képezi [2]. Jóllehet a NAT által rögzített matematikatörténeti elemek rendkívül kisszámúak, ráadásul elég szubjektívek, a tudománytörténeti vonatkozások megjelenése mégis komoly eredmény az előző évtizedek oktatási irányzatához képest.

Bármely korábbi NAT a matematikai alapelvek első soraiban rögzítette, hogy a matematika „kulturális örökség” [1]. Ezzel szemben az eddigi tantervek egyáltalán nem tértek ki ennek az örökségnek az eredetére, és a gyakorlati oktatásban a mai napig kis szerepet kap a tudománytörténet. De így van ez más tantárgyak esetében is? Egyáltalán nem. A magyar nyelv és irodalom gerincét az irodalomtörténet adja, benne számtalan életrajzzal. Hasonlóan az ének-zene tárgy fő részét képezi a zenetörténet, ahogy a rajz és vizuális kultúra részét a művészettörténet.

Persze a matematika az előbb felsoroltaktól jelentősen különböző tudomány, és a tanmenet gondosan összeválogatott elemekből épül fel. Ugyanakkor története az első írásos emlékekig visszanyúlik, és a mai tudomány a több ezer éves, világszerte kibontakozó fejlődés eredménye. Ennek megismerése nem csak kulturális kötelesség, hanem egy fontos segítség, amelyre a mai matematikaoktatás számos helyzetében lehetne támaszkodni [4].

Az 1990-es évek vége felé kezdődtek azok a vizsgálatok, amelyek a matematikatörténet oktatásban betöltött szerepét, jelentőségét vizsgálták [3]. Az ezredfordulóra jelentek meg a kutatás eredményei, és a XXI. század első évtizedének eredménye, hogy a 2012-es NAT már tartalmazza a tudománytörténeti elemeket [2]. Dolgozatomban a NAT-ban nem szereplő arab matematikusok munkáiból válogattam, a diákoknál tapasztalt, nehezebben elsajátítható témáknak megfelelően.

A kutatás két részfeladattal kezdődött: elkezdtem összegyűjteni az elérhető magyar, majd angol és német nyelvű munkákat, amelyek foglalkoznak arab matematikatörténettel, illetve elkezdtem tanulni arab nyelven, egy budapesti nyelviskolában [13]. Úgy vélem, ez utóbbi különösen fontos, mivel így nem csak a már feldolgozott anyagokkal tudok foglalkozni, és (bár jelenleg még csak szótár segítségével, de) képes vagyok eredeti forrásokat fordítani, értelmezni. Emellett abban a szerencsés helyzetben vagyok, hogy a nyelvtanulás révén arab országokban tanító matematika (és egyéb, humán) szakos tanárokkal is kapcsolatba kerültem,

akik értékes tanácsaikkal segítik munkámat. Azonban a magyar nyelvű forrásokról még meg kell említeni, hogy bár léteznek, de számuk jelenleg igen csekély, szemben például az angol, francia vagy német nyelvű irodalommal [6].

A hazai források összegyűjtése könyvtárak sűrű látogatásával kezdődött. Meglehetősen bőséges szakirodalmi állománnyal rendelkezik az ELTE Természettudományi Karának Matematika Könyvtára [7], ám a matematikatörténeti kötetek száma még így is kevés. Kutattam a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Keleti Gyűjteményében is [8], de a matematikai tartalmú arab irodalom sajnos minimális. Viszont ugyanitt hozzáfértem több, nemzetközi gyűjteményhez [9], ami már nagy segítség volt. Emellett az interneten elérhető forrásokat igyekeztem megismerni és értékelni, ugyanis a felhasználás előtt fontosnak tartottam meggyőződni a hitelességről.

Az arab nyelvű források a világ számos, Magyarországtól különböző pontján hozzáférhetőek. Az eredeti nyelvről történő fordítást a jövőben tervezem folytatni, ehhez a következő könyvtárak, egyetemek rendelkeznek megfelelő kéziratokkal (kiemelt példák): Hamdard University, Karachi (Pakisztán) [10], The University of Jordan, Amman (Jordánia) [11], Damaskus University, Damaskus (Szíria) [12].

A tudománytörténeti források felkutatása mellett a módszertani szakirodalmat is igyekeztem feldolgozni. Többen foglalkoztak már a matematikatörténet oktatásban betölthető szerepéről, az alkalmazás megfelelő módjáról. Ezek közül kiemelném Dr. Vásárhelyi Éva: „A matematikatanítás fundamentális elvei, a matematikatörténet szerepe a reprezentációs módok szerint szervezett matematikatanításban” című művét [4] és a John Fauvel, Jan van Maanen szerzőpáros által szerkesztett „History in Mathematics Education” kötetet [17].

Az utóbbi években több diák is foglalkozott a matematikatörténet lehetséges szerepével. 2003-ban egy tanárszakos hallgató a tanítási gyakorlatát matematikatörténeti megközelítésben végezte a Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumban, Tarcsay Tamás, a Szegedi Tudományegyetem oktatójának irányítása alatt [5]. Tanterve [5] körültekintően dolgozta fel a világ matematikatörténeti eredményeit, és ezek segítségével a tanmenet nagy részét le tudta fedni. Gosztonyi Katalin, az ELTE Természettudományi Karán 2009-ben írt szakdolgozatában egy matematikai tábor felépítését, levezetését és tapasztalatait foglalta össze, ahol a tanmenetet szintén a matematikatörténet egyes fejezeteiből készítette [6].

A fenti példákkal ellentétben én nem a tananyagot próbálom lefedni a matematikatörténettel, hanem a kiválasztott korszak és térség matematikájának alkalmazhatóságát vizsgálom a mai tananyag ismeretében.

Az arab (iszlám) matematika kialakulása, jelentősége

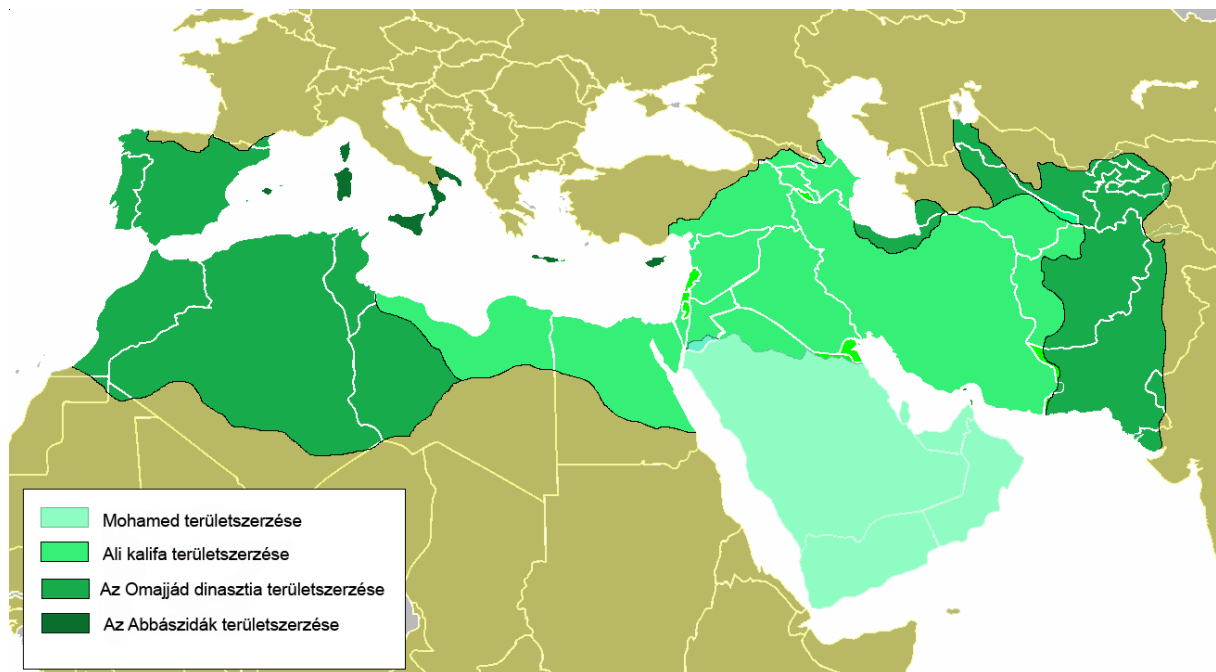
A mai hivatalos (irodalmi) arab nyelv (النحوى) kialakulása a Koránhoz köthető: Mohammed ezen a nyelven írta meg az iszlám szent könyvét a VII. században [21], tehát a korabeli arab törzsek dialektusai közül Mohammed törzsének nyelvjárása lett az irodalmi arab nyelv. Egészen napjainkig az iszlám vallás nyelve az irodalmi arab maradt, amely a VII. század óta gyakorlatilag változatlan [18]. Emellett 1920-ig a tudomány nyelve is az irodalmi arab volt, hasonlóan ahhoz, ahogy Európában a latint használták tudományos publikációkra egy időben. Később a nem-arab muszlim tudósok az anyanyelvükön publikáltak.

Ez azt is jelenti, hogy az arab nyelven írt tudományos művek túlnyúlnak az arabok földrajzi határain: amíg az arab országok a Földközi-tenger déli és keleti partjainál, az Arab-félszigeten (a Vörös-tenger, az Indiai-óceán és az Arab-öböl által határolt földdarabon) és Észak-Afrika Földközi-tengertől távolabbi területein találhatóak, addig az arab nyelven írt könyvek Spanyolországtól Indiáig bárhol előkerülhettek, mivel az iszlám vallás is erre a térségre terjedt ki időszámításunk szerint 1000-ig [19][20] (1. ábra). (A Balkán mai muszlim térségei, például Albánia, Koszovó vagy Bosznia egy része később kerültek kapcsolatba az iszlámmal, így a tudománytörténet szempontjából most eltekintünk tőlük.) Tehát a IX. – XI. század idején egy iráni, afgán vagy spanyol muszlim matematikus is arabul publikált.

Az arab matematika 1000 körül ideális példa a matematikatörténet oktatásban betöltött szerepére. Az egyik érv a téma mellett, hogy a közel-keleti matematika minden szinten kimarad az oktatási tervekből. Már a bevezetőben is elhangzott, hogy a NAT által válogatott tudománytörténeti elemek kevesek. A 12 névből, amely a NAT idevágó oldalain szerepel négy magyar matematikus található a listán, ami hazánk matematikatörténetének megismerése szempontjából persze rendkívül fontos (bár ez is kevés). A maradék 8 viszont mind európai, közülük is 3 görög, 2 francia, 2 német és 1 svájci [2]. Nem szerepel a listán egyetlen arab, indiai vagy kínai név sem, a tengeren túlról nem is beszélve, pedig az objektivitás és a matematikatörténeti eredmények megkívánnák [14][15][16][17][22][23][24][25]. Hogyan lehet számelméletet tanítani a kínaiak említése nélkül?

A másik érv az arab matematika mai oktatásba történő bevonására az, hogy a IX. században (és néhány esetben még a későbbi években is) ugyanaz történt az iszlám világban, mint amit a matematikatörténet oktatásával napjainkban elérni szeretnénk: az arabok értelmezni kezdték a korszakban elérhető korábbi matematikai eredményeket, megpróbálták újra átgondolni és fejleszteni, és éppen ez lehetne a cél a mai tanulók esetében is.

Érdekes vélemény [32], hogy milyen hatása volt a tudományokra nézve a különböző hódításoknak: a közel-keleti tanárok közül sokan állítják, hogy a megszállások (akár aktív, akár passzív irányból nézve) mindig új lendületet adtak a fejlődésnek. Az egyik nép profitált a másik jelenlétéből, és átvette a másik szokásai közül azokat, amelyeket hasznosnak ítélt. Így került az arab világba például az adminisztráció, a rómaiak által. Matematikai vonatkozásban ez azt is jelenti, hogy az egyik ország megismerte a másik nép tudományos eredményeit, és ezután módjában állt a saját ötleteivel fejleszteni, a következő megszállás és keveredés által pedig ugyanez a fejlesztett gondolat visszatért az előző néphez, vagy továbbszállt egy harmadikhoz. Ez az elmélet megmagyarázná, miért nincs arab-öböli (például szaúd-arábiai) matematikai forrás ezer évvel korábbról, amikor az iszlám vallási központja mindig is Mekka volt: mivel a szaúdi térséget soha nem szállták meg idegen kultúrák [19][20], és a szaúdiak sem hódítottak, a tudomány szintje addig emelkedett, amíg a helyi kutatók tudása engedte, vagyis nem frissülhetett új, idegen eredetű ötletekkel.



1. ábra: Az iszlám terjeszkedése 830 előtt [35]

Az arab matematika története a IX. századtól 1000-ig, és a korszak integrálhatósága a mai matematikaoktatásba

Általános álláspont, hogy az arab matematika alapját a görög eredmények nyújtották. Ennél többről is szó van, mivel az ókorban a matematikai eredmények a világ négy pontján (Irak, Egyiptom, Görögország és Kína ókori megfelelői) mutattak különleges fejlődést időszámításunk előtt 3000 körül [22][23], és ezek közül két terület közel másfél évezrede az arab világhoz tartozik, így ötleteket innen is merítettek.

Az ókori iraki és egyiptomi számolási módszerek, a számrendszerek és az egységtörtek gyakori részei középiskolai matematikai versenyeknek, szakköröknek. Ezek közül a hétköznapi oktatásba is át lehet emelni feladatokat: akár konkrét, papiruszokról ismert példákat, akár számrendszerek közötti átváltást ellenőrző, saját gyártású kérdéseket (például: Hogyan írták volna Egyiptomban azt a számot, amely az iraki agyagtáblán így nézett ki?). Az ilyen kérdések az egyébként szokványos feladatokat új megközelítésbe helyezik, és növelik az esetleg amúgy kevésbé érdeklődő tanulók motivációját. Hasonlóan érdekes kérdés lehet egy jelmagyarázat nélküli egyiptomi egyenlet, amelyet a diákoknak kell megfejteni, és ezzel értelmet adni a korábban azonosítatlan jeleknek (ezzel ők kerülnek régész vagy matematikai történész szerepbe).

Az igazi arab matematika bölcsője nem hagyta el a Tigris és az Eufrátesz közét. A VIII. században az Iszlám Birodalom a Földközi-tengertől már egészen Indiáig terjedt, az egész birodalom központja pedig 762-ben, al-Manszur (المنصور) kalifa idején, Bagdad lett [26]. Al-Ma'mun (المأمون) 813-ban lett kalifa, és egyik legfontosabb intézkedése volt egy bagdadi akadémia alapítása, ami a Bölcsesség Házaként (بيت الحكمة) lett ismert [24][26]. Az akadémia egyik első feladata volt a korabeli görög tudományos és filozófiai írások fordítása, értelmezése, majd az egyes tudományágak fejlesztése. Ehhez al-Ma'mun a kor legjobb arab tudósait szerződtette saját szolgálatába. Emellett egy könyvtárat is építtetett, amely az alexandriai könyvtár után az első és legnagyobb tudományos, filozófiai és vallási gyűjteménnyé nőtte ki magát [24]. (Ráadásul, mivel az alexandriai könyvtár 640 és 642 között harmadszor is leégett, így a bagdadi könyvtár ekkorra már világi szinten is egyedülálló méretűnek számított.)

Az alábbi táblázat (1. táblázat) összefoglalja a Bölcsesség Házának IX. századbeli matematikusait és fontosabb fordítóit. A születési és halálozási évszámok a napjainkban elérhető legpontosabb adatok. A táblázat célja összefoglalni a kor legfontosabb matematikusait, így az ő munkásságuk ez alapján tovább kutatható.

Név:	Születési idő, település, ország:			Halálozási idő, település, ország:		
Al-Khwarizmi	~780	Bagdad	Irak	~850	Bagdad	Irak
Al-Hajjaj	~786	Bagdad	Irak	~830	Bagdad	Irak
Al-Jawhari	~800	Bagdad	Irak	~860	Bagdad	Irak
Al-Kindi	~801	Kufah	Irak	873	Bagdad	Irak
Hunayn ibn Ishaq	808	Al-Hirah	Irak	873	Bagdad	Irak
J. Muhammad ibn Musa	~800	Bagdad	Irak	873 után	Bagdad	Irak
Ahmed ibn Musa	~805	Bagdad	Irak	873 után	Bagdad	Irak
Al-Hasen ibn Musa	~810	Bagdad	Irak	873 után	Bagdad	Irak
Al-Mahani	~820	Mahan	Irán	880	Bagdad	Irak
Al-Harrani	836	Harran	Törökorsz.	901	Bagdad	Irak

1. táblázat

A Bölcsesség Házában al-Hajjaj (الحجاج) fordította le elsőként arabra Euklidesz Elemek című művét, illetve Ptolemaiosz Almagest című írását 800 körül [24]. Ezek közül az Elemek volt nagyobb hatással az arab matematikusokra. Számos arab tudós írt kommentárokat az Elemek egyes részeihez [24]. Ezek egy része inkább értelmezte, másik része inkább fejlesztette a könyvet. Az arab fordítók remek nyelvismerettel rendelkeztek (közülük is a legjobbak szolgáltak Bagdadban), és életük során a matematikai nyelvhasználatuk is finomodott. Érdekes szakköri feladat lehet néhány fordítás összehasonlítása, javítása, ugyanakkor különleges eredményeket nem lehet várni, mivel a diákok a „fordítás fordításával” találkozhatnak (feltételezve, hogy a szakkör arabul nem beszélő tanulókból áll).

Al-Khwarizmi (الخوارزمي) fejlesztette ki az algebrát, ugyancsak a Bölcsesség Házában, még a IX. század elején [22][23][24][25]. Másodfokú egyenleteinek megoldása világhírű, szintén szerepelt már versenyek feladataiként. A másodfokú egyenletek bevezetésekor al-Khwarizmi módszerének megismerése is fontos lenne a diákok számára, mivel fejleszti a többféle gondolkodásmódot és ugyancsak érdemes a módszert elemezni akkor, amikor már jártasságot szereztek a tanulók az ilyen egyenletek megoldásában. Az egyik közismert példa, bal oldalon al-Khwarizmi szavaival, a jobb oldalon modern európai jelöléssel [24]:

„Egy négyzet és 10 gyök egyenlő 39 egységgel. A kérdés tehát az ilyen típusú egyenleteknél a következő: melyik az a négyzet, amelyet tízszer hozzáadva a saját gyökéhez 39-et ad eredményül? A megoldás során az ilyen típusú egyenleteknél vegyünk a már említett gyökök felét. Eredetileg volt 10 ilyen gyökünk. Tehát vegyünk az 5-öt, amit önmagával megszorozva 25-öt kapunk, ezt az eredményt a 39-hez hozzáadva 64-et kapunk. A 64 négyzetgyöke 8, vonjuk le ebből a gyökök felét, vagyis 5-öt, így marad 3. Ez a 3 tehát egy gyöke a négyzetnek, vagyis a négyzet maga természetesen a 9.”

$$x^2 + 10x = 39$$

$$10x : 2 = 5x$$

$$5^2 = 25 \Rightarrow 25 + 39 = 64$$

$$\sqrt{64} = 8 \Rightarrow 8 - 5 = 3$$

$$x = 3$$

$$x^2 = 9$$

Az egyenlet geometriai bizonyítása is érdekes, a megfelelő témakörnél (területszámítások és a Pitagorasz-tétel tanításakor) érdemes bemutatni. Az algebrai egyenletek megjelenésével, jelentőségével külön fejezetben foglalkozok.

Al-Jawhari (الجوهري) 830 körül 50 javaslatot írt az Elemekhez, és megkísérelte bizonyítani a párhuzamossági axiómát. Az ismert iszlám matematikatörténet szerint ő volt az első, aki bizonyításokkal kísérletezett [24]. Néhány bizonyítása ismét kiváló szakköri feladat lehet, a bizonyításokkal foglalkozó tananyag rész bevezetőjeként. Érdemes összehasonlítani, mennyire tartják elfogadhatónak a diákok al-Jawhari bizonyításait, amikor még kevés ismeretük van a bizonyítások terén, és hogyan látják ugyanazokat a bizonyításokat egy hónappal később.

Al-Kindi (الكندي) írt a hindu számokról, arányokról, harmonikus számokról, különböző mérési és számolási eljárásokról. Foglalkoztatta az idő és a tér mérése, de mindkettőt végesnek ítélte. Bizonyítás gyanánt a végtelenre vonatkozó paradoxon-elméletét próbálta kidolgozni [24]. A geometriában ő is foglalkozott a párhuzamossági axiómával. Alkotott egy lemmát, amely megkérdőjelezi, létezhet-e a síkon két olyan egyenes, amelyek egymással nem párhuzamosak, de nem is metszik egymást.

Hunayn ibn Ishaq (**حنين بن إسحاق**) a Bölcsesség Házának vezető fordítója volt a 800-as évek derekán [24]. Alaposságát jelzi, hogy egy-egy forrásért képes volt bejárni a világot: egy számára érdekes kéziratért hosszú időn át utazott Irakban, Szíriában, Palesztinában és Egyiptomban, de nem járt teljes sikerrel: csak a kézirat felét találta meg Damaszkuszban.

A Banu Musa fivérek közül a legfiatalabb testvér al-Hasan ibn Musa ibn Shakir (**الحسن بن موسى بن شاکر**) íves alakzatokat: ellipsziseket és görbéket kutatott [24]. „Az elnyújtott kör alakú forma” címmel könyvet is írt az ellipsziszről, de az egyes görbék geometriai tulajdonságait is alaposan körüljárta. Több görög tételre és állításra írt új bizonyítást, emellett feltételezhető, hogy ő fordította arabra először Arkhimédész írásait.

Al-Mahani (**المهنا**) volt a Bölcsesség Házának első matematikusa, akinek élete Dél-Iránban kezdődött, nem messze az afganisztáni-iráni-pakisztáni hármashatártól [24]. Főként csillagászati kutatásokat végzett, de fennmaradt néhány kommentárja, amelyet az Elemek több részéhez írt, illetve néhány racionális és irracionális szög számításához írt ötlete és több bizonyítási kísérlete. Elveszett azonban 26, az Elemekhez írt javaslata, amelyben olyan bizonyítások lehetőségét veti fel, amelyekkel kikerülhetők lennének több esetben az axiómákra való visszavezetések. A szögszámítási ötletek felhasználhatók.

Al-Harrani (**الحاراني**) számelméleti kérdésekkel foglalkozott és a baráti számpárokat kutatta. Alább külön fejezetben tárgyalom munkásságát.

A X. században Bagdad mellett Kairó és Damaszkusz is tudományos központtá nőtte ki magát, köszönhetően a darabolódó Iszlám Birodalomnak [19][20][24]. Az ezredfordulóra Rayy (egykor nagyváros, ma kisebb település Teherán szomszédságában) is matematikai fellelővárrá lett, így az iráni matematikusok többsége ott kezdett dolgozni [24]. A fontosabb eredmények alább láthatók, mindegyik egy-egy szakköri vagy tanórai feladat lehetőségét hordozza, a korszak matematikusait pedig a következő táblázat (2. táblázat) összesíti, ismét a további kutatást, illetve a téma átlátását segítő:

Név:	Születési idő, település, ország:			Halálozási idő, település, ország:		
Ahmed ibn Yusuf	835	Bagdad	Irak	912	Fustaát	Egyiptom
Abu Kamil	~850	Fustaát	Egyiptom	~930	Fustaát	Egyiptom
Al-Battani	~850	Harran	Törökorsz.	929	Bagdad	Irak
Al-Nayrizi	~865	Nayriz	Irán	~922	Bagdad	Irak
Sinan ibn Thabit ibn Qurra	~880	Harran	Törökorsz.	943	Bagdad	Irak
Ibrahim ibn Sinan	908	Bagdad	Irak	946	Bagdad	Irak
Al-Khazin	~900	Khurasan	Irán	~971	Rayy(Teherán)	Irán
Al-Uqlidisi	~920	Damaszkusz	Szíría	980	Damaszkusz	Szíría
Abu'l-Wafa	940	Buzjan	Irán	998	Bagdad	Irak
Al-Quhi	~940	Tabaristan	Irán	~1000	Bagdad	Irak
Abu'l-Hasan ibn Yunus	950	Fustaát(Kairó)	Egyiptom	1009	Kairó	Egyiptom

2. táblázat

Ahmed ibn Yunus (**أحمد بن يونس**) egyiptomi matematikus a helytartó szolgálatában hivatalos számításokat végzett, így foglalkozott adózási problémákkal [24]. Ezek az ötletek Fibonacci műveiben térnek vissza, közel ötszáz évvel később. Az adózási problémák egy sor valóságközel feladatot hordoznak magukban, ezen túlmenően kevés ezer évnél idősebb valóságközel feladat ismert.

Abu Kamil (أبو كميل) ugyancsak egyiptomi, algebrai könyve Fibonacci fő művének alapja [24]. Foglalkozik magasabbfokú egyenletekkel, de képletet ad a hatványozás egyik fontos azonosságára a természetes számok körében: $x^n x^m = x^{n+m}$, ha $n, m \in \mathbb{N}$. Az egyenlet megjelenik később al-Karaji munkájában is. Abu Kamil írt tankönyvet birodalmi földmérőknek is, így a matematikai oktatásának történetére is át lehet kötni a tanórákon. Geometriai állításai, a harmadfokú, nem-lineáris egyenletek, illetve a diofantoszi formulák $(ax + bx + c)$ megoldásai ugyancsak korszakalkotók és elemezhetők. Abu Kamil volt az első, aki magasabb fokú ismeretlenekkel is jól bánt, bár ő is csak szavakkal írta le az egyenleteket. Például $x^8 = (\text{مربع مربع مربع مربع})$, azaz „négyzet négyzet négyzet négyzet”, vagyis $x^2 * x^2 * x^2 * x^2$. Kerestetni lehet ennek magyarázatát, akár olyan matematikatörténeti elemeket megemlítve, mint néhány elszigetelten élő törzs kezdetleges matematikája.

Al-Battani (البتاني) Törökországban, Szíriában és Irakban is tevékenykedett. Eredménye a szinusz-tétel egy esete derékszögű háromszögekre: $b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$ [24]. Remek feladat a tanulóknak, hogy következik-e ebből a formulából a szinusz-tétel, illetve mire kell figyelni egy ilyen átalakítás során (a tételek feltételei hangsúlyozandók).

Al-Nayrizi eredményei kevésbé használhatók az oktatásban, egyetlen érdekesség, hogy kutatta a Kaaba (الكعبة) szentély (Mekka, Szaúd-Arábia) irányának pontos meghatározását [24]. Itt a kulturális tartalom mellett ténylegesen érdekes matematikai probléma egy pontos földrajzi hely irányát a világ bármely pontjáról meghatározni.

Ibrahim ibn Sinan (إبراهيم بن سنان) számít az egyik legnagyobb muszlim matematikusnak [24]. Válogatott problémák (مشاكل مختارة) című könyvében 41 különösen nehéz geometriai kérdést válaszol meg, elsősorban az analízis eszközeivel, de nem ad részletes leírást, mely feltételek esetén működik a megoldása. Az előző eset folytatása lehet egy feladat, amely egy állítást és a hozzátartozó bizonyítást tartalmazza, de a teljesülés feltételei nélkül, és a diákoknak kell megkeresni a feltételeket, illetve példákat és ellenpéldákat.

A parabola mérésével foglalkozó könyvében (قياس مكافئ) viszont tökéletes bizonyítást ad a következő állításra, amely mai módszerekkel történő megoldásra szakkörön is feladható: a parabola egy részletének területe egyenlő a részletbe beírt háromszög területének $4/3$ -ad szorosával. A tétel bizonyítása mai módszerrel alább látható, emellett érdemes lehet felolvasni az eredeti arab szöveget (persze annak fordítását).

$$[\Phi]_0^b = \frac{b^3}{3}$$

$$t_{\text{parabola}} = t_{\text{téglalap}} - [\Phi]_0^b = b^3 - \frac{b^3}{3} = \frac{2b^3}{3}$$

$$t_{\text{háromszög}} = \frac{t_{\text{téglalap}}}{2} = \frac{b * f(b)}{2} = \frac{b * b^2}{2} = \frac{b^3}{2}$$

$$t_{\text{parabola}} = \frac{4}{3} t_{\text{háromszög}}$$

$$\frac{2b^3}{3} = \frac{4}{3} \frac{b^3}{2}$$

$$[\Phi]_a^b = \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{b^3 - a^3}{3} = 4b^3 = 4b^3$$

Al-Khazin (الخازن) vizsgálta az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenlet megoldhatatlanságát az egészek körében, ami persze a későbbi (XVII. századi) Nagy Fermat-tétel ($x^n + y^n = z^n$) esete $n = 3$ -ra [38]. Ez már nehezebb szakköri feladat, mivel a nagy matematikusokat is még egy évezreden át foglalkoztatta a téma [24]. Másik ötlete is érdekes:

Adott $a \in \mathbb{N}$ számhoz keresendő $x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 + a = y^2$ és $x^2 - a = z^2$. Al-Khazin bizonyította, hogy x, y és z létezése ilyen feltételek mellett ekvivalens azzal, hogy $a = 2uv$, ahol $u, v \in \mathbb{N}$ és $u^2 + v^2 = x^2$. Ebből következően két példát is adott:

$$\begin{aligned} a = 24 \text{ esetén: } 5^2 + 24 &= 7^2 \text{ és } 5^2 - 24 = 1^2. & (x = 5; y = 7; z = 1). \\ a = 96 \text{ esetén: } 10^2 + 96 &= 14^2 \text{ és } 10^2 - 96 = 2^2. & (x = 10; y = 14; z = 2). \end{aligned}$$

Al-Uqlidisi szíriai tanár volt, aki matematikai ismereteit utazásai során sajátította el [24]. Könyvében bemutatja és elemzi a hindu számírást, továbbá a helyiérték szerint írt számokat tízes és hatvanas számrendszerekben. Bemutatja az összeadást, a szorzást és más alapvető műveleteket egészekkel és törtekkel. A második részben összegyűjti a korábbi matematikusok módszereit, és átalakítja őket a hindu rendszerbe. A harmadik rész talán a legérdekesebb tanári szempontból: ebben ugyanis olyan kérdéseket vet fel és válaszol meg, amelyeket általában a diákok tesznek fel az egyes ismeretek elsajátítása közben (Hogyan csináljam? Miért így csináljam?). Ezzel al-Uqlidisi elsőként készített tanári kézikönyvet. Műve az első ismert forrás, amely következetesen használja a tízedes törteket. Arról már vitatkoznak a történészek, hogy al-Uqlidisi felismerte-e a tízedes törtek jelentőségét vagy csak bevezette azokat, de az nem képezi vita tárgyát, hogy al-Uqlidisi nagy előrelépést tett a tízedes törtek bevezetésével.

Abu'l Wafa (أبي الوفا) könyve ismét érdekes csemege. Az arab matematikában elsőként vezette be a negatív számokat, a következő módon: „Ha ötöt kivonunk háromból, akkor marad kettő adósságunk.” [24]. Sok-sok feladat (különböző mérések, számolás törtekkel, stb.) mellett könyvének hatodik része a legérdekesebb: ebben különleges, konkrét eseteket mutat be (katonák fizetése, hajók terhelhetősége, utazó kereskedők ügyei), vagyis újabb, ezer éves valóságközel feladatcsomagot találtunk, amiből lehet szemezgetni a tanórákon.

Ibn Yunus (بن يونس) a különböző naptárak közötti átváltásokra adott képleteket [24], ebből remek, aktuális átváltásos feladatokat lehet készíteni: milyen dátummal jelent meg a mai újság Szaúd-Arábiában? (Szaúd-Arábia az egyetlen arab ország, ahol csak az iszlám szerinti időszámítást használják. Más országok mindkét dátumot szerepeltetik például a napi újságok címlapján.)

Az ezredforduló előtt a fentiek számítottak a legfontosabb eredményeknek az arab matematikában. Látható, hogy mindegyik eredmény magában hordoz lehetőségeket, némelyik esetben már alkalmazhatók is a fenti feladatötletek, máshol pedig tanári felkészülésre, kutatómunkára van szükség. Ez a felkészülés legtöbbször az eredeti szövegek egy alkalmas

fordításának felkutatását, értelmezését jelenti, majd a források tanulmányozása után készíteni lehet egy tanórai / szakköri tervet, konkrét feladatokkal.

A X. század végére az Iszlám Birodalom területén elszaporodtak a politikai konfliktusok és az ebből fakadó fegyveres összecsapások. A kisebb területeket önálló hadurak irányították, akik viszont gyakran estek áldozatul az aktuális hatalom ellen felkelőknek, illetve az „ellenzék” hadseregének. Mindennek a tudományokra csak kisebb hatása volt, mivel a vezetők ezekben az időkben is rendületlenül támogatták a tudósokat [24]. Viszont a korszak kutatói igyekeztek távol maradni a konfliktusoktól, ezért a korábbiakban megszokottnál többet utaztak, és az életüket is több helyen, mindig a lehető legbékésebb zónában élték.

A tudományos élet mindig ott lendült fel, ahol éppen egy nagyobb matematikus hosszabban letelepedett. Ezek a tudósok szinte kivétel nélkül tanítottak is, így érthető, hogy a környezetük is jobban fejlődött, mint azon területek diákjai, ahol csak a helyi imám tanította a fiatalokat. Az ezredforduló után kezdődött igazán a tehetségek felkutatása és az iskolák alapítása, szerte az iszlám világban, de előbb érdemes megnézni, milyen eredmények köthetők ehhez az időszakhoz. A területi szétszóródás tehát a X. század óta tovább nőtt, 1000 körül már több kelet-iráni és afgán és spanyol város is fellegvárnak számított. A kor nagyobb matematikusai az időszak áttekintése érdekében ismét alább láthatók (3. táblázat):

<i>Név:</i>	<i>Születési idő, település, ország:</i>			<i>Halálozási idő, település, ország:</i>		
Al-Sijzi	~945	Sijistan	Irán	~1020	Shiraz	Irán
Al-Karaji	953	Bagdad	Irak	~1029	<i>valahol a hegyekben</i>	
ibn al-Haytham	965	Baszra	Irak	1040	Kairó	Egyiptom
Abu Nasr Mansur	970	Khwarezm	Üzbegisztán	1036	Ghazna	Afganisztán
Al-Biruni	973	Kath	Üzbegisztán	1048	Ghazna	Afganisztán
Al-Baghdadi	980	Bagdad	Irak	1037	Asfirayin	Irán
ibn Sina	980	Kharmaiten	Üzbegisztán	1037	Hamadan	Irán
Al-Jayyani	989	Cordoba	Spanyolorsz.	1079 után	Jaén	Spanyolorsz.

3. táblázat

A közvetlen matematikai eredmények mellett még ebben a korban is a csillagászati könyvek lapjain találjuk a legtöbb, közvetett matematikai tételt és bizonyítást. A problémák többségét az ezredforduló idején is az égbolt adta, így a geometria és a trigonometria is ennek révén fejlődött, de azért foglalkoztak a tudósok sorozatokkal, egyenletekkel, azonosságokkal és számelméleti kérdésekkel is.

Al-Sijzi is számos csillagászati kutatást végzett, többségét Shirazban, Közép-Iránban, ahol élete nagy részét élte [24]. Az egyik hosszabb kutatás 969 és 970 között zajlott, és al-Sijzi eközben írta több matematikai könyvét. Ezek elsősorban geometriai problémákat vizsgáltak, például egy háromszög egyenesekkel történő darabolását adott arány szerint. Hasonlóan kutatta gömbökbe helyezett kisebb gömbök térfogatának arányát. Ugyanebben az időszakban al-Sijzi kidolgozta a négydimenziós térre vonatkozó elképzelését, továbbá a négy dimenzióban értelmezett gömböket is vizsgálta. A matematikatörténet kutatói vitatják, hogy ez a gondolat egy tudatos előrelépés volt-e, mivel a későbbi munkáiban már nem említi a négydimenziós ötletét.

Az ezredfordulóra geometriai bizonyítást adott az $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ azonosságra. Ehhez a , b és $a + b$ oldalhosszúságú kockákat és $3ab(a + b)$ térfogatú paralelepipedonokat használt. A matematikatörténészek szerint ez az Elemek második könyvének három dimenzióba történő kiterjesztése. Bizonyítása érdekes adalék lehet az azonosságok

tanításakor, általa jobban érthetővé válik ez az azonosság, illetve a létezése is értelmet nyer a kritikus tanulók számára: az összefüggés a „valós” geometriában is használható.

Al-Karaji (الكرج) Bagdadban tevékenykedett, egyik legfontosabb eredménye az indukciós bizonyítás bevezetése. Munkásságával alább külön fejezetben foglalkozok.

Al-Haytham (الهيثم), a Kairóban tevékenykedő iraki tudós számelmélettel foglalkozott, és ő volt a mai Wilson-tétel feltalálója [24]. Alább részletesebben ismertetem munkásságát.

Abu Nasr Mansur (أبو نصر منصور) üzbeisztáni születésű, de később Afganisztánban tevékenykedő matematikus a trigonometriát fejlesztette, és ő volt a szinusztétel felfedezője: $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ [24]. A képlet korábban is felbukkant már (szavakkal megfogalmazva persze), legkorábban al-Battani műveiben (lásd fentebb), de az általánosított szinusztétel Abu Nasr Mansur eredménye. A tétel bizonyítása pedig majdnem minden könyvében újra és újra előfordul. A téma tanításakor érdemes megemlíteni, de nem érdemes órai vagy szakköri terveket kidolgozni erre a matematikatörténeti eredményre.

Al-Biruni (البيروني) főleg csillagászként lett ismert, aki szélességi (és hosszúsági) fokokat számítgatott minden egyes helyen, ahol megfordult [24]. Hold- és napfogyatkozást vizsgált Kabulban, Afganisztánban 1018-ban és 1019-ben, majd feltehetően Mahmud rabszolgájaként bejárta Indiát, és ott is kutatott 1022 és 1026 között. Árnyékok című művében kifejti, hogy három dimenzióban három koordinátával pontos helymeghatározást lehet végezni. 600 település koordinátáit gyűjtötte össze és publikálta, a Föld átmérőjét pedig hihetetlen pontossággal és a nyugatot 600 évvel megelőzve 6339,6 kilométerre becsülte. A térben alkalmazott koordináta-geometria nem képezi a középiskolai oktatás részét, azonban egy szakkör keretein belül elgondolkodtató kérdés lehet, hogyan volt képes al-Biruni ilyen pontosan meghatározni a Föld átmérőjét, és hogyan segített ebben a számos település koordinátája.

Al-Baghdadi (البغدادی), az Iránban tevékenykedő iraki matematikus, élete nagy részében tanított, egyik könyvében pedig összehasonlította a kor összes aritmetikai rendszerét és módszerét [24]. Ebben kiemeli minden rendszer előnyét, vizsgálja a fejleszthetőséget, végül pedig leteszi voksát az indiai számok mellett. Ugyanebben a könyvében foglalkozik irracionális számokkal és üzleti matematikával, egy másik művében pedig számelmélettel. A számrendszerek tanításakor megemlítésre érdemes al-Baghdadi összehasonlító elemzése, illetve megoldható az egyes aritmetikai rendszerek versenyszerű összevetése, keresve azok gyenge pontjait.

Számelméleti megfontolásait alább részletezem.

Kevés nagyobb zseni élt valaha is a Földön, mint Ibn Sina (بن سينا). 10 éves korában már kívülről tudta a Koránt és minden arab irodalmi művet, amit addig olvasott. 13 évesen kezdett orvosnak tanulni, 16 éves korában pedig diplomát szerzett és operálni kezdett [24]. Híres könyveinek egyike, a Gyógyítás könyve negyedrészből matematikai tartalmú. Ebben a geometriát kiterjeszti más területekre, így alkalmazza a geodéziában, statikában, kinematikában és az optikában, de matematikai párhuzamokat prezentál a zenével is. A geometriai bizonyításait nem az euklideszi axiómákra vezeti vissza, hanem más utakat keres. Ezen felül persze ad az enciklopédiához méltó definíciókat is: egyenesek, szögek, síkidomok, háromszögek, szerkeszthetőség körzővel és vonalzóval, területek, térfogatok, a kör részei, a

kör kerülete, gömbi térfogatszámítás és még sok-sok szócikk szerepel a műben. Néhány szócikk elemzése, illetve említése a megfelelő téma tanításakor hasznos lehet.

Az ezredforduló utolsó arab matematikusa éppen az első európai: a spanyol al-Jayyani matematikus könyvében érdekes definíciót ad az axiómára, mint „magától értetődő definícióra”: „Nincs rá mód, hogy megmagyarázzunk valamit, ami önmagában meg van magyarázva.” [24]. Az axiómák szükségessége a matematika tanításában magától értetődő. Bármilyen tétel bizonyítása során eljutunk egy újabb bizonyítandó állításhoz, és ez így megy egészen addig, amíg valami „teljesen nyilvánvalóhoz” jutunk. Ennek oktatásban betöltött szerepéről részletesen írt Gosztanyi Katalin, szakdolgozatában. Az axiómák megértetésekor fontos kitérni rá, hogyan álltak a bizonyításokhoz és az axiómákhoz 1000 évvel ezelőtt.

Al-Jayyani másik érdekes gondolata, hogy bevezette a számokat a geometriai alapfogalmak közé. Egyik korábbi arab vagy görög matematikus sem alkalmazta az egyenessel, szögekkel vagy felszínnel egyenértékűen a számokat, mint fogalmakat. Később foglalkozott gömbi geometriával, az alkonnyal és a hajnali pirkadattal, holdnaptárral és a nap hosszának pontos mérésével. Munkásságára nagy hatással volt az európai matematika és az ottani eredmények.

Az algebrai egyenletek megjelenése és jelentése 1000 körül, illetve napjainkban

Az algebrai egyenletek feltalálása az iszlám matematikatörténet egyik első és egyik legfontosabb eredménye. Ennek megértéséhez és feldolgozásához át kell gondolni néhány fogalmat: ezek az egyenlőség, az igazság és az egyenlet.

Önmagában az egyenlőség kérdése is érdekes, és ezzel a tanulók már egészen fiatalon, az óvodában találkozhatnak [38][39]. Már a fejlődésük igen korai szakaszában felismerik, hogy van valamilyen kapcsolat két kisautó, két játékbaba és két építőkocka között. A mennyiségek egyenlőségére vonatkozó feladatok az egész alsós tananyagot végigkísérik [40]. Ilyen tipikus feladat, ahol a diáknak össze kell kötnie az azonos mennyiségeket ábrázoló képeket. Ezek egy része egybevágó alakzatok (például identikus, valamilyen színnel kitöltött körök vagy négyzetek) egyenlő darabszámát követeli meg, máskor pedig különböző tárgyak képét látja a tanuló (két alma, két szilva, stb.).

Az egyenlő mennyiség fogalma így idővel kialakul, ennek absztrakt megfogalmazása a $2 = 2$ egyenlőség. Vannak gyerekek, akik nehezebben értelmezik a $2 \text{ alma} = 2 \text{ körte}$ összefüggést, noha a feladatok lényege továbbra is a $2 = 2$ egyenlőség (másképpen megfogalmazva: $2 \text{ valami} = 2 \text{ valami}$, és ez már tényleg helyes). Az egyenletek megértésekor még inkább előfordulnak ilyen zavarok [33]: a diákok nehezen bánnak az ismeretlenekkel, együttthatókkal. Az előző példa ($2 \text{ alma} = 2 \text{ körte}$) egyszerűsítve az $\text{alma} = \text{körte}$ állításhoz vezet, ezt a gyakorlatból persze tudjuk, hogy nem igaz (másképpen $\text{valami} = \text{valami}$, ami pedig igaz).

Innen következik az igazság kérdése: mit tekintünk igaznak, majd ebből következően egyenlőnek? A matematika csak akkor tekint egy kijelentést állításnak, ha egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy sem. Mivel az egyenletek is állítások, itt is fontos, hogy legyen határozva, mi igaz és mi nem az. Ezzel minden egyenlet (és állítás) két részre osztja az alaphalmazt: a megoldásokra és a nem-megoldásokra. Sok esetben megegyezés kérdése az igazság, az ilyen megegyezések legalapvetőbb változatai az axiómák. (Az axiómákra érdekes definíciót adott al-Jayyani, fentebb már szerepelt.)

Ilyen megegyezés például, hogy az $\text{alma} \neq \text{körte}$, de $\text{valami} = \text{valami}$, ha nem számít, hogy miről is van szó. De mi a helyzet a következő, egyszerű egyenlőségekkel?

- 1) $2 = 2$
- 2) $\frac{1}{2} = 0,5$
- 3) $V = 5$
- 4) $V = 7$
- 5) $4,36999 = 4,37$
- 6) $4,36999... = 4,37$
- 7) $0^{\circ}\text{C} = 273,15\text{K}$

Az első egyenlőséget mindenki igaznak véli. A két oldal bármivel kicserélhető (persze egyidejűleg mindkét oldalt ugyanarra kell cserélni), és bármilyen alaphalmazon az állítás igaz lesz.

A második egyenlőség is értelmezhető, a valós számok halmazán. Kevés esettől eltekintve (amikor valamelyik használat egy feladatban megkövetelt) egyéni ízlés kérdése, hogy valaki hagyományos tört alakot vagy tizedes törtet használ. Azonban nem volt ez mindig így: a matematika kezdeti időszakában a tört számokat nem is ismerték, a tizedes törtek megjelenése pedig több évezreddel későbbre tehető, mint az egyiptomi egységtörtek felbukkanása. Tehát ezt az egyenlőséget al-Uqlidishi előtt (akinek könyve az első ismert forrás, ahol a tizedes törtek következetesen előfordultak, lásd fent) aligha értették volna, és főleg nem láthatták igaznak.

A harmadik és negyedik állítás kifejezetten arra példa, hogy fontos tisztázni, milyen feltételek mellett tesszük az adott kijelentést. Az egész- és valós számok között is értelmezhető mindkét egyenlet, ekkor (ha V egy szimbolikus ismeretlen) a $V = 5$ és $V = 7$ eredményre jutunk. De tekinthetünk erre a két egyenlőségre úgy, mint megfeleltetések különböző számírások között: a V a római számok nyelvén 5-öt, az arab számírásban 7-et jelent, és így is igaz marad a két állítás. Felcserélve a körülményeket már sérül az igazság: a V nem jelent 7-et a római számok nyelvén.

Más jellegű igazsági kérdést vet fel az ötödik és hatodik egyenlőség. Az ötödiket egy matematikus nem tekintené igaznak, míg egy fizikus már igen. A hatodik egyenlőség viszont mindenképpen igaz, de ez is a modern kor számára triviális (a valós számok két alakja: egy véges és egy végtelen tizedes tört). Ugyanezt az állítást nehezebben érti meg egy 8-12 éves tanuló, aki korábban csak a $2 = 2$ egyenlőséget tanulta igaznak [40].

A hetedik egyenlőség a $2 \text{ alma} = 2 \text{ körte}$ fordítottja: itt a különböző mérőszámok jelentik ugyanazt (a hőmérsékletet). Mértékegység nélkül értelmét veszti ($0 = 273$), de ebben a formában köztudottan igaz, és ebből következnek az átváltásra vonatkozó egyenletek, például:

$^{\circ}\text{C} = \text{K} - 273,15$ [41], bár ugyanez sokkal inkább helyes lenne a következő formában:
 $t (^{\circ}\text{C}) = T (\text{K}) - 273,15$ [42], amelyből már készíthető értelmes kérdés (például adott t esetén mennyi a T , vagy fordítva).

Ezek az egyenletek vezetnek az ismeretlenekhez, amelyekből számítással ki lehet fejezni a korábban nem ismert tagot. A görög matematikusok (de korábban az egyiptomiak és részben az irakiak is) rendkívül gyakorlatiasak voltak, és a matematikai problémákat az életből vették (pl. területszámítás). Így az egyes egyenletek is úgy születtek, hogy azok valamilyen geometriai esetet képviseltek [43].

Az arab matematikusok, és ebben al-Khwarizmi volt úttörő, elrugaszkodtak ettől a kötöttségtől, és olyan egyenleteket is elkezdtek megoldani, amelyeket nehezebb (vagy lehetetlen) lett volna geometriai problémával reprezentálni [22]. Ezzel új igazságok születtek, végül pedig az egyenletek révén az algebra és a geometria is ugrásszerű fejlődésnek indult.

Az azonosságok megjelenésekor a tudósoknak már kialakult véleménye volt az egyenletek alaphalmazáról, megoldáshalmazáról és ekvivalenciájáról. A bizonyító matematika fejlődése ugyanakkor nem okozott törést az algebra és a geometria harmóniájában, vagyis az arab matematikusok töretlenül folytatták geometriai kutatásaikat is [22].

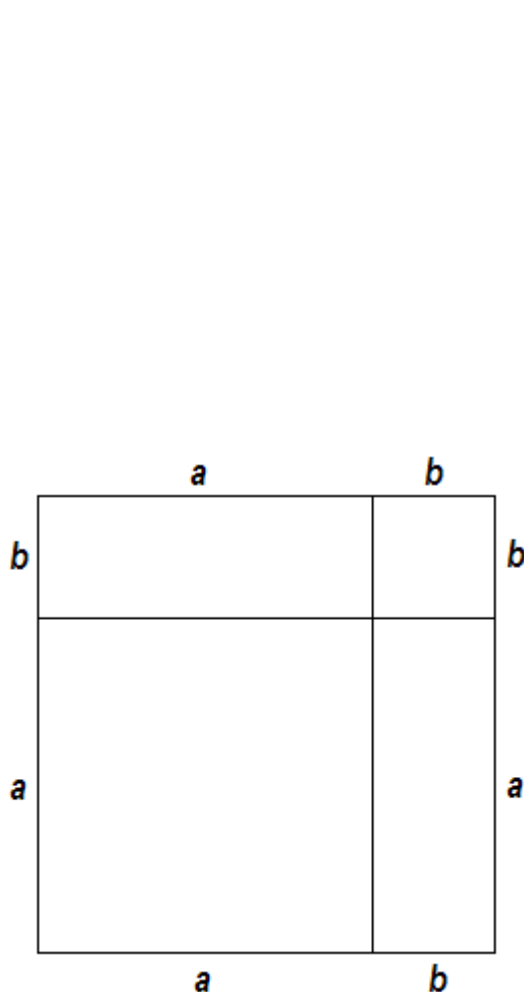
Ez vezetett az egyszerűbb és bonyolultabb azonosságok többféle úton történő bizonyításához, amelynek viszont nagy jelentősége lehet a mai matematikaoktatásban. Az igazságvizsgálat után, amely ugyancsak fontos az egyenletek megértéséhez, be lehet mutatni néhány régi bizonyítást, ami esetekben nem csak szemléletes, hanem a másféle megközelítés miatt az alapos megértés különösen fontos eszköze [6].

Egy lehetséges konkrét példa: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

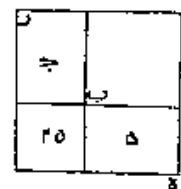
Sok esetben a fenti azonosság nem jelent semmit a diák számára [33]. Gyakran párosul egy hibás gondolattal („csak meg kell tanulni, és kész”), amelyből következik Ian Stewart brit matematikus híres egyenlete, amit a tanítás éve során ismert fel: *matematika = iskola* [22].

A fenti azonosság kifejtése történhet ekvivalens algebrai lépésekkel, amely sok diáknak elegendő szemléltetés: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Másoknak alkalmasabb a geometriai módszer (más azonosságnál nem biztos, hogy ennyire személetes), amelyből a területeket összegezve éppen az azonosság állítását kapjuk:



علي تسعة وثلاثين ليثم السطح الأعظم الذي هو سطح ره فبلغ ذلك كله أربعة وستين فإخذنا جذرها وهو ثمانية وهو أحد اضلاع السطح الأعظم فإذا نقصنا عنه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح أب الذي هو المال وهو جذره وأمال تسعة وهذه صورته



وأما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل المال سطحاً مربعاً مجهولاً وهو سطح أد ثم نضم اليه سطحاً متوازي الأضلاع عرضه مثل أحد اضلاع سطح أن وهو ضلع دن والسطح دب فنصار طول السطحين جميعاً ضلع جـه وقد علمنا أن طوله عشرة من العدد لأن كل سطح مربع معساري الأضلاع والزوايا فإن أحد اضلاعه مضروباً في واحد جذر ذلك السطح وفي اثنين جذره فلما قال مال واحد وعشرون يعدل عشرة اجذاره علمنا أن طول ضلع هـ عشرة اعداد لأن ضلع جـه جذر المال قسمنا ضلع جـه بنصفين علي نقطة

2. ábra:

Balra: saját szemléltető ábra, jobbra: al-Khwarizmi egy kézírata, hasonló témában [33]

Meg kell jegyezni, hogy al-Sijzi geometriai bizonyítása az $(a + b)^3$ azonosságra már sokkal bonyolultabb, és meghaladja a középiskolás szintet (különböző élhosszúságú kockák és paralelepipedonok együttes használata), ugyanakkor még így is elképzelhető, hogy lesz olyan diák, aki ezt érzi szemléletesnek.

Maradva az egyenleteknél, meg kell említeni, hogy több esetben nem az egyenlet megoldása a lényeges, hanem maga az egyenlet. Ilyen a különböző alakzatok (kör, egyenes, parabola, hiperbola, stb.), síkok és terek egyenlete, vagy számos fizikai összefüggés (akár a fenti, egyszerű átváltó képletek).

Az egyenletek szakköri alkalmazása többféle is lehet. Számos (többnyire másodfokú) arab egyenlet ismert, ezeket többféle megoldásra is ki lehet adni feladatként. Al-Khwarizmi módszerének vizsgálata is hasznos feladat (milyen együtthatók esetén működött, voltak-e olyan egyenletek, amelyeket nem lehetett az ő módszerével megoldani, van-e olyan lépés a levezetésében, ami elhagyható, stb.). Ezek a feladatok az egyenletek jobb megértéséhez, a biztosabb megoldásához vezetnek, de a történeti vonatkozások ismét csak adalékot jelentenek, az anyag enélkül is elsajátítható.

Egy matematikatörténeti szakkör vagy tábor végén, amikor már kellő tudománytörténeti ismerettel rendelkeznek a diákok, érdekes versenyt lehet rendezni (akár források biztosításával). Olyan kérdéseket lehet összeválogatni, mint amit a fentebb vizsgált egyenlet is sejtet: „Hogyan értelmezte volna al-Khwarizmi a következő egyenlőséget: $\frac{1}{2} = 0,5$?”

A válaszok több irányból is megközelíthetik a kérdést: ki lehet térni rá, hogy al-Khwarizmi idején még nem alkalmazták a szimbólumokat, hanem szavakkal írták le az összefüggéseket. Ugyancsak helyes következtetés, amit fent már elemeztünk: al-Khwarizmi idején még nem volt elfogadott a tizedes törtek létezése. De az a diák sem felel rosszul, aki kijelenti, hogy ezeket a karaktereket (0, 1, 2, 5) Fibonacci kora előtt (~1200) senki sem ismerte, mert még nem is léteztek (sem az európai, sem a közel-keleti számjegyek nem így néztek ki 900 körül).

Hasonló kérdések egész sora készíthető.

Számelméleti érdekességek az arab matematikában 1000 körül és lehetséges szerepük egy szakkör keretein belül

A számelmélet megjelenése a számírás kialakulásával köthető össze, bár egy kevéssel később született: időszámításunk előtt 3000 körül keletkezett az iraki 60-as számrendszer, mint első igazi matematikai eredmény [23]. (Maga a számlálás körülbelül 30 000 éves múltra tekint vissza, de a számlálás megjelenése még nem számít matematikatörténeti eredménynek.) Időszámításunk előtt 2700 körül, amikor megjelent az egyiptomi 10-es számrendszer, már felbukkannak a számok vizsgálatára utaló emlékek és a számok tulajdonságaival foglalkozó feladványok, rejtvények [22]. Ezen a ponton vált el a gyakorlati alkalmazás és az elméleti számtudomány.

A számokról alkotott elképzelések bővülésével (műveletek fejlődése, új számhalmazok megjelenése és elfogadása) a számelmélet is fejlődésnek indult: az osztók keresése, prímek kutatása jellemző kutatási területe volt minden következő korszak matematikusainak, így a X. és XI. században az arab tudósoknak is. De hogyan használható ez a mai oktatásban? Újra fel kell fedezni a régen ismert prímekeket vagy az ezer éve felállított, ma is működő oszthatósági szabályokat?

A helyes válasz: igen és nem. A matematikatörténet hasznos segítség lehet sok témakör tanítása esetén [4], illetve kulturális kötelesség említeni néhány tudománytörténeti eseményt. Ugyanakkor történelmet tanítani matematika helyett biztosan nem szerencsés [6], ráadásul a kronológiai fejlődés nem mindig áll párhuzamban a napjainkban tanított matematika egymásra épülő témaköreivel, és időnk sincsen ilyen mélységben tanítani az órákon. Viszont a számelmélet egy kis szeletét kiragadni, és egy szakkör keretein belül elemezni, a témában feladatokat írni és megoldani már nagyon is értelmes tevékenység. Másrészt a fiatal tanulók viszonya a számokhoz éppen olyan, mint az emberiségé a történelem során: a mai gyerekek éppúgy meg kell, ismerjék a számokat és tulajdonságait, mint ahogy a matematikusok tették évezredekkel ezelőtt, de szem előtt kell tartani, hogy milyen szinten tart ma a tudomány, és ennek irányába kell terelni a diákokat.

Alább a barátságos és ekvivalens számpárok, illetve a tökéletes számok kutatási eredményeit összegzem az arab matematikában az ezredfordulóig, és ebből vezetem le az egyik lehetséges szakköri alkalmazást.

Al-Harrani (الحاراني), vagy ahogy többen ismerik: Thabit ibn Qurra (ثابت بن قرة) 836-ban született Harranban, a mai Törökország egyik déli, az iraki határhoz közeli városában, majd Bagdadban tevékenykedett, a Bölcsesség Házában [24]. Ő tekinthető a statika atyjának, emellett számos matematikai kutatást is végzett: kiterjesztette a számokról alkotott fogalmakat, bevezetve a (pozitív) valós számokat, eredményeket ért el az integrálszámításban, foglalkozott gömbi trigonometriával, analitikus geometriával és nem-euklideszi terekkel.

Ő kezdeményezte a $\sqrt{x}$ függvény alatti terület számítását. Korszakalkotó ötlet volt, hogy alsó és felső közelítő összegekkel próbálta meghatározni az integrált, és a mérés pontossága a felosztások számával arányosan nőtt. Ez a felvetés is használható az integrálszámítással foglalkozó témakör felvezetésekor, a Riemann-féle közelítő összegek tanításakor.

Szintén al-Harrani kezdte el azt a vizsgálat-sorozatot, amely végül a számelmélet születéséhez vezetett, ebben legfontosabb eredményét a barátságos számokra felírt képletével érte el.

Baráti számpárnak két olyan pozitív egész tekinthető, ahol az egyik szám önmagától különböző pozitív osztóinak összege egyenlő a másik számmal és fordítva.

Mai jelöléssel: $S(n) = m$ és $S(m) = n$; $n, m \in \mathbb{N}$, de persze 900 körül, al-Harrani korában, ezeket a megállapításokat csak szavakkal írták le.

Az egyik ilyen közismert számpár volt akkoriban a 220 és a 284, ezek már korábbi görög művekben is felbukkannak [24][28][29]:

220 osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; ezek összege 284.

284 osztói: 1, 2, 4, 71, 142; ezek összege 220.

Al-Harrani kilenc lemmát adott a baráti számpárokra, majd az alábbi képlettel állt elő:

$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ q &= 3 \cdot 2^n - 1 \\ r &= 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 \end{aligned} \quad p, q, r \text{ számok prímek, és } n > 1 \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow a = 2^n pq \text{ és } b = 2^n r \text{ számok baráti számpárt alkotnak.}$$

Ha $n = 2$, akkor $p = 5$, $q = 11$, $r = 71$, és $a = 220$, $b = 284$.

Ha $n = 4$, akkor $p = 23$, $q = 47$, $r = 1151$, és $a = 17296$, $b = 18416$.

Utóbbi számpárt bizonyosan al-Harrani fedezte fel. Tanulóknak feladható a képlet vizsgálatra. Ugyanígy meg lehet vizsgálni Fermat, Descartes és Euler hasonló képleteit, és összevetni al-Harrani formulájával. Kerestethetünk házi feladatként barátságos számpárokat, szem előtt tartva, hogy az elérhető nagyságú barátságos számpárok jegyzéke az interneten is könnyen megtalálható, vagyis elveszhet a feladat lényege, a kutatás öröme.

A következő arab matematikus, aki számelméleti sikereket ért el az iraki származású, Kairóban tevékenykedő ibn al-Haytham (**ابن الهيثم**). 965-ben született Baszrában, Irakban, innen ered egyik ismert ragadványneve: al-Basri (**البصرة**). Fiatalon szociális munkát végzett a baszrai miniszter szolgálatában Dél-Irakban, Kuvaitban és Nyugat-Írán Irakkal és Kuvaittal határos részén [24], miközben az akkor létező vallásokat kutatta. Amikor elkötelezte magát a tudomány mellett, ibn al-Haytham Kairóba költözött, ahol az aktuális kalifa, al-Hakim (**الحكيم**) (996 – 1021) lelkesen támogatta a tudósok kutatásait. Innen származik másik ismert ragadványneve: al-Misri, azaz egyiptomi (**المصر**). Nevének latinósított változata (Alhazen) is közismert.

Ibn al-Haytham Kairóban egyik első tanulmányát a Nílus lehetséges szabályozásáról írta, ami felkeltette a kalifa figyelmét. Rövidesen egy mérnök-csapat élén találta magát, a kalifa pedig parancsba adta, hogy keressenek alkalmas helyet a terv kivitelezéséhez. Ibn al-Haytham egészen Szudánig utazott, de nem talált megfelelő helyszínt, így a csapata és a terve kudarcot vallott. Al-Hakim csalódott az eredmény hallatán, és adminisztratív munkát adott ibn al-Haythamnak, aki (mivel így nem tartozott a tudósok közé) megtapasztalhatta al-Hakim kiszámíthatatlan és veszélyes személyiségét. Menekülés gyanánt ibn al-Haytham örültnek tette magát, egészen al-Hakim haláláig, és csak utána tért vissza a normális emberek közé.

Ettől kezdve élete hátralévő részében tanított és szövegeket fordított Kairóban, ha pedig saját ötlete volt, írt is matematikai könyveket.

Számelmélet terén ő volt a mai Wilson-tétel feltalálója. Ezen felül megoldott számos további kongruencia-rendszert és a kínai maradéktétel egy speciális esetét is. Továbbá kutatta a tökéletes számokat: $k > 1$ -re ha $2^k - 1$ prím, akkor $2^{k-1}(2k - 1)$ egy tökéletes szám.

A Wilson-tétel mai jelöléssel írva a következő:

Ha p prím, akkor $p \mid (p - 1)! + 1$, továbbá $(p - 1)! + 1 \equiv 1 \pmod{i}$, ahol $i = 1 \dots (p - 1)$, vagyis ha p prím, akkor a $(p - 1)! + 1$ szám osztható p -vel és a $(p - 1)! + 1$ számot minden p -nél kisebb számmal osztva 1 lesz a maradék.

A harmadik matematikus al-Baghdadi (البغدادي). Bagdadban született 980 körül, de élete nagy részét Nishapurban és Asfirayinban töltötte, Iránban [24]. Kiváló tanár volt, erről fentebb már esett szó. Foglalkozott azonban számelmélettel is, ezért kapott helyet ebben a fejezetben.

A számelméleti gondolatai első ránézésre nem hoztak újdonságot. Ő is foglalkozott a baráti számpárokkal és tökéletes számokkal (amikor $S(n) = n$), de alig módosított a már korábban is létező képleteken. Az ekvivalens számok vizsgálata viszont nagyon is új gondolat, eszerint legyen továbbra is $S(n)$ az $n \in \mathbb{N}$ szám önmagától különböző (pozitív) osztóinak összege. Ekkor n és m ekvivalens számok, ha $S(n) = S(m)$. Al-Baghdadi ezt feladat formájában is megfogalmazta:

Adott $k \in \mathbb{N}$ számhoz keressünk $n, m \in \mathbb{N}$ számpárt, hogy $S(n) = S(m) = k$. A megoldás menete is érdekes, a példa pedig $k = 57$ -re $S(159) = S(559) = 57$. Al-Baghdadi figyelmen kívül hagyta, hogy létezik egy harmadik szám is: $S(703) = 57$ szintén működik, ezt későbbi matematikusok vették észre.

A fenti számelméleti kérdések oktatásbeli alkalmazhatóságával részletesen foglalkozott Oystein Ore norvég matematikus [28] és Pálfalvi Józsefné, az ELTE Természettudományi Karának Matematikai Intézetének docense [29]. Mindketten rámutattak a barátságos, tökéletes és ekvivalens számok érdekességeire, és ezt az érdekességet tárták a diákok elé. A két kötet (a fentiekhez hasonlóan) tartalmazza a különleges számok definícióit, kutatási eredményeit és a képletek bizonyítását. Ezek segítségével a tanulók számokról alkotott fogalma bővül, fejlődik a bizonyító matematika iránti igényük, illetve jártasságot szereznek az oszthatósági feladatok megoldásában.

A képletek bizonyítása feladható dolgozat vagy matematikai verseny feladatként, és hasonlóan célszerű a képletek jellemzését is kiadni feladatként. Ez utóbbi akár tanórai, akár szakköri feladat is lehet, amely során a diákok alaposabban átgondolják a képleteket, azok alkalmazhatóságát. Néhány lehetséges kérdés és válasz:

A képlettel az összes barátságos számpárt megkapjuk?

Természetesen nem, bár az ilyen számok és számpárok végtelen mennyisége még nem bizonyított [29]. Erdős Pál sejtése, miszerint valóban végtelen sok barátságos számpár létezik, ismét matematika-történeti ismeret [44].

A barátságos számokra vonatkozó képlet miért nem működik $n = 3$ -ra?

Rögtön látjuk, hogy ekkor $r = 9 * 32 - 1 = 287 = 7 * 41$, ami nem prím.

Vajon a $\{220, 284\}$ és a $\{17296, 18416\}$ között nincs barátságos számpár?

De igen, van. Az $\{1184, 1210\}$, $\{2620, 2924\}$, $\{5020, 5564\}$, $\{6232, 6368\}$, $\{10744, 10856\}$ és a $\{12285, 14595\}$. Ezek megkeresése még irányított feltételek mellett is nehéz és hosszadalmas. Fontos megjegyezni, hogy a számpárok keresése alkalmatlan házi feladatnak, mivel az egymilliónál kisebb barátságos számpárok az internet legegyszerűbben megtalálható segédleteiben is szerepelnek [47].

Fogalmazzunk meg sejtéseket a barátságos számpárokkal kapcsolatban, akár a fenti 8 példa, akár az ismert négymillió barátságos számpár közül nagyobb mennyiség megadása után.

Egy lehetséges sejtés, hogy a barátságos számpárok mindig azonos paritásúak. Másik ötlet lehet, hogy számjegyeik száma egyenlő. Ebből következhet (bár önállóan is értelmes gondolat), hogy a barátságos számpárokból képzett hányadosok 1-hez tartanak. A bizonyítással lehet kísérletezni, de ezek a sejtések eddig nem nyertek igazolást [29]. (A második legkisebb barátságos számpárt egy 16 éves fiú találta meg, így egyáltalán nem értelmetlen a bizonyítást kiadni középiskolásoknak.)

Meg lehet említeni, hogy a IX. században ismert két barátságos számpár után 850 évvel, Euler korában is csak 62 ilyen tulajdonságú számpárról tudtak a matematikusok, és az 1946-os Escott-listán (amely az addig ismert összes barátságos számpárt tartalmazta) is csak 233 számpár szerepelt. 1985-ben, a számítástechnika korai időszakában 1427 számpárt jegyeztek, és ezek után, a 2000-es évek elejére duzzadt a mennyiség 4 millió fölé. A diákok gondolkodhatnak ezek alapján, minek köszönhető ez a drasztikus fejlődés, és ennyi ismert számpárnál miért nem ismert még az általános előállítási képlet és a bizonyítás.

A tökéletes számokra vonatkozóan szintén több kérdést is feltehetünk. Az ókorban ismert volt a következő négy tökéletes szám: 6, 28, 496, 8128. Milyen következtetéseket lehet ebből leszűrni?

Ókori feltételezés, de a mai kor diákjától is várható hasonló felvetés, ha csak a fenti négy számból indul ki: minden i -edik tökéletes szám i darab számjegyből áll. Ez téves, mivel a következő tökéletes szám a 33 550 336, ami 8-jegyű. Következő feltételezés lehet, hogy minden i -edik tökéletes szám 8-ra végződik, ha $i = 2k$ alakú ($k \in \mathbb{Z}$), és minden $i+1$ -edik szám 6-ra végződik. A soron következő tökéletes szám azonban ezt a feltételezést is megbuktatja (8 589 869 056), ami a hatodik, és mégis 6-ra végződik.

Ez a próbálkozás, vagyis amikor a sorozat első néhány eleméből következtetünk a többire, nagyon gyakori az általános iskolás példatárakban, „Folytasd a sorozatot!” kezdettel [40]. Ilyen esetekben a sorozatok minden esetben többféleképpen folytathatók, hiszen akár a teljes kitöltendő sor lehetne egy ciklus, ami újra és újra visszatér. Ez a rákövetkezésen alapuló folyamat képezi a következő fejezetek alapját.

Visszatérve még a tökéletes számokhoz, feladható bizonyításra, hogy minden páros tökéletes szám 6-ra vagy 8-ra végződik.

Euklidesz kora óta ismert előállítási képlet a következő: ha 2^{n-1} prím, akkor $2^{n-1}(2n - 1)$ egy tökéletes szám. Vajon miért nem módosított a képleten al-Baghdadi?

Talán érdekes, de a mai napig ez az elfogadott képlet a tökéletes számok előállítására. Értelmetlen lett volna módosítani rajta, hiszen a képlet jól működött.

Nagyobb mennyiségű tökéletes számot bemutatva újra várhatunk sejtéseket a diákoktól. Ezek a kérdések fejlesztik a problémamegoldó gondolkodást és annak igényét. A diák ekkor nem készen kapja a megoldást, hanem saját magának kell megkeresnie, ami megfelelő felépítés mellett lehetséges, és a gondolkodás öröme mellett sikerélményt is okoz. Ugyanez segíti a tartós emlékezés képességét (a saját élményt tartósabb emlékezés kíséri, mint a készen kapott tudását), és ezek a szempontok mind-mind a mindenkori NAT alapelveit jelentették [1][2].

A várható sejtések a következők: nem létezik páratlan tökéletes szám. Ez a kérdés még mindig nyitott a matematikusok körében. Hasonló gondolat lehet, hogy véges, illetve végtelen sok tökéletes szám létezik. Egyik verzió sem bizonyított, itt érdemes kitérni a Mersenne-prímekre (2^{n-1} alakban felírható prímek, ahol n szintén prím). Jelenleg véges sok Mersenne-prím ismert (47 darab), ennek megfelelően ugyanennyi tökéletes számról van bizonyosságunk (képletből következően).

Meggondolásra érdemes ötlet, hogy a tökéletes számok lényegében olyan barátságos számpárok, ahol a két szám azonos. Azonban, mivel ennek semmilyen érdemi következménye nincs, nem érdemes így tekinteni a tökéletes számokra, és a szakirodalom sem teszi ezt.

Érdekes felismerés (de ötlet hiányában a diákok elé tárható), hogy a tökéletes számok osztóinak reciprokösszege mindig 2. (Ha az 1-et, mint osztót nem számítjuk, akkor az összeg 1). Erről részletesen ír a „Barátkozzunk a számokkal” című kötet [29].

Az ekvivalens számok azok, amelyekkel a legkevésbé foglalkozik a szakirodalom. A számelméleti könyvek is nélkülözik ezt a témát, ugyanakkor vizsgálatuk nem kevésbé érdekes vagy izgalmas, mint a barátságos számpároké. Itt már az internetes kutatás sem hoz azonnali eredményt, így bátran kerestessünk további ekvivalens számpárokat.

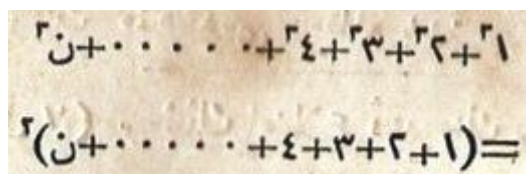
Al-Karaji élete és munkássága

Abu Bekr ibn Mohammed ibn al-Husayn al-Karaji (أبو بكر بن محمد بن الحسين الكرجي) 953-ban született Bagdadban [24]. Matematikusként kezdett dolgozni, könyvében (الفخري) számos problémát oldott meg. Élete második felét a mérnöki tudománynak szentelte, és egy általa „hegyi országnak” nevezett térségben telepedett le, ami egyes feltételezések szerint Afganisztán lehetett [34]. Ott is halt meg 1029-ben.

Al-Karaji megállapította az $x^n x^m = x^{n+m}$ azonosságot az egész kitevőkre, vagyis ahol $n, m \in \mathbb{Z}$. Ez előrelépés volt Abu Kamilhoz képest, aki csak természetes, azaz pozitív egész kitevőkre látta be az azonosságot, azonban al-Karaji nem definiálta az $x^0 = 1$ esetet. (Itt visszacsatolnék az egyenlőségek igazságvizsgálatához, és az egyezményes igazságokhoz, amire ez egy kiváló példa. Al-Karaji idején ugyanis nem volt még triviális igazság, hogy $x^0 = 1$, mivel ez nem egy természetbeli alapigazság.)

Képes volt négyzetgyököt vonni magasabbfokú polinomokból, ám ez a képlete nem volt kellően általános, mivel megkövetelte, hogy az együtthatók pozitív egészek legyenek. Foglalkozott a binomiális tétellel, a binomiális együtthatókkal és a Pascal-háromszöggel is. Könyveiben kiszámolta az $(a + b)^3$, majd az $(a - b)^3$ és $(a + b)^4$ azonosságokat, majd általános képletet adott a Pascal-háromszög felépítésére, bő ötszáz évvel Pascal előtt. Szintén al-Karaji eredménye az első n darab szám összegére vonatkozó képlet és bizonyítás, de elvégezte ugyanezt az első n darab négyzet- és köbszám összegére is.

Legnagyobb eredményét talán a bizonyítások terén érte el: bevezette az indukciós bizonyítást, bár a módszere még nem volt tökéletes. Prezentálta, hogy az adott állítás $n = 1$ -re igaz, majd ezt az eredményt felhasználva bizonyította az állítást $n = 2$ -re. Ezt a bizonyítást, mint módszert vitte tovább $n = 3$ -ra, és ha örökíthető volt az eljárás $n = 5$ -ig, akkor az állítást bizonyítottnak tekintette. Mindezek mellett geometriával is foglalkozott.



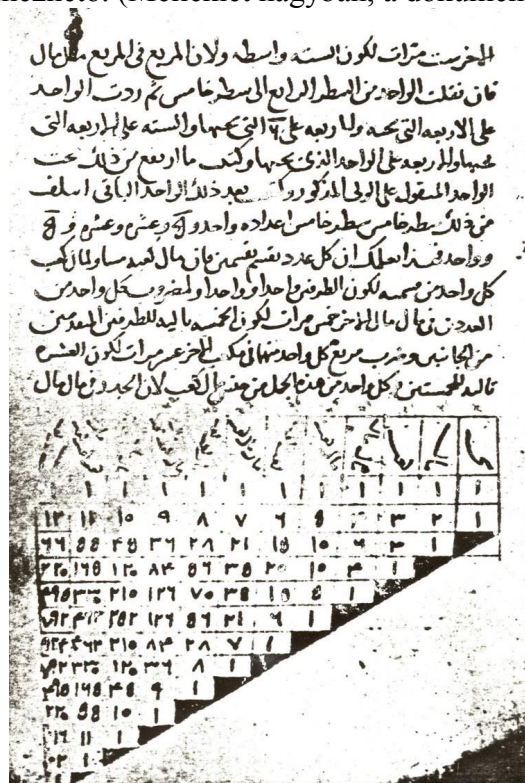
3. ábra: Al-Karaji köbszámok összegére vonatkozó állítása

Hogyan alakmazhatók al-Karaji matematikai eredményei a mai matematikatanításban?

Al-Karaji egyike azon arab matematikusoknak, akik meglehetősen sok jó ötlettel álltak elő. Jól működő képletei legalább annyira használhatók a mai oktatásban, mint a hibás vagy pontatlan elképzelései, mivel a tanulók problémamegoldó és hibakereső képességei éppen a „majdnem tökéletes” állítások és módszerek vizsgálatával fejleszthetők.

A hatványozás azonosságait tanítva bemutathatjuk al-Karaji eredményét. Ez mai jelöléssel így fest: $x^n x^m = x^{n+m}$ ahol $n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. Ezután feltehetjük a kérdést: miért nem ismerte fel al-Karaji, hogy az azonosság működik $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ esetén? A választ mi már tudjuk: al-Karaji nem definiálta és a korszakban nem volt ismert az $x^0 = 1$ eset. Ennek felismerése hangsúlyossá teheti a korábban tanult definíció jelentőségét, vagyis hogy $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ esetén. Beszélgetést lehet kezdeményezni arról, hogy mi az, amit szabad definiálni, és mi az, amit feltétlenül bizonyítani kell. Ki lehet térni a természetes számok axiómáira, a műveleti axiómákra, és meg lehet vizsgálni, sérti-e az $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ definíció bármelyiket.

A binomiális tétel és a Pascal-háromszög tanításakor is előkerülhet al-Karaji neve. Az egyik ok egyszerűen tudománytörténeti, mivel ő fedezte fel először az általános formulát a Pascal-háromszög együtthatóira, és Pascal „csak” összegyűjtötte a háromszögre vonatkozó összes korábbi eredményt 1655-ben. A másik ok, amiért érdemes vizsgálat alá helyezni al-Karaji háromszögét, a mai Pascal-háromszögtől való lényeges formai eltérése: 90 fokkal jobbra forgatva ábrázolta a binomiális együtthatókat, és mint az arab írás során természetes, jobbról balra írt. Kiadható a tanulóknak az eredeti háromszög, így a diákok megismernek egy másfajta szemléletet, kereshetik annak előnyeit és hátrányait. Ha nem találnak érdemi különbséget (leszámítva az írás irányát), az azt jelenti, hogy a háromszög 1000 éve jól használható és ma is értelmezhető. (Melléklet nagyban, a dokumentum végén.)



4. ábra: Al-Karaji binomiális háromszöge [37]

Az azonosságok tanítása talán az egyik legnagyobb kihívás a matematikaoktatásban. Ez a téma nehezen megközelíthető: nem igazán alkalmazhatóak valóságközeli, „izgalmas” feladatok az azonosságok körében, és a formulák felhasználása is nehezen lép ki a matematika falai közül. Ezért lehet érdemes itt is a matematikatörténethez nyúlni: hogyan fogalmazta meg al-Karaji a következő azonosságokat: $(a + b)^3$, $(a - b)^3$ és $(a + b)^4$? Miben tér el az ő módszere a napjainkban tanított eljárástól? Jobb-e az egyik, mint a másik, egyáltalán van-e érdemi különbség a kettő között? Jobban érthető-e a tanulók számára al-Karaji megfogalmazása, mint napjaink szemléletes felírása? Ezek a kérdések mind feltehetőek, ráadásul elképzelhető, hogy a kapott válaszok nem lesznek mind egyformák: az egyes tanulók eltérően gondolkodnak, vagyis lehetséges, hogy az egyiknek jobban érthető egy olyan megfogalmazás, ami a másiknak bonyolult. Azonban ezzel a megközelítéssel nő az esélye annak, hogy valaki, aki a hagyományos szemlélettel nem (vagy nehezen) értette meg az azonosságokat és szerepüket, a történeti példán keresztül átlátja a témát, és így a későbbiekben jobban tudja alkalmazni a korábban még nem értett formulákat.

A magasabbfokú polinomokból történő négyzetgyökvonás nem képezi a középiskolai tananyag részét, így ezek alkalmazását a szakköri tervből is mellőzöm. Ugyanakkor a fenti bekezdés ugyanúgy igaz erre a témakörre is, vagyis egy új szemlélet megismerése segítheti az egész téma átlátását, az okozati lánc megértését. Al-Karaji képlete lehetőséget ad a diákoknak, hogy a nem tökéletes formulából kitalálják a hibátlant, és az így megoldott probléma nem csak sikerélményt, hanem a tartós emlékezés lehetőségét is magában hordozza.

Al-Karaji indukciós bizonyítása az, amely talán a leginkább szükséges a mai oktatásban. A bizonyítási módszerek (direkt, indirekt, teljes indukció) megismerése során a tanulók minden eljárást készen kapnak, így a felfedezés öröme elkerüli őket. Talán a direkt bizonyítás az egyetlen kivétel, mivel az okozati összefüggések és a helyes következtetések gyakorlása során lényegében egy állítás bizonyítását próbálgatják a tanulók a gimnázium első éveiben. Az indirekt bizonyítást, mint módszert, már készen kapják, akárcsak a teljes indukciót. Az indirekt bizonyításhoz felkészülést nyújt az állítások tagadásának tanítása, de erre is csak kevés esetben kerül sor [1]. A teljes indukció pedig teljesen önálló életet él, első megjelenése az analízis témakörében, a gimnázium utolsó éveiben történik [1].

Al-Karaji, mint az indukciós bizonyítás kifejlesztője olyan módszert adott, ami először jutna eszébe valakinek, aki hasonló bizonyítással kísérletezne. (Ez az eljárás fentebb már kifejtésre került.) A módszerrel befogadhatóbbá válik a diákok számára a teljes indukció, ehhez pedig a következő tanmenet nyújtana segítséget:

1.) Először al-Karaji indukciójával bizonyítsunk egyszerű állításokat. Próbáljuk ki, működik-e az $n = 1$ esetre, majd az eredményt felhasználva vizsgáljuk meg az $n = 2$ esetet. Ha még mindig működik, folytassuk a vizsgálatot $n = 5$ -ig, és ha ekkor is igaz az állítás, akkor tekintsük bizonyítottnak.

2.) Ezután mutassunk a diákoknak olyan állításokat és formulákat, ahol nem elég $n = 5$ -ig vizsgáldni. Irányítsuk úgy a munkát, hogy a tanulók maguk vegyék észre a bizonyítás hiányosságát, vagyis az általános öröklődés hiányát. Így saját élményt szereznek ezzel a nem szokványos bizonyítási módszerrel.

3.) Végül ismertessük a szabályos teljes indukciót, és csináljunk / csináltassunk kellő számú példát. Ugyancsak fontos, hogy ismertessünk olyan feladatokat, ahol a teljes indukció is látszólag hamis eredményre vezet.

A fenti három fázis lehetővé teszi, hogy a tanulók alaposabban elsajátítsák az indukciós bizonyítást és saját maguk is tapasztalják a módszer előnyeit és hátrányait. Ehhez al-Karaji gyakorlati példái, tételei és bizonyításai is alkalmasak, sőt, hasznosak:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i(i+1) \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$$

A bizonyítás hasonlított a saját indukcióihoz, és ugyanígy látta be a következő egyenlőséget:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3.$$

Első lépésként belátta, hogy $(1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9)^2 + 10^3$. Ezután a módszert örököltette, hogy $(1 + 2 + 3 + \dots + 9)^2 + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 8)^2 + 9^3 + 10^3$, egészen addig, amíg megkapta a fenti egyenlet jobb oldalát.

Ellenpéldát is találunk, ahol nem elég $n = 1$ -től $n = 5$ -ig ellenőrizni az eredményeket. Erre remek példa a XVIII. század két közismert prímszámképlete. (Ekkor már létezett a tökéletes teljes indukció, ám mint példák, alkalmasak az al-Karaji-féle eljárás vizsgálatára.) Az előbbi példa Legendre, utóbbi Euler nevéhez fűződik.

Legendre képlete: az $x^2 + x + 17$ formula prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $0 \leq x \leq 15$.

De $x = 16$ esetén $17 \mid 16^2 + 16 + 17 = 289 = 17^2$, vagyis a formula tovább nem működik.

Euler képlete: az $x^2 - x + 41$ formula prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $0 \leq x \leq 40$.

De $x = 41$ esetén $41 \mid 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, vagyis a formula tovább nem működik.

Tekintsük a következő két (téves) állítást: az $x^2 + x + 17$ formula prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén és az $x^2 - x + 41$ formula szintén prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén. Keressük a bizonyítást indukcióval. Al-Karaji módszerét használva a fenti példákra a következőt tapasztalnánk:

Az $x = 1$ esetre a Legendre-polinom $1^2 + 1 + 17 = 19$, ami prím.

Hasonlóan $x = 1$ -re az Euler-formula $1^2 - 1 + 17 = 17$, ami szintén prím.

Tovább $x = 2$ -re Legendre képlete $2^2 + 2 + 17 = 23$ és Euler képlete $2^2 - 2 + 41 = 43$, ezek is mindketten prímek.

Még tovább $x = 5$ -ig persze hasonlóan működik a képlet, ezzel az állítást bizonyítottanak látnánk, al-Karaji módszerében pedig hibát találnánk. Azonban al-Karaji bizonyításában is volt egy fontos kritérium, amit a fenti próbálkozásnál figyelmen kívül hagytunk: az $x = 2$ esetre történő bizonyításkor fel kellett volna használni az $x = 1$ -re kapott eredményt, nem pedig önálló vizsgálatot végrehajtani $x = 2$ -re. Tehát az al-Karaji módszer ebben a formában nem hibás, csak nem alkalmazható ilyen esetekre.

Ez az észrevétel nagyon lényeges, és hasonlít a közismert „minden ló egyszínű” állítás bizonyításának problémájához. Ekkor ugye az állítás $x = 1$ -re nyilvánvaló, hiszen egy ló önmagában csakis egyszínű lehet. Alkalmazva a teljes indukcióhoz szükséges indukciós feltevést, feltesszük, hogy $x = n$ -re is igaz, vagyis mind az n darab ló egyszínű. Az örököltés

során az $n + 1$ ló közül akárhogyan választunk n darab lovat, a kiválasztott lovak az indukciós feltétel miatt egyszínűek lesznek. Tehát mind az $n + 1$ ló is egyszínű lesz, ezzel az állítást bizonyítottuk.

A probléma a lovak esetében is a következő: $n = 2$ -re csak annyit állíthatnánk, hogy a két ló külön-külön, mint egyelemű halmazok, önmagukkal azonos színűek, és nem feltételezhetünk kapcsolatot a két ló között. Ez a probléma alkalmas a teljes indukciós témakör végére, amikor a tanulók már kellő jártasságot szereztek az indukciós bizonyításokban. Az állításban és a bizonyításban még a tökéletes teljes indukció ismeretében sem találják meg könnyen a hibát.

Ezen a ponton ki lehet térni a matematikatörténet első tökéletes teljes indukciós bizonyítására, amit Francesco Maurolico írt 1575-ben (több mint ötszáz évvel al-Karaji után). A bizonyítást felhasználhatjuk a tanítás során, de ki is adhatjuk a tanulóknak feladatként. Az állítás az első n darab páratlan szám összegéről szól:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Az állítás $n = 1$ -re igaz. Az indukciós feltevésben tegyük fel, hogy $n = k$ -ra az állítás szintén igaz, vagyis $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Örökítsük az állítást $n = k + 1$ -re:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$, tehát az állítást beláttuk.

A példán keresztül a diákok láthatják, hogy az általános tagra történő örökítéshez szükség van az indukciós feltételre, és azt alkalmazni kell a soron következő tagra. A rákövetkezés értelmezése is kulcsfontosságú, ennek részletezésekor ismertethetjük (vagy visszautalhatunk) a természetes számok Peano-féle axiómáira. Az indukció korlátaival a következő fejezet foglalkozik.

A teljes indukciós bizonyítás nehézségei és a problémák lehetséges megoldása

A lovas és a prímképletes részben láttuk, hogy néhány esetben az indukció feltételeinek nem teljesülése olyan akadályt jelenthet a bizonyításban, amit a diák nem feltétlenül vesz észre. De csak olyan helyzet okozhat gondot, ahol megszakad az állítás igazsága elég nagy n esetén?

Fordított esetre is akad példa, modern feladatok közül: bizonyítsuk, hogy $n^2 < 2^n \forall n \in \mathbb{N}$ -re. Az állítás $n = 1$ -re igaz: $1^2 < 2^1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra is teljesül, hogy $k^2 < 2^k$, és örökössük az állítást $n = k+1$ -re:

$$(k+1)^2 < 2^{k+1} = 2 * 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

ind. felt. miatt ↯

$$k^2 > 2k + 1 \quad (\text{ez teljesül } k \geq 3 \text{ esetén})$$

$$k^2 = k * k \geq 3k = 2k + k > 2k + 1$$

Ezzel az állítást bizonyítottunk tekinthetnénk, $n \geq 3$ esetén. Csakhogy az állítás $n = 3$ -ra nem teljesül ($3^2 = 9 > 8 = 2^3$), de még $n = 4$ -re sem ($4^2 = 16 = 2^4$). Az eredeti állítás feltétele kellett volna legyen, hogy $n \geq 5$ -re keressük a bizonyítást, vagy pedig keressük meg azon n -t, amely felett az állítás $\forall n$ -re teljesül. Tehát nem elég $n = 1$ -re ellenőrizni, majd $n = k$ -ra indukciós feltevést megfogalmazni. Ez is jó tanulói példa lehet.

Ez és a történelmi példák pedig egy érdekes kérdés vizsgálatához vezetnek: a teljes indukciós bizonyítások szükségének átgondolásához. Vajon milyen esetekben indokolt a teljes indukció használata? Érdemes-e előnyben részesíteni ezt a bizonyítási formát más bizonyításokkal szemben? Milyen hátránya van a teljes indukciós bizonyításnak?

Maga a teljes indukció elméletileg lehetőséget ad az állítások igazolására anélkül, hogy a következtetéseket egészen az alapvető axiómákig vissza kelljen vezetni. Ennek van előnye, mivel a bizonyítás így lényegesen egyszerűbb és rövidebb, de az analízist tanító tanárok többsége úgy véli, ez a módszer gyakran elfedi a bizonyítandó állítás lényegét. A prímszámképletek és a „minden ló egyszínű” állítás igazolásával is éppen az a probléma, hogy az indukció alkalmazása során a tanuló elfelejti, hogy nincs logikai kapcsolat az egyes esetek között, illetve nem teljesülnek lényeges feltételek. A „gépies” feladatmegoldással pedig a matematikatanítási alapelvek ismét sérülnek [1][2]. Nem mellékes megemlíteni, hogy amíg a 2007-es NAT a tanmenetbe foglalja a teljes indukciót [1], addig a 2012-es verzió már eltekint ettől, és semmilyen formában nem tesz említést erről a módszerről [2]. Ugyanakkor az alkalmazhatóság kérdése kiváló szakköri (esetleg tanórai) téma, mivel a gondolkodásmódot és a problémamegoldást, hibakeresést jól lehet vele fejleszteni. A miért, miért ne, hogyan (milyen feltételekkel) kérdésektől a példák vizsgálatáig számos irányból elemezhető a téma.

A fenti kérdéseket irányított formában érdemes a diákok elé tárni az indukciós téma végén. Lehet ez egy frontálisan vezetett kiértékelés, de szorgalmi házi feladat, gyűjtőmunka is: a diákok kereshetnek érdekes példákat, feladatokat, esetleg újságcikkeket, amelyek a teljes indukcióval foglalkoznak. Foglaljanak állást a témában, csoportos foglalkozásra szakmai vita is kiadható. Ezzel érinthető a többi bizonyítási módszer is, a tapasztalatok pedig számos területen fejlesztik a tanulók képességeit.

Azzal a kérdéssel, hogy a teljes indukció hogyan sérti az állítás lényegének megértését, egy volt tanárszakos hallgató, Matusik Edina 2011-ben írt szakdolgozatában [31] részletesen foglalkozik. A középiskolai oktatásból közismert összegképletek különböző bizonyításait és szemléltetéseit vizsgálta, illetve a gyakorlatban ki is próbálta diákokon. Egyik érdekes megállapítása, hogy a mai diákok gyakran nem is vágynak az állítás megértésére, inkább igénylik a „készen kapott módszert”, amivel számolhatnak, és eredményt kapnak. Az alábbi példa jól mutatja, lehet szemléletesebb bizonyítást találni egyes (speciális) esetekben:

Legyen a bizonyítandó állítás az első n darab pozitív egész szám összege:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) / 2$$

A bizonyítás teljes indukcióval: $n = 1$ -re az állítás igaz: $S_1 = 1(1 + 1) / 2 = 1$. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra is igaz az állítás: $S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k + 1) / 2$. Örökítsük az állítást $n = k + 1$ -re:

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2) / 2$$

Alkalmazva az indukciós feltevést az első k darab tagra, majd közös nevezőre hozva:

$$S_{k+1} = [k(k + 1) / 2] + (k + 1) = [k(k + 1) + 2(k + 2)] / 2$$

A számlálóból $k + 1$ -et kiemelve megkapjuk a bizonyítandó egyenlet jobb oldalát, vagyis az állítást beláttuk:

$$S_{k+1} = [k(k + 1) + 2(k + 2)] / 2 = (k + 1)(k + 2) / 2$$

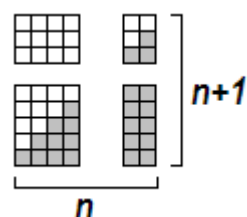
Alkalmas algebrai bizonyítások ugyanerre az állításra: írjuk le a számokat 1-től n -ig, majd írjuk rendre alájuk ugyanezt a sorozatot szigorúan monoton csökkenőben, n -től 1-ig:

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \\ n + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

Látható, hogy az egymás alá kerülő párok összege mindig $n + 1$. Mindkét sorozat n -hosszú, tehát a két sorozat együttes összege $n(n + 1)$, mivel n darab $n + 1$ összegű pár képeztünk. Viszont ekkor minkét sorozatot összegezzük, és az állítás csak az egyik sorozat összegéről szól, tehát a végeredményt meg kell felezzük: $n(n + 1) / 2$.

Másképpen gondolkodva kívülről befelé haladva párosíthatjuk a sorozat tagjait. Ekkor hasonlóan $n + 1$ összegű párokat kapunk. Az esetek szétválasztásával vizsgálnunk kell, hogy páros vagy páratlan hosszú a sor, de mindkét esetben jól látható a megoldás: páros hosszú sor esetén $n / 2$ darab $n + 1$ -es pár lesz, azaz $(n / 2)(n + 1) = n(n + 1) / 2$. Páratlan hosszú sor esetén $(n - 1) / 2$ darab $n + 1$ -es pár lesz, a középső tag pedig $(n + 1) / 2$ lesz, azaz az összeg $[(n - 1)(n + 1)] / 2 + (n + 1) / 2 = n(n + 1) / 2$ lesz. (Itt már szükség van kiemelésre, szorzattá alakításra és összevonásra is.)

A szemléletes bizonyítás egy geometriai módszeren alapul, ami hasonló az első algebrai bizonyításhoz. Legyen minden oszlop olyan magas, amennyi a sorozat aktuális tagja, majd fordítsuk rá erre a lépcsőre ugyanezt a növekvő sort:



Látható, hogy a geometriai bizonyítás lényegében egy téglalap területének számításán alapul. Ekkor az oszlopok száma nyilván n , mivel ennyi a sorozat tagjainak száma (1-től n -ig a pozitív számok darabszáma). A színezett oszlopok magassága is 1-től n -ig változik, mivel így felel meg az oszlopok magassága a sorozat tagjainak. Összeforgatás után (mintha a számokat írnánk egymás alá) minden oszlop magassága $n + 1$ lesz. A téglalap területe így $n(n + 1)$, de persze ekkor ismét két sorozatot számoltunk össze, tehát a megoldás $n(n + 1) / 2$ lesz.

Ilyen esetekben, amikor az állítás bizonyítására több módszer is használható, a teljes indukció talán a legkevésbé segíti a problémamegoldó gondolkodást. Az indukció mechanikus használata közben a tanulók aligha veszik észre a praktikus algebrai és geometriai ötleteket.

Visszatérve az indukció tanításához, úgy tűnik, a matematikatörténet nyújtja a legjobb segítséget, mivel éppen így érhető el az a gondolkodásmód, amelyet a modern indukció önmagában elfed. A lehetséges óravázlat összefoglalja a korábban tárgyalt problémákat és lehetőségeket. Ez a tanmenet az alkalmazó tanár feladataival, kutatásaival, esetleg állásfoglalásával bővíthető.

Egy lehetséges óravázlat, tanmenet

A teljes indukció tanítása az arab matematika történeti eredményeit felhasználva
Előismeretek: A tanulók jártasságot szereztek az állítások megfogalmazásában, igazságok eldöntésében, egyszerű direkt, majd indirekt bizonyításokban. Ezzel együtt már kellően jártasak a sorozatok témakörében, a véges hosszúságú összegek egyszerű számításában, ismerik és alkalmazni tudják a megfelelő azonosságokat, továbbá a számelmélet oszthatósági témakörével is megbarátkoztak már.
A tanóra menete: Tanári előadás, esetleg előre kiadott gyűjtőmunka al-Karaji életéből, munkásságából. Mutassuk meg al-Karaji Pascal-háromszögét, esetleg idézzünk könyvéből. Fontos, hogy a diákok beleképzeljék magukat az ezer évvel ezelőtti Irakba. Hogyan jelent meg al-Karaji könyvében az $(a + b)^3$ azonosság? Vajon miért úgy fogalmazott, ahogy? Milyen különbségek láthatók al-Karaji Pascal-háromszöge és a nálunk használt között? Ismertessük mai jelöléssel al-Karaji állítását: $x^n x^m = x^{n+m}$ ahol $n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. Miért így szerepel az azonosság, és miért nem így: $x^n x^m = x^{n+m}$ ahol $n, m \in \mathbb{Z}$? Hogyan lehetne feloldani az $n = 0$ és $m = 0$ eset okozta problémát? Miért nem vette ezt észre al-Karaji? Mutassuk be al-Karaji indukciós bizonyítását. Használjuk al-Karaji saját példáit. $(1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$. Próbáljuk bizonyítani. $\Sigma i^3 = (\Sigma i)^2$. Próbáljuk bizonyítani, továbbra is al-Karaji módszerével. Ezután adjunk olyan példát, ahol nem elég $n = 5$-ig vizsgálni. Az $x^2 + x + 17$ formula prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsuk. Hol a hiba? Az $x^2 - x + 41$ formula szintén prímet ad $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsuk. Hol a hiba? Mutassuk meg Francesco Maurolico első tökéletes teljes indukciós bizonyítását. Mi a különbség al-Karaji és Maurolico bizonyítása között? Miért van szükség indukciós feltevésre és az általános tagra történő bizonyításra? Gyakoroltassuk a teljes indukciót, minél több feladattal. Közben a feladatok megoldása után mindig elemezzük a bizonyítást. Helyes? Helytelen? Miért? Teljesülnek a feltételek? Használtuk az indukciós feltevést? Vegyünk elő olyan feladatot, ahol látszólag megbukik az immár tökéletes teljes indukció (pl. a lovas feladat). Hol a hiba a bizonyításban? Hogyan lehet kijavítani a hibát? Végül kezdeményezzünk beszélgetést a teljes indukció szükségességéről. Milyen esetekben érdemes használni a teljes indukciót? Mi az előnye és a hátránya ennek a módszernek? Mivel helyettesíthető a teljes indukció? Megéri más módszert használni? Miért maradt ki a 2012-es NAT elképzelései közül a teljes indukció? Egyetértesz?
Következmények: A diákok mélyebb ismeretet szereznek a teljes indukciós bizonyítással kapcsolatban. Saját tapasztalataik, megfigyeléseik maradandó emlékeztést tesznek lehetővé. Nő az igényük a hibakeresésre, saját munkájuk ellenőrzésére. Megismernek több, régi matematikust, idegen kultúrákat. Gyűlik az ismeretük egy olyan térségről, amelyet nem, vagy csak alig ismertek. Összekapcsolnak különböző matematikai témákat, rendeződnek fejükben a tanultak.

A tanítás során a feladatok a céloknak megfelelően választhatók, így igazodni lehet a különböző előképzettségű tanulókhoz és az esetleg szűkös időkerethez. A feladatok számát és a téma elmélyítését alapvetően meghatározza, hogy szakköri vagy tanórai keretek között dolgozzuk fel a témát. A tudománytörténeti elemek azonban nem hiányozhatnak a kellően széles látókör kialakításához, a gondolkodás és az emlékezés fejlődéséhez [2][4].

Összefoglalás

A dolgozatban igyekeztem áttekintést nyújtani a 800 és 1000 közötti arab nyelvű matematika-történeti eredményekre, és ennek elemzésével próbáltam megoldást keresni létező, diákoktól hallott problémákra. Arra a következtetésre jutottam, hogy a nevezett korszak közel-keleti matematikája alkalmas több esetben a nehézségek feloldására, mivel az új gondolkodásmód megismerése szélesíti a látókörüket, fejleszti a problémamegoldó képességüket és nő az igényük a hibakereső feladatmegoldásra. Nem utolsó sorban igazi szellemi csemege ez egy olyan korszakból és térségből, amit a jelenlegi diákok sajnos egyáltalán nem ismernek meg.

A fenti tanmenetet, illetve a dolgozatban közölt további lehetőségeket szeretném kipróbálni a jövőben, így a tapasztalatok ismeretében folytathatom, csiszolhatom az ötletem. Tervezem a kutatás folytatását is, ha módomban áll, külföldön is, és szeretnék arab szövegeket fordítani, amit utána fel lehet használni az oktatásban (pl. konkrét feladatok), de ugyanakkor a magyar nyelven írt tudománytörténet is bővíthet ezáltal.

Sajnos a jelenleg itthon elérhető források száma alacsony, de azért létezik alkalmas szakirodalom, erre vonatkozó jegyzéket igyekeztem alább közölni. Nehézség, hogy a legtöbb elérhető könyv is csak összegzi a matematikatörténeti eredményeket, így abból oktatható anyagot készíteni nem könnyű. Ugyanakkor az alábbi jegyzékben a legtöbb összefoglalás további források tucatjaira támaszkodik, így ezen a vonalon már el lehet kezdeni a kutatást. Illetve ezért is írtam ezt a dolgozatot, hogy kezdő lépése legyen egy alkalmazható, közel-keleti matematikai eredményeken alapuló oktatási segédanyagnak.

المخرجة مرات لكون الستة واسطة ولان المربع في المربع مائة مال
فان نقلت الواحد من السطر الرابع الى السطر خامس ثم ردت الواحد
على الاربعة التي تحته ولا اربعة على ١٢ التي يحها والستة على الاربعة التي
يحها والاربعة على الواحد الذي يحها وكتب ما ارفع من ذلك تحت
الواحد المسقول على الولى المذكور وان بعد ذلك الواحد الباقي اسلف
من ذلك سطر خامس سطر خامس اعداده واحد و٢٠ وعش وعش و٢٠
وواحد فذا اعطاك ان كل عدد ينقسم قسمين فان مال لعبد مائة مالان كعب
كل واحد من قسمه لكون الطرفين واحد واحد والمضروب كل واحد من
العدد في مال الى اخر خمس مرات لكون الخمسة مائة للطرفين المعد من
من الجانبين ومضروب مربع كل واحد منها في مائة المخرجة مرات لكون الخمس
مائة للمعتمدين كل واحد من هذا الجمل من مائة كعب لان الجذور في مال مال

[illegible]

Al-Karaji binomiális háromszöge [86]

Forrásjegyzék

- [1] Nemzeti alaptanterv 2007
http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf
- [2] Nemzeti alaptanterv 2012
http://dokumentumtar.ofi.hu/index_NAT_matematika.html
- [3] Munkácsy Katalin: A matematikatörténet szerepe a matematika tanításában
http://epa.oszk.hu/00000/00011/00060/pdf/iskolakultura_EPA00011_2002_05_089-094.pdf
- [4] Vásárhelyi Éva: A matematikatanítás fundamentális elvei, a matematikatörténet szerepe a reprezentációs módok szerint szervezett matematikatanításban
- [5] Tarcsay Tamás: Matematikatörténet tanítása a középiskolában I.
<http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/oktatas/matematikatortenet-tanitasa-a-kozepiskolaban-i>
- [6] Gosztonyi Katalin: A matematikatörténet felhasználásának lehetőségei a matematika-oktatásban (szakdolgozat), ELTE-TTK, 2009
- [7] ELTE TTK Kari Könyvtár – Matematikai Szakgyűjtemény
http://ttklib.elte.hu/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=13&Itemid=144
- [8] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára – Keleti Gyűjtemény
http://mtak.hu/index.php?name=v_3_2
- [9] JSTOR.org
<http://www.jstor.org/>
- [10] Hamdard University, Bait al Hikma Library, Pakistan
<http://www.hamdardfoundation.org/manuscripts.php>
- [11] The University of Jordan
<http://library.ju.edu.jo/Manuscript.aspx>
- [12] Damascus University, Library
<http://www.scopus.com/home.url>
- [13] Dialógusház Oktató és Szolgáltató Kft. / Arab nyelvtanfolyam
<http://www.dialogus.hu/index.nof?o=0&k3=51&nyelvid=1&k1=5&k2=16>
- [14] J. L. Berggren: Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer, 1986
- [15] Viktor J. Katz: A History of Mathematics – An Introduction, 1998
- [16] Viktor J. Katz: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam, Princeton University Press, 2007
- [17] John Fauvel, Jan van Maanen: History in Mathematics Education, Springer, 2000
- [18] Brian Bishop: A History of the Arabic Language
<http://linguistics.byu.edu/classes/ling450ch/reports/arabic.html>
- [19] Youssef M. Choueiri: Arab Nationalism, Wiley, 2000
- [20] Rashid Kalidi: The Origins of Arab Nationalism, Columbia University Press, 1993
- [21] Németh Pál: Az Iszlám, Gondolat Kiadó, 2010
- [22] Richard Mankiewicz: A matematika története, HVG Kiadó, 2003
- [23] Tony Crilly: Nagy kérdések – matematika, Geographika Kiadó, 2011
- [24] The MacTutor History of Mathematics Archive / Islamic mathematics
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Arabs.html>
- [25] The Story of Mathematics
<http://www.storyofmathematics.com/>
- [26] Margo Kirtikar: Once Upon a Time in Baghdad, Xlibris Corp., 2011
- [27] Britannica Encyclopedia / History of Arabia
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/31568/history-of-Arabia>
- [28] Oystein Ore: Bevezetés a számelmélet világába, Gondolat Kiadó, 1977
- [29] Pálfalvi Józsefné: Barátkozzunk a számokkal, Tankönyvkiadó, 1990

- [30] Great Internet Mersenne Prime Search (GIMP)
<http://www.mersenne.org/>
- [31] Matusik Edina: Összegképletek szemléletes bizonyítása (szakdolgozat), ELTE, 2011
http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mattan/2011/matusik_edina.pdf
- [32] személyes beszélgetés arab országok tanáraival
- [33] középiskolások oktatása során szerzett személyes tapasztalat
- [34] személyes beszélgetés egy Magyarországon tanuló afgán diákkal, otthoni oktatásáról
- [35] Kép forrása: Wikipédia
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/hu/b/ba/Iszl%C3%A1m_terjeszked%C3%A9s_833-ig.png
- [36] Jobb oldali kép forrása: The MacTutor History of Mathematics Archive / Al-Khwarizmi
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Bookpages/Al'Khwarizmi4b.gif>
- [37] Kép forrása: Entretien avec Ahmed Djebbar
<http://www.dma.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm>
- [38] Special Education – Óvodás feladatlapok
<http://spec-edu.qwqw.eu/?modul=oldal&tartalom=1016322>
- [39] Kormöci Katalin: Hová bújt a matematika?
<http://www.kormocikatalin.hu/?menu=47>
- [40] Apáczai Kiadó / Tanmenetek – Alsó tagozat
<http://www.apaczai.hu/static/tanmenetek-also-tagozat>
- [41] Wikipédia / Kelvin
<http://hu.wikipedia.org/wiki/Kelvin>
- [42] saját átírás, de több tankönyv is így közli: www.olvas.hu/pub/item_attach/294/120.pdf
- [43] Ringler András: Gondolkozzunk „görögül”!
http://www.staff.u-szeged.hu/~ringlera/docs/05_Masodfoku_egyenletek_geometriai_megoldasa.htm
- [44] Bölcsföldi József: Barátságos láncok és hurkok a természetes számok halmazában
<http://www.komal.hu/cikkek/bolcsfoldi/lancok.h.shtml>
- [45] Sain Márton: Nincs királyi út – Matematikatörténet, Gondolat Kiadó, 1986
- [46] Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1987
- [47] Wikipédia / Barátságos számpárok
http://hu.wikipedia.org/wiki/Bar%C3%A1ts%C3%A1gos_sz%C3%A1mok